Построение точной конечно-элементной аппроксимации

Курсовая работа Локтева Антона

Научный руководитель: к. физ.-мат. наук, доцент Вербицкий В.В.

Одесса – 2018

Для краевой задачи:

$$\begin{aligned} &-u(x)'' + q(x)u(x) = f(x), x \in (a,b), \\ &u(a) = 0, u(b) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$q(x) \in C^0[a,b], q(x) \geq 0.$$

Необходимо построить:
Точную конечно-элементную аппроксимацию данной задачи по точной схеме метода конечных элементов.
Построить оценку погрешности конечно-элементного решения краевой задачи.
Написать программное приложение на языке пакета MATLAB, которое находит решение поставленной задачи, используя точную схему.

Найти такое $u \in H^1(a,b)$, что

$$a(u,v) = f(v) \quad \forall v \in H^1(a,b),$$

где

$$a(u,v) = \int\limits_a^b u'v' + q(x)uvdx,$$

$$f(v) = \int\limits_a^b f(x)vdx.$$

Определим конечное подпростанство

$$V_h = \left\{ v_h \in {S_n}^{1,0}\left[a,b\right] \right\}$$

пространства $H^1(a,b)$. Тогда вариационной задаче поставим в соответствие следующую конечномерную задачу: найти такое $u_h \in V_h$, что

$$a(u_h, v_h) = f(v_h)$$

Конечномерная задача представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Решение задачи будем искать в виде:

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x), \tag{2}$$

где $\varphi_i(x)$ — базисные функции пространства линейных непрерывных сплайнов, а коэффициенты α_i необходимо определить из СЛАУ

$$Ay = b, \tag{3}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 2/h + hq(x_1) & -1/h & & & \\ -1/h & 2/h + q(x_2) & -1/h & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1/h & 2/h + q(x_{n-1}) & -1/h \\ & & & -1/h & 2/h + hq(x_n) \end{bmatrix},$$

$$y = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T,$$
$$b = [hf(x_1), hf(x_2), \dots, hf(x_{n-1}), hf(x_n)]^T.$$

СЛАУ для конечного элемента в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} a(\varphi_1, \psi_1) & a(\varphi_2, \psi_1) \\ a(\varphi_1, \psi_2) & a(\varphi_2, \psi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_l \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\psi_1) \\ f(\psi_2) \end{bmatrix}$$

где

$$\varphi_1(x) = \frac{x_2 - x}{h}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x - x_1}{h};$$

$$\psi_1(x) = \frac{\sinh(\alpha(x_2 - x))}{\sinh(\alpha h)}, \quad \psi_2(x) = \frac{\sinh(\alpha(x - x_1))}{\sinh(\alpha h)}.$$

Матрица для конечного элемента

$$a(\varphi_1, \psi_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (\varphi_1{\prime}\psi_1{\prime} + \overline{q}\varphi_1\psi_1)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} (\varphi_1{\prime}\psi_1{\prime})dx + \overline{q}\int\limits_{x_1}^{x_2} (\varphi_1\psi_1)dx.$$

$$a(\varphi_1, \psi_1) = \frac{1}{h} + \overline{q}\left[\frac{\cosh(\alpha h)}{\alpha\sinh(\alpha h)} - \frac{1}{\alpha^2 h}\right] = a(\varphi_2, \psi_2).$$

$$a(\varphi_1, \psi_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (\varphi_1{\prime}\psi_2{\prime})dx + \overline{q}\int\limits_{x_1}^{x_2} (\varphi_1\psi_2)dx.$$

$$a(\varphi_1, \psi_2) = -\frac{1}{h} + \overline{q}\left[\frac{-1}{\alpha\sinh(\alpha h)} + \frac{1}{\alpha^2 h}\right] = a(\varphi_2, \psi_1).$$

В качестве тестового примера рассматривалась следующая краевая задача: В качестве тестового примера рассматривалась следующая задача Дирихле:

$$-u(x)'' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \tag{1}$$

$$u(0) = 1, \;\; u(1) = e, \tag{2}$$

где $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция:

$$f(x) = \begin{cases} -0.5e^x, & 0 < x < 0.5 \\ 0, & 0.5 < x < 1 \end{cases}$$

Точное решение этой задачи

$$u(x) = e^x \tag{3}$$

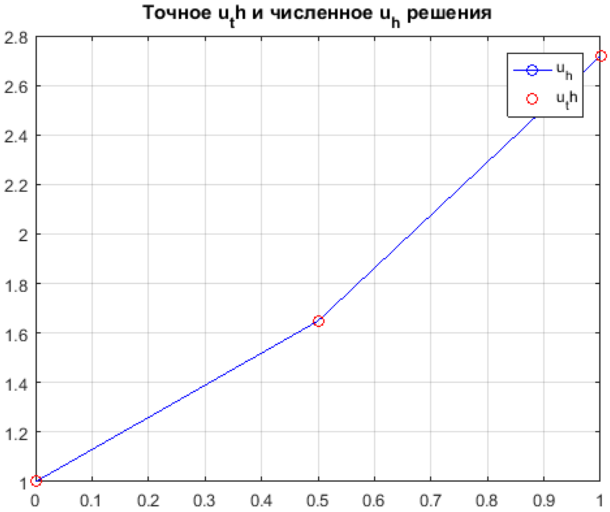

Рис.: Два интегрвала

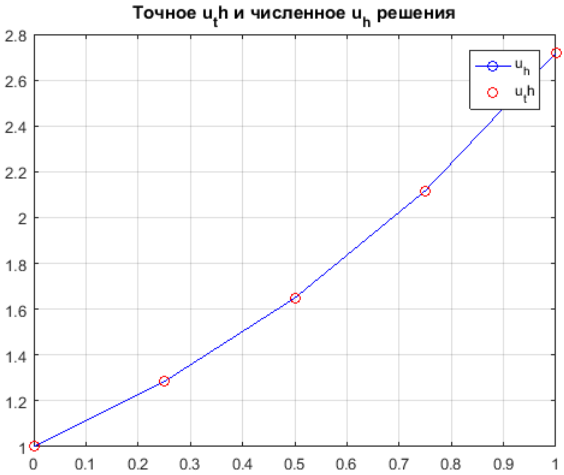

Рис.: Четыре интервала

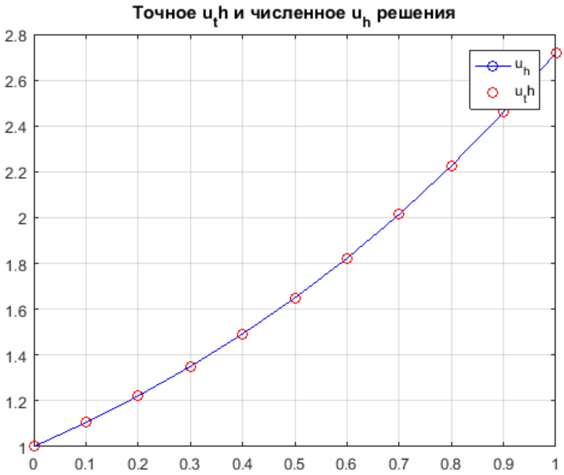

Рис.: Десять интервалов

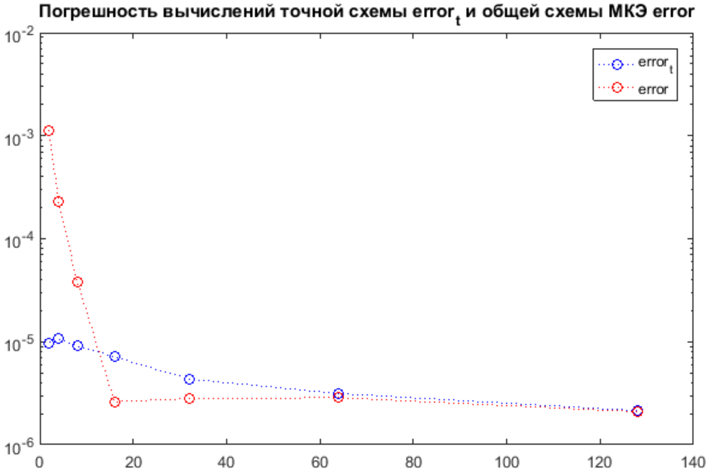

Рис.: Погрешности в вычислениях

1. Для краевой задачи была построена конечно-элементная аппроксимация для ОДУ по точной схеме на равномерной сетке.
2. Показано, что при особом выборе базисных и пробных функций получаем точное решение в узлах сетки.
3. Написано программное приложение на языке пакета MATLAB, которое находит решение поставленной задачи точной схемой метода конечных элементов.
4. Результаты вычислительных экспериментов показали высокую эффективность метода конечных элементов.

Благодарю за внимание