МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра методов оптимального управления

ПРИМЕНЕНИЕ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИКИ

Курсовая работа

НОВАША Антона Юрьевича
студента 3 курса,
специальность «экономическая кибернетика»

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В работе описывается задача оптимизации модели фон Неймана расширяющейся экономики методами оптимального управления.

Цель работы — продемонстрировать программное и позиционное решение на примере задачи оптимизации модели фон Неймана расширяющейся экономики.

В частности, в главе 1 обоснован принцип управления в режиме реального времени в применении к реализации оптимальных обратных связей в задачах оптимального управления с конечным горизонтом планирования. В главе 2 обсуждаются особенности задачи и исследуется два подхода к решению задачи оптимизации модели фон Неймана. Рассматривается сведение задачи оптимального управления к задаче линейного программирования,а так же формулируется и решается линейная задача оптимального управления в реальном времени. Глава 3 посвящена численному эксперименту, в котором проводится сравнение программного и позиционного решения.

ГЛАВА 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В настоящей глава формулируются основные понятия и определения, используемые в курсовой работе. Приводится классификация (согласно работе [1]) принципов управления, используемых в современной теории управления. Объясняется принцип управления в режиме реального времени в применении к реализации оптимальных обратных связей в задачах оптимального управления с конечным горизонтом планирования [2].

1.1 Понятие управления

Человек занимается управлением на протяжении всей своей жизни для обеспечения желаемого течения тех или иных процессов или сам предпринимает необходимые действия и принимает соответствующее решения.

Теория оптимального управления, отражающая современный этап развития вариационного исчисления, возникла в середине XX века в связи с задачами, поставленными практикой в различных областях развития новой техники.

Существует два взгляда на теорию оптимального управления. Согласно одному из них, теория оптимального управления — раздел современного вариационного исчисления. В соответствии с этим взглядом можно предложить следующее определение термина "управление": Управления — элементы функциональных пространств, по которым ищется экстремум выбранного функционала качества. Главной задачей данной теории является анализ решения экстремальной задачи (существование, единственность, непрерывная зависимость решений, необходимые и достаточные условия оптимальности).

Другой взгляд трактует данную теорию как раздел современной теории управления, представляющей естественное развитие классической теории управления. В этом случае выделим следующее определение для термина "управление": Управления — это процесс, в котором для достижения нужного поведения объекта управления в каждый текущий момент времени создаются целенаправленные (управляющие) воздействия на объект управления в зависимости от доступной к этому моменту информации о поведении объекта и действующих на него возмущений.

1.2 Принципы управления

При управлении динамическим объектом используются три принципа: управление по разомкнутому контуру (программное управление рис. 1.1 а), управление по замкнутому контуру (позиционное управление рис 1.1 б), управление в реальном времени.

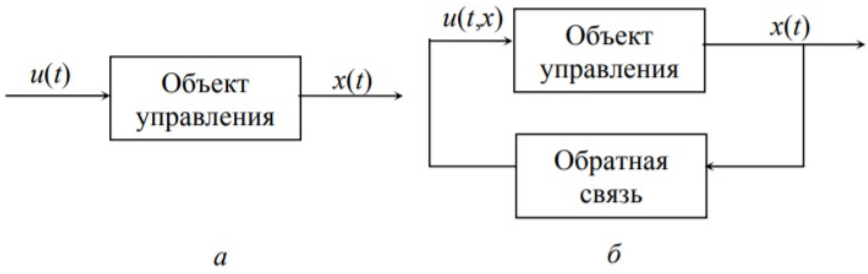

Рис. 1.1: а) разомкнутый контур; б) замкнутый контур

Определение 1.1 Программное управление — управление, при котором (программные) управляющие воздействия (программы) планируются по априорной информации до начала процесса управления и не корректируются в процессе управления.

Программное управление редко применяется на практике, поскольку не учитывает неточности математического моделирования физических систем и возмущения, косвенная информация о которых доступна, как правило, в процессе управления. Фундаментом этого метода является принцип максимума Понтрягина [3].

Определение 1.2 Позиционное управление — управление, при котором (позиционные) управляющие воздействия создаются в процессе управления по текущим позициям, которые аккумулируют информацию, доступную к текущему моменту.

Динамическое программирование [4] является одним из основных методов реализации позиционного управления.

Определение 1.3 Синтез оптимальных систем управления — построение оптимальных позиционных управляющих воздействий.

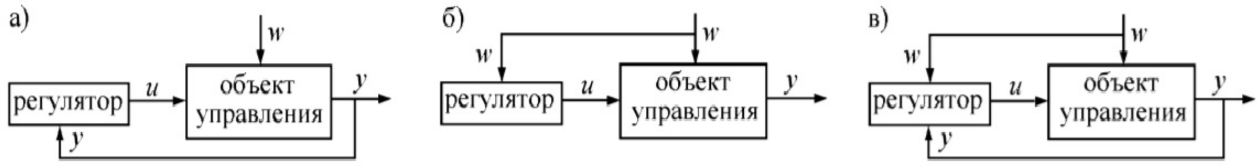

Рис. 1.2: а) обратная связь; б) прямая связь; в) комбинированная связь

При создании систем по принципу замкнутого контура используются связи трех типов:*прямые*, *обратные* и *комбинированные* (рис. 1.2).

Связь называется прямой, если она преобразует в управляющее воздействие доступную информацию о наблюдаемых входных сигналах. Обратная связь по состоянию преобразует в управляющее воздействие информацию о состоянии объекта. В комбинированной связи преобразуется информация обоих типов.

Для позиционного управления характерна следующая особенность. Проблема синтеза в рамках принципа управления по замкнутому контуру не удается решить из-за проклятия размерности ни с помощью принципа максимума [3], ни с помощью динамического программирования Беллмана [4].

Решение данной проблемы можно предложить, если перейти к современному принципу управления — оптимальному управлению в реальном времени [2]. При управлении динамическим объектом в реальном времени связи не строятся, а необходимые для управления их текущие значения формируются в реальном времени по ходу каждого конкретного процесса.

1.3 Реализация оптимальных обратных связей в реальном времени

Принцип управления в реальном времени и подход к реализации оптимальной обратной связи в реальном времени опишем на примере следующей задачи оптимального управления.

$$c^T x(t_f) \to \min, \tag{1.1}$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0^*,$$

$$x(t_f) \in X_f, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_*, t^*],$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние модели управления в момент времени t, $u = u(t) \in \mathbb{R}^r$ — значение управляющего воздействия в момент t, $A(t) \in$

$\mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t)\in\mathbb{R}^{n\times r}$, x_0^* — известное начальное состояние объекта. $X_f=\{x\in\mathbb{R}^n : g_*\le Hx\le g^*\}$ — терминальное множество, $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $g_*,\ g^*\in\mathbb{R}^m$; $U=\{u\in\mathbb{R}^r : u_*\le u\le u^*\}$ — множество доступных значений управляющего воздействия.

Определение 1.4 Управляющее воздействие $u(t)\in U$, $t\in T$, называется программой, если соответствующая ему траектория $x(t)$, $t\in T$, математической модели (1.1) удовлетворяет условию $x(t_f)\in X_f$.

Определение 1.5 Программа $u^0(t)$, $t\in T$, называется оптимальной (программным решением задачи (1.1)), если на соответствующей ей (оптимальной) траектории $x^0(t)$, $t\in T$, выполняется равенство $c^Tx^0(t_f)=\min_u c^Tx(t_f)$, где минимум ищется среди всех программ.

Задача (1.1) рассматривается в классе дискретных управляющих воздействий:

$$u\equiv u(\tau), t\in[\tau,\tau+h[,\ \tau=T_h=\{t_0,t_0+h,...,t_f-h\},$$

где $h=(t^*-t_*)/N$ — период квантования, $N>1$ — натуральное число.

Чтобы ввести понятие классической оптимальной обратной связи, погрузим задачу (1.1) в семейство задач

$$c^Tx(t_f)\to\min, \tag{1.2}$$

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\quad x(\tau)=z,$$
$$x(t_f)\in X_f,\quad u(t)\in U,\quad t\in T(\tau)=[\tau,t_f],$$

зависящее от скаляра $\tau\in T_h$ и n-вектора z. Пару (τ,z) назовём позицией системы управления. Пусть $u^0(t|\tau,z),\quad t\in T(\tau)$, — оптимальная программа задачи (1.2) для позиции (τ,z).

Определение 1.6 Функция

$$u^0(\tau,z)=u^0(\tau|\tau,z),\quad z\in X_\tau,\quad \tau\in T_h, \tag{1.3}$$

называется оптимальной обратной связью (позиционным решением задачи (1.1)).

Оптимальная обратная связь (1.3) строится по детерминированной математической модели, но предназначена для управления физическим объектом, поведение которого, как правило, отличается от идеальной модели. Пусть поведение замкнутого обратной связью объекта управления описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^0(t,x) + w(t),\ x(t_0) = x_0, \tag{1.4}$$

где $u^0(t,x) = u^0(t,x(t)) \equiv u^0(\tau, x(\tau))$, $t \in [\tau, \tau+h[$, $\tau \in T_h$, $w(t)$, $t \in T$, — возмущение, действующее на физический объект в процессе управления.

Рассмотрим поведение системы (1.4) в конкретном процессе управления. Конкретный процесс характеризуется конкретным реализовавшимся возмущением $w^*(t)$, $t \in T$. Тогда в нем реализуется траектория $x^*(t)$, $t \in T$:

$$\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t) + B(t)u^0(t, x^*(t)) + \omega^*(t), \quad x^*(t_0) = x_0.$$

Отсюда следует, что в конкретном процессе управления оптимальная обратная связь (1.3) не используется целиком, нужны лишь её следующие значения:

$$u^*(t) \equiv u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau)) = u^0(\tau|\tau, x^*(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau+h[, \quad \tau \in T_h. \tag{1.5}$$

Определение 1.7 Функцию $u^*(t), t \in T$, определенную согласно (1.5) будем называть реализацией оптимальной обратной связи (1.3) в конкретном процессе управления.

Перейдём к описанию принципа оптимального управления в реальном времени, при котором обратная связь (1.3) не строится, а при каждом $\tau \in T_h$ текущее управляющее воздействие (1.5) создаётся в процессе управления для текущей позиции $(\tau, x^*(\tau))$.

Из определения оптимальной обратной связи следует, что в каждый момент времени $\tau \in T_h$ должна решаться задача оптимального управления

$$c^T x(t_f) \to \min, \tag{1.6}$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = x^*(\tau),$$

$$x(t_f) \in X_f, \quad u(t) \in U, \quad t \in T(\tau).$$

Пусть $\delta(\tau)$ — время решения задачи (1.6).

Определение 1.8 Устройство, способное вычислять значение $u^*(\tau), \tau \in T_h$, за время $\delta(\tau) < h$, называется оптимальным регулятором, реализующим оптимальную обратную связь (1.3) в реальном времени.

Алгоритм работы оптимального регулятора состоит из 3 шагов:

1. Получить измерение состояния $x^*(\tau)$.

2. Решить задачу оптимального управления (1.6).

3. Подать управление на систему $u^*(\tau)$.

Продолжая этот процесс получим следующую последовательность состояний объекта:

$$x^*(t_0) = {x_0}^*, x^*(t_* + h), ..., x^*(\tau), ..., x(t_f),$$

и соответствующую ей последовательность управляющих воздействий:

$$u^*(t_0), u^*(t_0 + h), ..., u^*(\tau), ..., u^*(t_f - h).$$

Для решения задачи (1.6) можно испол ьзовать различные подходы. Простейшим будет сведение ее к задаче линейного программирования, что возможно благодаря выбору класса дискретных управляющих воздействий.

Для этого запишем формулу Коши для линейной системы:

$$x(t_f) = F(t_f, \tau)x^*(\tau) + \int_{\tau}^{t_f} F(t_f, t)B(t)u(t)dt, \tag{1.7}$$

где $F(t_f, t)$ — фундаментальная матрица, т.е. решение уравнения

$$\dot{F}(t_f, t) = -F(t_f, t)A(t), \quad F(t_f, t_f) = E.$$

Интеграл в правой часть равенства (1.7) запишем следующим образом:

$$x(t_f) = F(t_f, \tau)x^*(\tau) + \sum_{s=\tau}^{t_f - h} \int_{s}^{s+h} F(t_f, t)B(t)\,dt\ u(s). \tag{1.8}$$

Используя (1.8) запишем левую часть терминального ограничения:

$$Hx(t_f) = HF(t_f, \tau)x^*(\tau) + \sum_{s=\tau}^{t_f - h} \int_{s}^{s+h} HF(t_f, t)B(t)\,dt\ u(s). \tag{1.9}$$

Равенство (1.9) перепишем в виде:

$$Hx(t_f) = \Phi(\tau)x^*(\tau) + \sum_{s=\tau}^{t_f - h} D(s)\ u(s).$$

где введены следующие обозначения:

$$\Phi(t) = HF(t_f, t) \quad \Phi(t_f) = H, \quad \dot{\Phi} = -\Phi A(t);$$

$$D(s) = \int_s^{s+h} \Phi(t)B(t)\, dt, \quad s \in T_h.$$

Таким образом, исходная задача (1.6) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$\sum_{t \in T_h(\tau)} c'(t)u(t) \to \min, \tag{1.10}$$

$$g_*(\tau) \leq \sum_{s \in T_h(\tau)} D(s)u(s) \leq g^*(\tau),$$

$$u_* \leq u(t) \leq u^*, \quad t \in T_h(\tau),$$

где

$$c'(t) = \int_s^{s+h} F(t_f, t)B(t)\, dt, \quad s \in T_h,$$

$$g_*(\tau) = g_* - \Phi(\tau)x^*(\tau),$$

$$g^*(\tau) = g^* - \Phi(\tau)x^*(\tau).$$

Задача (1.10) называется функциональной формой задачи оптимального управления (1.6). На ее основе в литературе [5] предложена динамическая реализация специального двойственного метода линейного программирования [2], основанная на близости задач оптимального управления (1.6) для соседних моментов τ и $\tau + h$.

В настоящей глава были рассмотрены основные понятия и определения. Была описана классификация принципов управления, используемых в современной теории управления. Рассмотрен принцип управления в режиме реального времени в применении к реализации оптимальных обратных связей в задачах оптимального управления с конечным горизонтом планирования.

ГЛАВА 2

ОПТИМАЛЬНОЕ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

В данной главе рассматривается формулировка задачи оптимального управления для модели расширяющейся экономики фон Неймана. Описываются особенности задачи. Рассматривается сведение задачи оптимального управления к задаче линейного программирования. Формулируется и решается линейная задача оптимального управления в реальном времени. Рассматривается алгоритм централизованного управления.

2.1 Задача оптимального управления для модели расширяющейся экономики фон Неймана

Простой и наглядной задачей, с помощью которой можно проиллюстрировать предлагаемый подход децентрализованного управления, является задача оптимального управления для модели расширяющейся экономики фон Неймана. Данная модель ещё в 30-е годы была сформулирована Джоном фон Нейманом, который решил для ней задачу оптимизации многошаговых процессов в своеобразном классе допустимых управлений.

Рассмотрим замкнутую экономику, которая на промежутке времени $T = [0, z]$ производит n типов товаров с использованием r технологических процессов (ТП).

Технологический процесс j при единичной интенсивности расходует товар i в количестве a_{ij} и производит в количестве b_{ij}, $i \in I = 1, ..., n, j \in J = 1, ..., r$.

Если за $x_i(t)$ принять количество i -го товара, $u_j(t)$ — интенсивность j -го ТП в момент t, $x(t) = (x_i(t), i \in I)$ — вектор товаров, $u(t) = (u_i(t), j \in J)$ — вектор интенсивностей ТП в момент t, $A = (a_{ij}, i \in I, j \in J) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = (b_{ij}, i \in I, j \in J) \in \mathbb{R}^{n\times r}$ — матрицы затрат и выпуска, соответственно, x_0— n -вектор начальных объёмов товаров, то непрерывная модель расширяющейся экономики описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = (B - A)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

На переменные модели (2.1) накладываются ограничения:

$$Au(t) \leq x(t), u(t) \geq 0, t \geq 0, \tag{2.2}$$

Ограничения (2.2) связаны с невозможностью расходовать больше товара, чем имеется в наличии в каждый момент времени, а также необходимостью использовать неотрицательную интенсивность ТП.

Будем искать такой план производства, при котором в заданный момент T стоимость товаров будет максимальной.

$$c'x(T) = \sum_{i \in I} c_i' x_i(T)$$

Здесь $c = (c_i, i \in I)$ – вектор цен.

Таким образом, задача оптимального управления системой (2.1) имеет вид

$$J(u) = c'x(T) \to \max, \tag{2.3}$$

$$\dot{x} = (B - A)u, \quad x(0) = x_0,$$

$$Au(t) \leq x(t),$$

$$u(t) \geq 0, \quad t \in [0, T].$$

2.2 Обсуждение особенностей задачи

При практическом применении результатов теории управления необходимо учитывать следующие особенности:

1. Все реальные экономические объекты управления содержат неопределенности: возмущения, неточности математического моделирования, ошибки измерений и др. Например, модель (2.1) может быть подвержена действию возмущений, вызванных сбоями в работе ТП, их работой не на полную мощность, браком товаров.

2. При управлении в условиях неопределенности используются обратные связи. Их построение в явном виде для задач с ограничениями (как в (2.3)) в большинстве случаев невозможно, а применение результатов динамического программирования сдерживается "проклятием размерности" [4].

3. Сложные системы управления часто имеют структуру, учет которой позволяет упростить или ускорить процедуры построения обратных связей. Важным примером системы со структурой являются так называемые муль-

тиагентные системы [6], для которых характерно применение децентрализованного управления: каждый "агент" управляется локально, но преследуется общая цель при общих ограничениях на состояния и управления.

В задаче (2.3) также можно выделить структуру: она задается технологическими процессами. Соответственно, управление здесь можно организовать двумя способами:

1) Централизованно, когда один управляющий орган (регулятор) принимает решение для всех ТП одновременно.

2) Децентрализованно, когда для каждого ТП интенсивность выбирается относительно независимо, локальным управляющим органом (локальным регулятором).

Цель при децентрализованном управлении общая – максимизация гарантированной стоимости товаров, произведенных всеми процессами к моменту времени Т , но все решения необходимо принимать локально, не нарушая при этом общих ограничений.

Далее в настоящей главе будет рассматриваться централизованное управление. Начнём с построения программного решения задачи, которая обобщает (2.3).

2.3 Построение программных решений

Сформулируем задачу оптимального управления линейной динамической системы, на состояния и управления которой наложены смешанные ограничения:

$$
\begin{gathered}
J(u) = c'x(T) \to \max, \qquad (2.4)\\
\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0,\\
Hx(t) + Gu(t) \le g,\\
u(t) \in U, \quad t \in [0, T].
\end{gathered}
$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times r}, H \in \mathbb{R}^{n\times n}, G \in \mathbb{R}^{m\times r}$, — заданные матрицы; $U \subset \mathbb{R}^r$.

Задача (2.4) обобщает задачу (2.3) для которой:

$$A = 0, B = B - A, H = -E, G = A, g = 0.$$

Будем считать, что для целей управления доступны полные и точные измерения состояний, которые поступают в дискретные моменты времени $\tau \in T_h = 0, h, ..., T-h$, где $h = T/N$ — период квантования.

Траекторию измерений в конкретном процессе управления будем обозначать $x^*(\tau), \tau \in T_h$; она зависит от $u^*(\cdot)$ выбранного управления.

Для решения задачи (2.4) в классе дискретных управляющих воздействий сведём ее к задаче линейного программирования с помощью формулы Коши для линейной системы.

$$x(t) = F(t,0)x_0 + \int_0^t F(t,\theta)Bu(\theta)dt, \tag{2.5}$$

где $F(t,\theta)$ — фундаментальная матрица, т.е. решение уравнения

$$\dot{F}(t,\theta) = -F(t,\theta)A, \quad F(t,t) = E.$$

Решением данного уравнения является следующее значение $F(t,\theta)$:

$$F(t,\theta) = F(t-\theta) = e^{A(t-\theta)}.$$

Интеграл в правой часть равенства (2.5) с учетом дискретности управления запишем следующим образом:

$$x(t) = F(t,0)x_0 + \sum_{s \in T_h(0,t)} \int_s^{s+h} F(t,\theta)B\,d\theta\; u(s), \tag{2.6}$$

где $T_h(0,t) = \{0, h, ..., t-h\}$.

Используя (2.6) запишем левую часть терминального ограничения:

$$Hx(t) + Gu(t) = HF(t,0)x_0 + \sum_{s \in T_h(0,t)} \int_s^{s+h} HF(t,\theta)B\,d\theta\; u(s) + Gu(t). \tag{2.7}$$

Введём следующие обозначения:

$$\Phi(t) = HF(t,0) = He^{At}.$$

$$D(t,s) = \int_s^{s+h} \Phi(t-\theta)B\,d\theta, \quad s \in T_h(0,t).$$

Равенство (2.7) перепишем в следующем виде:

$$Hx(t) + Gu(t) = \Phi(t)x_0 + \sum_{s \in T_h(0,t)} D(t,s)u(s) + Gu(t)$$

Таким образом, исходная задача (2.4) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$\sum_{t \in T_h} c'(t)u(t) \to \min, \tag{2.8}$$

$$\sum_{s \in T_h(0,t)} D(t,s)u(s) + Gu(t) \le g^*, \quad t \in T_h,$$

$$u_* \le u(s) \le u^*, \quad s \in T_h(0,t),$$

где

$$c'(t) = \int_t^{t+h} c'F(T,\theta)B\,d\theta,$$

$$g^* = g - \Phi(t)x_0.$$

Таким образом, для решения задачи ЛП получим следующие данные:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} G & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D(h,0) & G & 0 & \dots & 0 \\ D(2h,0) & D(2h,h) & G & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(T-h,0) & D(T-h,h) & \dots & D(T-h,T-2h) & G \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(h) \\ u(2h) \\ \vdots \\ u(T-h) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} g - \Phi(0)x_0 \\ g - \Phi(h)x_0 \\ g - \Phi(2h)x_0 \\ \vdots \\ g - \Phi(T-h)x_0 \end{pmatrix}$$

В итоге задачу ЛП (2.8) перепишем в виде:

$$\sum_{t\in T_h}\mathbf{c}'\mathbf{u}\to\min,$$
$$\mathbf{Au}\leq\mathbf{b},$$
$$\mathbf{u}\in U\times U\times\ldots\times U,\quad t\in[0,T],$$

2.4 Построение позиционного решения

При сделанном предположении определим понятие (дискретной) оптимальной обратной связи в задаче (2.3). Для этого погрузим ее в семейство задач оптимального управления

$$\begin{aligned}&J(u)=c'x(T)\to\max,\\&\dot{x}=Ax(t)+Bu(t),\quad x(\tau)=z,\\&Hx(t)+Gu(t)\leq g,\\&u(t)\in U,\quad t\in[\tau,T],\end{aligned}\tag{2.9}$$

зависящее от пары $(\tau,z),\tau\in T_h,z\in\mathbb{R}^n$, которая называется позицией процесса управления.

Пусть $u^0(t|\tau,z),t\in[\tau,T],$ – оптимальная программа управления в задаче (2.9) для позиции $(\tau,z),X(\tau)$ — множество всех состояний z, для которых в заданный момент τ оптимальная гарантирующая программа существует.

В связи с трудностями построения обратных связей, современные подходы, применяемые в теории управления, направлены на построение обратной связи в каждом конкретном процессе управления по решению вспомогательных (прогнозирующих) задач оптимального управления. Эти задачи формулируются для каждого текущего момента таким образом, чтобы обеспечить желаемое поведение замкнутой системы. Для задач оптимального управления с конечным горизонтом управления (как в задаче (2.4)) подход носит название управления в реальном времени.

Проводя аналогичные рассуждения,как и для задачи (2.4), для (2.9) получим следующую задачу ЛП:

$$\sum_{t=\tau}^{T-h}c'(t)u(t)\to\min,$$

$$\sum_{s \in [\tau, T-h]} D(s)u(s) + Gu(t) \leq g^*,$$

$$u_* \leq u(t) \leq u^*, \quad t \in [\tau, T],$$

где

$$c'(t) = \int_t^{t+h} c'F(T,\theta)B\,d\theta,$$

$$g^* = g - \Phi(\tau)z,$$

В данной главе была рассмотрена формулировка задачи оптимального управления для модели расширяющейся экономики фон Неймана,а так же описаны особенности задачи. Были рассмотрены два подхода к решению задачи. Формулируется и решается линейная задача оптимального управления в реальном времени.

ГЛАВА 3

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Описанный метод нахождения позиционного решения и реализацию оптимальной обратной связи в режиме реального времени продемонстрируем на примере задачи оптимального управления для модели расширяющейся экономики фон Неймана:

$$J(u) = c'x(T) \to \max, \tag{3.1}$$

$$\dot{x} = (B - A)u, \quad x(0) = x_0,$$
$$Au(t) \le x(t),$$
$$u(t) \ge 0, \quad t \in [0, T].$$

Параметрам задачи присвоим следующие значения:

$$T = 3, x_0 = (15, 1), c_0 = (5, 2),$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1 Программная реализация

Определим функцию CreateLp, где матрица условий, вектор затрат и вектор стоимости вычисляются следующим образом:

```
function [A_lp, b_lp, c_lp] = CreateLp(s,r,z)
    A_lp = [];
    b_lp = [];
    c_lp = [];
    for t = r:s.h:s.T-s.h
        c_lp = [c_lp s.c_0 * quadv(@(tt)FundMatrix(s.A, s.T - tt)*s.B,
        t, t + s.h)];
        b_lp = [b_lp; s.g - s.H*FundMatrix(s.A,t)*z];
        D = [];
        for q = r+s.h:s.h:t
```

```
            D_s = quadv(@(x) s.H*FundMatrix(s.A, t - x)*s.B,...
            q, q + s.h);
            D = [D D_s];
        end
        D = [D s.G];
        A_lp = [A_lp zeros(size(A_lp,1),s.r)];
        A_lp = [A_lp;D];
    end
end
```

Здесь s — структура с исходными данными задачи, (r, z) — позиция, для которой строится задача ЛП.

Для решения задачи (3.1) определим в общем виде функцию Solve, чтобы иметь возможность ее повторного использования для различных подходов к решению.

```
function [X, U] = Solve(s,r,z)
    [A_lp, b_lp, c_lp] = CreateLp(s,r,z);
    lb = zeros(size(b_lp));
    u = linprog(-c_lp, A_lp, b_lp,[],[],lb);
    U = reshape(u,[s.n,length(A_lp)/2]);
    X = [];
    for t = r:s.h:s.T-s.h
        count = 1;
        f_res = zeros(s.n,1);
        for q = r+s.h:s.h:t
        f = quadv(@(x)FundMatrix(s.A, t - x) * s.B,...
         q, q + s.h)* U(:,count);
        count = count + 1;
        f_res = f_res + f;
        end
        if(r == 0)
        X_Solve = FundMatrix(s.A,t - r)*z + f_res;
        else
        w = -0.1*U(:,count);
        X_Solve = FundMatrix(s.A,t - r)*z + f_res +...
        quadv(@(x)FundMatrix(s.A,r - x) * s.M * w, r, r + s.h);
        end
        X = [X X_Solve];
    end
```

```
end
```

Для расчёта значения фундаментальной матрицы определим функцию FundMatrix, которая имеет следующий вид:

```
function F = FundMatrix(A,t)
    F = expm(A*t);
```

Программное решения задачи (3.1) вычисляется с помощью следующей команды:

```
[X, U] = Solve(s,0,s.x_0);
```

При построение обратной связи состояние объекта описывается уравнением с возмущением $w(t) = M + w^*$, где:

$$w^* = -0.1u(t), \quad M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Позиционное решение задачи (3.1) вычисляется с помощью следующих команд:

```
X_sol = [];
U_sol = [];
z = s.x_0;
for r=0:s.h:s.T-s.h
    [X_p, U_p] = Solve(s,r,z);
    X_sol = [X_sol X_p(:,1)];
    U_sol = [U_sol U_p(:,1)];
    [a,b] = size(X_p);
    if(b > 1)
    z = X_p(:,2);
    end
end
```

3.2 Сравнение программного и позиционного решения

Сравним результаты для программного и позиционного решения. Во всех численных экспериментах были найдены решения для моментов времени $t = [0, T]$ с шагом $h = T/N$, где $N = 100$.

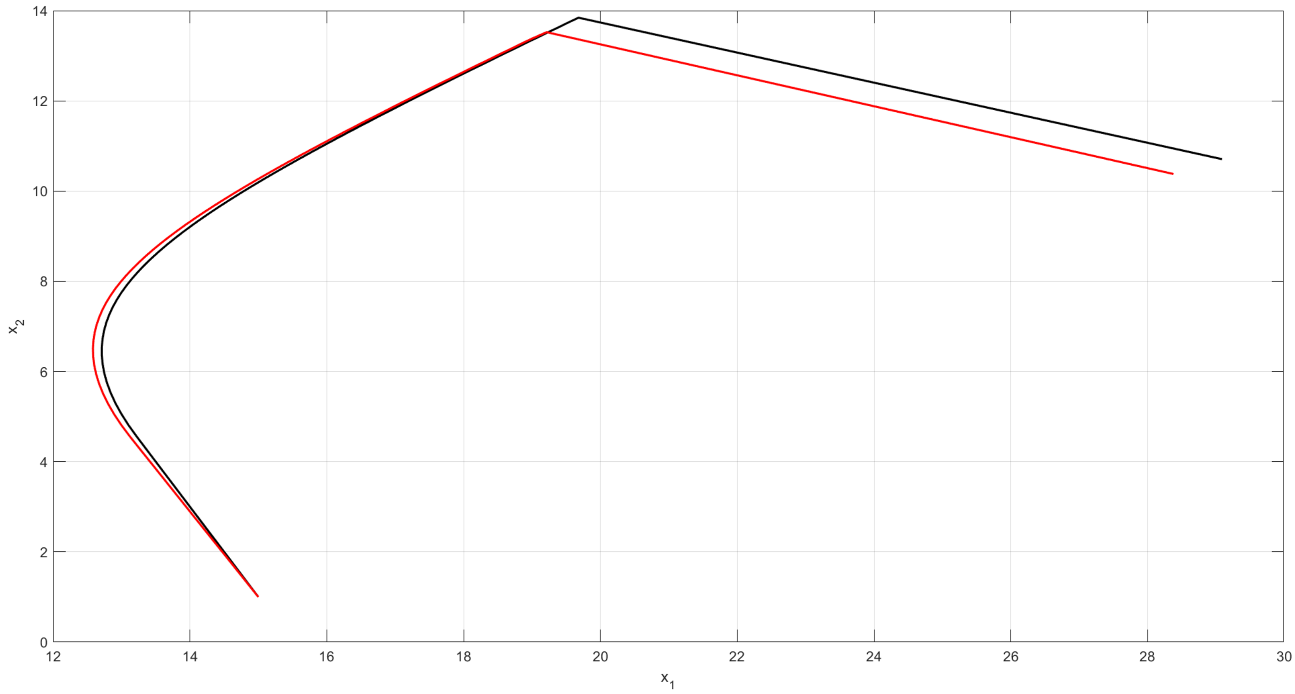

Рис. 3.1: Сравнение

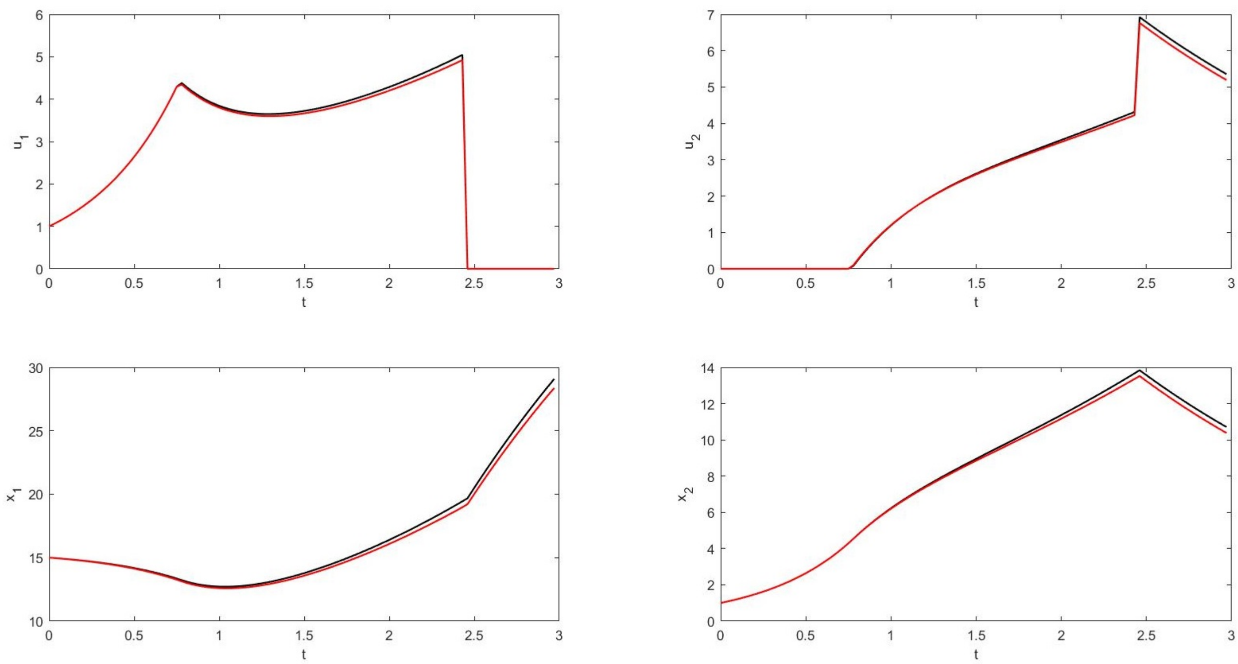

Рис. 3.2: Сравнение

На рисунке 3.1 представлено сравнение состояний объекта для программного и позиционного решения, где черным цветом изображено программное решение, а красным цветом позиционное решение.

На рисунке 3.2 представлено сравнение программного и позиционного решения, а так же состояний объекта для программного и позиционного решения в зависимости от времени.

Сравним значения критерия качества для обоих видов решения.

Для программного решения: $J(u^0) = 166.8597030$.

Для позиционного решения: $J(u^0) = 162.6487067$.

В настоящей главе были рассмотрены два подхода к решению задачи оптимального управления для модели расширяющейся экономики фон Неймана. С помощью результатов численных экспериментов были получены графики сравнения состояний объектов для программного и позиционного решения, а так же графики сравнение программного и позиционного управления, состояний объекта для программного и позиционного решения в зависимости от времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В курсовой работе рассмотрена задача оптимизации модели фон Неймана расширяющейся экономики методами оптимального управления, целью управления которой является отыскание оптимального плана производства. Для исследуемой задачи представлен способ ее сведения к задаче линейного программирования, а так же сформулированы два подхода к ее решению: программное и позиционное.

Проведены численные эксперименты, в которых представлены сравнения программного и позиционного решения для исследуемой задачи, а так же сравнение программного и позиционного управления, состояний объекта для программного и позиционного решения в зависимости от времени. Получены значения критерия качества.

Децентрализованное управление будет рассмотрено на 4 курсе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15-18.

2 Кириллова, Ф.М. Синтез оптимальных систем – оптимальное управление в реальном времени / Ф.М. Кириллова, Н.М. Дмитрук, Р. Габасов // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 208-219

3 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.

4 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.:Инностранная литература, 1960. – 400 с.

5 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, № 4. – С. 593-609.

6 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление мультиагентными динамическими системами в условиях неопределенности / Н.М. Дмитрук // Доклады НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 11-15.