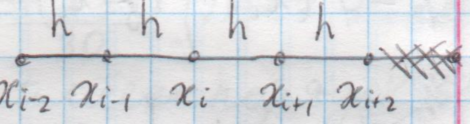
Разностный оператор для вычисления $f'(x_i)$ на пятиточечном шаблоне.

Данные:

x	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
f	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}



$f'(x_i) = ?$

Строим ИП:

$$P_4(x) = \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_{i-2}-x_{i-1})(x_{i-2}-x_i)(x_{i-2}-x_{i+1})(x_{i-2}-x_{i+2})} f_{i-2} +$$

$$+ \frac{(x-x_{i-2})(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_{i-1}-x_{i-2})(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})(x_{i-1}-x_{i+2})} f_{i-1} +$$

$$+ \frac{(x-x_{i-2})(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})} f_i +$$

$$+ \frac{(x-x_{i-2})(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_{i-2})(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})} f_{i+1} +$$

$$+ \frac{(x-x_{i-2})(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_{i-2})(x_{i+2}-x_{i-1})(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})} f_{i+2}$$

Считаем, что $f(x) \sim P_4(x)$

И как следствие $f'(x_i) \sim P_4'(x_i)$

Дифференцируем ИП и берём $P_4'(x)$ в точке x_i:

$$P_4'(x_i) = \frac{f_{i-2}}{24h^4} \cdot 2h^3 + \frac{f_{i-1}}{-6h^4} \cdot 4h^3 + \frac{f_i}{4h^4}\left(\cancel{+2h^3} + \cancel{4h^3} - \cancel{4h^3} - \cancel{2h^3}\right) +$$

$$+ \frac{f_{i+1}}{-6h^4}(-4h^3) + \frac{f_{i+2}}{24h^4}(-2h^3) = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h} = F_5(x_i)$$

стр. 1

Итог: считаем, что $f'(x_i) \sim F_5(x_i)$

<u>Анализ $\psi_4^1(x_i) = \psi$:</u>

$$\psi = f'(x_i) - F_5(x_i) = f'(x_i) - \frac{1}{12h}\left\{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}\right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \cancel{f'(x_i)} - \frac{1}{12h}\Big\{-\Big(\cancel{f(x_i)} + \cancel{2hf'(x_i)} + \cancel{\frac{4h^2}{2}f''(x_i)} + \frac{8h^3}{6}f'''(x_i) + \\
&+ \boxed{\frac{16h^4}{24}f^{IV}(x_i)} + \frac{32h^5}{5!}f^{(5)}(x_i) + \frac{64h^6}{6!}f^{(6)}(x_i) + \frac{128h^7}{7!}f^{(7)}(\xi_1)\Big) + 8\Big(\cancel{f(x_i)} + \\
&+ \cancel{hf'(x_i)} + \cancel{\frac{h^2}{2}f''(x_i)} + \cancel{\frac{h^3}{6}f'''(x_i)} + \boxed{\frac{h^4}{24}f^{IV}(x_i)} + \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x_i) + \frac{h^6}{6!}f^{(6)}(x_i) + \\
&+ \frac{h^7}{7!}f^{(7)}(\xi_2)\Big) - 8\Big(\cancel{f(x_i)} - \cancel{hf'(x_i)} + \cancel{\frac{h^2}{2}f''(x_i)} - \cancel{\frac{h^3}{6}f'''(x_i)} + \boxed{\frac{h^4}{24}f^{IV}(x_i)} - \\
&- \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x_i) + \frac{h^6}{6!}f^{(6)}(x_i) - \frac{h^7}{7!}f^{(7)}(\xi_3)\Big) + \Big(\cancel{f(x_i)} - \cancel{2hf'(x_i)} + \cancel{\frac{4h^2}{2}f''(x_i)} - \\
&- \frac{8h^3}{6}f'''(x_i) + \boxed{\frac{16h^4}{24}f^{IV}(x_i)} - \frac{32h^5}{5!}f^{(5)}(x_i) + \frac{64h^6}{6!}f^{(6)}(x_i) - \frac{128h^7}{7!}f^{(7)}(x_i)\Big)\Big\} = \\
&= -\frac{h^4}{30}f^{(5)}(x_i) + h^6\left(\frac{128}{12\cdot 7!}f^{(7)}(\xi_1) - \frac{8}{12\cdot 7!}f^{(7)}(\xi_2) - \frac{8}{12\cdot 7!}f^{(7)}(\xi_3) + \right. \\
&\left. + \frac{128}{12\cdot 7!}f^{(7)}(\xi_4)\right), \quad \xi_1 \in [x_i, x_{i+2}],\ \xi_2 \in [x_i, x_{i+1}],\ \xi_3 \in [x_{i-1}, x_i], \\
&\qquad \xi_4 \in [x_{i-2}, x_i].
\end{aligned}$$

$$\psi = -\frac{h^4}{30}f^{(5)}(x_i) + h^6\left(\frac{128}{12\cdot 7!}\left(f^{(7)}(\xi_1) + f^{(7)}(\xi_4)\right) - \frac{8}{12\cdot 7!}\left(f^{(7)}(\xi_2) + f^{(7)}(\xi_3)\right)\right),$$

$\xi_1 \in [x_i, x_{i+2}]$, $\xi_2 \in [x_i, x_{i+1}]$, $\xi_3 \in [x_{i-1}, x_i]$, $\xi_4 \in [x_{i-2}, x_i]$.

<u>Порядок погрешности ψ и ГЧП:</u>

Пусть для $h > 0$, фиксированного x_i,

$f \in C^6[x_i-\bar{h}, x_i+\bar{h}]$ и $f^{(7)}$ на $[x_i-\bar{h}, x_i+\bar{h}]$ ограничена.

Пусть $f^{(5)}(x_i) \neq 0$. Тогда при $h \to 0$, $0 < 2h < \bar{h}$

$\psi = Mh^4 + o(h^4)$, где $M = -\dfrac{f^{(5)}(x_i)}{30}$ ($M \neq 0$, M не зависит от h), то есть ψ имеет порядок 4.

$$o(h) = h^6\left(\frac{128}{12\cdot 7!}\left(f^{(7)}(\xi_1)+f^{(7)}(\xi_4)\right) - \frac{8}{12\cdot 7!}\left(f^{(7)}(\xi_2)+f^{(7)}(\xi_3)\right)\right),$$

ГЧП: $Mh^4 = -\dfrac{f^{(5)}(x_i)h^4}{30}$.

Порядок формулы: 4.

Точность формулы: 4.

<u>Оценка ψ</u>:

$$\psi = f'(x_i) - F_5(x_i) = f'(x_i) - \frac{1}{12h}\left(-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}\right) =$$

$$= \cancel{f'(x_i)} - \frac{1}{12h}\Big\{-\Big(\cancel{f(x_i)} + \cancel{2hf'(x_i)} + \cancel{\frac{4h^2}{2}f''(x_i)} + \frac{8h^3}{6}f'''(x_i) + \boxed{\frac{16h^4}{24}f^{IV}(x_i)} +$$

$$+ \frac{32h^5}{5!}f^{(5)}(\xi_1)\Big) + 8\Big(\cancel{f(x_i)} + \cancel{hf'(x_i)} + \cancel{\frac{h^2}{2}f''(x_i)} + \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + \boxed{\frac{h^4}{24}f^{IV}(x_i)} +$$

$$+ \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(\xi_2)\Big) - 8\Big(\cancel{f(x_i)} - \cancel{hf'(x_i)} + \cancel{\frac{h^2}{2}f''(x_i)} - \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + \boxed{\frac{h^4}{24}f^{IV}(x_i)} - \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(\xi_3)\Big) +$$

$$+ \Big(\cancel{f(x_i)} - \cancel{2hf'(x_i)} + \cancel{\frac{4h^2}{2}f''(x_i)} - \frac{8h^3}{6}f'''(x_i) + \boxed{\frac{16h^4}{24}f^{IV}(x_i)} - \frac{32h^5}{5!}f^{(5)}(\xi_4)\Big)\Big\} =$$

$$= \frac{32h^4 f^{(5)}(\xi_1)}{12\cdot 5!} - \frac{8h^4 f^{(5)}(\xi_2)}{12\cdot 5!} - \frac{8h^4 f^{(5)}(\xi_3)}{12\cdot 5!} + \frac{32h^4 f^{(5)}(\xi_4)}{12\cdot 5!},$$

$\xi_1 \in [x_i, x_{i+2}]$, $\xi_2 \in [x_i, x_{i+1}]$, $\xi_3 \in [x_{i-1}, x_i]$, $\xi_4 \in [x_{i-2}, x_i]$.

$$|\psi| \le \frac{h^4}{1440}\Big\{32\max_{x\in[x_i,x_{i+2}]}\left|f^{(5)}(x)\right| + 8\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left|f^{(5)}(x)\right| + $$
$$+8\max_{x\in[x_{i-1},x_i]}\left|f^{(5)}(x)\right| + 32\max_{x\in[x_{i-2},x_i]}\left|f^{(5)}(x)\right|\Big\} \le \frac{h^4}{18}\cdot$$
$$\cdot\max_{x\in[x_{i-2},x_{i+2}]}\left|f^{(5)}(x)\right| \le \frac{h^4}{18}\max_{x\in[x_i-\bar{h},\,x_i+\bar{h}]}\left|f^{(5)}(x)\right|.$$

$$|\psi| \le \widehat{M}h^4, \text{ где } \widehat{M} = \frac{1}{18}\max_{x\in[x_i-\bar{h}_i,\,x_i+\bar{h}]}\left|f^{(5)}(x)\right|.$$

Анализ ВП и её оценка:

Пусть функция задана в узлах неточно, всё остальное задано и делается точно.

$\delta_i = f_i - \tilde{f}_i$, $\delta_{i\pm1} = f_{i\pm1} - \tilde{f}_{i\pm1}$, $\delta_{i\pm2} = f_{i\pm2} - \tilde{f}_{i\pm2}$. Считаем, что $|\delta_j| \le \delta$, $\delta \ge 0$, $j \in \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$.

$$ВП = F_5(x_i) - \tilde{F}_5(x_i) = \frac{-f_{i+2}+8f_{i+1}-8f_{i-1}+f_{i-2}}{12h} - $$
$$-\left(\frac{-\tilde{f}_{i+2}+8\tilde{f}_{i+1}-8\tilde{f}_{i-1}+\tilde{f}_{i-2}}{12h}\right) = \frac{-\delta_{i+2}+8\delta_{i+1}-8\delta_{i-1}+\delta_{i-2}}{12h}$$

$$|ВП| \le \frac{1}{12h}(\delta + 8\cdot 2\delta + \delta) = \frac{\delta}{h}$$

Анализ ОП и её оценка:

$$ОП \overset{df}{=} f'(x_i) - \tilde{F}_5(x_i) = \psi + ВП = -\frac{h^4 f^{(5)}(x_i)}{30} + h^6\Big(\frac{128}{12\cdot 7!}\cdot$$
$$\cdot\left(f^{(7)}(\xi_1)+f^{(7)}(\xi_4)\right) - \frac{8}{12\cdot 7!}\left(f^{(7)}(\xi_2)+f^{(7)}(\xi_3)\right)\Big) + \cancel{\xi_1 \in [x_i, x_{i+2}],\ \xi}$$
$$+\frac{-\delta_{i+2}+8\delta_{i+1}-8\delta_{i-1}+\delta_{i-2}}{12h},\ \xi_1\in[x_i,x_{i+2}],\ \xi_2\in[x_i,x_{i+1}],\ \xi_3\in[x_{i-1},x_i],$$
$$\xi_4\in[x_{i-2},x_i].$$

$$|ОП| \leq \underbrace{\hat{M}h^4}_{\substack{h\to 0 \\ \downarrow \\ 0}} + \underbrace{\frac{\delta}{h}}_{\substack{h\to 0 \\ \downarrow \\ \infty}}$$

Для численного дифференцирования шаг h нужно брать не слишком малым и не слишком большим, т.к. при $h \to 0$ $\hat{M}h^4 \to 0$, $\delta/h \to \infty$. Для конкретной функции можно выбрать оптимальный шаг.

Данный оператор лучше, чем $[f_x]_i$, $[f_{\bar{x}}]_i$, $[f_{\mathring{x}}]_i$, т.к. порядок погрешности ψ у него выше ($\psi \sim O(h^4)$), а ВП у всех четырёх является $O(\frac{1}{h})$ при $h \to 0$.