JOÃO NUNES de SOUZA

LÓGICA para CIÊNCIA da COMPUTAÇÃO

Uma introdução concisa

2 de junho de 2009

1

A linguagem da Lógica Proposicional

Errata

Caso você encontre algum erro nesse capítulo ou tenha algum comentário a fazer, envie-o para nunes@ufu.br.

Muito obrigado.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1. a) Não é fórmula
   b) É fórmula
   c) É fórmula
   d) Não é fórmula
   e) É fórmula
2. a) Sim, por exemplo, as fórmulas P, $true$, etc
   c) Não
3. a) comprimento igual a 11.
4. a) $\neg\neg P \leftrightarrow (\neg(\neg\neg(P \lor Q) \to R) \land P)$.
5. c) $((\neg P) \lor (Q \leftrightarrow Q))$.
6. a) A fórmula do item a) do exercício 4 é escrita como:
   $\leftrightarrow \neg\neg \land \neg \to \neg\neg \lor PQRP$.
   b) $\leftrightarrow \to \neg P \lor QR \leftrightarrow \land PQ \lor \neg\neg R \neg P$.
7. a) Não.
   b) Não.
8.
9. Par.

10. a) $comp[H]$ é um número ímpar.

    b) $comp[H]$ é o dobro do número de conectivos de H, mais um.

2

A semântica da Lógica Proposicional

Errata

Caso você encontre algum erro nesse capítulo ou tenha algum comentário a fazer, envie-o para nunes@ufu.br.

Muito obrigado.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1. No contexto deste livro, qual a diferença entre os símbolos?
   a) *true* é um símbolo sintático, que pertence ao alfabeto da Lógica Proposicional e T é um símbolo semântico.
   c) $\rightarrow$ é um conectivo, que pertence ao alfabeto da Lógica Proposicional e $\Rightarrow$ é um símbolo da metalinguagem. Observe, portanto, que $\Rightarrow$ não pertence à linguagem da Lógica Proposicional.
2.
3.
4. a) Não temos a possibilidade: $I[P] = T$ e $I[Q] = F$.
   b) $I[Q] = T$
   c) $I[H] = T$
   d) Nada podemos concluir a respeito de $I[Q]$?
   e) $I[H] = F$
5. a) $I[(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)] = T$ e nada podemos concluir a respeito de $J[Q]$ e $J[R]$.
6. a) $I[(P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)] = T$
   b) $I[(P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)] = T$
   c) Nada se pode concluir a respeito de $I[(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)]$
7.

8. a) $I[H] = F$
   b) $I[H] = T$
9.
10. a) Considere as associações: P = eu sou feliz, Q = você é feliz. Neste caso, a representação é dada por $(P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow \neg P)$
    b) Considere as associações: P = José virá à festa, Q = Maria gostará da festa. Nesse caso, a representação é dada por $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.
11. A rigor, qualquer uma das sentenças pode ser representada na Lógica Proposicional. Basta representar toda a sentença por um símbolo proposicional. Entretanto, essa representação trivial esta longe de ser a mais adequada, pois ela não é fiel aos detalhes internos da sentença. E para representar essas estruturas internas da sentença, são necessários outros formalismos, outros tipos de Lógicas, diferentes da Lógica Proposicional.

    a) O quantificador "para todo", é considerado na Lógica de Predicados.
    b) "Possivelmente" que é considerado na Lógica Modal.
    c) O "tempo" é considerado na Lógica Temporal.
    d) O quantificador "existe", que é considerado na Lógica de Predicados
    l) "quase todo" é Considerado em Lógicas não Clássicas.
    m) "poucos" é considerado em Lógicas não Clássicas.
12.
13.
14.
15.
16.
17. Uma solução para este problema, que pode servir como paradigma para a solução dos outros exercícios, é apresentada a seguir. Inicialmente, é feita a seguinte pergunta a um dos indivíduos. 1a pergunta: Qual o caminho para o restaurante que cada um dos outros indivíduos me indicará? Para simplificar a análise das respostas, considere as seguintes correspondências:

    - R $\equiv$ caminho para o restaurante,
    - A $\equiv$ caminho para o abismo,
    - NR $\equiv$ não é possível responder.

    A primeira pergunta pode ser feita ao operário, ao estudante ou ao capitalista. Logo, há várias possibilidades de conjuntos de respostas.

    i) Se a primeira pergunta for feita ao estudante, haverá três possibilidades de listas de respostas:

    Respostas possíveis do estudante: [R, A], [R, R], [A, A], [A, R].

    A primeira lista de respostas, por exemplo, determina que um dos indivíduos indica o caminho para o restaurante e o outro o caminho do abismo. Observe que o estudante fala a verdade e/ou mente sobre as respostas dos outros indivíduos. Desta forma, ele sabe que o capitalista sempre indicará o caminho para o abismo e que o operário indicará o caminho correto, representados respectivamente por A e R. Logo, há três possibilidades:

a) Ele fala a verdade sobre as respostas do operário e do capitalista: Respostas [R, A] e [A, R].

b) Ele mente sobre tais respostas: Respostas [A, R]e [R, A].

c) Ele mente sobre a resposta de um indivíduo: Respostas [A, A] e [R, R].

ii) Se a primeira pergunta for feita ao capitalista, ocorrem as listas de respostas: [NR, A] e [A, NR]. Neste caso, como o capitalista sempre mente, ele muda a resposta do operário de R para A e nada responde sobre o caminho indicado pelo estudante.

iii) Se a primeira pergunta for feita ao operário, ele sabe que o capitalista mente e indica o caminho A. Também neste caso, o operário nada responde sobre o caminho indicado pelo estudante. Logo, as listas de respostas são [A, NR] e [NR,A]. Concluindo, a partir dos possíveis conjuntos de respostas para a primeira pergunta, é possível dividir o conjunto de indivíduos que se encontram na encruzilhada estudante, operário, capitalista em dois subconjuntos: estudante e operário, capitalista. Observe que o resultado deste fato é a identificação do estudante. Além disso, a identificação do estudante só é obtida quando a primeira pergunta é dirigida a ele. Observe que é possível repetir a pergunta para mais de um indivíduo. Em seguida, é feita a segunda pergunta para um dos indivíduos que não é o estudante. Segunda pergunta: Qual o caminho para o restaurante que o outro indivíduo me indicaria? Neste caso, o "outro indivíduo" citado na pergunta anterior não pode ser o estudante. O turista deve indicar explicitamente o indivíduo, que não é o estudante. Se a segunda pergunta for feita ao operário, a resposta será: [A], pois ele é honesto e sabe que o capitalista mente. Se a segunda pergunta for feita ao capitalista, a resposta também será: [A]. O capitalista sabe que o operário responderia [R], mas como ele mente, sua resposta será [A]. Para finalizar, após a resposta da segunda pergunta, basta o turista seguir o caminho oposto àquele indicado nesta resposta.

3

Propriedades semânticas da Lógica Proposicional

Errata

Caso você encontre algum erro nesse capítulo ou tenha algum comentário a fazer, envie-o para nunes@ufu.br.

Muito obrigado.

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 32, na Definição 3.1, substitua

$$I[\beta] = T$$

por

$$I[H_1] = \ \dots \ = I[H_n] = T \ \dots$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 32, na primeira "Notação", na última sentença, substitua

"H não é consequência lógica semântica de G"

por

"H não é consequência lógica semântica de β"

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 36, na tabela 3.2, substitua a fórmula

$$\neg P \wedge Q$$

por

$$\neg P \wedge \neg Q$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 36, na tabela 3.2, substitua a fórmula do título da tabela:

$$\neg(P \vee Q))$$

por

$$\neg(P \vee Q)$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 42, no início da demonstração da Proposição 3.9, substitua:

"Pelo Lema 3.2"

por

"Pelo Lema 3.3"

xxxxxxxxxxxxxxxx

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1. a) Suponha que $(E \leftrightarrow G)$ e $(G \leftrightarrow H)$ são tautologias.

   Mas, $(E \leftrightarrow G)$ é tautologia se e somente se $\forall$ interpretação I, $I[E] = I[G]$.

   $(G \leftrightarrow H)$ é tautologia se e somente se $\forall$ interpretação I, $I[G] = I[H]$.

   Como, para toda interpretação, $I[E] = I[G]$ e $I[G] = I[H]$, então, para toda interpretação, $I[E] = I[H]$.

   Portanto, $\forall$ interpretação I, $I[E] = I[H]$, o que significa que $(E \leftrightarrow H)$ é tautologia.

   b) Esta afirmação não é verdadeira.

   Considere o contra-exemplo $E = P$ e $G = \neg\neg P$.

   Nesse caso, $(P \leftrightarrow \neg\neg P)$ é tautologia, mas nenhuma das fórmulas $(P \wedge \neg\neg P)$ e $(\neg P \wedge \neg\neg\neg P)$ são tautologias.

   c) Afirmação verdadeira.

   d) Afirmação falsa.

   e) Afirmação verdadeira.

2. a) Nesse caso, $H \vDash G$. Justifique o porquê.

   b) Nesse caso, $H \nvDash G$. Justifique o porquê.

   c) Nesse caso, $H \nvDash G$. Justifique o porquê.

   d) Nesse caso, $H \vDash G$. Justifique o porquê.

   e) Nesse caso, $H \vDash G$. Justifique o porquê.

3. a) Se ocorre T na coluna de H_i, então necessariamente devemos ter T na coluna de H_j.

   d) As colunas de H_i e H_j devem ser iguais.

4. a) Colunas iguais.
   b) Se ocorre T na coluna de H, então necessariamente ocorre T na coluna de G.
5. Considere a solução:

$$\begin{aligned} A, B, C, D \text{ é insatisfatível} &\Leftrightarrow \text{ não existe interpretação } I;\ I[A] = I[B] = I[C] = I[D] = T \\ &\Leftrightarrow \forall \text{ interpretação } I, I[A] = F \text{ ou } I[B] = F \text{ ou } I[C] = F \text{ ou } I[D] = F \\ &\Leftrightarrow \forall \text{ interpretação } I, I[A \wedge B \wedge C \wedge D] = F \\ &\Leftrightarrow \forall \text{ interpretação } I, I[\neg(A \wedge B \wedge C \wedge D)] = T \\ &\Leftrightarrow \neg(A \wedge B \wedge C \wedge D) \text{ é tautologia .} \end{aligned}$$

6.
7. a) Não
   b) Sim
   c) Não
   d) Sim
   e) Sim
   f) Sim
   g) Sim
   h) Sim
   i) Não
8. a) Falsa
   b) Falsa
   c) Verdadeira
   d) Falsa
   e) Verdadeira
   f) Verdadeira
   g) Falsa
   h) Falsa
   i) Falsa
   j) Falsa
   k) Falsa
   l) Verdadeira
   m) Falsa
   n) Falsa
9. a) Falsa
   b) Verdadeira

c) Falsa
d) Verdadeira
e) Verdadeira
f) Verdadeira
g) Verdadeira
h) Verdadeira
i) Verdadeira
j) Verdadeira
k) Verdadeira
l) Verdadeira
m) Verdadeira
n) Falsa
o) Verdadeira
p) Verdadeira
q) Falsa
r) Verdadeira
s) Verdadeira
t) Verdadeira
u) Falsa
v) Falsa
w) Verdadeira
x) Falsa

10. Considere a solução:

a) Utilize as definições.

$$\begin{aligned} H \text{ é contraditória } &\Leftrightarrow \forall \text{ int. } I, I[H] = F \\ &\Leftrightarrow \forall \text{ int. } I, I[H \rightarrow G] = T \\ &\Rightarrow (H \rightarrow G) \text{ é tautologia.} \end{aligned}$$

b) Utilize as definições.

$$\begin{aligned} H \text{ é tautologia e } G \text{ é contraditória } &\Leftrightarrow \forall int.I, I[H] = Te\forall \text{ int. } I, I[G] = F \\ &\Rightarrow \forall \text{ int. } I, I[H \rightarrow G] = F \\ &\Rightarrow (H \rightarrow G) \text{ é contraditória.} \end{aligned}$$

e) Falso em a) e verdadeiro em b).

11.

12.

13. a) Falsa

b) Verdadeira

c) Falsa

14. Não é possível concluir.

15. a) Não é satisfatível.

    b) Satisfatível

    c) Satisfatível

    d) Satisfatível

    e) Satisfatível

    f) Satisfatível

    g) Satisfatível

16. a) Não. Justifique.

    b) Não. Justifique.

    c) Sim. Justifique.

17. O conjunto não é satisfatível. Suponha que $\{\neg G, E \rightarrow \neg H, H\}$ seja satisfatível. Logo, $\exists$ int. I; $I[\neg G] = I[E \rightarrow \neg H] = I[H] = T$. Mas se $I[H] = T$, como $H \vDash G$, então $I[G] = T$, o que é um absurdo pois $I[\neg G] = T$.

18. a) Considere as associações:
    $P =$ "Marcos está feliz",
    $Q =$ "Sílvia foi ao baile",
    $R =$ "Marcos foi ao baile".
    O conjunto é representado pelo conjunto de fórmulas

$$\{\neg P \vee (Q \rightarrow R), P \rightarrow \neg Q, R \rightarrow Q\}$$

4

Métodos para determinação de propriedades semânticas de fórmulas da Lógica Proposicional

Errata

Caso você encontre algum erro nesse capítulo ou tenha algum comentário a fazer, envie-o para nunes@ufu.br.

Muito obrigado.

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 50, o nó 3 corresponde à fórmula

$$\begin{array}{rl} \text{Nó } 3 = & (P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P). \\ & \;\; F \;\; T \qquad\;\; T \qquad\;\;\; T \; T F \end{array}$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 50, a figura 4.3 correta é a seguinte:

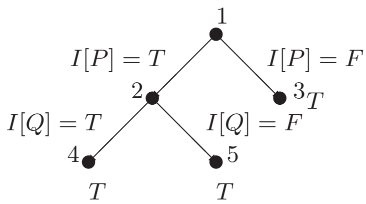

Figura 4.1. Figura 4.3 Desenvolvimento da árvore semântica.

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 52, a antipenúltima fórmula da página é:

$$\begin{array}{l} H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R) \\ \qquad\;\;\; T \; T \qquad T \qquad T \;\; F \qquad F \;\; T \; F \; F \end{array}$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 52, as penúltimas fórmulas da página são:

$$\underset{T\ \ T}{(P \rightarrow Q)} \text{ e } \underset{T\ \ F}{(Q \rightarrow R)}$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 53, a última fórmula da página é:

$$H = \underset{T}{(P \rightarrow Q)} \underset{F}{\leftrightarrow} \underset{F}{(\neg P \rightarrow \neg Q)}$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 54, a segunda fórmula da página é:

$$H = \underset{F}{(P \rightarrow Q)} \underset{F}{\leftrightarrow} \underset{T}{(\neg P \rightarrow \neg Q)}$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 56, substitua a sentença

se Maria está em Rio Branco, então ela está no Acre.
Mas, se ela está em Boa Vista, então ela está em Roraima,

por

se Maria está em Rio Branco, então ela está no Acre.
Ou, se ela está em Boa Vista, então ela está em Roraima,

xxxxxxxxxxxxxxxx

No exercício 24., substitua a palavra "que" por "se". Temos, portanto:

24. Demonstre, utilizando o método da negação, ou redução ao absurdo, se a fórmula a seguir é uma tautologia.

$$(P \rightarrow P_1) \wedge (Q \rightarrow Q_1) \vDash (P \rightarrow Q_1) \vee (Q \rightarrow P_1)$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

No exercício 25., duas fórmulas foram escritas em uma mesma linha. O início, correto, desse exercício é dado por:

25. Considere as fórmulas a seguir:

$$(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)$$
$$\neg((P \wedge Q) \vee R \vee S) \wedge (P_1 \wedge Q_1)$$

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

21. Utilizando o método da negação ou absurdo, tem-se.

$$\begin{array}{l} H = P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_3 \rightarrow (P_4 \rightarrow (P_5 \rightarrow (P_6 \rightarrow (P_7 \rightarrow P_1)))))) \\ \quad\quad T \;\; F \;\;\; T\, F \;\;\; T \;\; F \;\; T\, F \;\;\; T \;\; F \;\;\; T \;\; F \;\; T \;\; F \;\; T_{Fabsurdo} \end{array}$$

Portanto, H é tautologia.

$$\begin{array}{l} G = (((P \wedge S) \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \rightarrow P_1)) \rightarrow ((((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee R) \leftrightarrow R)) \rightarrow P) \\ \quad\quad\;\; F\, F \quad\;\; T\, F \;\; T \;\; F \;\; T \quad\;\; F \quad\;\; F\, F \quad\; T\, F \;\; T \quad\; F \quad\quad T \quad\;\; F\, F \end{array}$$

Independente da interpretação dos símbolos S, P_1, Q e R não há absurdo, logo G não é tautologia.

26. a) Considere a fórmula

$$\begin{array}{l} G = (P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \\ \quad\quad F \; F \; F \;\; F \;\; TF \; F \; F \end{array}$$

G não é uma tautologia. Dado I tal que$I[P] = F$ e $I[Q] = F$, então $I[G] = F$. Os valores de verdade de P e Q estão abaixo dos símbolos P e Q respectivamente.

b) $I[H] = T$

28. Traduza os fatos para a linguagem da Lógica Proposicional. Considere, por exemplo, as correspondências
$P_1 =$ "Alirio toma vinho",
$P_2 =$ "Alirio fica com ressaca".
Determine correspondências para todos os fatos.

Utilizando tais correspondências, defina as fórmulas da lógica proposicional

$$H_1,\ H_2,\ H_3,\ G_1,...,\ G_5.$$

A implicação semântica

$$\{H_1, H_2, H_3\} \vDash G_i$$

ocorre se, e somente se, a fórmula

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge H_3) \rightarrow G_i$$

é uma tautologia. Quando isto ocorre, se H_1, H_2 e H_3 são verdadeiras, então G_i também é verdadeira.

29. i) Considere as associações:
$P =$ "Ricardo ama Lúcia",
$Q =$ "Ricardo ama Elaine".
Representamos as implicações pelas fórmulas a seguir:

$$\begin{array}{l} ((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow P \\ \;\;\; F \; T \; T \;\;\; T \;\;\; F \; T \quad\;\;\; F \;\; F \end{array}$$

Como não há absurdo, então Ricardo não necessariamente ama Lúcia.

$$\begin{array}{l} ((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow P \\ \;\; F \; F \; F \;\; T_F \; F \; T \; F \quad\; F \;\; F \end{array}$$

Como há absurdo, então Ricardo necessariamente ama Elaine.

iii)

$$\begin{array}{l}(((P \to Q) \to P) \land (P \to (P \to Q))) \to P \\ \;\; F \; F_T \quad T \;\; F \;\; T \quad F \; T \qquad\qquad\quad F \; F\end{array}$$

Como há absurdo, então Ricardo necessariamente ama Lúcia.

$$\begin{array}{l}(((P \to Q) \to P) \land (P \to (P \to Q))) \to P \\ \qquad F \quad T \quad\; T \quad\; T \qquad\quad F \quad\; F \; F\end{array}$$

Há dois casos a considerar. $I[P] = T$ ou $I[P] = F$

$$\begin{array}{l}(((P \to Q) \to P) \land (P \to (P \to Q))) \to P \\ \;\; F \; T \; F \;\; T_F \; F \;\; T \qquad T \qquad F \qquad\;\; F \; F\end{array}$$

Se $I[P] = F$, ocorre absurdo.

$$\begin{array}{l}(((P \to Q) \to P) \land (P \to (P \to Q))) \to P \\ \;\; T \; F \; F \quad T \; T \quad T \; T \; T \quad T \; F \; F \qquad F \; F\end{array}$$

Se $I[P] = T$, também ocorre absurdo. Portanto, Ricardo necessariamente ama Elaine.

iv) Neste caso, o diálogo é expresso por $(P \lor Q) \to (P \leftrightarrow (P \to Q))$

v) Neste caso, o diálogo é expresso por $(P \lor Q) \leftrightarrow (P \to Q)$

33. Considere as associações:
$P =$ "Há sangue na cena do crime",
$Q =$ "O matador é um profissional".
Logo, as opiniões dos detetives são representadas por:
Ana: $P \to Q$
Teresa: $\neg(P \land \neg Q)$
Cynthia: $\neg Q \land P$
Melo: P

a) O conjunto de conclusões não é satisfatível.

b) Basta determinar se $(\neg(P \land \neg Q) \land P) \to Q$ é uma tautologia.

c) Basta determinar se $(P \to Q) \leftrightarrow \neg(P \land \neg Q)$ é uma tautologia.

34. Transforme a afirmações para fórmulas da lógica proposicional. Em seguida, identifique se ocorrem as implicações semânticas.

35. d) Considere as associações:
$P =$ "Os investimentos em Uberlândia permanecerão constantes",
$Q =$ "Os gastos da prefeitura aumentarão",
$R =$ "Crescerá o desemprego",
$S =$ "Os impostos municipais poderão ser reduzidos".
A representação na Lógica Proposicional é a seguinte:

$$\begin{array}{l}((P \to (Q \lor R)) \land (\neg Q \to S) \land ((S \land P) \to \neg R)) \to Q \\ \;\; F \; T \quad F \qquad\quad T \;\; TF \; T \; T \;\; T \quad TF \; F \;\; T \qquad\quad F \; F\end{array}$$

Como não há absurdo, os argumentos não são válidos.

5

Relações semânticas entre os conectivos da Lógica Proposicional

Errata

Caso você encontre algum erro nesse capítulo ou tenha algum comentário a fazer, envie-o para nunes@ufu.br.

Muito obrigado.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

2. Todos os itens deste exercício podem ser resolvidos utilizando os passos da solução do item a).
   a) Construa inicialmente uma tabela verdade com os símbolos P e Q. Esta tabela deve conter 4 linhas, uma coluna para P e outra para Q.

      Adicione, completando a tabela, uma coluna para cada uma das fórmulas $P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow P$, $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$, $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$, $Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$, $Q \rightarrow (Q \rightarrow P)$, $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$, $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q$, $(Q \rightarrow P) \rightarrow P$, $(Q \rightarrow P) \rightarrow Q$ etc e etc.

      Observe que consideramos todas as fórmulas construídas a partir de P e Q utilizando o conectivo $\rightarrow$. Há infinitas fórmulas. Mas, o número máximo de colunas diferentes em uma tabela com 4 linhas é 16 (justifique). Logo, muitas fórmulas têm colunas que coincidem e, portanto, são equivalentes.

      Portanto, o número de colunas diferentes é, necessariamente, menor ou igual a 16.

      $P \lor Q$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\rightarrow$ se alguma coluna da tabela obtida for igual à coluna de $P \lor Q$.

   b) Análoga à solução de a).

   c) Análoga à solução de a).

   d) Pode ser resolvido utilizando os passos do item a). Mas há uma solução mais simples. Se $I[P] = T$, então $I[\neg P] = F$. Mas, se $I[P] = T$, então qualquer fórmula H que contém apenas P e $\lor$ é tal que $I[H] = T$. Não é possível negar P utilizando apenas P e $\lor$.

   e) Análoga à solução do item d).

   f) Análoga à solução do item a, trocando $\rightarrow$ por $\leftrightarrow$.

g) Análoga à solução do item f).

h) Análoga à solução do item f).

i) Análoga à solução do item d).

3. a) Utilize os resultados do exercício anterior.

   b) Siga os passos da demonstração da proposição que demonstra, utilizando o princípio da indução, que qualquer fórmula H pode ser expressa, equivalentemente, utilizando apenas os conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$ e os símbolos proposicionais e de verdade de H.

4. c) Análoga à demonstração da proposição 5.11.

   c) Análoga à demonstração da proposição 5.12.

7. Observe inicialmente que a segunda forma do princípio da indução implica o princípio da indução na lógica. Demonstre que o princípio da indução na lógica implica o novo princípio da indução. O princípio da indução na lógica é dado pela implicação

$$[\text{base-lógica} \ \wedge \ \text{passo-lógica}] \ \Rightarrow \ \forall E, \ B[E].$$

e o novo princípio da indução é

$$[\text{base-nova} \ \wedge \ \text{passo-novo}] \ \Rightarrow \ \forall E, \ B[E].$$

Deve-se demonstrar que

$$\{ \ [\text{base-lógica} \wedge \text{passo-lógica}] \ \Rightarrow \ \forall E, \ B[E] \ \} \text{ implica } \{ \ [\text{base-nova} \wedge \text{passo-novo}] \ \Rightarrow \ \forall E, \ B[E] \ \}.$$

A demonstração desta implicação equivale à demonstração de

$$[\text{base-nova} \ \wedge \ \text{passo-novo}] \text{ implica } [\text{base-lógica} \ \wedge \ \text{passo-lógica}].$$

Observe que neste caso base-nova está contida em base-lógica, como também passo-novo está contido em passo-lógica. Para demonstrar essa implicação utilize o fato de qualquer fórmula pode ser reescrita de forma equivalente utilizando apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$.

9. a) Considere

$$B[E] \equiv \ \exists \text{ fórmula } E_f, \text{ tal que } E_f \text{ equivale a } E \text{ e } E_f \text{ é } fnd.$$

   Utilize o princípio da indução na lógica simplificado para demonstrar que $\forall E, \ B[E]$.

10. e) Sim, a função associada ao conectivo *nor* ou ao conectivo *nand*.

    f) Para facilitar a solução, considere inicialmente os casos particulares. Há quatro funções unárias, isto é: 2^{2^1}. Há dezesseis funções binárias, isto é $2^{2^2} = 2^4$. Em geral, há 2^{2^n} funções n-árias. Você pode conferir essa resposta analisando a relação entre as funções de verdade n-árias e as tabelas verdade. Ou, para ser mais rigoroso, você pode demonstrar esse resultado utilizando o princípio da indução.

6

Um sistema axiomático formal na Lógica Proposicional

Errata

No Exemplo 6.1, o conjunto de hipóteses β não é vazio. A forma correta desse exemplo é a seguinte.

Exemplo 6.1 (prova no sistema P_a). Consideramos neste exemplo uma prova em que o conjunto de hipóteses β é dado por: $\beta = \{P \rightarrow P\}$.

...

...

Seja:

$H_4 = \neg P \vee P$.

Observe que H_4 pode ser denotada por $(P \rightarrow P)$, ou seja, H_4 é uma hipótese.

$H_4 = P \rightarrow P$.

...

...

Conclusão: como $\beta = \{P \rightarrow P\}$, então temos uma prova de $(Q \vee P) \vee \neg P$ a partir dos axiomas de P_a e da hipótese $\{P \rightarrow P\}$. Nesse caso, a seqüência de fórmulas H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 é a prova de $(Q \vee P) \vee \neg P$. $\square$

xxxxxxxxxxxxxxxx

No Exemplo 6.2 substitua a linha

$H_2 = G_3$, ou seja $H_1 = P_1$;

por

$H_2 = G_3$, ou seja $H_2 = P_1 \rightarrow Q$;

e

$H_6 = G_6$, ou seja $H_6 = P_6 \rightarrow P$;

por

$H_6 = G_6$, ou seja $H_6 = P_4 \rightarrow P$;

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na demonstração da Proposição 6.5, substitua na linha 10. "$ex5$" por "$ex6$".

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na demonstração da Proposição 6.11, substitua

6. $\vdash C \rightarrow (B \vee C)$ $\quad pr6.3, 2., pr6.10$

por

6. $\vdash C \rightarrow (B \vee C)$ $\quad pr6.3, 1., pr6.10$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na demonstração da Proposição 6.13, substitua "$pr12$" por "$pr6.12$"

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na demonstração da Proposição 6.14, substitua "$pr12$" por "$pr6.12$"

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 100, na primeira linha do primeiro parágrafo, onde está escrito $I[H_i] = T$, troque por $I_i[H] = T$. Como resultado, temos a frase:

"Como H é uma tautologia, então para qualquer interpretação I_i temos $I_i[H] = T$."

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 102, substitua

"Portanto, para qualquer símbolo P_i há $2^{n-1}2^{n-1}$ pares de interpretações complementares, ou seja $2^{2(n-1)}$."

por

"Portanto, para qualquer símbolo P_i há 2^{n-1} pares de interpretações complementares."

xxxxxxxxxxxxxxxx

Modifique o item d) do exercício 3. para:

3. Considere as afirmações ...
   d) Se $\beta \cup \{H\} \vdash G$ então $\beta \vdash H \rightarrow G$.

xxxxxxxxxxxxxxxx

Caso você encontre algum erro nesse capítulo ou tenha algum comentário a fazer, envie-o para nunes@ufu.br.

Muito obrigado.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1. É necessário demonstrar que se H e $H \rightarrow G$ são tautologias, então G é tautologia. Para demonstrar, basta utilizar a definição de tautologia. $\Vdash H \Leftrightarrow \forall\ I, I[H] = T$ e $\Vdash (H \rightarrow G) \Leftrightarrow \forall\ I$, se $I[H] = T$, então $I[G] = T$

Portanto, $\forall\ I, I[H] = T$ e $\forall\ I$, se $I[H] = T$, então $I[G] = T$. Conclui-se que $\forall\ I, I[G] = T$. Portanto G é tautologia.

2. a) Não considera o significado das fórmulas.
   - b) Não, pois nem toda fórmula de β é uma tautologia.
   - c) As fórmulas de β utilizadas na derivação $\beta \vdash H$ devem ser tautologias.
   - d) Sim. Pelo teorema da completude $\vdash H$, logo $\beta \vdash H$ para qualquer conjunto β.
3. a) Suponha $\beta \vdash H$. Logo, existe uma prova de H a partir de β . Para demonstrar $\varphi \vdash H$ basta considerar a prova de H a partir de β . Como $\beta \subset \varphi$, esta prova demonstra que $\varphi \vdash H$.
   - b) Falso, pois se $\beta \vdash H$, então existe prova de H a partir de β. Como $\beta \supset \varphi$, então não necessariamente existe prova de H a partir de φ.
   - c) Demonstre inicialmente que se

     $\beta \vdash (H \land G)$, então $\beta \vdash H$ e $\beta \vdash G$

     Em seguida, utilize *Modus Ponens.*
   - d) Utilizando o teorema da dedução tem-se $\beta \vdash H \rightarrow H$. Observe que $H \rightarrow H$ pode ser uma conseqüência lógica de β sem que $H \rightarrow G$ seja uma conseqüência lógica de β.
   - e) Se $\beta \vdash H$ e $\varphi \vdash H \rightarrow G$, então $\beta \cup \varphi \vdash H$ e $\beta \cup \varphi \vdash H \rightarrow G$. Utilizando a regra Modus Ponens, conclui-se $\beta \cup \varphi \vdash G$.
   - g) Suponha que β seja satisfatível. Logo, $\exists$ interpretação I tal que $I[\beta] = T$. Mas se $\beta \vdash (P \land \neg P)$, então $I[(P \land \neg P)] = T$, o que é absurdo. Portanto β é insatisfatível.
   - i) Se $\beta \cap \varphi \vdash H$, então como $(\beta \cap \varphi) \subset \varphi$ tem-se $\varphi \vdash H$.
   - j) Falso.
5. Sim. Neste caso o conjunto β deve ser insatisfatível. Basta considerar por exemplo $\beta = \{H, \neg H\}$.
6. Considere o roteiro.

1.	$\vdash$	$Ax_3, H = \neg P, G = \neg\neg\neg P$ e $E = P$
2.	$\vdash$	$pr3, pr4$
3.	$\vdash$	$MP, 1., 2.$
4.	$\vdash$	$pr2,$
5.	$\vdash$	$MP, 3., 4.$

7. Utilize o resultado da Proposição 6.6 e *Modus Ponens.*
8. Este exercício é uma generalização da Proposição 6.8. Utilize a indução finita para demonstrar este caso geral.
9. Como P_b é um sistema axiomático, ele contém pelo menos um axioma. Seja A um axioma de P_b, logo $\vdash A$. Seja B uma fórmula qualquer, então a partir de $\vdash (H \rightarrow (H \rightarrow G))$, utilizando a Regra

da Substituição conclui também $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B))$ e $(A \rightarrow (A \rightarrow \neg B))$. Aplicando Modus Ponens a tais resultados e $\vdash$A, é possível concluir $\vdash B$ e $\vdash \neg B$. Portanto, P_b é inconsistente.

10. Considere o caso particular do princípio da indução onde $A(n) \equiv$ a asserção $B[\beta \vdash H]$ sobre a prova $\beta \vdash H$ é válida quando o *comp* $[\beta \vdash H] = n$.

    b) Basta observar que nesse caso $A(n)$ é um caso particular do caso mais geral considerado no princípio da indução.

13. Considere $A(n) \equiv$ "O teorema da correção é válido para provas de comprimento n".

7

Tableaux semânticos e resolução na Lógica Proposicional

Errata

Na página 110, na Definição 7.2, a regra R_6 deve ser escrita como:

$$R_6 = \begin{array}{c} \neg(A \land B) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg A \qquad \neg B \end{array}$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 115, no *tableau* da Figura 7.8, a linha 5. deve ser substituída por:

5. $\neg\neg P$ $\qquad R_1$, 2.

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 116, na demonstração do Teorema da Correção, a regra R_4 deve ser substituída por:

$$R_4 = \frac{A \leftrightarrow B}{(A \land B) ou (\neg A \land \neg B)}$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 117, no Tableau 7.1, substitua na linha 3., "$\neg\neg P$" por "$\neg\neg P_1$"

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 119, substitua o símbolo $\Vdash$ por $\vDash$ no parágrafo:

"A demonstração de que a fórmula H é uma tautologia, isto é $\vDash H$, segue o desenvolvimento dos exemplos anteriores."

obtendo,

A demonstração de que a fórmula H é uma tautologia, isto é $\vDash H$, segue o desenvolvimento dos exemplos anteriores.

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 127, na segunda fórmula, no topo da página, devemos escrever:

$$(P_1 \lor P_2 \lor P_3) \land (\neg P_1 \lor P_4) \land (\neg P_2 \lor P_4) \land (\neg P_3 \lor P_4) \land \neg P_4.$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 129, a forma clausal $\neg H_c$, escrita na notação de conjuntos é dada por:

$$\neg H_c = \{\{P\}, \{Q\}, \{\neg P, \neg R, \neg P_1\}, \{\neg Q_1, \neg R\}, \{\neg Q, Q_1\}, \{P_1\}\}.$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Caso você encontre algum erro nesse capítulo ou tenha algum comentário a fazer, envie-o para nunes@ufu.br.

Muito obrigado.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1. Para demonstrar por exemplo que $\{R_1, R_2, R_5\}$ implica R_3, demonstre que o "denominador" de R_3 pode ser obtido a partir de seu "numerador" utilizando apenas as regras R_1, R_2 e R_3.

   Transforme o "numerador" $(A \rightarrow B)$ em $(\neg A \lor B)$.

4. Em cada item deste exercício, as sentenças devem, inicialmente, ser representadas na Lógica Proposicional.

   Nesta representação, sentenças do tipo "se A então B", "B se A" são representadas por "$A \rightarrow B$".

   Observe que em sentenças do tipo "se A, então B" a palavra "então" pode ser omitida e, nesse caso, temos uma sentença da forma "Se há pouco sangue na cena do crime, o matador é um profissional".

   Após a representação de cada conjunto de sentenças, obtemos, por exemplo, um conjunto da forma $\beta = \{H, G, E\}$. Nesse caso,

   β não é satisfatível $\Leftrightarrow$

   $$\begin{aligned} &\forall int.I, I[H] = F \text{ ou } I[G] = F \text{ ou } I[E] = F \Leftrightarrow \forall int.I, I[H \land G \land E] = F \\ &\Leftrightarrow \forall int.I, I[\neg(H \land G \land E)] = T \\ &\Leftrightarrow \neg(H \land G \land E) \text{ é tautologia.} \end{aligned}$$

   Portanto, em cada item se a negação da conjunção das afirmações for uma tautologia, o conjunto de afirmações não é satisfatível. Caso contrário ele é satisfatível.

   Para demonstrar se $\neg(H \land G \land E)$ é tautologia utilizando tableaux semânticos basta iniciar o tableau com a fórmula $(H \land G \land E)$. Para demonstrar se $\neg(H \land G \land E)$ é tautologia utilizando resolução deve-se iniciar a resolução com o conjunto $\{H, G, E\}$.

5. Em cada item deste exercício, as sentenças devem ser inicialmente representadas na Lógica Proposicional. Veja as observações do exercício anterior.

   Em vários itens temos um conjunto de sentenças seguidas por uma conclusão, que geralmente ocorre após a palavra "portanto". A representação final nestes casos são sentenças do tipo

   $$(H \land G \land E) \to A.$$

   Utilizando tableau, a validade da fórmula é demonstrada iniciando o tableau com

   $$\neg((H \land G \land E) \to A).$$

   No caso da resolução é necessário determinar a forma clausal de

   $$\neg((H \land G \land E) \to A)$$

   que é equivalente a

   $$(H \lor G \lor E \lor \neg A).$$

   Observe que a última fórmula é transformada em uma fórmula clausal se H, G, E e $\neg A$ são transformada em disjunções de literais.

6. Considere $B[E] \equiv$ "$\exists$fórmula E_c tal que E_c está na forma clausal e E_c equivale a E".

7. Suponha que existe uma prova de H por resolução. Logo, existe uma expansão por resolução fechada a partir de $\neg H_c$ onde $\neg H_c$ é a forma clausal de $\neg H$.

   Nesse caso, $\neg H$ equivale a $\neg H_c$. Portanto, H é tautologia $\Leftrightarrow$ H_c é tautologia ou equivalentemente, $\neg H$ é contraditória $\Leftrightarrow$ H_c é contraditória.

   Devemos demonstrar que se a expansão por resolução a partir de $\neg H_c$ é fechada, então $\neg H_c$ é contraditória.

   Logo, concluímos que $\neg H$ é contraditória e H é tautologia.

   Considere então que a expansão por resolução a partir de $\neg H_c$ é fechada. Suponha por absurdo que $\exists$ I tal que $I[\neg H_c] = T$.

   Como a regra da resolução mantém a validade, então o resultado de sua aplicação sobre $\neg H_c$ deve ser também uma fórmula cuja interpretação é igual a T.

   Como a expansão é fechada, a última cláusula é vazia. Mas a cláusula vazia somente é obtida aplicando a resolução a um conjunto do tipo: $\{A, \neg A\}$.

   Isto significa que $I[A \land \neg A] = T$, ou seja, $I[A] = T$ e $I[\neg A] = T$ o que é uma absurdo.

   Portanto, se $I[\neg H_c] = T$, então obtémos um absurdo.

   Logo, não existe interpretação I tal que $I[\neg H_c] = T$, isto é $\forall$ $I, I[\neg H_c] = F$. Conclui-se que H_c é tautologia e portanto que H é tautologia.

   Nota. Uma demonstração mais rigorosa do teorema da correção deve usar indução finita.

8. a) Verdadeira pois a partir de um ramo aberto do tableau é possível determinar uma interpretação I tal que $I[H] = F$.

   b) Verdadeira. Se não existe tableau associado a $\neg H$ com ramo fechado, então todo tableau tem ramo aberto, logo, pelo item a), H não é tautologia.

   c) Verdadeira. A justificativa é a mesma do item a).

d) Falsa. Se existe tableau associado a $\neg H$ com ramo fechado, isto não significa que não haja ramo aberto. Caso haja ramo aberto, então H não é tautologia.

e) Verdadeira. Se existe tableau associado a $\neg H$ com todos os ramos fechados, então tem-se uma prova de H utilizando tableau. Logo, pelo teorema da correção,$\neg H$ é tautologia.

f) Falsa. Como todo tableau associado a $\neg H$ possui ramo aberto, então, conforme item a), H não é tautologia.

g) Falsa. Se todo tableau associado a $\neg H$ possui ramo aberto, então H não é tautologia. Mas isto não significa que H é contraditória.

h) Falsa. Considere a fórmula H tal que $H = P$. Nesse caso, o tableau associado a $\neg H$ possui todos os ramos abertos. Entretanto H não é contraditória.

i) Falsa.

j) Falsa. Se existe tableau associado a $\neg H$ com ramo fechado, pode ocorrer o caso em que todos os ramos são fechados. Nesse caso, H é tautologia.

k) Falsa. Se existe tableau associado a $\neg H$ com todos os ramos fechados, então, pela mesma justificativa do item e), H é tautologia.

l) Falsa. Se todo tableau associado a $\neg H$ possui ramo fechado e aberto, então, devido à presença de ramo aberto, H não é tautologia, podendo ser satisfatível, contraditória ou contigência.

m) Verdadeira. Se toda expansão por resolução associada a $\neg H_c$ é aberta, significa que não existe expansão associada a $\neg H_c$ fechada. Logo, não é possível obter uma contradição de $I[H_c] = T$ sendo $I[H_c] = F \forall\ I$, isto é, H_c e H não são tautologias.

n) Verdadeira. Se não existe expansão por resolução associada a $\neg H_c$ fechada, significa que todas são abertas. Logo, H não é tautologia.

o) Falsa. Se existe expansão por resolução associada a $\neg H_c$ fechada, então existe uma prova por resolução de H. Logo, pelo teorema da correção, H é tautologia.

p) Verdadeira. Se existe expansão por resolução associada a $\neg H_c$ fechada, existe uma prova de H por resolução. Logo, H é tautologia.

q) Verdadeira. Se existe expansão por resolução associada a H_c fechada, então, conforme item p), $\neg H$ é tautologia. Logo, H é contraditória.

r) Falsa. Se toda expansão por resolução associada a H_c é aberta, então $\neg H$ não é tautologia. Isto não significa e que Hseja tautologia.

s) Falsa. Se não existe expansão por resolução associada a H_c fechada, então todas são abertas. Logo, pelo item r), $\neg H$ não é tautologia. Isto não significa que H seja contraditória.

A linguagem da Lógica de Predicados

Errata

Na página 148, substitua a fórmula

$$H = ((((\forall x)((\exists y)p(x,y))) \rightarrow (\exists z)(\neg q(z))) \wedge r(y))$$

por

$H = ((((\forall x)((\exists y)p(x,y))) \rightarrow ((\exists z)(\neg q(z))) \wedge r(y)).$ $\square$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 148, substitua o início do parágrafo

"**Correspondência entre quantificadores.** Conforme é analisado na Lógica Proposicional, os conectivos $\neg$, $\wedge$,$\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ podem ser definidos a partir dos conectivos $\neg$ e $\vee$."

por

"**Correspondência entre quantificadores.** Conforme é analisado na Lógica Proposicional, os conectivos $\wedge$,$\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ podem ser definidos a partir dos conectivos $\neg$ e $\vee$. "

xxxxxxxxxxxxxxxx

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

9

A semântica da Lógica de Predicados

Errata

Na página 167, substitua

"Nesse caso, $I[H] = T$ significa dizer que todo aluno de Ciência da Computação é inteligente."

por

"Nesse caso, $I[H_1] = T$ significa dizer que todo aluno de Ciência da Computação é inteligente."

xxxxxxxxxxxxxxxx

Na página 148, substitua

$$
\begin{aligned}
I[H_2] = F &\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = T \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in alunos - CC,\ d \ \text{ é inteligente} \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in alunos - CC,\ p_I(d) = T \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in alunos - CC,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T
\end{aligned}
$$

por

$$
\begin{aligned}
I[H_2] = T &\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = T \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in alunos - CC,\ d \ \text{ é inteligente} \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in alunos - CC,\ p_I(d) = T \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in alunos - CC,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T
\end{aligned}
$$

xxxxxxxxxxxxxxxx

Nas páginas 167 e 168, substitua "$aluno - CC$" por "$alunos - CC$".

xxxxxxxxxxxxxxxx

Sugestões e soluções de exercícios selecionados