Анализ разностного центрального оператора численного дифференцирования

Данные:

x	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}
f	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}

$$h = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$$

Строим ИП:

$$P_2(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} f_{i-1} +$$

$$+ \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} f_i +$$

$$+ \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} f_{i+1}$$

Будем считать, что $f(x) \sim P_2(x)$

$$f'(x) \sim P_2'(x).$$

Продифференцируем ИП:

$$P_2'(x) = \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{2h^2} f_{i-1} -$$

$$- \frac{2x - x_{i-1} - x_{i+1}}{h^2} f_i +$$

$$+ \frac{2x - x_i - x_{i-1}}{2h^2} f_{i+1} =$$

Рассмотрим $P_2'(x_i)$:

$$P_2'(x_i) = \frac{2x_i - x_i - x_{i+1}}{2h^2} f_{i-1} -$$

$$- \frac{2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}}{h^2} f_i +$$

$$+ \frac{2x_i - x_i - x_{i-1}}{2h^2} f_{i+1} =$$

$$= \frac{2x_i - x_i - x_i - h}{2h^2} f_{i-1} - \overbrace{\frac{2x_i - x_i + h - h - x_i}{h^2}}^{=0} f_i +$$

$$+ \frac{2x_i - x_i - x_i + h}{2h^2} f_{i+1} = \frac{h(f_{i+1} - f_{i-1})}{2h^2} =$$

$$= \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = [f_{\mathring{x}}]_i \sim f'(x_i)$$

Проведём анализ погрешности:

$$\psi_1^1(x_i) = \psi = f'(x_i) - [f_{\mathring{x}}]_i =$$

$$= f'(x_i) - \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1}) =$$

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) +$$

$$+ \frac{1}{2} f''(x_i)(x - x_i)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_i)(x - x_i)^3 +$$

$$+ \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi)(x - x_i)^4.$$

$x \le \xi \le x_i$, если $x < x_i$.

$x_i \le \xi \le x$, если $x > x_i$.

$$= f'(x_i) - \frac{1}{24}\Big[f_i + f'(x_i)h + \frac{1}{2} f''(x_i)h^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} f'''(x_i) h^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi_1) h^4 -$$

$$- f_i + f'(x_i) h - \frac{1}{2} f''(x_i) h^2 + \frac{1}{6} f'''(x_i) h^3 -$$

$$- \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi_2) h^4 \Big] = -\frac{1}{6} f'''(x_i) h^2 + \frac{1}{48}\left(f^{(4)}(\xi_2) - \right.$$

$$\left. - f^{(4)}(\xi_1) \right) h^3.$$

$$\psi = -\frac{1}{6} f'''(x_i) h^2 + \frac{1}{48}\left(f^{(4)}(\xi_2) - f^{(4)}(\xi_1) \right) h^3.$$

$$\xi_1 \in [x_i, x_{i+1}], \ \xi_2 \in [x_{i-1}, x_i]$$

Определим порядок погрешности.

Будем считать, что x_i – фиксирована, x_{i-1}, x_{i+1} – плавают.

Будем считать, что $f(x)$ достаточно гладкая в окрестность x_i.

Для того, чтобы определить порядок погрешности нужно ψ представить в виде $\psi = Mh^k + o(h^k)$, $k > 0$, $M \neq 0$, M не зависит от h, где k – порядок погр.

Сформулируем условия, при которых это возможно:

1) $\exists \tilde{h} > 0 \mid \forall x \in [x_i - \tilde{h}; x_i + \tilde{h}] \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \in C_3[x_i - \tilde{h}, x_i + \tilde{h}]$.

2) $\exists L \mid \forall x \in [x_i - \tilde{h}, x_i + \tilde{h}] \Rightarrow |f''''(x)| \leq L$.

3) $f'''(x_i) \neq 0$.

При этих условиях при устремлении $h \to 0$, $h \in (0, \tilde{h}]$ ψ имеет порядок 2.

$M = -\frac{1}{6} f'''(x_i)$, M не зависит от h.

$$O(h^2) = \frac{h^3}{48}\left(f^{(4)}(\xi_2) - f^{(4)}(\xi_1)\right)$$

Таким образом, порядок формулы $n = 2$, точность формулы $l = 2$.

Оценим погрешность:

$$\psi = f'(x_i) - [f_x]_i = f'(x_i) - \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1}) =$$

$$= f'(x_i) - \frac{1}{2h}\Big(f_i + f'(x_i)h + \frac{1}{2}f''(x_i)h^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}f'''(\xi_1)h^3 - f_i + f'(x_i)h - \frac{1}{2}f''(x_i)h^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}f'''(\xi_2)h^3\Big) = -\frac{h^2}{12}\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right)$$

$$\xi_1 \in [x_{i-1}, x_i], \quad \xi_2 \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$|\psi| = \frac{h^2}{12}\left|f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right| \le$$

$$\le \frac{h^2}{12}\left(|f'''(\xi_1)| + |f'''(\xi_2)|\right) \le$$

$$\le \frac{h^2}{12}\Big(\max_{x \in [\cancel{x_{i-1}}, x_i]}|f'''(x)| + \max_{x \in [x_i, \cancel{x_{i+1}}]}|f'''(x)|\Big) =$$

$x_i - \tilde{h}$ $\quad$ $x_i + \tilde{h}$

$$= \hat{M}h^2 \quad \forall h \in (0, \tilde{h}].$$

$$|\psi| \le \hat{M}h^2, \quad \hat{M} = \frac{1}{12}\Big(\max_{x \in [x_i - \tilde{h}, x_i]}|f'''(x)| +$$

$$+ \max_{x \in [x_i, x_i + \tilde{h}]}|f'''(x)|\Big).$$

Вычислительная погрешность.

$$ВП = [f_{\overset{\circ}{x}}]_i - [\tilde{f}_{\overset{\circ}{x}}]_i$$

Будем считать, что арифметические операции выполняются точно, точки x_{i-1}, x_i, x_{i+1} заданы точно, но значения f_{i-1}, f_i, f_{i+1} вычислены с погрешностью.

$\exists\ \tilde{f}_{i-1}, \tilde{f}_i, \tilde{f}_{i+1}$ – приближённые значения функции.

$$\delta_{i-1} = f_{i-1} - \tilde{f}_{i-1}$$
$$\delta_i = f_i - \tilde{f}_i$$
$$\delta_{i+1} = f_{i+1} - \tilde{f}_{i+1}$$

Будем считать, что $|\delta_{i-1}| \le \delta$, $|\delta_{i+1}| \le \delta$.

$$ВП = \frac{1}{2h}\left(f_{i+1} - f_{i-1} - \tilde{f}_{i+1} + \tilde{f}_{i-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2h}\left(\delta_{i+1} - \delta_{i-1}\right)$$

$$|ВП| \le \frac{1}{2h}\left(|\delta_{i+1}| + |\delta_{i-1}|\right) \le \frac{\delta}{h}$$

Общая погрешность.

$$ОП = f'(x_i) - [\tilde{f}_{\overset{\circ}{x}}]_i = ВП + \psi =$$

$$= \frac{1}{2h}\left(\delta_{i+1} - \delta_{i-1}\right) - \frac{1}{6} f'''(x_i) h^2 + \frac{1}{48}\left(f^{(4)}(\xi_2) - f^{(4)}(\xi_1)\right) h^3$$

$$\xi_1 \in [x_{i-1}, x_i],\ \xi_2 \in [x_i, x_{i+1}].$$

Если $h \to 0$, то $ВП \to \infty$, $\psi \to 0 \Rightarrow ОП \to \infty$

Шаг h не должен быть слишком большим или слишком маленьким.

Оценка ОП.

$$|ОП| \le |ВП| + |\psi| \le \frac{\delta}{h} + \hat{M} h^2, \quad h \in (0, \hat{h}].$$

$$\hat{M} = \frac{1}{12}\left(\max_{x \in [x_i - \hat{h}, x_i]} |f'''(x)| + \max_{x \in [x_i, x_i + \hat{h}]} |f^{IV}(x)| \right)$$