

REGRAS BÁSICAS DA ÁLGEBRA BOOLEANA

A tabela abaixo apresenta todas as regras básicas da álgebra booleana.

Equações Duais (somente uma variável)

Função OU (OR)

- 1 - $X + 0 = X$ (Identidade)
- 2 - $X + 1 = 1$ (Identidade)
- 3 - $X + X = X$ (Idempotente)
- 4 - $X + \bar{X} = 1$

Função Lógica E (AND)

- 5 - $X \cdot 0 = 0$ (Identidade)
- 6 - $X \cdot 1 = X$ (Identidade)
- 7 - $X \cdot X = X$ (Idempotente)
- 8 - $X \cdot \bar{X} = 0$

Propriedades das equações de duas e três variáveis

Função OU (OR)

Comutativa :

9 - $X + Y = Y + X$

Função Lógica E (AND)

10 - $X \cdot Y = Y \cdot X$

Associativa :

11 - $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z = X + Y + Z$

12 - $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot Y \cdot Z$

Distributiva :

13 - $\underline{X} + Y \cdot Z = (\underline{X} + Y) \cdot (\underline{X} + Z)$

14 - $\underline{X} \cdot (Y + Z) = \underline{X} \cdot Y + \underline{X} \cdot Z$

Fatoração

15 - $\underline{(X + Y)} \cdot \underline{(X + Z)} = \underline{X} + Y \cdot Z$

16 - $\underline{X} \cdot Y + \underline{X} \cdot Z = \underline{X} \cdot (Y + Z)$

Absorção

17 - $X + X \cdot Z = X$

18 - $X \cdot (X + Y) = X$

Teoremas usando duas e três variáveis :

19 - $X + \bar{X} \cdot Y = X + Y$

20 - $X \cdot Y + \bar{X} \cdot Z = (X + Z) \cdot (\bar{X} + Y)$

21 - $X \cdot Y + \bar{X} \cdot Z + Y \cdot Z = X \cdot Y + \bar{X} \cdot Z$

22 - $(X + Y) \cdot (\bar{X} + Z) = X \cdot Z + \bar{X} \cdot Y$

23 - $(X + Y) \cdot (\bar{X} + Z) \cdot (Y + Z) = (X + Y) \cdot (\bar{X} + Z)$

Teorema de De Morgan

24 - $\overline{(X + Y + Z)} = \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$

25 - $\overline{\bar{X} \cdot Y \cdot Z} = \bar{\bar{X}} + \bar{Y} + \bar{Z}$

26 - $\overline{\bar{X}} = X$

A função OU Exclusivo - XOR

$$27 - X \oplus Y = X \cdot \bar{Y} + \bar{X} \cdot Y$$

Comutativa

$$29 - X \oplus Y = Y \oplus X$$

$$31 - X \oplus X = 0$$

$$28 - X \oplus Y = (X + Y) \cdot (\bar{X} + \bar{Y})$$

Associativa

$$30 - X \oplus (Y \oplus Z) = (X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus Y \oplus Z$$

$$32 - X \oplus \bar{X} = 1$$

Ordem de precedência lógica :

1 ^o	()	Parênteses
2 ^o	Inversor	
3 ^o	E	
4 ^o	OU	
5 ^o	XOR	OU Exclusivo

Exemplos

1) Simplifique a expressão $Z = (A + B) \cdot (A + C)$

Solução:

$$Z = (A + B) \cdot (A + C)$$

Usando a propriedade Distributiva de acordo com a **regra 14** . Assim

temos:

$$Z = AA + AC + AB + BC$$

usando a **regra 7**,teremos

$$Z = A + AC + AB + BC$$

temos

Fatorando as variáveis comuns A, de acordo com a **regra 16**

$$Z = A \cdot (1 + C + B) + B \cdot C$$

Usando a **regra 2** temos

$$Z = A \cdot (1) + B \cdot C$$

Usando a **regra 6** temos

$$Z = A + B \cdot C$$

2) Simplifique a expressão $y = A \cdot \bar{B} \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{D}$

Solução:

Fatorando as variáveis comuns $A \cdot \bar{B}$, de acordo com a **regra 15** temos

$$y = A \cdot \bar{B} \cdot (D + \bar{D})$$

usando a **regra 4**, o termo entre parênteses é igual a 1. Assim,

$$y = A \cdot \bar{B} \cdot 1$$

usando a **regra 6**, o termo resultante é

$$y = A \cdot \bar{B}$$

3) Simplifique a expressão $y = X + X.Z$. (Uso do teorema da **Absorção**)

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= X + X.Z && \text{Regra 15} \\ &= X.(1+Z) && \text{Regra 2} \\ &= X.1 && \text{Regra 6} \\ &= X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= X.(X+Y) \\ &= X.X + X.Y && \text{Regra 15} \\ &= X.(1+Y) && \text{Regra 2} \\ &= X.1 && \text{Regra 6} \\ &= X \end{aligned}$$

4) Faça o diagrama do circuito lógico e simplifique a expressão $Z = \overline{(\overline{A+B}) + \overline{B}}$. Faça o desenho do circuito lógico simplificado.

Solução: Usando o teorema de De Morgan, de acordo com a **regra 25** temos

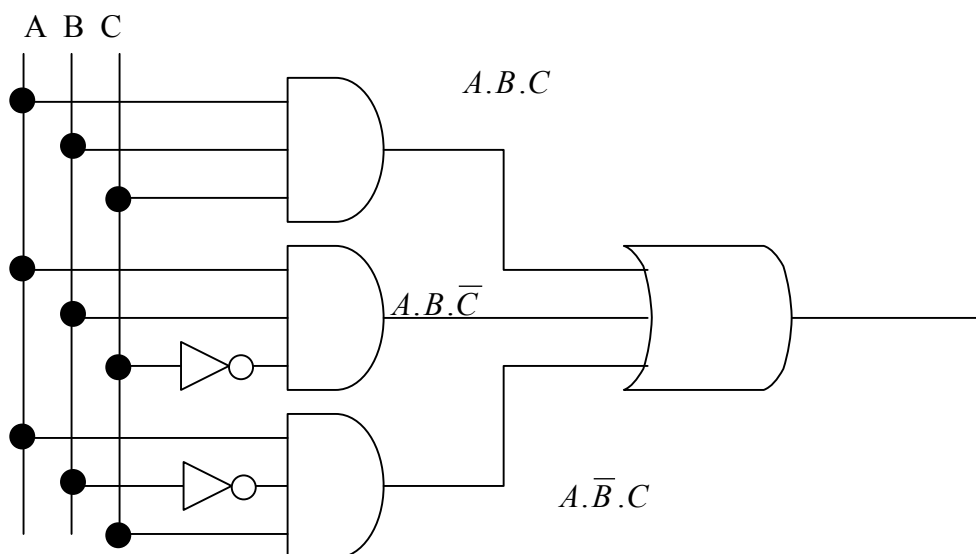
$$Z = \overline{(\overline{A+B}) + \overline{B}} \quad \text{usando novamente o De Morgan de acordo com a } \mathbf{regra\ 24} \text{ temos}$$

$$Z = \overline{\overline{A}} . \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{B}} \quad \text{usando a } \mathbf{regra\ 26}, \text{ temos}$$

$$Z = A . \overline{B} + B \quad \text{usando a } \mathbf{regra\ 19}, \text{ resultando em}$$

$$Z = A + B$$

5) Dado o diagrama do circuito lógico determine a função a lógica. Simplifique e faça o desenho do diagrama lógico da função simplificada.



Solução:

$$Z = A.B.C + A.B.\overline{C} + A.\overline{B}.C$$

Fatorando as variáveis comuns $A.B$, de acordo com a **regra 15** temos

$$Z = A.B.(C + \overline{C}) + A.\overline{B}.C$$

usando a **regra 4**, o termo entre parênteses é igual a 1.

$$Z = A.B.(1) + A.\overline{B}.C$$

usando a **regra 6**, temos

$$Z = A.B + A.\bar{B}.C$$

15

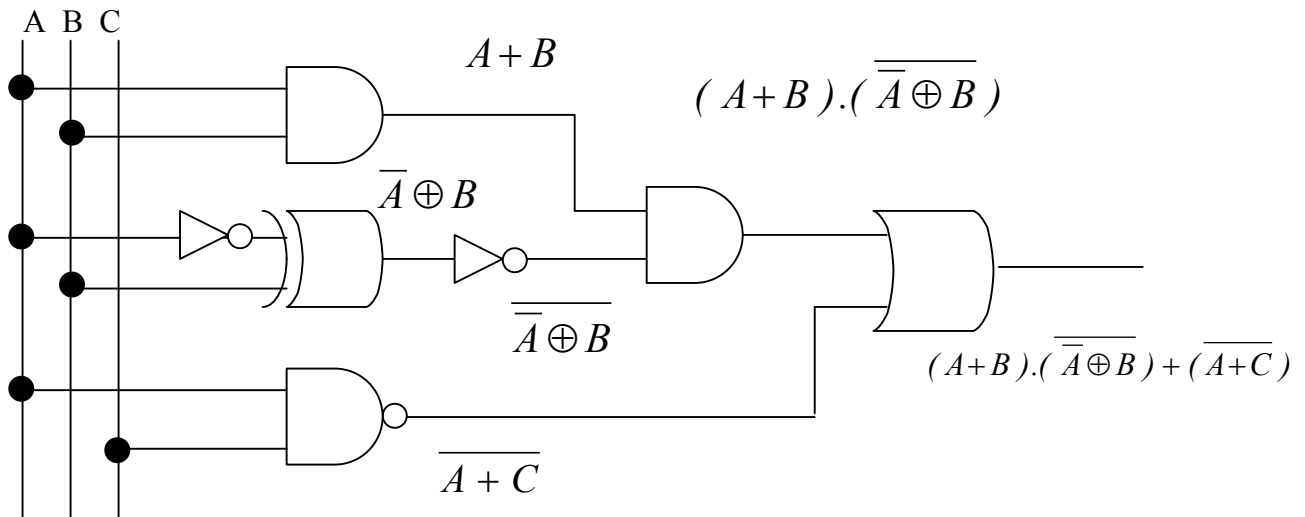
Fatorando a variável comuns A , de acordo com a **regra**

$$Z = A.(B + \bar{B}.C)$$

usando a **regra 19**, o resultado é

$$Z = A.(B + C)$$

6) Dado o diagrama do circuito lógico determine a função a lógica. Simplifique e faça o desenho do diagrama lógico da função simplificada.



Solução:

$$Z = (A+B).(A \oplus B) + (A+C)$$

$$Z = (A+B).(A.B + \bar{A}.\bar{B}) + (A+C)$$

resulta

$$Z = (A+B).(A.B + \bar{A}.\bar{B}) + (\bar{A}.\bar{C})$$

$$Z = (A+B).(A + \bar{B}).(\bar{A} + B) + (\bar{A}.\bar{C})$$

$$Z = (A+B).(A + \bar{B}) + (\bar{A}.\bar{C})$$

Usando a transformação da **regra 27** no termo $\overline{A \oplus B}$ teremos :

Usando o teorema de De Morgan com a **regra 24 e 25**

Usando o teorema de De Morgan **novamente** com a **regra 25** resulta :

Usando a **regra 7** resulta :

Usando a **regra 7** resulta :