

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАТИКИ**

Кафедра методов оптимального управления

НОВАШ Антон Юрьевич

**ПРИМЕНЕНИЕ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО
УПРАВЛЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ
ЭКОНОМИКИ**

Курсовая работа

специальность 1-31 03 06 «Экономическая кибернетика»

Научный руководитель
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Допущена к защите

«_____» _____ 2020 г.

Зав. кафедрой методов оптимального управления
канд. физ.-мат. наук, доцент Н.М. Дмитрук

Минск 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

	С.
ГЛАВА 1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	3
1.1 Задачи оптимального управления	3
1.2 Программные и позиционные решения	4
1.3 Реализация оптимальных обратных связей в реальном времени . .	5
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	9

ГЛАВА 1

БЗЁ ЛИЪЕЁАЪЃЁТ

В настоящей глава формулируются основные понятия и определения, используемые в курсовой работе. Приводится классификация (согласно работе [11]) принципов управления, используемых в современной теории управления. Объясняется принцип управления в режиме реального времени в применении к реализации оптимальных обратных связей в задачах оптимального управления с конечным горизонтом планирования [24].

1.1 Задачи оптимального управления

Человек занимается управлением на протяжении всей своей жизни для обеспечения желаемого течения тех или иных процессов или сам предпринимает необходимые действия и принимает соответствующее решения.

Теория оптимального управления, отражающая современный этап развития вариационного исчисления, возникла в середине XX века в связи с задачами, поставленными практикой в различных областях развития новой техники.

Существует два взгляда на теорию оптимального управления. Согласно одному из них, теория оптимального управления — раздел современного вариационного исчисления. В соответствии с этим взглядом дадим следующее определение. Управление — элементы функциональных пространств, по которым ищется экстремум выбранного функционала качества. Главной задачей данной теории является анализ решения экстремальной задачи (существование, единственность, непрерывная зависимость решений, необходимые и достаточные условия оптимальности).

Другой взгляд трактует данную теорию как раздел современной теории управления, представляющей естественное развитие классической теории управления. В этом случае выделим следующее определение для управления. Управление — это процесс, в котором для достижения нужного поведения объекта управления в каждый текущий момент времени создаются целенаправленные (управляющие) воздействия на объект управления в зависимости от доступной к этому моменту информации о поведении объекта и действующих на него возмущений.

1.2 Программные и позиционные решения

При управлении динамическим объектом используются три принципа: управление по разомкнутому контуру (программное управление), управление по замкнутому контуру (позиционное управление), управление в реальном времени.

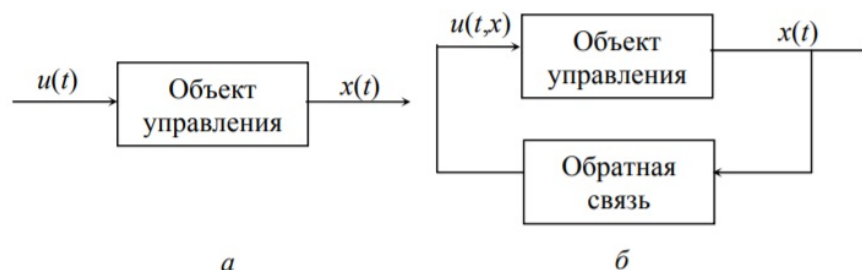


Рис. 1.1: а) разомкнутый контур; б) замкнутый контур

Определение 1.1 Программное управление — управление, при котором (программные) управляющие воздействия (программы) планируются по априорной информации до начала процесса управления и не корректируются в процессе управления.

Программное управление редко применяется на практике, поскольку не учитывает неточности математического моделирования физических систем и возмущения, косвенная информация о которых доступна, как правило, в процессе управления. Фундаментом этого метода является принцип максимума Понтрягина.

Определение 1.2 Позиционное управление — управление, при котором (позиционные) управляющие воздействия создаются в процессе управления по текущим позициям, которые аккумулируют информацию, доступную к текущему моменту.

Определение 1.3 Синтез оптимальных систем управления — построение оптимальных позиционных управляющих воздействий.

При создании систем по принципу замкнутого контура используются связи трех типов: *прямые*, *обратные* и *комбинированные* (рис. 1.2).

Связь называется прямой, если она преобразует в управляющее воздействие доступную информацию о наблюдаемых входных сигналах. Обратная

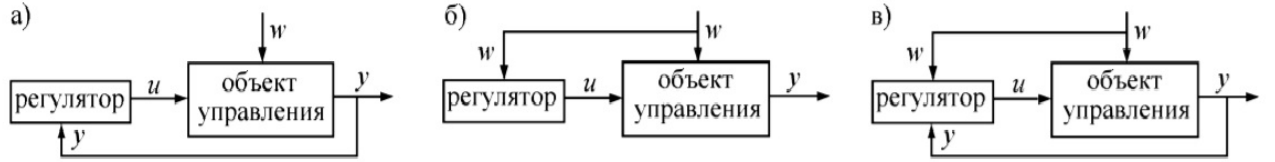


Рис. 1.2: а) обратная связь; б) прямая связь; в) комбинированная связь

связь по состоянию преобразует в управляющее воздействие информацию о состоянии объекта. В комбинированной связи преобразуется информация обоих типов.

Для позиционного управления характерна следующая особенность. Проблема синтеза в рамках принципа управления по замкнутому контуру не удастся решить из-за проклятия размерности ни с помощью принципа максимума, ни с помощью динамического программирования Беллмана.

Решение данной проблемы состоит в переходе к современному принципу управления — оптимальному управлению в реальном времени. При управлении динамическим объектом в реальном времени связи не строятся, а необходимые для управления их текущие значения формируются в реальном времени по ходу каждого конкретного процесса.

1.3 Реализация оптимальных обратных связей в реальном времени

Принцип управления в реальном времени и подход к реализации оптимальной обратной связи в реальном времени опишем на примере следующей задачи оптимального управления.

$$c^T x(t_f) \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0^*,$$

$$x(t_f) \in X_f, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_*, t^*],$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние модели управления в момент времени t , $u = u(t) \in \mathbb{R}^r$ — значение управляющего воздействия в момент t , $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, x_0^* — известное начальное состояние объекта. $X_f = \{x \in \mathbb{R}^n : g_* \leq Hx \leq g^*\}$ — терминальное множество, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, g_* , $g^* \in \mathbb{R}^m$; $U = \{u \in \mathbb{R}^r : u_* \leq u \leq u^*\}$ — множество доступных значений управляющего воздействия.

Определение 1.4 Управляющее воздействие $u(t) \in U$, $t \in T$, называется программой, если соответствующая ему траектория $x(t)$, $t \in T$, математической модели (1.1) удовлетворяет условию $x(t_f) \in X_f$.

Определение 1.5 Программа $u^0(t)$, $t \in T$, называется оптимальной (программным решением задачи (1.1)), если на соответствующей ей (оптимальной) траектории $x^0(t)$, $t \in T$, выполняется равенство $c^T x^0(t_f) = \min_u c^T x(t_f)$, где минимум ищется среди всех программ.

Задача (1.1) рассматривается в классе дискретных управляющих воздействий:

$$u \equiv u(\tau), t \in [\tau, \tau + h[, \tau = T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\} (h = (t^* - t_*)/N, N > 0),$$

Чтобы ввести понятие классической оптимальной обратной связи, погрузим задачу (1.1) в семейство задач

$$\begin{aligned} c^T x(t_f) &\rightarrow \min, \\ \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = z, \\ x(t_f) &\in X_f, \quad u(t) \in U, \quad t \in T(\tau) = [\tau, t^*], \end{aligned} \tag{1.2}$$

Пусть $u^0(t|\tau, z)$, $t \in T(\tau)$, — оптимальная программа задачи (1.2) для позиции (τ, z) .

Функция

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau|\tau, z), \quad z \in X_\tau, \quad \tau \in T_h, \tag{1.3}$$

называется оптимальной обратной связью (позиционным решением задачи (1.1)).

Оптимальная обратная связь (1.3) предназначена для управления физическим объектом. Замкнем ею объект управления и запишем поведение замкнутой системы в форме

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^0(t, x), \quad x(t_*) = x_0, \tag{1.4}$$

где $u^0(t, x) = u^0(t, x(t))u^0(\tau, x(\tau))$, $t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in T_h$.

Рассмотрим поведение системы (1.4) в конкретном процессе управления.

$$\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t) + B(t)u^0(t, x^*(t)), \quad x^*(t_*) = x_0,$$

$$u^*(t) \equiv u^0(\tau, x^*(\tau)) = u^0(\tau|\tau, x^*(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in T_h,$$

Функцию $u^*(t)$, $t \in T$ будем называть реализацией оптимальной обратной связи (1.3) в конкретном процессе управления.

Перейдём к описанию принципа оптимального управления в реальном времени, при котором обратная связь (1.3) не строится, а при каждом $\tau \in T_h$ текущее управляющее воздействие $u^*(\tau)$ создаётся в процессе управления для текущей позиции $(\tau, x^*(\tau))$.

Пусть $\delta(\tau)$ — время вычисления значения $u^*(\tau)$, $\tau \in T_h$

Определение 1.6 Устройство, способное вычислять значение $u^*(\tau)$, $\tau \in T_h$ за время $\delta(\tau) < h$, называется оптимальным регулятором, реализующим оптимальную обратную связь (1.3) в реальном времени.

Из определения оптимальной обратной связи, оптимальный регулятор в каждый момент времени $\tau \in T_h$ должен решить задачу

$$\begin{aligned} c^T x(t_f) &\rightarrow \min, \\ \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = x^*(\tau), \\ x(t_f) &\in X_f, \quad u(t) \in U, \quad t \in T(\tau). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Запишем формулу Коши для линейной системы.

$$x(t^*) = F(t^*, \tau)x^*(\tau) + \int_{\tau}^{t^*} F(t^*, t)B(t)u(t) dt$$

где $F(t^*, t)$ — фундаментальная матрица.

$$x(t^*) = F(t^*, \tau)x^*(\tau) + \sum_{s=\tau}^{t^*-h} \int_s^{s+h} F(t^*, t)B(t) dt u(s) \tag{1.6}$$

Преобразуем равенство умножив (1.6) на матрицу H .

$$Hx(t^*) = HF(t^*, \tau)x^*(\tau) + \sum_{s=\tau}^{t^*-h} \int_s^{s+h} HF(t^*, t)B(t) dt u(s) \tag{1.7}$$

Равенство (1.7) эквивалентно следующему:

$$Hx(t^*) = \Phi(\tau)x^*(\tau) + \sum_{s=\tau}^{t^*-h} D(s)u(s)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= HF(t^*, t) \quad \Phi(t^*) = H, \quad \dot{\Phi} = -\Phi A(t); \\ D(s) &= \int_s^{s+h} \Phi(t)B(t) dt, \quad s \in T_h \end{aligned}$$

Таким образом, исходная задача (1.5) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$\sum_{t \in T_h(\tau)} c'(t)u(t) \rightarrow \min, \quad g_*(\tau) \leq \sum_{s \in T_h(\tau)} D(s)u(s) \leq g^*(\tau), \quad (1.8)$$

$$u_* \leq u(t) \leq u^*, \quad t \in T_h(\tau)$$

где

$$c'(t) = \int_s^{s+h} F(t^*, t)B(t) dt, \quad s \in T_h, \quad \dot{F}(t^*, t) = -F(t^*, t)A(t), \quad F(t^*, t^*) = c;$$

$$g_*(\tau) = g_* - \Phi(\tau)x^*(\tau), \quad g^* - \Phi(\tau)x^*(\tau);$$

В настоящей главе были рассмотрены основные понятия и определения. Была получена классификация принципов управления, используемых в современной теории управления. Рассмотрен принцип управления в режиме реального времени в применении к реализации оптимальных обратных связей в задачах оптимального управления с конечным горизонтом планирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Агаев, Р.П. Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) / Р.П. Агаев, П.Ю. Чеботарев // УБС. – 2010. – Вып. 30.1. – С. 470–505.
- 2 Асеев С. М., Кряжковский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 2007. – Т. 257. – №. 0. – С. 3-271.
- 3 Балашевич, Н.В. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью / Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 2. – С. 265-286.
- 4 Балашевич, Н.В. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления / Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40, № 6. – С. 838-859.
- 5 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Иностранная литература, 1960. – 400 с.
- 6 Данциг, Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / Д. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
- 7 Дмитрук Н.М., Габасов Р., Калинин А.И. Децентрализованные стратегии в задачах оптимального управления и стабилизации взаимосвязанных динамических систем: отчет о НИР (заключительный) / НИИ ППМИ; науч. рук. Дмитрук, Н.М. – 71 с.
- 8 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление взаимосвязанными объектами // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 147-154.
- 9 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление мультиагентными динамическими системами в условиях неопределенности / Н.М. Дмитрук // Доклады НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 11-15.
- 10 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Во Тхи Тань Ха. Оптимальное управление в реальном времени многомерным динамическим объектом // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 121–135.

- 11 Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15-18.
- 12 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление динамическими системами в условиях неопределенности / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т. 51, № 7. – С. 1209-1227.
- 13 Габасов, Р. Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.С. Павленок // Докл. Академии наук. – 2012. – Т. 444, № 4. – С. 371-375.
- 14 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, № 4. – С. 593-609.
- 15 Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем: Методы функционального анализа. – Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1973.
- 16 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С. Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний // Доклад Академии
- 17 Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1992. – Т. 4. – С. 3-19.
- 18 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления // Автоматика и телемеханика, 1996
- 19 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное наблюдение за нестационарными системами // Известия РАН. Теория и системы управления. № 3, 2002. С. 35 – 46.
- 20 Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принципы оптимального управления // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48. – №. 1. – С. 15-18.
- 21 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Поясок Е.И. Оптимальное наблюдение в реальном времени линейного динамического объекта // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448, № 3. С. 145–148.
- 22 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института математики и механики УрО РАН, Т.10, №2, 2004. С. 33-57.
- 23 Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г. Модели и алгоритмы

коллективного управления в группах роботов // М.: Физматлит. – 2009. – Т. 280.

24 Кириллова, Ф.М. Синтез оптимальных систем – оптимальное управление в реальном времени / Ф.М. Кириллова, Н.М. Дмитрук, Р. Габасов // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 208-219

25 Кряжковский, А.В. Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы / А.В. Кряжковский, Н.В. Стрелковский // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т.20, № 3. – С. 132–147.

26 Куржанский, А.Б. Задача управления групповым движением. Общие соотношения / А.Б. Куржанский // Доклады РАН. – 2009. – Т. 426, № 1. – С. 20–25.

27 Куржанский, А.Б. О задаче группового управления в условиях препятствий / А.Б. Куржанский // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 166-179.

28 Малкин И.Г. Теория устойчивости движения – М., Наука, 1966

29 Петрикевич Я. И. Линейные алгоритмы управления геометрическим расположением объектов в многоагентной системе // Управление большими системами: сборник трудов. – 2010. – №. 30-1.

30 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.

31 Сетевые модели в управлении / Сборник статей (под ред. Д.А. Новикова, О.П. Кузнецова, М.В. Губко). – М.: Эгвес, 2011. – 443 с.

32 Фельдбаум А.А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1953. Т. 14, № 5. С. 712–728.

33 Constrained model predictive control: Stability and optimality / D.Q. Mayne [et. al] // Automatica. – 2000. – Vol. 36, no. 6. – P. 789-814.

34 Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions / P.D. Christofides [et. al] // Computers & Chemical Eng. – 2013. – Vol. 51. – P. 21–41.

35 Distributed model predictive control / E. Camponogara [et. al] // IEEE Control Systems Magazine. – 2002. – Vol. 22, no. 1. – P. 44-52.

- 36 Dmitruk, N.M. Optimal Measurement Feedback Control of Finite-time Continuous Linear Systems / N.M. Dmitruk, R. Findeisen, F. Allgöwer // 17th IFAC World Congress. Seoul, 2008.
- 37 Dmitruk, N. Robust Optimal Control of Dynamically Decoupled Systems via Distributed Feedbacks / N. Dmitruk // Optimization in the Natural Sciences. Communications in Computer and Information Science. – Springer, 2015. – Vol. 499. – P. 95-106.
- 38 Farina, M. Distributed predictive control: A non-cooperative algorithm with neighbor-to-neighbor communication for linear systems / M. Farina, R. Scattolini // Automatica. – 2012. – Vol. 48, no. 6. – P. 1088-1096.
- 39 Grune L., Pannek J. Nonlinear model predictive control. – Springer London, 2011.
- 40 Gabasov R., Kirillova F. M., Prischepova S. V. Optimal feedback control. – Springer, 1995.
- 41 Hopkin A.M. A phase plan approach to the compensation of saturating servomechanisms // Trans. AIEE. 1951. Pt. 1, Vol. 70. P. 631–639.
- 42 Jia, D. Min-max feedback model predictive control for distributed control with communication / D. Jia, B. Krogh // Proc. American Control Conference, 2002. – P. 4507-4512.
- 43 Karmarkar, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming / N. Karmarkar // Combinatorica. – 1984. – Vol. 4, no. 4. – P. 373-395.
- 44 Keerthi, S.S. Optimal, infinite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems: Stability and moving-horizon approximations / S.S. Keerthi, E.G. Gilbert // Journal of Optimization Theory and Application. – 1988. – Vol. 57, no. 2. – P. 265-293.
- 45 Keviczky, T. Decentralized receding horizon control for large scale dynamically decoupled systems / T. Keviczky, F. Borrelli, G.J. Balas // Automatica. – 2006. – Vol. 42. – P. 2105-2115.
- 46 Kostina E., Kostyukova O. Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances // Int. J. of Robust and Nonlinear Control, 2009
- 47 Magni, L. Stabilizing decentralized model predictive control of nonlinear systems / L. Magni, R. Scattolini // Automatica. – 2006. – Vol. 43, no. 7. – P. 1231–1236.
- 48 Mehrotra, S. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method / S. Mehrotra // SIAM Journal on Optimization. – 1992. – Vol. 2. – P. 575–601.

- 49 Müller, M.A. Cooperative control of dynamically decoupled systems via distributed model predictive control / M.A. Müller, M. Reble, F. Allgöwer // Internat. Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2012. – Vol. 22, no. 12. – P. 1376-1397.
- 50 Nocedal, J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, 2006.
- 51 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.
- 52 Richards, A. Robust distributed model predictive control / A. Richards, J.P. How // Internat. Journal of Control. – 2007. – Vol. 80, no. 9. – P. 1517-1531.
- 53 Scattolini, R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control — a review / R. Scattolini // Journal of Process Control. – 2009. – Vol. 19, no. 5. – P. 723-731.
- 54 Siljak, D.D. Decentralized control of complex systems / D.D. Siljak. – London: Academic Press, 1991. – 525 p.
- 55 Trodden, P. Cooperative distributed MPC of linear systems with coupled constraints / P. Trodden, A. Richards // Automatica. – Vol. 49, no. 2. – P. 479-487.
- 56 Trodden, P. Distributed model predictive control of linear systems with persistent disturbances / P. Trodden, A. Richards // Internat. Journal of Control. – 2010. – Vol. 83, no. 8. – P. 1653-1663.