МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра методов оптимального управления

ПРИМЕНЕНИЕ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИКИ

Курсовая работа

НОВАШ Антон Юрьевич
студента 3 курса,
специальность «экономическая кибернетика»

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В настоящей глава формулируются основные понятия и определения, используемые в курсовой работе. Приводится классификация (согласно работе [11]) принципов управления, используемых в современной теории управления. Объясняется принцип управления в режиме реального времени в применении к реализации оптимальных обратных связей в задачах оптимального управления с конечным горизонтом планирования [24].

1.1 Понятие управления

Человек занимается управлением на протяжении всей своей жизни для обеспечения желаемого течения тех или иных процессов или сам предпринимает необходимые действия и принимает соответствующее решения.

Теория оптимального управления, отражающая современный этап развития вариационного исчисления, возникла в середине XX века в связи с задачами, поставленными практикой в различных областях развития новой техники.

Существует два взгляда на теорию оптимального управления. Согласно одному из них, теория оптимального управления — раздел современного вариационного исчисления. В соответствии с этим взглядом можно предложить следующее определение термина "управление": Управления — элементы функциональных пространств, по которым ищется экстремум выбранного функционала качества. Главной задачей данной теории является анализ решения экстремальной задачи (существование, единственность, непрерывная зависимость решений, необходимые и достаточные условия оптимальности).

Другой взгляд трактует данную теорию как раздел современной теории управления, представляющей естественное развитие классической теории управления. В этом случае выделим следующее определение для термина "управление": Управления — это процесс, в котором для достижения нужного поведения объекта управления в каждый текущий момент времени создаются целенаправленные (управляющие) воздействия на объект управления в зависимости от доступной к этому моменту информации о поведении объекта и действующих на него возмущений.

1.2 Принципы управления

При управлении динамическим объектом используются три принципа: управление по разомкнутому контуру (программное управление рис. 1.1 а), управление по замкнутому контуру (позиционное управление рис 1.1 б), управление в реальном времени.

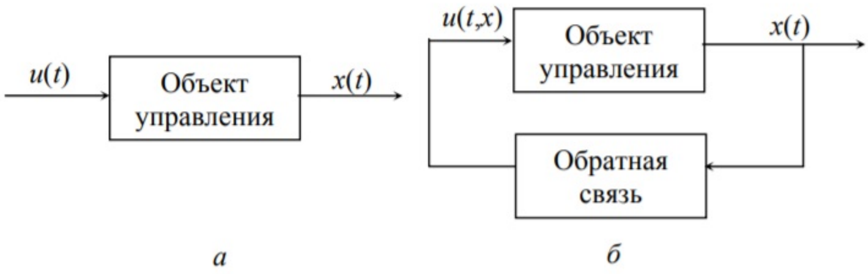

Рис. 1.1: а) разомкнутый контур; б) замкнутый контур

Определение 1.1 Программное управление — управление, при котором (программные) управляющие воздействия (программы) планируются по априорной информации до начала процесса управления и не корректируются в процессе управления.

Программное управление редко применяется на практике, поскольку не учитывает неточности математического моделирования физических систем и возмущения, косвенная информация о которых доступна, как правило, в процессе управления. Фундаментом этого метода является принцип максимума Понтрягина [30].

Определение 1.2 Позиционное управление — управление, при котором (позиционные) управляющие воздействия создаются в процессе управления по текущим позициям, которые аккумулируют информацию, доступную к текущему моменту.

Динамическое программирование [5] является одним из основных методов реализации позиционного управления.

Определение 1.3 Синтез оптимальных систем управления — построение оптимальных позиционных управляющих воздействий.

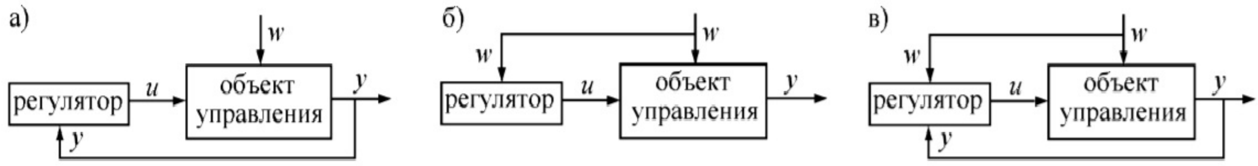

Рис. 1.2: а) обратная связь; б) прямая связь; в) комбинированная связь

При создании систем по принципу замкнутого контура используются связи трех типов:*прямые*, *обратные* и *комбинированные* (рис. 1.2).

Связь называется прямой, если она преобразует в управляющее воздействие доступную информацию о наблюдаемых входных сигналах. Обратная связь по состоянию преобразует в управляющее воздействие информацию о состоянии объекта. В комбинированной связи преобразуется информация обоих типов.

Для позиционного управления характерна следующая особенность. Проблема синтеза в рамках принципа управления по замкнутому контуру не удается решить из-за проклятия размерности ни с помощью принципа максимума [30], ни с помощью динамического программирования Беллмана [5].

Решение данной проблемы можно предложить, если перейти к современному принципу управления — оптимальному управлению в реальном времени [?]. При управлении динамическим объектом в реальном времени связи не строятся, а необходимые для управления их текущие значения формируются в реальном времени по ходу каждого конкретного процесса.

1.3 Реализация оптимальных обратных связей в реальном времени

Принцип управления в реальном времени и подход к реализации оптимальной обратной связи в реальном времени опишем на примере следующей задачи оптимального управления.

$$c^T x(t_f) \to \min, \tag{1.1}$$
$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0^*,$$
$$x(t_f) \in X_f, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_*, t^*],$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние модели управления в момент времени t, $u = u(t) \in \mathbb{R}^r$ — значение управляющего воздействия в момент t, $A(t) \in$

$\mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t)\in\mathbb{R}^{n\times r}$, x_0^* — известное начальное состояние объекта. $X_f=\{x\in\mathbb{R}^n : g_*\le Hx\le g^*\}$ — терминальное множество, $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $g_*,\ g^*\in\mathbb{R}^m$; $U=\{u\in\mathbb{R}^r : u_*\le u\le u^*\}$ — множество доступных значений управляющего воздействия.

Определение 1.4 Управляющее воздействие $u(t)\in U$, $t\in T$, называется программой, если соответствующая ему траектория $x(t)$, $t\in T$, математической модели (1.1) удовлетворяет условию $x(t_f)\in X_f$.

Определение 1.5 Программа $u^0(t)$, $t\in T$, называется оптимальной (программным решением задачи (1.1)), если на соответствующей ей (оптимальной) траектории $x^0(t)$, $t\in T$, выполняется равенство $c^Tx^0(t_f)=\min_u c^Tx(t_f)$, где минимум ищется среди всех программ.

Задача (1.1) рассматривается в классе дискретных управляющих воздействий:

$$u\equiv u(\tau), t\in[\tau,\tau+h[,\ \tau=T_h=\{t_*,t_*+h,...,t^*-h\},$$

где $h=(t^*-t_*)/N$ — период квантования, $N>1$ — натуральное число.

Чтобы ввести понятие классической оптимальной обратной связи, погрузим задачу (1.1) в семейство задач

$$c^Tx(t_f)\to\min, \tag{1.2}$$

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\quad x(\tau)=z,$$
$$x(t_f)\in X_f,\quad u(t)\in U,\quad t\in T(\tau)=[\tau,t^*],$$

зависящее от скаляра $\tau\in T_h$ и n-вектора z. Пару (τ,z) назовём позицией системы управления. Пусть $u^0(t|\tau,z),\quad t\in T(\tau)$, — оптимальная программа задачи (1.2) для позиции (τ,z).

Определение 1.6 Функция

$$u^0(\tau,z)=u^0(\tau|\tau,z),\quad z\in X_\tau,\quad \tau\in T_h, \tag{1.3}$$

называется оптимальной обратной связью (позиционным решением задачи (1.1)).

Оптимальная обратная связь (1.3) строится по детерминированной математической модели, но предназначена для управления физическим объектом, поведение которого, как правило, отличается от идеальной модели. Пусть поведение замкнутого обратной связью объекта управления описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^0(t,x) + w(t),\ x(t_*) = x_0, \tag{1.4}$$

где $u^0(t,x) = u^0(t,x(t)) \equiv u^0(\tau,x(\tau))$, $t \in [\tau,\tau+h[$, $\tau \in T_h$, $w(t)$, $t \in T$, — возмущение, действующее на физический объект в процессе управления.

Рассмотрим поведение системы (1.4) в конкретном процессе управления. Конкретный процесс характеризуется конкретным реализовавшимся возмущением $w^*(t)$, $t \in T$. Тогда в нем реализуется траектория $x^*(t)$, $t \in T$:

$$\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t) + B(t)u^0(t,x^*(t)) + \omega^*(t), \quad x^*(t_*) = x_0.$$

Отсюда следует, что в конкретном процессе управления оптимальная обратная связь (1.3)не используется целиком, нужны лишь её значения на промежутке $t \in [\tau,\tau+h[, \quad \tau \in T_h$.

$$u^*(t) \equiv u^*(\tau) = u^0(\tau,x^*(\tau)) = u^0(\tau|\tau,x^*(\tau)), \quad t \in [\tau,\tau+h[, \quad \tau \in T_h. \tag{1.5}$$

Определение 1.7 Функцию $u^*(t), t \in T$, определенную согласно (1.5) будем называть реализацией оптимальной обратной связи (1.3) в конкретном процессе управления.

Перейдём к описанию принципа оптимального управления в реальном времени, при котором обратная связь (1.3) не строится, а при каждом $\tau \in T_h$ текущее управляющее воздействие (1.5) создаётся в процессе управления для текущей позиции $(\tau, x^*(\tau))$.

Из определения оптимальной обратной связи следует, что в каждый момент времени $\tau \in T_h$ должна решаться задача оптимального управления

$$c^T x(t_f) \to \min, \tag{1.6}$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = x^*(\tau),$$

$$x(t_f) \in X_f, \quad u(t) \in U, \quad t \in T(\tau).$$

Пусть $\delta(\tau)$ — время решения задачи (1.6).

Определение 1.8 Устройство, способное вычислять значение $u^*(\tau), \tau \in T_h$, за время $\delta(\tau) < h$, называется оптимальным регулятором, реализующим оптимальную обратную связь (1.3) в реальном времени.

Опишем алгоритм работы оптимального регулятора:

1. В момент времени t_* на вход объекта подаётся управляющее воздействие $u^*(t) \equiv u^*(t_*) = u^0(t_*, {x_0}^*), t \geq t_*$.

2. В момент времени $\tau = t_* + h$ становится известным состояние объекта $x^*(\tau)$.

3. С момента $\tau + \delta(\tau)$ на вход объекта подается управляющее воздействие $u^*(t) \equiv u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau)), t \geq \tau + \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — время отыскания значения управляющего воздействия $u^0(\tau, x^*(\tau))$.

Для решения задачи (1.6) можно испол ьзовать различные подходы. Простейшим будет сведение ее к задаче линейного программирования, что возможно благодаря выбору класса дискретных управляющих воздействий.

Для этого запишем формулу Коши для линейной системы:

$$x(t^*) = F(t^*, \tau)x^*(\tau) + \int_\tau^{t^*} F(t^*, t)B(t)u(t)dt, \tag{1.7}$$

где $F(t^*, t)$ — фундаментальная матрица, т.е. решение уравнения

$$\dot{F}(t^*, t) = -F(t^*, t)A(t), \quad F(t^*, t^*) = E.$$

Интеграл в правой часть равенства (1.7) запишем следующим образом:

$$x(t^*) = F(t^*, \tau)x^*(\tau) + \sum_{s=\tau}^{t^*-h} \int_s^{s+h} F(t^*, t)B(t)\, dt\ u(s). \tag{1.8}$$

Используя (1.8) запишем левую часть терминального ограничения:

$$Hx(t^*) = HF(t^*, \tau)x^*(\tau) + \sum_{s=\tau}^{t^*-h} \int_s^{s+h} HF(t^*, t)B(t)\, dt\ u(s). \tag{1.9}$$

Равенство (1.9) перепишем в виде:

$$Hx(t^*) = \Phi(\tau)x^*(\tau) + \sum_{s=\tau}^{t^*-h} D(s)\ u(s).$$

где введены следующие обозначения:

$$\Phi(t) = HF(t^*, t) \quad \Phi(t^*) = H, \quad \dot{\Phi} = -\Phi A(t);$$

$$D(s) = \int_s^{s+h} \Phi(t)B(t)\, dt, \quad s \in T_h.$$

Таким образом, исходная задача (1.6) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$\sum_{t \in T_h(\tau)} c'(t)u(t) \to \min, \tag{1.10}$$

$$g_*(\tau) \leq \sum_{s \in T_h(\tau)} D(s)u(s) \leq g^*(\tau),$$

$$u_* \leq u(t) \leq u^*, \quad t \in T_h(\tau),$$

где

$$c'(t) = \int_s^{s+h} F(t^*, t)B(t)\,dt, \quad s \in T_h,$$

$$g_*(\tau) = g_* - \Phi(\tau)x^*(\tau),$$

$$g^*(\tau) = g^* - \Phi(\tau)x^*(\tau).$$

Задача (1.10) называется функциональной формой задачи оптимального управления (1.6). На ее основе в литературе [14] предложена динамическая реализация специального двойственного метода линейного программирования [24], основанная на близости задач оптимального управления (1.6) для соседних моментов τ и $\tau + h$.

В настоящей глава были рассмотрены основные понятия и определения. Была описана классификация принципов управления, используемых в современной теории управления. Рассмотрен принцип управления в режиме реального времени в применении к реализации оптимальных обратных связей в задачах оптимального управления с конечным горизонтом планирования.

ГЛАВА 2

ОПТИМАЛЬНОЕ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

В данной главе описывается сведение задачи оптимального управления к задаче линейного программирования. Формулируется и решается линейная задача оптимального управления в непрерывном времени. Рассматривается алгоритм централизованного управления.

2.1 Задача оптимального управления для модели расширяющейся экономики фон Неймана

Простой и наглядной задачей, с помощью которой можно проиллюстрировать предлагаемый подход децентрализованного управления, является задача оптимального управления для модели расширяющейся экономики фон Неймана. Данная модель ещё в 30-е годы была сформулирована Джоном фон Нейманом, который решил для ней задачу оптимизации многошаговых процессов в своеобразном классе допустимых управлений.

Рассмотрим замкнутую экономику, которая на промежутке времени $T = [0, z]$ производит n типов товаров с использованием r технологических процессов (ТП).

Технологический процесс j при единичной интенсивности расходует товар i в количестве a_{ij} и производит в количестве b_{ij}, $i \in I = 1, ..., n, j \in J = 1, ..., r$.

Если за $x_i(t)$ принять количество i -го товара, $u_j(t)$ — интенсивность j -го ТП в момент t, $x(t) = (x_i(t), i \in I)$ — вектор товаров, $u(t) = (u_i(t), j \in J)$ — вектор интенсивностей ТП в момент t, $A = (a_{ij}, i \in I, j \in J) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = (b_{ij}, i \in I, j \in J) \in \mathbb{R}^{n\times r}$ — матрицы затрат и выпуска, соответственно, x_0— n - вектор начальных объёмов товаров, то непрерывная модель расширяющейся экономики описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = (B - A)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

На переменные модели (2.1) накладываются ограничения:

$$Au(t) \leq x(t), u(t) \geq 0, t \geq 0, \tag{2.2}$$

Ограничения (2.2) связаны с невозможностью расходовать больше товара, чем имеется в наличии в каждый момент времени, а также необходимостью использовать неотрицательную интенсивность ТП.

Будем искать такой план производства, при котором в заданный момент T стоимость товаров будет максимальной.

$$c'x(T) = \sum_{i \in I} c'(t)u(t) \tag{2.3}$$

Здесь $c = (c_i, i \in I)$ – вектор цен.

Таким образом, задача оптимального управления системой (2.1) имеет вид

$$J(u) = c'x(T) \to \max, \tag{2.4}$$

$$\dot{x} = (B - A)u, \quad x(0) = x_0,$$

$$Au(t) \leq x(t),$$

$$u(t) \geq 0, \quad t \in [0, T].$$

2.2 Обсуждение особенностоей задачи

При практическом применении результатов теории управления необходимо учитывать следующие особенности:

1. Все реальные экономические объекты управления содержат неопределенности: возмущения, неточности математического моделирования, ошибки измерений и др. Например, модель (2.1) может быть подвержена действию возмущений, вызванных сбоями в работе ТП, их работой не на полную мощность, браком товаров.

2. При управлении в условиях неопределенности используются обратные связи. Их построение в явном виде для задач с ограничениями (как в (2.4)) в большинстве случаев невозможно, а применение результатов динамического программирования сдерживается "проклятием размерности" [5].

3. Сложные системы управления часто имеют структуру, учет которой позволяет упростить или ускорить процедуры построения обратных связей. Важным примером системы со структурой являются так называемые муль-

тиагентные системы [9], для которых характерно применение децентрализованного управления: каждый "агент" управляется локально, но преследуется общая цель при общих ограничениях на состояния и управления.

В задаче (2.4) также можно выделить структуру: она задается технологическими процессами. Соответственно, управление здесь можно организовать двумя способами:

1) Централизованно, когда один управляющий орган (регулятор) принимает решение для всех ТП одновременно.

2) Децентрализованно, когда для каждого ТП интенсивность выбирается относительно независимо, локальным управляющим органом (локальным регулятором).

Цель при децентрализованном управлении общая – максимизация гарантированной стоимости товаров, произведенных всеми процессами к моменту времени Т , но все решения необходимо принимать локально, не нарушая при этом общих ограничений.

Далее в настоящей главе будет рассматриваться централизованное управление. Начнём с построения программного решения задачи, которая обобщает (2.4).

2.3 Построение программных решений

Сформулируем задачу оптимального управления линейной динамической системы, на состояния и управления которой наложены смешанные ограничения:

$$
\begin{gathered}
J(u) = c'x(T) \to \max, \qquad (2.5)\\
\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0,\\
Hx(t) + Gu(t) \le g,\\
u(t) \in U, \quad t \in [0, T].
\end{gathered}
$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u(t) \in R^r$ — управление, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times r}, H \in \mathbb{R}^{n\times p}, G \in \mathbb{R}^{m\times r}$, — заданные матрицы; $U \subset \mathbb{R}^r$.

Задача (2.5) обобщает задачу (2.4) для которой:

$$
A = 0, B = B - A, H = -E, G = A, g = 0
$$

.

Будем считать, что для целей управления доступны полные и точные измерения состояний, которые поступают в дискретные моменты времени $\tau \in \Delta = 0, h, ..., T-h$, где $h = T/N$ — период квантования. Траекторию измерений в конкретном процессе управления будем обозначать $x^*(\tau), \tau \in \Delta$; она зависит от $u^*(\cdot)$ выбранного управления.

Для решения задачи (2.5) сведём ее к задаче линейного программирования с помощью формулы Коши для линейной системы.

$$x(t) = F(t,0)x_0 + \int_0^t F(T,\theta)B(\theta)u(\theta)dt, \tag{2.6}$$

где $F(T,t)$ — фундаментальная матрица, т.е. решение уравнения

$$\dot{F}(T,t) = -F(T,t)A(t), \quad F(T,T) = E.$$

Интеграл в правой часть равенства (2.6) запишем следующим образом:

$$x(t) = F(t,0)x_0 + \sum_{s \in T_h}^{t-h} \int_s^{s+h} F(t,\theta)B(\theta)\,d\theta\ u(s). \tag{2.7}$$

где $T_h(t) = \{0, h, ..., t-h\}$

Используя (2.7) запишем левую часть терминального ограничения:

$$Hx(t) + Gu(t) = HF(t,0)x_0 + \sum_{s \in T_h}^{t-h} \int_s^{s+h} HF(t,\theta)B(\theta)\,d\theta\ u(s) + Gu(t). \tag{2.8}$$

Равенство (2.8) перепишем в следующем виде:

$$Hx(t) + Gu(t) = \Phi(t)x_0 + \sum_{s \in T_h}^{t-h} D(s)u(s) + Gu(t)$$

где введены следующие обозначения:

$$\Phi(t) = HF(T,t) \quad \Phi(T) = H, \quad \dot{\Phi} = -\Phi A(t);$$

$$D(s) = \int_s^{s+h} \Phi(t)B(t)\,dt, \quad s \in [0, T-h].$$

Таким образом, исходная задача (2.5) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$\sum_{t=0}^{T-h} c'(t)u(t) \to \min, \tag{2.9}$$

$$\sum_{s\in T_h}^{t-h} D(s)u(s) + Gu(t) \le g^*,$$

$$u_* \le u(t) \le u^*, \quad t \in [0, T-h],$$

где

$$c'(t) = \int_s^{s+h} F(t,0)B(t)\,dt, \quad s \in [0, T-h],$$

$$g^*(t) = g - \Phi(t)x_0.$$

Таким образом,для решения задачи ЛП получим следующие данные:

$$A_lp = \begin{pmatrix} G & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D(0) & G & 0 & \dots & 0 \\ D(0) & D(h) & G & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(0) & D(h) & \dots & D(T-h) & G \end{pmatrix}$$

$$u_lp = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(h) \\ u(2h) \\ \vdots \\ u(T-h) \end{pmatrix}$$

$$b_lp = \begin{pmatrix} g - \Phi(0)x_0 \\ g - \Phi(h)x_0 \\ g - \Phi(2h)x_0 \\ \vdots \\ g - \Phi(T-h)x_0 \end{pmatrix}$$

2.4

При сделанном предположении определим понятие (дискретной) оптимальной обратной связи в задаче (2.4). Для этого погрузим ее в семейство задач оптимального управления

$$J(u) = c'x(T) \to \max, \tag{2.10}$$
$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(\tau) = z,$$
$$Hx(t) + Gu(t) \le g,$$
$$u(t) \in U, \quad t \in [\tau, T]$$

зависящее от пары $(\tau, z), \tau \in \Delta, z \in R^n$, которая называется позицией процесса управления.

Пусть $u^0(t|\tau, z), t \in [\tau, T]$, – оптимальная гарантирующая программа управления в задаче (2.10) для позиции $(\tau, z), X(\tau)$ — множество всех состояний z, для которых в заданный момент τ оптимальная гарантирующая программа существует.

В связи с трудностями построения обратных связей, современные подходы, применяемые в теории управления, направлены на построение обратной связи в каждом конкретном процессе управления по решению вспомогательных (прогнозирующих) задач оптимального управления. Эти задачи формулируются для каждого текущего момента таким образом, чтобы обеспечить желаемое поведение замкнутой системы. Для задач оптимального управления с конечным горизонтом управления (как в задаче (2.5)) подход носит название управления в реальном времени.

Проводя аналогичные рассуждения,как и в (2.3), для (2.10) получим следующую задачу ЛП:

$$\sum_{t=\tau}^{T-h} c'(t)u(t) \to \min, \tag{2.11}$$
$$\sum_{s=\tau}^{t-h} D(s)u(s) + Gu(t) \le g^*,$$
$$u_* \le u(t) \le u^*, \quad t \in [\tau, T],$$

где

$$c'(t) = \int_s^{s+h} F(t,0)B(t)\,dt, \quad s \in [\tau, T-h],$$
$$g^* = g - \Phi(\tau)z,$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Агаев, Р.П. Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) / Р.П. Агаев, П.Ю. Чеботарев // УБС. – 2010. – Вып. 30.1. – С. 470–505.

2 Асеев С. М., Кряжимский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2007. – Т. 257. – №. 0. – С. 3-271.

3 Балашевич, Н.В. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью / Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 2. – С. 265-286.

4 Балашевич, Н.В. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления / Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40, № 6. – С. 838-859.

5 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.:Инностранная литература, 1960. – 400 с.

6 Данциг, Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / Д. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.

7 Дмитрук Н.М., Габасов Р., Калинин А.И. Децентрализованные стратегии в задачах опти-мального управления и стабилизации взаимосвязанных динамических систем: отчет о НИР (заключительный) / НИИ ППМИ; науч. рук. Дмитрук, Н.М. – 71 с.

8 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление взаимосвязанными объектами // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 147-154.

9 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление мультиагентными динамическими системами в условиях неопределенности / Н.М. Дмитрук // Доклады НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 11-15.

10 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Во Тхи Тань Ха. Оптимальное управление в реальном времени многомерным динамическим объектом // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 121–135.

11 Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15-18.

12 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление динамическими системами в условиях неопределенности / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т. 51, № 7. – С. 1209-1227.

13 Габасов, Р. Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.С. Павленок // Докл. Академии наук. – 2012. – Т. 444, № 4. – С. 371-375.

14 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, № 4. – С. 593-609.

15 Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем: Методы функционального анализа. – Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1973.

16 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С. Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний // Доклад Академии

17 Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени //Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1992. – Т. 4. – С. 3-19.

18 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления // Автоматика и телемеханика, 1996

19 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное наблюдение за нестационарными системами // Известия РАН. Теория и системы управления. № 3, 2002. С. 35 – 46.

20 Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принципы оптимального управления //Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48. – №. 1. – С. 15-18.

21 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Поясок Е.И. Оптимальное наблюдение в реальном времени линейного динамического объекта // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448, № 3. С. 145–148.

22 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института матема-тики и механики УрО РАН, Т.10, №2, 2004. С. 33-57.

23 Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г. Модели и алгоритмы

коллективного управления в группах роботов //М.: Физматлит. – 2009. – Т. 280.

24 Кириллова, Ф.М. Синтез оптимальных систем – оптимальное управление в реальном времени / Ф.М. Кириллова, Н.М. Дмитрук, Р. Габасов // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 208-219

25 Кряжимский, А.В. Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы / А.В. Кряжимский, Н.В. Стрелковский// Труды Институт математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т.20, № 3. – С. 132–147.

26 Куржанский, А.Б. Задача управления групповым движением. Общие соотношения / А.Б. Куржанский // Доклады РАН. – 2009. – Т. 426, № 1. – С. 20–25.

27 Куржанский, А.Б. О задаче группового управления в условиях препятствий / А.Б. Куржанский // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 166-179.

28 Малкин И.Г. Теория устойчивости движения – М., Наука, 1966

29 Петрикевич Я. И. Линейные алгоритмы управления геометрическим расположением объектов в многоагентной системе //Управление большими системами: сборник трудов. – 2010. – №. 30-1.

30 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.

31 Сетевые модели в управлении / Сборник статей (под ред. Д.А. Новикова, О.П. Кузнецова, М.В. Губко). – М.: Эгвес, 2011. – 443 с.

32 Фельдбаум А.А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1953. Т. 14, № 5. С. 712–728.

33 Constrained model predictive control: Stability and optimality / D.Q. Mayne [et. al] // Automatica. – 2000. – Vol. 36, no. 6. – P. 789-814.

34 Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions / P.D. Christofides [et. al] // Computers & Chemical Eng. – 2013. – Vol. 51. – P. 21–41.

35 Distributed model predictive control / E. Camponogara [et. al] // IEEE Control Systems Magazine. – 2002. – Vol. 22, no. 1. – P. 44-52.

36 Dmitruk, N.M. Optimal Measurement Feedback Control of Finite-time Continuous Linear Systems / N.M. Dmitruk, R. Findeisen, F. Allgöwer // 17th IFAC World Congress. Seoul, 2008.

37 Dmitruk, N. Robust Optimal Control of Dynamically Decoupled Systems via Distributed Feedbacks / N. Dmitruk // Optimization in the Natural Sciences. Communications in Computer and Information Science. – Springer, 2015. – Vol. 499. – P. 95-106.

38 Farina, M. Distributed predictive control: A non-cooperative algorithm with neighbor-to-neighbor communication for linear systems / M. Farina, R. Scattolini // Automatica. – 2012. – Vol. 48, no. 6. – P. 1088-1096.

39 Grune L., Pannek J. Nonlinear model predictive control. – Springer London, 2011.

40 Gabasov R., Kirillova F. M., Prischepova S. V. Optimal feedback control. – Springer, 1995.

41 Hopkin A.M. A phase plan approach to the compensation of saturating servomechanisms // Trans. AIEE. 1951. Pt. 1, Vol. 70. P. 631–639.

42 Jia, D. Min-max feedback model predictive control for distributed control with communication / D. Jia, B. Krogh // Proc. American Control Conference, 2002. – P. 4507-4512.

43 Karmarkar, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming / N. Karmarkar // Combinatorica. – 1984. – Vol. 4, no. 4. – P. 373-395.

44 Keerthi, S.S. Optimal, ininite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems: Stability and moving-horizon approximations / S.S. Keerthi, E.G. Gilbert // Journal of Optimization Theory and Application. – 1988. – Vol. 57, no. 2. – P. 265-293.

45 Keviczky, T. Decentralized receding horizon control for large scale dynamically decoupled systems / T. Keviczky, F. Borrelli, G.J. Balas // Automatica. – 2006. – Vol. 42. – P. 2105-2115.

46 Kostina E., Kostyukova O. Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances // Int. J. of Robust and Nonlinear Control, 2009

47 Magni, L. Stabilizing decentralized model predictive control of nonlinear systems / L. Magni, R. Scattolini // Automatica. – 2006. – Vol. 43, no. 7. – P. 1231–1236.

48 Mehrotra, S. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method / S. Mehrotra // SIAM Journal on Optimization. – 1992. – Vol. 2. – P. 575–601.

49 Müller, M.A. Cooperative control of dynamically decoupled systems via distributed model predictive control / M.A. Müller, M. Reble, F. Allgöwer // Internat. Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2012. – Vol. 22, no. 12. – P. 1376-1397.

50 Nocedal, J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, 2006.

51 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.

52 Richards, A. Robust distributed model predictive control / A. Richards, J.P. How // Internat. Journal of Control. – 2007. – Vol. 80, no. 9. – P. 1517-1531.

53 Scattolini, R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control — a review / R. Scattolini // Journal of Process Control. – 2009. – Vol. 19, no. 5. – P. 723-731.

54 Siljak, D.D. Decentralized control of complex systems / D.D. Siljak. – London: Academic Press, 1991. – 525 p.

55 Trodden, P. Cooperative distributed MPC of linear systems with coupled constraints / P. Trodden, A. Richards // Automatica. – Vol. 49, no. 2. – P. 479–487.

56 Trodden, P. Distributed model predictive control of linear systems with persistent disturbances / P. Trodden, A. Richards // Internat. Journal of Control. – 2010. – Vol. 83, no. 8. – P. 1653-1663.