

Лабораторная работа №1

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛИРУЮЩЕГО КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

Постановка задачи. Постройте кубический сплайн, интерполирующий следующие функции на следующих отрезках:

а) тестовую функцию $\varphi(x)$, заданную формулами

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2, & x \in [-1, 0], \\ -x^3 + 3x^2, & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

на отрезке $x \in [-1, 1]$ на равномерной сетке с граничными условиями:

$$S''(a) = \varphi''(-1), S''(b) = \varphi''(1) \quad (2)$$

б) функцию $f(x)$ на отрезке $x \in [a, b]$ на равномерной сетке с граничными условиями

$$S''(a) = f''(a), S''(b) = f''(b), \quad (3)$$

$$S''(a) = 0, S''(b) = 0. \quad (4)$$

варианты заданий см. табл. 5;

с) «осциллирующие» функции $f(x) + \cos 10x$ и $f(x) + \cos 100x$ на том же отрезке $x \in [a, b]$ на равномерной сетке с условиями (3) (совпадение вторых производных) и (4) (естественные граничные условия).

Используя тестовую функцию а) проверьте и аргументируйте правильность работы программы. Для функций б) и с) проверьте наличие сходимости сплайн-интерполяции и постройте сплайн, аппроксимирующий указанные функции с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$. Далее выясните, каков порядок сходимости сплайна к каждой из трех интерполируемых функций. Для отыскания коэффициентов сплайна во всех заданиях используйте метод прогонки.

Вывод результатов. Коэффициенты каждого построенного кубического сплайна должны быть выведены в таблицу следующего вида

Таблица 1

№	x_i	x_{i+1}	a_i	b_i	c_i	d_i
1	$x_0=a$	x_1				
...				
n	x_{n-1}	$x_n=b$				

Здесь n – число участков, i – номер участка, $[x_i, x_{i+1}]$ – границы участка с номером i ; a_i, b_i, c_i, d_i – коэффициенты сплайна. Если сплайн построен на равномерной сетке, границы участков (второй и третий столбцы) в таблице можно не указывать.

Сходство функции и интерполирующего ее сплайна показывает величина

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - S(x)|, \quad (5)$$

сходство их производных показывает величина

$$\max_{x \in [a, b]} |f'(x) - S'(x)|. \quad (6)$$

Для численной оценки сходства функции и сплайна вводят дополнительную сетку, которая содержит узлы сетки сплайна и промежуточные узлы. Тогда сходство функции и сплайна и сходство их производных на отрезке $[a, b]$ оценивается величинами

$$\max_{x \in \text{допсетке}} |f(x) - S(x)|, \quad (7)$$

$$\max_{x \in \text{допсетке}} |f'(x) - S'(x)|. \quad (8)$$

Например, дополнительная сетка может быть выбрана равномерной с шагом по x в 4 раза меньше, чем шаг сетки сплайна. Тогда на каждом участке сплайна для оценки его сходства с функцией появятся по три дополнительных узла.

Результат сравнения функции и интерполирующего ее сплайна должен быть выведен в таблицу следующего вида:

Таблица 2

N_0	x	$f(x)$	$S(x)$	$ f(x) - S(x) $	$f'(x)$	$S'(x)$	$ f'(x) - S'(x) $
0	$x_0 = a$						
...							
...	...						
...	...						
N	$x_N = b$						
<p>Сетка сплайна: $n = \text{«__»}$ Дополн. сетка: $N = \text{«__»}$</p> <p>$\max_{x \in [a, b]} f(x) - S(x) = \text{«__»}$</p> <p>$\max_{x \in [a, b]} f'(x) - S'(x) = \text{«__»}$</p>							

Для визуальной проверки сплайн-интерполяции программа должна строить график функции и сплайна, а также график их производных.

Задания и порядок их выполнения. Для тестовой функции (1) постройте интерполирующий кубический сплайн с условиями (2) на равномерной сетке отрезка $[-1, 1]$. Постройте график тестовой функции и сплайна, выведите таблицу коэффициентов (табл. 1) и для некоторого небольшого значения n (например, от 2 до 5) приведите выкладки, подтверждающие правильность работы программы. **Замечание:** для обоснования правильной работы программы совпадения графиков функции и сплайна недостаточно.

Далее для основной функции $f(x)$ на равномерной сетке отрезка $x \in [a, b]$ постройте интерполирующий кубический сплайн с граничными условиями (3) и (4) при каком-либо значении n . Затем проверьте наличие сходимости сплайн-интерполяции (с целью тестирования программы). Затем число n подберите так, чтобы на *дополнительной сетке* сплайн интерполировал функцию с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, т.е.

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - S(x)| \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Укажите подобранное Вами число n , а также достигнутые при этом максимальные значения (7) и (8). **Примечание.** При каждом n коэффициенты сплайна должны быть выведены в табл. 1, для сравне-

ния функции и сплайна нужно построить табл. 2 с указанием достигнутых максимальных значений (7) и (8) и построить два графика: график функции и интерполирующего ее сплайна и график их производных.

Для осциллирующих функций $f(x) + \cos 10x$ и $f(x) + \cos 100x$ проведите аналогичное исследование: постройте кубический сплайн при том же значении n , проверьте наличие сходимости, затем постройте сплайн, интерполирующий указанные функции с такой же точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, указав достигнутые при этом максимальные значения (7) и (8) и построив соответствующие графики и таблицы.

Анализ порядка сходимости. Исследуйте порядок сходимости сплайн интерполяции для функций

$$f(x), f(x) + \cos 10x, f(x) + \cos 100x.$$

С этой целью для каждой из указанных функций постройте интерполирующий кубический сплайн с условиями (3) и (4) соответственно при разных значениях n . Закономерность выбора n должна быть такой, чтобы оценка порядка сходимости была достаточно убедительной. Результаты расчетов запишите в таблицу 3 и на ее основе определите порядок сходимости сплайна к функции и порядок сходимости производной сплайна к производной функции. **Замечание.** Табл. 3 заполняется от руки.

Таблица 3

n	$\max_{x \in [a,b]} f(x) - S(x) $	$\max_{x \in [a,b]} f'(x) - S'(x) $
n_1		
n_2		
...		
...		
...		
Порядок сходимости		

По результатам всех проведенных расчетов заполните (от руки) итоговую таблицу 4:

Таблица 4

Вариант « », $f(x) = \langle \quad \rangle$, $[a, b] = [\quad , \quad]$

	$f(x)$	$f(x)+\cos 10x$	$f(x)+\cos 100x$	$\varphi(x)$
	При $n = \langle \quad \rangle$			
$\max_{x \in [a,b]} f(x) - S(x) $				
$\max_{x \in [a,b]} f'(x) - S'(x) $				
	При достижении точности $\varepsilon = 10^{-6}$			
n				
$\max_{x \in [a,b]} f'(x) - S'(x) $				
	Оценка порядка сходимости			
Порядок сходимости сплайна к функции				
Порядок сходимости производной сплайна к производной функции				
	Оценка числа узлов, начиная с которого в силу накопления вычислительной погрешности меняется порядок сходимости			
n^*				

Отчет. В отчете должны быть приведены сведения по теоретическим основам сплайн–интерполяции (определение кубического сплайна, каноническая форма записи, постановка задач интерполяции, виды граничных условий) и описан способ построения сплайна, используемый в Вашей программе.

Для тестовой задачи в отчете приводится таблица коэффициентов сплайна, график тестовой функции и сплайна при некотором n и выкладки, подтверждающие, что сплайн построен правильно.

Для каждой из функций $f(x)$, $f(x) + \cos 10x$, $f(x) + \cos 100x$ в отчете при небольшом фиксированном n должны быть приведены таблицы 1, 2, графики тестовой функции и сплайна и графики их производных.

Для каждой из функций $f(x)$, $f(x) + \cos 10x$, $f(x) + \cos 100x$ в отчете при заданном значении $\varepsilon = 10^{-6}$ должны быть приведены фрагменты таблиц 1, 2 с указанием достигнутых максимальных значений (7) и (8) и графики функции и сплайна и их производных.

Для каждой из функций $f(x)$, $f(x) + \cos 10x$, $f(x) + \cos 100x$, в отчете должны быть приведены таблицы вида 3 с указанием обнаруженных порядков сходимости и заполнена итоговая таблица 4.

Включите в отчет наблюдения и выводы.

В приложении должен быть приведен код программы (описание исходных данных и алгоритм численного метода).

*Построение интерполирующего кубического сплайна.
Варианты заданий*

N_0	a	b	$f(x)$	l	a	b	$f(x)$
1	0	1	$\frac{1}{1+x^4}$	16	1	π	$\frac{\sin^2(x)}{x}$
2	0	1	$\sqrt[3]{1+x^2}$	17	0	1	$\sqrt{1+x^4}$
3	0	1	$\frac{x^3+1}{x+1}$	18	2	4	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
4	0	2	$\frac{\sin(x+1)}{x+1}$	19	0	1	$\frac{x}{1+x}$
5	0	2	$\frac{\ln(x+1)}{x+1}$	20	1	π	$\sqrt{x} \sin(x)$
6	2	4	$\frac{1}{1+x}$	21	0	π	$\cos \frac{x^2}{4}$
7	10	11	$\frac{\ln(x+1)}{x}$	22	0	5	e^{x-3}
8	1	π	$\frac{\sin(x+1)}{x}$	23	0	1	$\frac{\sin(x)}{1+x^2}$
9	0	1	$\sin(\cos x)$	24	0	$\pi/2$	$\frac{\cos(x)}{1+x^2}$
10	0	1	$\sin(e^x)$	25	0	π	$\frac{x \sin(x)}{3}$
11	1	3	$\sqrt{e^x-1}$	26	0	2	$\sqrt{1+3x^2}$
12	1	π	$\cos(e^x)$	27	0	2π	$\sqrt{1+3(\sin x)^2}$
13	1	π	$\sqrt{x} \cos(x)$	28	0	$\pi/2$	$\sqrt{4-2\sin(x)}$
14	1	5	$\frac{\sin(x)}{x}$	29	0	5	$e^{x-3} \cos(x)$
15	2	4	$\frac{x}{1+2x}$	30	0	π	$\sqrt{3-2\sin^2 x}$