POLINÔMIOS

Definição: Um **polinômio** de grau n é uma função P:C? C que pode ser escrita na forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ onde cada a_i é um número complexo (ou real) tal que n é um número natural e a_n ? 0.

Exemplos:

1) $P(x) = x^3+2x^2 - 3x + 10$ é um polinômio de grau 3. Note que segundo a notação acima temos $a_0=10$, $a_1 = -3$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 1$.
2) $Q(x) = x^2 + 1$ é um polinômio de grau 2 tal que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$.
3) $R(x) = 7$ é um polinômio de grau zero tal que $a_0=7$.

Observe que $P(x) = x^2 + x + x^{½} +2$ não é um polinômio devido ao expoente ½. Similarmente, $Q(X) = x^3 +2x +x^{-2} +3$ não é polinômio devido ao expoente -2.

Definição: Dado o número complexo (ou real) a, o número P(a) é chamado **valor numérico** do polinômio P(x) em x = a. Além disso, se P(a) = 0 então dizemos que a é uma **raiz do polinômio** P(x).

Exemplos:

1) Se $P(x) = x^2 -3x + 2$ então $P(3) = 3^2 - 3\ 3 + 2 = 9 – 9 + 2 = 2$ é o valor numérico de P(x) em x=3. Além disso, x = 1 e x = 2 são raízes do polinômio P(x) já que $P(1) = 1^2 – 3\ 1 + 2 = 1 – 3 +2=0$ e $P(2) = 2^2 – 3\ 2 + 2 = 4 – 6 + 2 = 0$.

2) As raízes do polinômio $Q(x) = x^2 +1$ são os números complexos i e –i, já que
$Q(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 =0$ e $Q(-i) = (-i)^2 + 1 = -1 + 1 =0$.

Teorema: Se x = a é uma raiz do polinômio P(x) então P(x) pode ser reescrito como o produto de x - a por um certo polinômio Q(x), ou seja, se x = a é raiz de P(x) então existe um polinômio Q(x) tal que $P(x) = (x-a)Q(x)$.

Exemplo: Já vimos que x = 1 é raiz do polinômio $P(x) = x^2 -3x + 2$ então P(x) pode ser reescrito por $P(x) = (x-1)Q(x)$. No caso, o polinômio Q(x) é dado por $Q(x) = x-2$, já que $P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Observe que o polinômio Q(x) pode ser encontrado fazendo-se a divisão do polinômio P(x) pelo polinômio x-a, ou seja, $Q(x) = \frac{P(x)}{x-a}$. No exemplo acima, $Q(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = x - 2$.

Divisão de polinômios - dispositivo de Briot-Ruffini

Quando dividimos dois polinômios, obtemos um quociente e um resto da divisão. Isto é, se dividirmos P(x) por D(x) (o divisor), vamos obter dois novos polinômios Q(x) (o quociente) e R(x) (o resto), de modo que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

Existem algumas técnicas para dividirmos polinômios. Uma das mais utilizadas é o dispositivo de Briot-Ruffini. Esta é uma técnica prática, mas que só deve ser utilizada para efetuarmos a divisão do polinômio P(x) por um polinômio da forma x-a. A explicação do dispositivo será feita através de um exemplo.

Exemplo: Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio P(x) = x^2 -3x + 2 pelo polinômio x-1.

A raiz do polinômio x-1 é x=1.

Os coeficientes do polinômio P(x) = x^2 -3x + 2 são 1, -3 e 2, nesta ordem. Escreva estes números em uma tabela do seguinte modo:

raiz de x-1	coeficientes de P(x)		
1	1	-3	2

Copie o primeiro coeficiente de P(x) na linha abaixo:

1	1	-3	2
	1		

Multiplique a raiz de x-1 (ou seja, 1) pelo número que foi copiado na segunda linha (ou seja, 1) e some com o segundo coeficiente de P(x) (ou seja, -3). Coloque o resultado na segunda linha, abaixo do segundo coeficiente de P(x).

Temos: $1 \cdot 1 + (-3) = 1 - 3 = -2$ e na tabela:

1	1	-3	2
	1	-2	

Repita o procedimento para o próximo número: multiplique a raiz de x-1 (ou seja, 1) pelo número que foi copiado na segunda linha (ou seja, -2) e some com o terceiro coeficiente de P(x) (ou seja, 2). Coloque o resultado na segunda linha, abaixo do terceiro coeficiente de P(x).
Temos: $1 \cdot (-2) + 2 = -2 + 2 = 0$ e na tabela:

1	1	-3	2
	1	-2	0

Para ler o resultado obtido, temos que separar o último número calculado (ou seja, 0). Este é o resto da divisão. Os outros números calculados, são os coeficientes do quociente da divisão, na ordem em que aparecem. Note que se o grau do quociente é um a menos que o grau de P(x), por isso temos um coeficiente a menos. No exemplo acima, os coeficientes do quociente são 1 e -2, ou seja, o quociente é o polinômios 1x + (-2), ou x-2.

Assim, ao dividirmos P(x) = x^2 -3x + 2 pelo polinômio D(x) = x – 1, vamos obter o quociente Q(x) = x – 2 e o resto R(x) = 0. De modo que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$, isto é, $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) + 0$.

Exemplo: Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio P(x) = -4x^3 +2x + 10 pelo polinômio x + 2.

Note que
A raiz do polinômio x+2 é x = -2.
Os coeficientes do polinômio P(x) = -4x^3 +2x + 10 = -4x^3 + 0x^2 + 2x + 10 são -4, 0, 2 e 10 nesta ordem. (lembre de considerar o coeficiente de x^2).

-2	-4	0	2	10
	-4	8	-14	38

Assim, ao dividirmos P(x) = -4x^3 +2x + 10 pelo polinômio D(x) = x + 2, vamos obter o quociente Q(x) = -4x^2 + 8x – 14 e o resto R(x) = 38. De modo que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$, isto é, $-4x^3 + 2x + 10 = (x+2)(-4x^2 + 8x - 14) + 38$.

Exemplo: Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio P(x) = x^4 - 1 pelo polinômio D(x) = x^2 -1.
Note que não podemos aplicar diretamente o dispositivo de Briott-Ruffini, já que o polinômio D(x) = x^2 -1 não é da forma x-a. Mas, sabemos que D(x)=x^2 -1=(x+1)(x-1), e então para dividir do polinômio P(x) = x^4 - 1 pelo polinômio D(x) = x^2 -1, basta dividir P(x) = x^4 -1 pelo polinômio x + 1, e em seguida dividir o resultado obtido por x -1.

Dividindo dividir P(x) = x^4 - 1 pelo polinômio x + 1:

-1	1	0	0	0	-1
	1	-1	1	-1	0

Ou seja, $\frac{x^4 - 1}{x + 1} = x^3 - x^2 + x - 1$, e o resto da divisão foi zero.

O próximo passo é dividir x^3 - x^2 + x - 1 por x – 1:

1	1	-1	1	-1
	1	0	1	0

Ou seja, $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 1$ e o resto da divisão foi zero.

Portanto $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^4 - 1}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 1$.

Divisão de polinômios - Divisão pelo método tradicional

Muitas vezes, não podemos aplicar o dispositivo acima, ou sua aplicação passa a ser trabalhosa. Nesses casos, podemos optar por fazer a divisão tradicional de polinômios, que será exemplificada a seguir.

Exemplo: Divida $3x^3$ - $9x^2$ + 9x - 3 por x^2 - 2x + 1.

Primeiro, organizamos os dois polinômios como em uma conta usual de divisão.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 - 9x^2 + 9x - 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Abaixo do polinômio x^2 - 2x + 1 aparecerá o quociente. Para encontrá-lo, temos que ver por quem devemos multiplicar x^2 (o "x" de maior grau de x^2 - 2x + 1, juntamente com seu coeficiente) para encontrarmos $3x^3$ (o "x" de maior grau de $3x^3$ - $9x^2$ + 9x - 3, juntamente com seu coeficiente). No caso, multiplicaremos por "3x". Então, abaixo de $3x^3$ - $9x^2$ + 9x – 3 colocaremos o resultado da multiplicação de 3x por x^2 - 2x + 1, invertendo os sinais da resposta:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 - 9x^2 + 9x - 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -3x^3 + 6x^2 - 3x & 3x \end{array}$$

Na coluna da esquerda faremos a soma dois polinômios.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 \ -9x^2 \ +9x-3 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} -3x^3+6x^2 \ -3x & 3x \\ \hline \quad -3x^2+6x-3 & \end{array}$$

E, repetimos o procedimento, buscando por "quem" devemos multiplicar x^2 para obtermos $-3x^2$, ou seja, o "-3", que será colocado junto ao 3x. O resultado da multiplicação de -3 por $x^2 - 2x + 1$ terá os sinais invertidos e o polinômio resultante colocado abaixo de $-3x^2 +6x -3$, para então ser somado a este:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 \ -9x^2 \ +9x-3 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} -3x^3+6x^2 \ -3x & 3x-3 \\ \cline{1-1} \quad -3x^2+6x-3 & \\ \quad 3x^2 \ +6x-3 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

O procedimento se encerra quando o polinômio da "esquerda" (que será o resto da divisão) tiver grau menor que do polinômio $x^2 - 2x + 1$. Assim, pelo procedimento acima, temos que o resto da divisão de $P(x)=3x^3 \ -9x^2 + 9x – 3$ por $D(x)=x^2 - 2x + 1$ é zero ($R(x)=0$) e o quociente é $Q(x)=3x -3$. Assim, escrevendo, como antes, na forma $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$, temos

$3x^3 \ -9x^2 + 9x – 3 = (x^2 - 2x + 1)(3x -3)+0$, ou seja, $3x^3 \ -9x^2 + 9x – 3 = (x^2 - 2x + 1)(3x -3)$.

Note que neste caso, ao dividirmos $3x^3 \ -9x^2 + 9x – 3$ por $x^2 - 2x + 1$, obtemos $3x -3$, ou seja,

$$\frac{3x^3 - 9x^2 + 9x + 3}{x^2 - 2x + 1} = 3x - 3.$$

Exemplo: Divida $6x^3 – x + 10$ por $2x^2 – 3x$:

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - x + 10 & 2x^2 - 3x \\ \cline{2-2} \end{array}$$

O procedimento é análogo ao exemplo anterior, lembrando que para somar polinômios temos que somar os coeficientes dos termos com o mesmo grau, isto é, somar x^3 com x^3, x^2 com x^2...

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 \qquad\quad - x + 10 & 2x^2 - 3x \\ \cline{2-2} -6x^3+9x^2 & 3x \\ \cline{1-1} \quad 9x^2 \ - x \ +10 & \end{array}$$

E, então:

$$
\begin{array}{l|l}
6x^3 \qquad - x + 10 & 2x^2 - 3x \\
\cline{2-2}
-6x^3 + 9x^2 & 3x + 4,5 \\
\cline{1-1}
\quad 9x^2 - x \quad +10 & \\
\quad -9x^2 + 13,5x & \\
\cline{1-1}
\qquad 12,5x + 10 &
\end{array}
$$

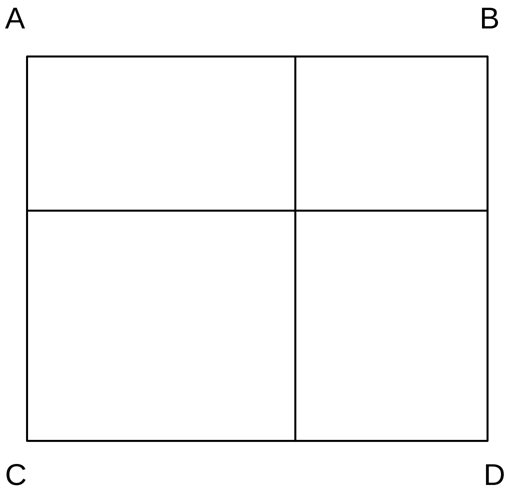
Como o grau de $12,5x + 10$ é menor do que o grau de $2x^2 - 3x$ então a divisão está terminada e temos que $6x^3 - x + 10 = (2x^2 - 3x)(3x + 4,5) + 12,5x + 10$.

PRODUTOS NOTÁVEIS

Na multiplicação de expressões algébricas, algumas vezes é possível determinar o produto sem efetuar a operação. Nesses casos, os resultados são conhecidos como produtos notáveis.

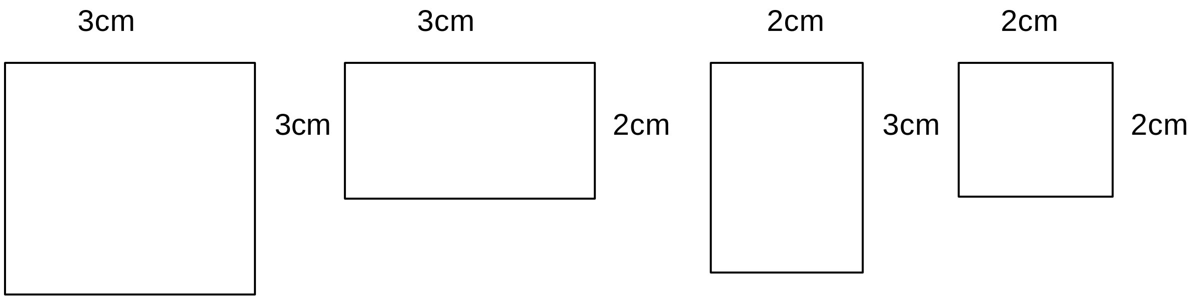
<u>Quadrado da soma de dois termos ou quadrado perfeito</u>

Observe a figura ABCD formada por dois quadrados e dois retângulos. O quadrado ABCD tem 5cm de lado e sua área é:



$5^2 = 25cm^2$

Podemos desdobrar o quadrado ABCD em quatro quadriláteros:



Comparando a área do quadrado ABCD com a soma das áreas dos quatros quadriláteros, podemos escreve, $(3 + 2)^2 = 3^2 + 2 . 3 . 2 + 2^2$
Portanto:

O quadrado da soma de dois termos $(a + b)^2$ é igual ao quadrado do primeiro termo (a^2) , mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo (+2ab), mais o quadrado do segundo termo ($+b^2$).

Escrevemos:

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Exemplos:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$(2x^3 + 5)^2 = (2x^3)^2 + 2 \cdot (2x^3) \cdot 5 + 5^2 = 4x^6 + 20x^3 + 25$$

Exemplo: Fatore $4x^2+4x+1$.

Note que $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x+1)^2$

Assim, $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$.

<u>Quadrado da diferença de dois termos</u>

O quadrado da diferença de dois termos $(a - b)^2$ é igual ao quadrado do primeiro termo (a^2), menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo (-2ab), mais o quadrado do segundo termo ($+b^2$).

Escrevemos:

$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Exemplos:

$$(x-4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$(2y-3)^2 = (2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 3 + 3^2 = 4y^2 - 12y + 9$$

<u>Produto da soma pela diferença:</u>

O produto da soma pela diferença de dois termos (a+b) . (a-b) é igual ao quadrado do primeiro termo (a^2) menos o quadrado do segundo termo ($-b^2$).

Escrevemos:

$$\mathbf{(a+b)\ (a-b) = a^2 - b^2}$$

Note que expressão acima é verdadeira visto que se fizermos a distributiva de (a – b)(a + b) obteremos $(a-b)(a+b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

Exemplos:

$(x-2).\ (x+2)= x^2 - 2^2 = x^2 - 4$

$(x-y)\ (x+y)=x^2 - y^2$

$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x^2)^2 - 1 = x^4 - 1^2$

<u>Cubo da soma de dois termos ou cubo perfeito</u>

Observe o desenvolvimento das potências a seguir:

$(x+1)^3 \quad = (x + 1)^2\ (x+1)= (x^2 +2x +1)\ (x+1)=$

$= x^2 .x + x^2 .1 + 2x . x + 2x . 1 + 1.x + 1.1=$

$= x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + x + 1=$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

O cubo da soma de dois termos $(a+b)^3$ é igual ao cubo do primeiro termo (a^3), mais três vezes o produto do quadrado do primeiro termo pelo segundo ($+3\ a^2b$), mais três vezes o produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo ($+3\ ab^2$), mais o cubo do segundo termo ($+b^3$).

Escrevemos:

$$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3\ a^2b + 3\ ab^2 + b^3}$$

Exemplos:

$(2+x)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot x^2 + x^3 = 8 + 12x + 6x^2 + x^3$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = x^3 + x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$$

<u>Cubo da diferença de dois termos</u>

Observe o desenvolvimento a seguir:

$(x - 1)^3 \quad = (x-1)^2\ (x-1) = (x^2 - 2x + 1)\ (x-1)=$

$= x^2 .x - x^2 .1 - 2x . x - 2x(-1) + 1.x + 1. (-1)=$

$= x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x -1= x^3 - 3x^2 + 3x -1$

O cubo da diferença de dois termos (a – b)^3 é igual ao cubo do primeiro termo (a^3), menos três vezes o quadrado do primeiro termo pelo segundo (-3 a^{2}b), mais três vezes o primeiro termo pelo quadrado do segundo (+3 ab^2), menos o cubo do segundo termo (-b^3).

Escrevemos:

$$\mathbf{(a - b)^3 = a^3 - 3\,a^2b + 3\,ab^2 - b^3}$$

Exemplos:

$(y-2)^3 = y^3 - 3\cdot y^2 \cdot 2 + 3\cdot y\cdot 2^2 - 2^3 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8$

$(1-b)^3 = 1^3 - 3\cdot 1^2\cdot b + 3\cdot 1\cdot b^2 - b^3 = 1 - 3b + 3b^2 - b^3$

FATORAÇÂO

Definição: Fatorar é transformar uma expressão algébrica em um produto de fatores.

Em geral, quando se é pedido para "fatorar" uma expressão, queremos que a expressão seja reescrita como produto de fatores os mais simples possíveis.

Temos algumas regras muito utilizadas para fatorar polinômios e que merecem destaque.

Fator Comum

ax + bx = (a+b) x

Ex: $2x^2 + 4x - 6xy = 2x(x + 2 - 3y)$

(fator comum = 2x)

Agrupamento

ax + bx + ay + by = (a+b) x + (a+b) y = (a+b) (x+y)

Ex: $2ay^2 + bx + 2by^2 + ax = 2y^2(a + b) + x(b + a) = (a + b)(2y^2 + x)$

Trinômio Quadrado Perfeito

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Ex: $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = (x+3)^2$

$4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2 = (2x-1)^2$

Trinômio do Segundo Grau

Se $\begin{cases} S = a+b \\ P = a.b \end{cases}$ então $x^2 + Sx + P = (x+a)(x+b)$

Ex: $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$, já que $5 = 2+3$ e $6 = 2 \cdot 3$.

Diferença de dois Quadrados

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

Ex: $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x+7)(x-7)$

$9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x+1)(3x-1)$

$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$

Soma e Diferença de Dois Cubos

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

Ex: $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

$8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x-3)\left((2x)^2 + 2x \cdot 3 + 3^2\right) = (2x-3)(4x^2 + 6x + 9)$

Cubo Perfeito

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x+y)^3$

$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3$

Ex: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 = (x+1)^3$

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 = (x-2)^3$

Polinômio de segundo grau

$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$, onde r_1 e r_2 são as raízes (complexas ou reais) do polinômio $ax^2 + bx + c$, que podem ser encontradas facilmente pela fórmula de Baskara

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ex: Como $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$ são raízes do polinômio $x^2 - 5x + 6$ então $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

Como $r_1 = -1$ e $r_2 = 4$ são raízes do polinômio $x^2 - 3x - 4$ então $x^2 - 3x - 4 = (x - (-1))(x-4) = (x+1)(x-4)$.

SIMPLIFICAÇÔES DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

MDC (máximo divisor comum) é dado pelo produto dos fatores com os menores expoentes.

MMC (mínimo múltiplo comum) é dado pelo produto dos fatores comuns tomados com os maiores expoentes.

Exemplo:
Simplificar, efetuando as operações indicadas:

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}+\frac{2xy}{x^2-y^2}= \qquad \text{MMC} = (x+y)(x-y)=\left(x^2-y^2\right)$$

$$=\frac{x(x-y)}{x^2-y^2}+\frac{y(x+y)}{x^2-y^2}+\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{x^2-xy+xy+y^2+2xy}{x^2-y^2}=\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{(x+y)(x+y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{x+y}{x-y}$$

NÃO COMETAM MAIS ESTES ERROS

	CERTO	ERRADO
$(a-b)^2$	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$	$(a-b)^2=a^2-b^2$
$(a+b)^2$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^2=a^2+b^2$
$-(a+b)$	$-(a+b)=-a-b$	$-(a+b)=-a+b$
$-(a-b)$	$-(a-b)=-a+b$	$-(a-b)=-a-b$
$\frac{a+b}{b}$	$\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{a}{b}+1$	$\frac{a+b}{b}=a$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$	$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b+a}{ab}$	$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$
$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$	$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$	$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a-b}$
$.\frac{a-b}{a}$	$\frac{a-b}{a}=\frac{a}{a}-\frac{b}{a}=1-\frac{b}{a}$	$\frac{a-b}{a}=-b$
$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a+b}=(a+b)^{1/2}$	$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Bibliografia:

1) Iezzi G, Dolce O, Gegenszain D, Périgo R. Matemática. Volume único. Atual editora. São Paulo, 2002.
2) Iezzi G. Fundamentos da Matemática Elementar – vol.6. Atual editora. São Paulo, 2000.

EXERCÍCIOS SOBRE POLINÔMIOS

1) Encontre as raízes dos polinômios abaixo.

a) $P(x) = x^2 + 2x - 8$

b) $G(x) = x^3 - 2x^2 + x$

c) $F(x) = x^2 - 3x + 2$

2) Divida o polinômio P(x) pelo polinômio D(x) e apresente o resultado na forma $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ onde R(x) é o resto e Q(x) é o quociente.

a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ e $D(x) = x - 1$

b) $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ e $D(x) = x + 2$

c) $P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$ e $D(x) = x^2 - 2x + 3$

d) $P(x) = x^4 + x^3 - 2$ e $D(x) = x^2 - x + 5$

3) Utilize produtos notáveis para expandir as expressões abaixo.

a) $(x + 1)^2$

b) $(a + 5)^2$

c) $(a^2 + 1)^2$

d) $(3y + 2)^2$

e) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{4}\right)^2$

f) $(2a + 10)^2$

g) $(x^2 + y^2)^2$

h) $(2xy + 5)^2$

i) $(2 - s)^2$

j) $(2m - n)^2$

k) $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^2$

l) $(a^2 - b^2)^2$

m) $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2$

n) $(a^3 - 3ab^2)^2$

o) $(2+m)\,(2-m)$

p) $\left(\frac{c}{3} + \frac{d}{2}\right)\left(\frac{c}{3} - \frac{d}{2}\right)$

q) $(1 - 3v)\,(1 + 3v)$

r) $(1 + a)^3$

s) $\left(\frac{x}{2} + \frac{s}{3}\right)^3$

t) $(2c + 3d)^3$

u) $(2 - x)^3$

v) $(a^2 - 2)^3$

w) $\left(\frac{1}{2} - s\right)^3$

x) $(3m - 2n)^3$

y) $(2m - b)\,(2m + b)$

z) $\left(\frac{a}{3} + 4\right)^3$

4) Fatore (ao máximo) os polinômios abaixo.

a) $x^2z - 2x^3z^2 - 5x^2zy + 3x^2z^2$

b) $20zx^2 - 12x^2t^2 + 20xyz - 12xyt^2 + 5zy^2 - 3t^2y^2$

c) $(x + y)^2 - 2(x + y)(5z + c) + (5z + c)^2$

d) $9x^2 + \frac{63}{12}x + \frac{3}{4}$

e) $(9x^2 + 1)^2 - 12x(9x^2 + 1) + 36x^2$

f) $6x^{3n} + x^{2n}$

g) $\frac{a^2x^2}{16} - 3abxy + 36b^2y^2$

5) Simplifique as expressões abaixo utilizando as operações necessárias.

a) $\frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}} \cdot \frac{2x^2+2y^2}{xy}$

b) $\left(\frac{x}{x-y} + \frac{x}{x+y} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{x^4-y^4}\right) \cdot \frac{x^2-y^2}{4x^2}$

c) $\frac{a^2-x^2}{a^2b^2} \div \frac{bx}{a^2+x^2}$

d) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{ab^3}}{b - 1 + \frac{1}{b}}$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE POLINÔMIOS

1) a) x = - 4 e x = 2   b) x = 0 e x = 1 (raiz dupla)   c)x = 1 e x = 2

2) a) $Q(x) = x^2 + 3x - 1$; $R(x) = 0$ portanto, $x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x-1)(x^2+3x-1) + 0$

b) $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$; $R(x) = 0$ portanto, $x^4 - 3x^2 - 4 = (x+2)(x^3 - 2x^2 + x - 2) + 0$

c) $Q(x) = x + 1$; $R(x) = 2x - 5$ portanto, $x^3 - x^2 + 3x - 2 = (x^2 - 2x + 3)(x+1) + 2x - 5$

d) $Q(x) = x^2 + 2x - 3$; $R(x) = -13x + 13$ portanto,

$$x^4 + x^3 - 2 = (x^2 - x + 5)(x^2 + 2x - 3) - 13x + 13$$

3)

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $a^2 + 10a + 25$

c) $a^4 + 2a^2 + 1$

d) $9y^2 + 12y + 4$

e) $\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{4} + \frac{y^2}{16}$

f) $4a^2 + 40a + 100$

g) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

h) $4x^2y^2 + 20xy + 25$

i) $4 - 4s + s^2$

j) $4m^2 - 4mn + n^2$

k) $\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9}$

l) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

m) $a^2 - a + \frac{1}{4}$

n) $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4$

o) $4 - m^2$

p) $\frac{c^2}{9} - \frac{d^2}{4}$

q) $1 - 9v^2$

r) $1 + 3a + 3a^2 + a^3$

s) $\frac{x^3}{8} + \frac{x^2s}{4} + \frac{xs^2}{6} + \frac{s^3}{27}$

t) $8c^3 + 36c^2d + 54cd^2 + 27d^3$

u) $8 - 12x + 6x^2 - x^3$

v) $a^6 - 6a^4 + 12a^2 - 8$

w) $\frac{1}{8} - \frac{3}{4}s + \frac{3}{2}s^2 - s^3$

x) $27m^3 - 54m^2n + 36mn^2 - 8n^3$

y) $4m^2 - b^2$

z) $\frac{1}{27}a^3 + \frac{4}{3}a^2 + 16a + 64$

4)

a) $x^2z(1 - 2xz - 5y + 3z)$

b) $(2x + y)^2(5z - 3t^2)$

c) $(x + y - 5z - c)^2$

d) $9\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)$

e) $(3x - 1)^4$

f) $x^{2n}(6x^n + 1)$

g) $\left(\frac{ax}{4} - 6by\right)^2$

5)a)

$$\frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}} \cdot \frac{2x^2 + 2y^2}{xy} = \frac{\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x+y)(x-y)}}{\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x+y)(x-y)}} \cdot \frac{2(x^2+y^2)}{xy} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{2(x^2+y^2)}{xy} =$$

$$\frac{4xy}{2(x^2+y^2)} \cdot \frac{2(x^2+y^2)}{xy} = 4$$

b) $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2).(x^2 + y^2) = (x+y).(x-y).(x^2 + y^2)$

$$\left(\frac{x}{x-y} + \frac{x}{x+y} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{x^4 - y^4}\right) . \frac{x^2 - y^2}{4x^2} =$$

$$= \left(\frac{x(x+y)(x^2+y^2) + x(x-y)(x^2+y^2) + 2x^2(x+y)(x-y) + 4x^2y^2}{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)}\right) . \frac{(x+y)(x-y)}{4x^2} =$$

$$= \left(\frac{x^4 + x^2y^2 + x^3y + xy^3 + x^4 + x^2y^2 - x^3y - xy^3 + 2x^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2}{x^2+y^2}\right) . \frac{1}{4x^2} =$$

$$= \left(\frac{4x^4 + 4x^2y^2}{x^2+y^2}\right) . \frac{1}{4x^2} = \frac{4x^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} . \frac{1}{4x^2} = 1$$

c) $\frac{a^2 - x^2}{a^2b^2} \div \frac{bx}{a^2 + x^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2b^2} . \frac{a^2 + x^2}{bx} = \frac{a^4 - x^4}{a^2b^3x}$

d) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{ab^3}}{b - 1 + \frac{1}{b}} = \frac{\frac{b^3 + 1}{ab^3}}{\frac{b^2 - b + 1}{b}} = \frac{b^3 + 1}{ab^3} . \frac{b}{b^2 - b + 1} = \frac{(b+1)(b^2 - b + 1)}{ab^2(b^2 - b + 1)} = \frac{b+1}{ab^2}$