Лабораторная работа № 3

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Постановка задачи №1. С целью исследования формул численного интегрирования вычислите определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $x\in[a, b]$, а также для «осциллирующих» функций $f(x) + cos10x$ и $f(x) + cos100x$ на том же отрезке $x\in[a, b]$ на равномерной сетке. Конкретный вид функций приведен в приложении.

В своей работе используйте формулы: прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Вывод результатов. Программа должна строить график интегрируемой функции, а полученное значение интеграла должно быть выведено на экран. Также должно быть выведено истинное значение интеграла, и погрешность интегрирования.

Анализ порядка погрешности. Исследуйте порядок погрешности формул численного интегрирования. С этой целью для каждой из указанных функций вычислите приближенное значение интеграла I при разных значениях n. Закономерность выбора n должна быть такой, чтобы оценка порядка была достаточно убедительной. Результаты расчетов запишите в таблицу 1 и на ее основе определите порядок погрешности формулы.

Таблица 1

n	$\left\| \int_a^b f(x)dx - I \right\|$
n_1 n_2. n_3. n_4.	
Порядок	

Постановка задачи №2. Реализовать и исследовать **метод адаптивной квадратуры**, который заключается в следующем.

Пусть нужно вычислить $I(a,b,\varepsilon)=\int_a^b f(t)dt$, где ε – заданная точность, и применяется одна из квадратурных формул $G(a,b)$ (прямоугольников, трапеций, Симпсона, …). Тогда следует:

1. Вычислить приближение на всем отрезке $G(a,b)$;
2. Вычислить приближения на половинах отрезков $G\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ и $G\left(\frac{a+b}{2},b\right)$;
3. Если $\left|G\left(a,\frac{a+b}{2}\right)+G\left(\frac{a+b}{2},b\right)-G(a,b)\right|<\varepsilon$ то $I(a,b,\varepsilon)=G(a,b)$

иначе $I(a,b,\varepsilon)=I\left(a,\frac{a+b}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right)+I\left(\frac{a+b}{2},b,\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

С целью исследования метода адаптивной квадратуры **нужно**:

1. построить график функции $g(x)$

$$g(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\sum_{i=1}^{14} \left(A_i \sin(2\pi i(\alpha - x)t) + B_i \cos(2\pi i(\alpha - x)t) \right) \right] dt,\ x \in [0,1], \qquad (*)$$

где значения $A_i, B_i, 1 \le i \le 14$, независимо и равномерно распределены в интервале $[-1,1]$, а параметра α − в интервале $[0,1]$. Интеграл (*) составлен таким образом, что в окрестности точки α подынтегральная функция будет пологой, а вне этой окрестности − осциллирующей, следовательно, трудоемкость вычисления интеграла методом адаптивной квадратуры будет зависеть от *x*.

2. Предусмотреть возможность последовательной генерации различных подынтегральных функций с целью последующего интегрирования. Фактически для этого нужно последовательно генерировать значения параметров $A_i, B_i, 1 \le i \le 14$, и α в соответствующих интервалах.

3. Построить график функции *T(x)*, отражающий зависимость трудоемкости вычисления значения функции от точки *x*. Время вычисления можно оценить как время вычисления значения, а также как число рекурсивных вызовов функции интегрирования.

Отчет должен включать в себя

1. Постановку задачи №1.
2. Краткие сведения по численному интегрированию (оценка погрешности).
3. точное значение интеграла.
4. Таблицу 1 для разных формул.
5. Постановку одной из решенных вами задач №2 (конкретные значения случайных параметров),
6. построенные графики функций *g(x)* и *T(x)* для нескольких различных значений ε,
7. ваши выводы и комментарии,
8. текст подпрограммы, реализующей метод адаптивной квадартуры.

Пункты 1 – 5 должны быть написаны от руки, 6 – 8 – можно приложить распечатки из вашей программы.

Приложение. Варианты заданий

№	a	b	$f(x)$
1	0	1	$\frac{1}{1+x^2}$
2	0	1	$\frac{1}{1+x}$
3	0	1	$\frac{x+1}{x}$
4	1	2	$\sin(x)\cos(2x)$
5	0	2	$\frac{x}{x+1}$
6	1	3	$\frac{1}{1+2x}$
7	1	2	$\frac{1+2x}{4x}$
8	1	$\pi/2$	$\frac{1}{x}+\sin(x)$
9	1	2	$\frac{1}{x}+x^2$
10	1	3	$\frac{1}{x^2}+\sin(2x)$
11	1	π	$\sin(2x)\cos(x)$
12	0	$\pi/4$	$x\cos x$
13	1	π	$\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}$
14	0	1	$x\cdot\sin(x)$