

Лабораторная работа №2. Первая краевая задача для стационарного уравнения теплопроводности

Выполнил(а): _____

Группа: _____ Вариант: _____

1. Постановки задач

Основная задача

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0, 1)$$

$$k(x) \geq c_1 > 0, q(x) \geq 0, u(0) = _, u(1) = _.$$

$$k(x) = _ \text{ при } x \in (0, _),$$

$$k(x) = _ \text{ при } x \in (_, 1),$$

$$q(x) = _ \text{ при } x \in (0, _),$$

$$q(x) = _ \text{ при } x \in (_, 1),$$

$$f(x) = _ \text{ при } x \in (0, _),$$

$$f(x) = _ \text{ при } x \in (_, 1).$$

Тестовая задача №1

$$\frac{d}{dx} \left(k^* \frac{du}{dx} \right) - q^* u(x) = -f^* \text{ при } x \in (0, 1)$$

$$k^* \geq c_1 > 0, q^* \geq 0, u(0) = _, u(1) = _,$$

$$k^*(x) = _ \text{ при } x \in (0, _),$$

$$k^*(x) = _ \text{ при } x \in (_, 1),$$

$$q^*(x) = _ \text{ при } x \in (0, _),$$

$$q^*(x) = _ \text{ при } x \in (_, 1),$$

$$f^*(x) = \underline{\hspace{10em}} \text{ при } x \in (\hspace{1.5em}, l).$$

Тестовая задача №2

$$u(x) =$$

$$\frac{d}{dx} (k^* \frac{du}{dx}) - q^* u(x) = -f^* \quad \text{npu } x \in (0, l)$$

$$k^* =$$

$$q^* =$$

$$u(0) = \quad, u(1) = \quad,$$

2. Точное решение тестовой задачи №1

Запишите точное решение тестовой задачи:

при $x \in (0, \quad)$

$$u(x) =$$

при $x \in (0, 1)$

$$u(x) =$$

2

3. Общий вид разностной схемы

4. Разностная схема тестовой задачи №1

Запишите разностную схему тестовой задачи Вашего варианта, в том числе сетку, формулы для расчета коэффициентов и отдельно формулы для коэффициентов в окрестности точки разрыва. Запишите, как Ваша программа вычисляет интегралы: 1) они вычислены аналитически и запрограммированы; 2) по формуле трапеций; 3) по формуле прямоугольников; 4) иначе (как) .

5. Разностная схема тестовой задачи №2

Запишите разностную схему тестовой задачи Вашего варианта, в том числе сетку, формулы для расчета коэффициентов и отдельно формулы для коэффициентов в окрестности точки разрыва. Запишите, как Ваша программа вычисляет интегралы: 1) они вычислены аналитически и запрограммированы; 2) по формуле трапеций; 3) по формуле прямоугольников; 4) иначе (как) .

6. Разностная схема основной задачи

Запишите разностную схему основной задачи Вашего варианта, в том числе сетку, формулы для расчета коэффициентов и отдельно формулы для коэффициентов в окрестности точки разрыва. Запишите, как Ваша программа вычисляет интегралы: 1) они вычислены аналитически и запрограммированы; 2) по формуле трапеций; 3) по формуле прямоугольников; 4) иначе (как) .

7. Численное решение тестовой задачи №1

Для решения тестовой задачи использована

сетка с числом разбиений по x $n = \langle \text{ } \rangle$;

требуемая точность решения тестовой задачи $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$;

тестовая задача решена с точностью $\varepsilon_I = \langle \text{ } \rangle$;

максимальное отклонение

точного и приближенного решений наблюдается в точке

$x = \langle \text{ } \rangle$;

Далее приведите таблицу и графики:

1)

№ узла	x_i	$u(x_i)$	$v(x_i)$	$u(x_i) - v(x_i)$
0				
...				
...				
...				
n				

2) точное решение $u(x)$ и численное решение $v(x)$ на одном графике;

3) разность точного и численного решения (график)

8 Численное решение основной задачи

Для решения основной задачи использована
сетка с числом разбиений по x $n = \langle \text{_____} \rangle$;
при пересчете задачи с половинным шагом
максимальная разность приближенных решений
составила $\varepsilon_2 = \langle \text{_____} \rangle$
и соответствует узлу $x = \langle \text{_____} \rangle$

Далее приведите таблицу и графики:

1)

№ узла	x_i	$v(x_i)$	$v_2(x_i)$	$v(x_i) - v_2(x_i)$
0				
...				
...				
...				
n				

2) численное решение $v(x)$ и численное решение с половинным шагом $v_2(x)$ на одном графике;

3) разность численных решений в общих узлах (график).

9. Проверка порядка сходимости

Выясните, какой порядок сходимости имеет разностная схема, реализованная в Вашей программе. Для этого проведите серию экспериментов на сетках 10, 100, 1000, 10000 или 53, 530, 5300, 53000, или 25, 250, 2500, 25000 и т.п. и заполните таблицы:

n	Тестовая задача №1 $\max u(x_i) - v(x_i) $
Порядок сходимости	

n	Основная задача $\max v(x_i) - v_2(x_i) $
Порядок сходимости	

**10. Анализ поведения численных решений
при постепенном сгущении сетки**

Выясните, как меняется погрешность решения тестовой и основной задач при сгущении сетки. Попробуйте широкий диапазон сеток, например, от 2 до 100 000. Выясните, начиная с какого n вычислительные погрешности «меняют» порядок сходимости:

n	Тестовая задача №1 $\max u(x_i) - v(x_i) $	Тестовая задача №2 $\max u(x_i) - v(x_i) $	Основная задача $\max v(x_i) - v_2(x_i) $
2			
4			
...			
1000			
...			
1 000 000			
Торможение сходимости			

Постройте от руки график зависимости погрешности от n для основной и тестовой задач:

11. Наблюдения и выводы

12. Код программы