ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

**Программа подготовки бакалавров по направлению
01.03.02 Прикладная математика и информатика**

Антонов Илья Витальевич

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Проверка условной независимости в трехмерном распределении Бернулли

Рецензент	Научный руководитель
д.ф.-м.н., проф.	д.ф.-м.н., проф.
ФИО	П. А. Колданов

Нижний Новгород, 2024

Содержание

1 Теория проверки условной независимости в трехмерном распределении Бернулли

1.1 Условная независимость в трехмерном распределение Бернулли

Определим трехмерное распределение Бернулли [3; 6].

Определение 1.1. Случайный вектор $(X, Y, Z)^T$ имеет трехмерное распределение Бернулли, если множество его возможных значений:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

и заданы $P(X = x, Y = y, Z = z) = p_{xyz} \geq 0, \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} \sum_{z=0}^{1} p_{xyz} = 1$.

Приведем определение понятия условной независимости [4].

Определение 1.2. Пусть $(X, Y, Z)^T$ – дискретный случайный вектор. Говорят, что случайные величины X и Y условно независимы при условии Z, и пишут $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$, если:

$$P(X = x, Y = y \mid Z = z) = P(X = x \mid Z = z) P(Y = y \mid Z = z)$$

при любом z для которого $P(Z = z) > 0$.

Сформулируем и докажем теорему, которая характеризует соотношения между параметрами трехмерного распределения Бернулли при условной независимости.

Теорема 1.1. Пусть $(X, Y, Z)^T$ – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли, в котором $P(Z = 0) > 0$. Случайные величины X и Y условно независимы при условии Z тогда и только тогда, когда $p_{00z} p_{11z} = p_{01z} p_{10z}$ для всех $z = \overline{0, 1}$.

Доказательство. Пусть $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$. Значит, для любых $x = \overline{0, 1}$, $y = \overline{0, 1}$ и $z = \overline{0, 1}$ выполнено условие:

$$P(X = x, Y = y \mid Z = z) = P(X = x \mid Z = z) P(Y = y \mid Z = z) \qquad (1)$$

После домножения (1) на $P(Z = z)^2$ получаем эквивалентное условие:

$$P(X = x, Y = y, Z = z)P(Z = z) = P(X = x, Z = z)P(Y = y, Z = z) \quad (2)$$

Найдем следующие вероятности:

$$P(X = x, Z = z) = p_{x0z} + p_{x1z},\ P(Y = y, Z = z) = p_{0yz} + p_{1yz}$$

$$P(Z = z) = p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}$$

Тогда условие (2) перепишем в следующем виде:

$$p_{xyz}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{x0z} + p_{x1z})(p_{0yz} + p_{1yz})$$

Это условие выполняется для всех $x = \overline{0, 1}$, $y = \overline{0, 1}$, $z = \overline{0, 1}$. Пусть z фиксировано. Если $x = 0$ и $y = 0$, то:

$$p_{00z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{00z} + p_{01z})(p_{00z} + p_{10z}) \Leftrightarrow p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$$

Если $x = 0$ и $y = 1$, то:

$$p_{01z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{00z} + p_{01z})(p_{01z} + p_{11z}) \Leftrightarrow p_{01z}p_{10z} = p_{00z}p_{11z}$$

Если $x = 1$ и $y = 0$, то:

$$p_{10z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{10z} + p_{11z})(p_{00z} + p_{10z}) \Leftrightarrow p_{10z}p_{01z} = p_{11z}p_{00z}$$

Если $x = 1$ и $y = 1$, то:

$$p_{11z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{10z} + p_{11z})(p_{01z} + p_{11z}) \Leftrightarrow p_{11z}p_{00z} = p_{10z}p_{01z}$$

Таким образом, из условной независимости X и Y при условии Z следует $p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$ для всех $z = \overline{0, 1}$.

Доказательство в обратную сторону проводится аналогично. □

Приведем пример случайного вектора $(X, Y, Z)^T$ с трехмерным распределением Бернулли, в котором $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$.

Пример 1.1. Пусть $(X, Y, Z)^T$ имеет трехмерное распределение Бернулли с вероятностями $p_{000} = 0.15$, $p_{001} = 0.1$, $p_{010} = 0.3$, $p_{011} = 0.1$, $p_{100} = 0.05$, $p_{101} = 0.1$, $p_{110} = 0.1$, $p_{111} = 0.1$. Заметим, что:

$$p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100} = 0.015$$

$$p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101} = 0.01$$

Значит из теоремы 1.1 следует, что $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$.

1.2 Частный коэффициент корреляции Пирсона в трехмерном распределении Бернулли

Согласно [1] в трехмерном нормальном распределении случайные величины X и Y условно независимы при условии Z тогда и только тогда, когда частный коэффициент корреляции Пирсона между X и Y принимает нулевое значение. Проверим, сохраняется ли это свойство в трехмерном распределении Бернулли. Для случайного вектора $(X, Y, Z)^T$ определим ковариационную матрицу:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{pmatrix}$$

Остатками от X и Y при регрессии на Z называются случайные величины:

$$X' = (X - EX) - \frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_{ZZ}}(Z - EZ)$$

$$Y' = (Y - EY) - \frac{\sigma_{YZ}}{\sigma_{ZZ}}(Z - EZ)$$

Согласно работе [2] частный коэффициент корреляции Пирсона определяется как коэффициент корреляции Пирсона между остатками, другими словами:

$$\rho^{XY \cdot Z} = \frac{E(X'Y')}{\sqrt{E(X')^2 E(Y')^2}}$$

Можно показать, что в любом распределении:

$$\rho^{XY \cdot Z} = \frac{\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ}}{\sqrt{\sigma_{XX}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}^2}\sqrt{\sigma_{YY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{YZ}^2}} = \frac{\rho_{XY} - \rho_{XZ}\rho_{YZ}}{\sqrt{1 - \rho_{XZ}^2}\sqrt{1 - \rho_{YZ}^2}}$$

где ρ_{XY}, ρ_{XZ}, ρ_{YZ} – коэффициенты корреляции Пирсона между случайными величинами X и Y, X и Z, Y и Z соответственно. Для дальнейших рассуждений примем следующие обозначения:

$$p_{x**} = P(X = x),\ p_{*y*} = P(Y = y),\ p_{**z} = P(Z = z)$$

$$p_{xy*} = P(X = x, Y = y),\ p_{x*z} = P(X = x, Z = z),\ p_{*yz} = P(Y = y, Z = z)$$

Найдем значение выражения $\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ}$ в трехмерном распределении Бернулли.

Лемма 1.1. Пусть $(X, Y, Z)^T$ – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли. Тогда:

$$\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100})$$

Доказательство. Легко проверить, что $\sigma_{ZZ} = p_{**1}(1 - p_{**1})$. Найдем соотношение для σ_{XY}. Воспользуемся формулой $\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$.

$$E(XY) = 1 \cdot p_{11*} + 0 \cdot (p_{00*} + p_{01*} + p_{10*}) = p_{11*}$$

Таким образом, $\sigma_{XY} = p_{11*} - p_{1**}p_{*1*}$. Аналогично, $\sigma_{XZ} = p_{1*1} - p_{1**}p_{**1}$ и $\sigma_{YZ} = p_{*11} - p_{*1*}p_{**1}$. Преобразуем выражение $\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ} =$

$$= (p_{11*} - p_{1**}p_{*1*})p_{**1}(1 - p_{**1}) - (p_{1*1} - p_{1**}p_{**1})(p_{*11} - p_{*1*}p_{**1}) =$$

$$= p_{11*}p_{**1} - p_{11*}p_{**1}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11} + p_{1*1}p_{*1*}p_{**1} + p_{1**}p_{**1}p_{*11} =$$

$$= (p_{111}p_{**1} + p_{110}p_{**1}) - p_{11*}p_{**1}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*}p_{**1} -$$

$$-p_{1*1}p_{*11} + p_{1*1}p_{*1*}p_{**1} + p_{1**}p_{**1}p_{*11} =$$

$$= (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110} - p_{11*}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*} + p_{1*1}p_{*1*} + p_{1**}p_{*11}) \quad (3)$$

Заметим, что:

1) $p_{110} - p_{11*}p_{**1} = p_{110} - p_{110}p_{**1} - p_{111}p_{**1} = p_{110}(1 - p_{**1}) - p_{111}p_{**1} = p_{110}p_{**0} - p_{111}p_{**1}$

2) $-p_{1**}p_{*1*} + p_{1*1}p_{*1*} + p_{1**}p_{*11} = -(p_{1*0} + p_{1*1})(p_{*10} + p_{*11}) + p_{1*1}(p_{*10} + p_{*11}) + (p_{1*0} + p_{1*1})p_{*11} = -p_{1*0}p_{*10} + p_{1*1}p_{*11}$

Учитывая вышеприведенные соотношения, запишем (3):

$$(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}((p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) - (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11})) =$$

$$= (1 - p_{**1})(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) =$$

$$= p_{**0}(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) \quad (4)$$

Также заметим, что:

1) $p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11} = p_{111}(p_{001} + p_{011} + p_{101} + p_{111}) - (p_{101} + p_{111})(p_{011} + p_{111}) = p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}$

2) $p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10} = p_{110}(p_{000} + p_{010} + p_{100} + p_{110}) - (p_{100} + p_{110})(p_{010} + p_{110}) =$

$= p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}$

Подставляя преобразованные выражения в (4) имеем:

$$\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100})$$

□

Вышеприведенное соотношение для $\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ}$ позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 1.2. Пусть $(X, Y, Z)^T$ – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли. Если $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$, то $\rho^{XY \cdot Z} = 0$.

Доказательство. Пусть $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$. Тогда по теореме 1.1: $p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100}$ и $p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101}$. Используя эти соотношения в числителе частного коэффициента корреляции Пирсона и учитывая лемму 1.1, имеем:

$$\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}) = 0$$

Следовательно, $\rho^{XY \cdot Z} = 0$. □

Таким образом, ноль в частном коэффициенте корреляции Пирсона является необходимым условием условной независимости. Однако, не является достаточным условием, так как в обратную сторону теорема 1.2 неверна. Легко построить контрпример при $p_{**0} = 0$. Далее покажем контрпример при $p_{**0} \neq 0$.

Пример 1.2. Пусть $p_{000} = 0.15$, $p_{001} = 0.1$, $p_{010} = 0.1$, $p_{011} = 0.15$, $p_{100} = 0.1$, $p_{101} = 0.15$, $p_{110} = 0.15$, $p_{111} = 0.1$. Тогда $p_{**0} = 0.5$, $p_{**1} = 0.5$ и $M_{21} = p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}) + p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) = 0.5 \cdot (0.15 \cdot 0.15 - 0.1 \cdot 0.1) + 0.5 \cdot (0.1 \cdot 0.1 - 0.15 \cdot 0.15) = 0$.

Однако, случайные величины X и Y условно зависимы при условии Z поскольку:

$$p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100} = 0.15 \cdot 0.15 - 0.1 \cdot 0.1 = 0.0125 \neq 0$$

$$p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101} = 0.1 \cdot 0.1 - 0.15 \cdot 0.15 = -0.0125 \neq 0$$

Классически, для оценки частного коэффициента корреляции Пирсона используют выборочный частный коэффициент корреляции Пирсона:

$$r^{XY\cdot Z} = \frac{r_{XY} - r_{XZ}r_{YZ}}{\sqrt{1-r_{XY}^2}\sqrt{1-r_{YZ}^2}}$$

где r_{XY}, r_{XZ}, r_{YZ} – выборочные коэффициенты корреляции Пирсона между случайными величинами X и Y, X и Z, Y и Z соответственно. Для трехмерного нормального распределения известно [1], что при истинности гипотезы $\rho^{XY\cdot Z} = 0$ статистика:

$$T^{\text{Partial}} = \sqrt{n-3}\frac{r^{XY\cdot Z}}{\sqrt{1-(r^{XY\cdot Z})^2}}$$

имеет распределение Стьюдента с $n-3$ степенями свободы, где n – количество наблюдений. Тогда тест уровня α проверки гипотезы $\rho^{XY\cdot Z} = 0$ определяется как:

$$\varphi^{\text{Partial}}(t) = \begin{cases} 1, \ t < C_1 \text{ или } t > C_2 \\ 0, \ C_1 \leq t \leq C_2 \end{cases}$$

где константы C_1 и C_2, удовлетворяют уравнениям $P(T^{\text{Partial}} < C_1) = \alpha/2$ и $P(T^{\text{Partial}} > C_2) = 1 - \alpha/2$.

Предположим, что φ^{Partial} является тестом уровня α для проверки гипотезы $\rho^{XY\cdot Z} = 0$ в трехмерном распделении Бернулли. Поскольку из $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ следует $\rho^{XY\cdot Z} = 0$, то тест φ^{Partial} также является тестом уровня α для проверки гипотезы $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$. В разделе 2.2 с помощью численных экспериментов проверим данное предположение.

1.3 Тест на параметр трехмерного распределения Бернулли в экспоненциальной форме

Покажем вид трехмерного распределения Бернулли в экпоненциальной форме:

$$P(X=x, Y=y, Z=z) = p_{000}^{(1-x)(1-y)(1-z)} \dots p_{111}^{xyz} =$$

$$= \exp\left\{ \ln(p_{000}) + \ln\left(\frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}}\right) xyz + \ln\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right) x + \ln\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right) y + \right.$$

$$+\ln\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right)z+\ln\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right)xy+\ln\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right)xz+\ln\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)yz\Bigg\}$$

Среди параметров, стоящих при статистиках xyz, x, y, z, xy, xz, yz выделим параметр, связанный с условной независимостью.

Теорема 1.3. Пусть $(X, Y, Z)^T$ – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли, и $\theta = \ln\left(\frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}}\right)$. Если выполнено одно из условий:

- $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$
- $X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$
- $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X$

то параметр θ принимает значение 0.

Доказательство. Результаты теоремы 1.1 можно обобщить следующим образом:

$$X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y \Leftrightarrow p_{000}p_{101} = p_{001}p_{100} \text{ и } p_{010}p_{111} = p_{011}p_{110}$$

$$Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X \Leftrightarrow p_{000}p_{011} = p_{001}p_{010} \text{ и } p_{100}p_{111} = p_{101}p_{110}$$

1. Пусть $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$, тогда по теореме 1.1 выполнено: $p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100}$ и $p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101}$. Отсюда следует, что $\theta = \ln(1) = 0$.

2. Пусть $X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$, тогда из вышеприведенных соображений $p_{000}p_{101} = p_{001}p_{100}$ и $p_{010}p_{111} = p_{011}p_{110}$. Отсюда следует, что $\theta = \ln(1) = 0$.

3. Пусть $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X$, тогда из вышеприведенных соображений $p_{000}p_{011} = p_{001}p_{010}$ и $p_{100}p_{111} = p_{101}p_{110}$. Отсюда следует, что $\theta = \ln(1) = 0$.

$\square$

Таким образом, нулевое значение параметра θ является необходимым условием наличия условно независимой пары случайных величин в трехмерном распределении Бернулли. Для проверки гипотезы о равенстве параметра θ

нулю используем теорию РНМН тестов [5] в многопараметрическом экспоненциальном семействе. Пусть

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

повторная выборка из распределения случайного вектора $(X, Y, Z)^T$. Совместное распределение повторной выборки имеет вид:

$$P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, Z_1 = z_1, \ldots, X_n = x_n, Y_n = y_n, Z_n = z_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i, Y_i = y_i, Z_i = z_i) =$$

$$= \exp\Bigg\{ \ln(p_{000})n + \ln\left(\frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i +$$

$$+ \ln\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i + \ln\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right) \sum_{i=1}^{n} y_i + \ln\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right) \sum_{i=1}^{n} z_i +$$

$$+ \ln\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \ln\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \ln\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right) \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \Bigg\}$$

Пусть

$$U = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i Z_i,\ T_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i,\ T_2 = \sum_{i=1}^{n} X_i Z_i,$$

$$T_3 = \sum_{i=1}^{n} Y_i Z_i,\ T_4 = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ T_5 = \sum_{i=1}^{n} Y_i,\ T_6 = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Обозначим $T = (T_1, \ldots, T_6)$, $t = (t_1, \ldots, t_6)$, $\theta_0 = 0$. Тогда согласно [5] РНМН тест уровня α проверки гипотезы $\theta = \theta_0$ против альтернативы $\theta \neq \theta_0$ имеет вид:

$$\varphi^{\text{Theta}}(u, t) = \begin{cases} 1,\ u < C_1(t) \text{ или } u > C_2(t) \\ \gamma_i,\ u = C_i(t),\ i = 1, 2 \\ 0,\ C_1(t) < u < C_2(t) \end{cases}$$

где константы C_i и γ_i определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} E_{\theta_0}[\varphi^{\text{Theta}}(U, T) \mid T = t] = \alpha \\ E_{\theta_0}[U\varphi^{\text{Theta}}(U, T) \mid T = t] = \alpha E_{\theta_0}[U \mid T = t] \end{cases}$$

Приведем распределение статистики U при условии $T = t$.

Лемма 1.2. Пусть $k_1(u) = u$, $k_2(u) = t_1 - u$, $k_3(u) = t_2 - u$, $k_4(u) = t_3 - u$, $k_5(u) = t_4 - t_1 - t_2 + u$, $k_6(u) = t_5 - t_1 - t_3 + u$, $k_7(u) = t_6 - t_2 - t_3 + u$, $k_8(u) = n - u + t_1 + t_2 + t_3 - t_4 - t_5 - t_6$. Тогда

$$P_{\theta_0}(U = u \mid T = t) = \frac{(\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!)^{-1}}{\sum_{s\in\mathcal{D}}(\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!)^{-1}}$$

где $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{Z} : 0 \le k_i(s) \le n$ для всех $i = 1 \ldots, 8\}$.

Доказательство. Найдем совместное распределение статистик $(U, T_1, \ldots, T_6)$:

$$P(U = u, T = t) = P(U = u, T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_3 = t_3, T_4 = t_4, T_5 = t_5, T_6 = t_6) =$$

$$= P\Bigg(\sum_{i=1}^{n} X_iY_iZ_i = u, \sum_{i=1}^{n} X_iY_i = t_1, \sum_{i=1}^{n} X_iZ_i = t_2, \sum_{i=1}^{n} Y_iZ_i = t_3,$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = t_4, \sum_{i=1}^{n} Y_i = t_5, \sum_{i=1}^{n} Z_i = t_6\Bigg) =$$

$$= P\Bigg(\sum_{i=1}^{n} X_iY_iZ_i = u, \sum_{i=1}^{n} X_iY_i(1 - Z_i) = t_1 - u, \sum_{i=1}^{n} X_i(1 - Y_i)Z_i = t_2 - u,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1 - X_i)Y_iZ_i = t_3 - u, \sum_{i=1}^{n} X_i(1 - Y_i)(1 - Z_i) = t_4 - t_1 - t_2 + u,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1 - X_i)Y_i(1 - Z_i) = t_5 - t_1 - t_3 + u, \sum_{i=1}^{n}(1 - X_i)(1 - Y_i)Z_i = t_6 - t_2 - t_3 + u,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1 - X_i)(1 - Y_i)(1 - Z_i) = n - u + t_1 + t_2 + t_3 - t_4 - t_5 - t_6\Bigg) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!}\times$$

$$\times p_{111}^{u} p_{110}^{t_1-u} p_{101}^{t_2-u} p_{011}^{t_3-u} p_{100}^{t_4-t_1-t_2+u} p_{010}^{t_5-t_1-t_3+u} p_{001}^{t_6-t_2-t_3+u} p_{000}^{n-u+t_1+t_2+t_3-t_4-t_5-t_6}$$

Тогда условное распределение статистики U при условии $T = t$ можно записать как:

$$P(U = u \mid T = t) = \frac{P(U = u, T = t)}{P(T = t)} = \frac{P(U = u, T = t)}{\sum_{s\in\mathcal{D}} P(U = s, T = t)} =$$

$$= \frac{(\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!)^{-1}\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^{u}}{\sum_{s\in\mathcal{D}}(\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!)^{-1}\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^{s}}$$

При истинности гипотезы $\theta = \theta_0$ параметр $\dfrac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}} = 1$. Следовательно:

$$P_{\theta_0}(U = u \mid T = t) = \frac{(\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!)^{-1}}{\sum_{s\in\mathcal{D}}(\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!)^{-1}}$$

□

Так как φ^{Theta} является тестом уровня α для проверки гипотезы $\theta = \theta_0$, где $\theta_0 = 0$, и из $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ следует $\theta = 0$, то φ^{Theta} является тестом уровня α для проверки гипотезы $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$.

1.4 РНМН тест проверки независимости в условном распределении

Пусть $(X, Y, Z)^T$ – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли. При фиксированном $Z = z$:

$$P(X = x, Y = y \mid Z = z) = \frac{p_{xyz}}{p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}} = q_{xy}$$

Приведем определение случайного вектора с двумерным распределением Бернулли.

Определение 1.3. Случайный вектор $(X, Y)^T$ имеет двумерное распределение Бернулли, если множество его возможных значений:

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

и заданы $P(X = x, Y = y) = q_{xy} \geq 0, \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} q_{xy} = 1$.

Таким образом, $(X, Y)^T$ при условии $Z = z$ имеет двумерное распределении Бернулли. Изложим теорию проверки независимости в двумерном распределении Бернулли, которая в разд. 1.5 будет использована для проверки условной независимости.

В работе [3] показано, что:

$$P(X = x, Y = y) = \exp\left\{\ln(q_{00}) + \ln\left(\frac{q_{10}}{q_{00}}\right)x + \ln\left(\frac{q_{01}}{q_{00}}\right)y + \ln\left(\frac{q_{00}q_{11}}{q_{01}q_{10}}\right)xy\right\}$$

Также, в [3] доказано, что X и Y независимы тогда и только тогда, когда

$$\theta = \ln\left(\frac{q_{00}q_{11}}{q_{01}q_{10}}\right) = 0$$

Пусть

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$$

повторная выборка из распределения случайного вектора $(X, Y)^T$. Тогда:

$$P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, \ldots, X_n = x_n, Y_n = y_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i, Y_i = y_i) =$$

$$= \exp\left\{\ln(q_{00})n + \ln\left(\frac{q_{10}}{q_{00}}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i + \ln\left(\frac{q_{01}}{q_{00}}\right)\sum_{i=1}^{n} y_i + \ln\left(\frac{q_{00}q_{11}}{q_{01}q_{10}}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right\}$$

Пусть

$$U = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i,\ T_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ T_2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Обозначим $T = (T_1, T_2)$, $t = (t_1, t_2)$, $\theta_0 = 0$. Тогда согласно [5] РНМН тест проверки гипотезы $H : \theta = 0$ против альтернативы $K : \theta \neq 0$ уровня α имеет вид:

$$\varphi^{\text{Independence}}(u, t) = \begin{cases} 1,\ u < C_1(t) \text{ или } u > C_2(t) \\ \gamma_i,\ u = C_i(t),\ i = 1, 2 \\ 0,\ C_1(t) < u < C_2(t) \end{cases}$$

где константы C_i и γ_i определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} E_{\theta_0}[\varphi^{\text{Independence}}(U, T) \mid T = t] = \alpha \\ E_{\theta_0}[U\varphi^{\text{Independence}}(U, T) \mid T = t] = \alpha E_{\theta_0}[U \mid T = t] \end{cases}$$

Приведем распределение статистики U при условии $T = t$.

Лемма 1.3. Пусть $k_1(u) = u$, $k_2(u) = t_1 - u$, $k_3(u) = t_2 - u$, $k_4(u) = n - t_1 - t_2 + u$. Тогда

$$P_{\theta_0}(U = u \mid T = t) = \frac{(\prod_{i=1}^{4} k_i(u)!)^{-1}}{\sum_{s\in\mathcal{D}}(\prod_{i=1}^{4} k_i(s)!)^{-1}}$$

где $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{Z} : 0 \leq k_i(s) \leq n$ для всех $i = 1 \ldots, 4\}$.

Доказательство данной леммы не приводится, поскольку оно полностью аналогично доказательству леммы 1.2.

Стоит отметить, что $\ln\left(\dfrac{q_{00}q_{11}}{q_{01}q_{10}}\right) = \ln\left(\dfrac{p_{00z}p_{11z}}{p_{01z}p_{10z}}\right)$. Поэтому проверяя гипотезу о параметре $\ln\left(\dfrac{q_{00}q_{11}}{q_{01}q_{10}}\right)$ в условном распределении, мы проверяем гипотезу о параметре $\ln\left(\dfrac{p_{00z}p_{11z}}{p_{01z}p_{10z}}\right)$ в трехмерном распределении Бернулли.

1.5 Проверка условной независимости по подвыборкам из условных распределений

Приведем трактовку определения 1.2 для трехмерного распределения Бернулли. Случайные величины X и Y условно независимы при условии Z тогда и только тогда, когда:

- X и Y независимы при условии $Z = 0$
- X и Y независимы при условии $Z = 1$

Это порождает следующий способ проверки условной независимости. Сформулируем индивидуальные гипотезы:

- $h_0 : X$ и Y независимы при условии $Z = 0$
- $h_1 : X$ и Y независимы при условии $Z = 1$

Тогда гипотеза об условной независимости имеет вид $h = h_0 \cap h_1$. Естественным образом, гипотезу h_0 необходимо проверять по наблюдениям $(x_i, y_i, z_i)^T$, в которых $z_i = 0$. Поскольку $(X, Y)^T$ при условии $Z = z$ имеет двумерное распределение Бернулли, то в качестве теста для h_0 можно использовать $\varphi_0 = \varphi_0^{\text{Independence}}$, приведенный в разделе 1.4. Аналогичные рассуждения справедливы и для гипотезы h_1. Учитывая озвученные соображения, построим тест проверки гипотезы h, контролирующий вероятность ошибки первого рода на уровне α. Пусть

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

повторная выборка из распределения случайного вектора $(X, Y, Z)^T$. Обозначим $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)$ и $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$. Покажем, что в условном распределении при $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ наблюдения:

$$\Xi = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$$

являются независимыми.

Лемма 1.4.

$$P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, \ldots, X_n = x_n, Y_n = y_n \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i, Y_i = y_i \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z})$$

Доказательство. С одной стороны:

$$P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, Z_1 = z_1, \ldots, X_n = x_n, Y_n = y_n, Z_n = z_n) =$$

$$= P(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, \ldots, X_n = x_n, Y_n = y_n \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z})$$

С другой стороны:

$$P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, Z_1 = z_1, \ldots, X_n = x_n, Y_n = y_n, Z_n = z_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i, Y_i = y_i, Z_i = z_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i, Y_i = y_i \mid Z_i = z_i) P(Z_i = z_i) =$$

$$= P(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i, Y_i = y_i \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z})$$

$\square$

Пусть также $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ фиксированы. Разобьем выборку Ξ на две подвыборки Ξ_0 и Ξ_1, такие что:

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} X_{i_1} \\ Y_{i_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{i_2} \\ Y_{i_2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_{i_{n_0}} \\ Y_{i_{n_0}} \end{pmatrix}$$

где $Z_{i_k} = z_{i_k} = 0$ для всех i_k при $k = \overline{1, n_0}$ и

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} X_{j_1} \\ Y_{j_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{j_2} \\ Y_{j_2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_{j_{n_1}} \\ Y_{j_{n_1}} \end{pmatrix}$$

где $Z_{j_k} = z_{j_k} = 1$ для всех j_k при $k = \overline{1, n_1}$. Причем $n = n_0 + n_1$. Отметим, что разбиение $\Xi = \Xi_0 \sqcup \Xi_1$ опреляется лишь набором $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$.

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 1.4. Пусть $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ – фиксированы. Тогда выборка Ξ_0 является повторной выборкой из распределения $(X, Y)^T$ при условии $Z = 0$.

Доказательство. По лемме 1.4:

$$P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, \dots, X_n = x_n, Y_n = y_n \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i, Y_i = y_i \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z})$$

Просуммировав обе части вышепредставленного равенства по всем возможным значениям $x_{j_1}, y_{j_1}, \dots, x_{j_{n_1}}, y_{j_{n_1}}$ получаем:

$$P(X_{i_1} = x_{i_1}, Y_{i_1} = y_{i_1}, \dots, X_{i_{n_0}} = x_{i_{n_0}}, Y_{i_{n_0}} = y_{i_{n_0}} \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z}) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n_0} P(X_{i_k} = x_{i_k}, Y_{i_k} = y_{i_k} \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z})$$

Значит

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} X_{i_1} \\ Y_{i_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{i_2} \\ Y_{i_2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_{i_{n_0}} \\ Y_{i_{n_0}} \end{pmatrix}$$

независимые наблюдения при условии $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$.

Покажем, что $(X_{i_k}, Y_{i_k})^T$ при условии $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ распределен также как и $(X, Y)^T$ при условии $Z = 0$.

$$P(X_{i_k} = x_{i_k}, Y_{i_k} = y_{i_k} \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z}) = P(X_{i_k} = x_{i_k}, Y_{i_k} = y_{i_k} \mid Z_{i_k} = z_{i_k}) =$$

$$= P(X_{i_k} = x_{i_k}, Y_{i_k} = y_{i_k} \mid Z_{i_{n_k}} = 0) = P(X = x_{i_k}, Y = y_{i_k} \mid Z = 0)$$

$\square$

Аналогично показывается, что Ξ_1 является повторной выборкой из распределения $(X,Y)^T$ при условии $Z=1$.

Для упрощения записи будем использовать нотацию $P(A \mid B) = P_B(A)$. Сформулируем теорему.

Теорема 1.5. Пусть Ξ_0 и Ξ_1 – подвыборки, полученные разбиением случайной выборки Ξ. Пусть φ_0 и φ_1 – рандомизированные тесты проверки гипотез h_0 и h_1 по повторным выборкам Ξ_0 и Ξ_1 соответственно. Введем события:

$$A_0 = \{\text{отвергнуть гипотезу } h_0 \text{ рандомизированным тестом } \varphi_0\}$$

$$A_1 = \{\text{отвергнуть гипотезу } h_1 \text{ рандомизированным тестом } \varphi_1\}$$

Пусть φ_0 и φ_1 тесты уровня α_0 и α_1 при любом объеме наблюдений в подвыборках Ξ_0 и Ξ_1 соответственно, то есть:

$$P_{h_0\cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0) = \alpha_0$$

$$P_{h_0\cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_1) = \alpha_1$$

Тогда $P_{h_0\cap h_1}(A_0 \cap A_1) = P_{h_0\cap h_1}(A_0) P_{h_0\cap h_1}(A_1)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ фиксировано. Обозначим через

$$T_0 = (X_{i_1}, Y_{i_1}, \ldots, X_{i_{n_0}}, Y_{i_{n_0}})^T,\ T_1 = (X_{j_1}, Y_{j_1}, \ldots, X_{j_{n_1}}, Y_{j_{n_1}})^T$$

случайные векторы наблюдений, используемые в тестах φ_0 и φ_1 соответственно. Распишем следующую вероятность:

$$P_{h_0\cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0 \cap A_1) =$$

$$= \sum_{t_0} \sum_{t_1} P_{h_0\cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0 \cap A_1 \mid T_0 = t_0, T_1 = t_1) P_{h_0\cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_0 = t_0, T_1 = t_1)$$

Отметим, что $P_{h_0\cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0 \cap A_1 \mid T_0 = t_0, T_1 = t_1) = \varphi_0(t_0)\varphi_1(t_1)$, поскольку для того, чтобы при известных значениях статистик t_0 и t_1 отвергнуть гипотезы h_0 и h_1 в рандомизированном тесте нужно провести два испытания с вероятностью успеха $\varphi_0(t_0)$ и $\varphi_1(t_1)$. Постулируется, что такие испытания независимые. Тогда:

$$P_{h_0\cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0 \cap A_1) = \sum_{t_0} \sum_{t_1} \varphi_0(t_0)\varphi_1(t_1) P_{h_0\cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_0 = t_0, T_1 = t_1) =$$

$$= \sum_{t_0} \sum_{t_1} \varphi_0(t_0)\varphi_1(t_1) P_{h_0 \cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_0 = t_0) P_{h_0 \cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_1 = t_1) =$$

$$= \sum_{t_0} \left[\varphi_0(t_0) P_{h_0 \cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_0 = t_0) \left(\sum_{t_1} \varphi_1(t_1) P_{h_0 \cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_1 = t_1) \right) \right] =$$

$$= \sum_{t_0} \varphi_0(t_0) P_{h_0 \cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_0 = t_0)\alpha_1 = \alpha_0\alpha_1$$

По формуле полной вероятности:

$$P_{h_0 \cap h_1}(A_0) = \sum_{\mathbf{z}} P_{h_0 \cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0) P_{h_0 \cap h_1}(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{z}} \alpha_0 P_{h_0 \cap h_1}(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \alpha_0$$

Аналогично, $P_{h_0 \cap h_1}(A_1) = \alpha_1$. Также по формуле полной вероятности:

$$P_{h_0 \cap h_1}(A_0 \cap A_1) = \sum_{\mathbf{z}} P_{h_0 \cap h_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0 \cap A_1) P_{h_0 \cap h_1}(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) =$$

$$= \sum_{\mathbf{z}} \alpha_0\alpha_1 P_{h_0 \cap h_1}(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \alpha_0\alpha_1$$

Таким образом, $P_{h_0 \cap h_1}(A_0 \cap A_1) = P_{h_0 \cap h_1}(A_0) P_{h_0 \cap h_1}(A_1) = \alpha_0\alpha_1$. $\square$

Применим теорему 1.5 для проверки условной независимости в трехмерном распределении Бернулли. Положим индивидуальные гипотезы:

- $h_0 : X$ и Y независимы при условии $Z = 0$
- $h_1 : X$ и Y независимы при условии $Z = 1$

Для проверки гипотез h_0 и h_1 будем использовать тесты $\varphi_0 = \varphi_0^{\text{Independence}}$ и $\varphi_1 = \varphi_1^{\text{Independence}}$ уровня α_0 и α_1 по повторным выборкам Ξ_0 и Ξ_1 соответственно. Тогда гипотеза условной независимости имеет вид $h = h_0 \cap h_1$ и тест проверки условной независимости можно определить как:

$$\varphi^{\text{Subsamples}} = \begin{cases} 1, & \text{наступило событие } A_0 \cup A_1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пусть далее $\alpha_0 = \alpha_1 = \gamma$. Тогда

$$P_{h_0 \cap h_1}(\varphi^{\text{Subsamples}} = 1) = P_{h_0 \cap h_1}(A_0 \cup A_1) =$$

$$= P_{h_0 \cap h_1}(A_0) + P_{h_0 \cap h_1}(A_1) - P_{h_0 \cap h_1}(A_0 \cap A_1) = 2\gamma - \gamma^2$$

Нетрудно проверить, что для контроля $P_{h_0 \cap h_1}(\varphi^{\text{Subsamples}} = 1) = \alpha$ достаточно положить уровень значимости $\gamma = 1 - \sqrt{1 - \alpha}$ на индивидуальных тестах проверки гипотез h_0 и h_1.

2 Численные эксперименты над тестами проверки условной независимости

2.1 Способ вычисления вероятностей для РНМН теста на ЭВМ

Для нахождения порогов в РНМН тестах возникает необходимость посчета вероятностей вида:

$$P_{\theta_0}(U = u \mid T = t) = \frac{(\prod_{i=1}^{p} k_i(u)!)^{-1}}{\sum_{s \in \mathcal{D}} (\prod_{i=1}^{p} k_i(s)!)^{-1}}$$

где $\mathcal{D}$ – некая область допустимых значений, $k_i(u) : \mathcal{D} \to \{0, \ldots, n\},\ i = \overline{1,p}$. Основную проблему в этой формуле представляют факториалы, вычисление которых затруднительно на ЭВМ. Предложим методологию, которая поможет обойти эту проблему.

Пусть $f(i) = \sum_{j=1}^{i} \ln(j)$. Тогда $\ln(n!) = f(n)$. Учитывая это, запишем:

$$\frac{(\prod_{i=1}^{p} k_i(u)!)^{-1}}{\sum_{s \in \mathcal{D}} (\prod_{i=1}^{p} k_i(s)!)^{-1}} = \frac{\exp\{-\ln(\prod_{i=1}^{p} k_i(u)!)\}}{\sum_{s \in \mathcal{D}} \exp\{-\ln(\prod_{i=1}^{p} k_i(s)!)\}} =$$

$$= \frac{\exp\{-\sum_{i=1}^{p} f(k_i(u))\}}{\sum_{s \in D} \exp\{-\sum_{i=1}^{p} f(k_i(s))\}}$$

Полученное выражение удобно с позиции того, что мы ушли от вычисления факториалов и ЭВМ умеют эффективно считать функцию:

$$\text{softmax}(x, i) = \frac{\exp\{x_i\}}{\sum_{j=1}^{N} \exp\{x_j\}},\ x = (x_1, \ldots, x_N)$$

Это происходит благодаря свойству:

$$\text{softmax}(x, i) = \frac{\exp\{x_i\}}{\sum_{j=1}^{N} \exp\{x_j\}} = \frac{\exp\{x_i - C\}}{\sum_{j=1}^{N} \exp\{x_j - C\}},\ \text{где } C = \max_{1 \le j \le N} x_j$$

за счет которого удается избежать переполнения вещественного типа данных, связанного с вычислением экспоненты.

2.2 Сравнение тестов проверки условной независимости

Кратко напомним тесты, которые будут сравниваться.

1. φ^{Theta} – РНМН тест уровня $\alpha = 0.05$ для проверки гипотезы

$$\theta := \ln\left(\frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}}\right) = 0$$

Поскольку из $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ следует $\theta = 0$, то φ^{Theta} является тестом уровня $\alpha = 0.05$ для проверки гипотезы $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$.

2. $\varphi^{\text{Subsamples}}$ – тест уровня $\alpha = 0.05$ для проверки $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$. Гипотеза h отвергается, если РНМН-тестами уровня $\gamma = 1 - \sqrt{1-\alpha}$ отвергается хотя бы одна гипотеза $\theta_z := \ln\left(\frac{p_{00z}p_{11z}}{p_{01z}p_{10z}}\right) = 0$ по подвыборке из условного распределения $(X, Y)^T$ при условии $Z = z$.

3. φ^{Partial} – точный тест уровня $\alpha = 0.05$ для проверки гипотезы $\rho^{XY\cdot Z} = 0$ в трехмерном нормальном распределении. Если φ^{Partial} – также тест уровня $\alpha = 0.05$ для проверки гипотезы $\rho^{XY\cdot Z} = 0$ в трехмерном распределении Бернулли, то φ^{Partial} – тест уровня $\alpha = 0.05$ для проверки гипотезы $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ в трехмерном распределении Бернулли, поскольку из $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ следует $\rho^{XY\cdot Z} = 0$.

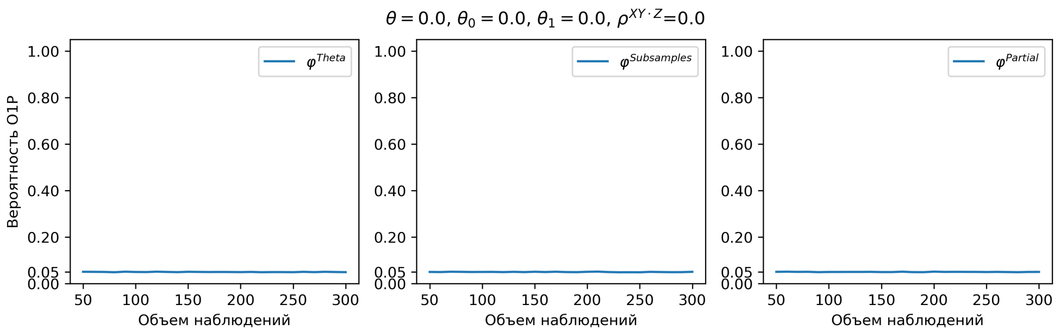

Рис. 1: Графики зависимости вероятности ошибки 1 рода (О1Р) от количества наблюдений на тестах φ^{Theta}, $\varphi^{\text{Subsamples}}$, φ^{Partial} в трехмерном распределении Бернулли с $p_{000} = 0.125, p_{001} = 0.125, p_{010} = 0.125, p_{011} = 0.125, p_{100} = 0.125, p_{101} = 0.125, p_{110} = 0.125, p_{111} = 0.125$. Гипотеза $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ верна. Вероятности оцениваются по 10^5 экспериментам.

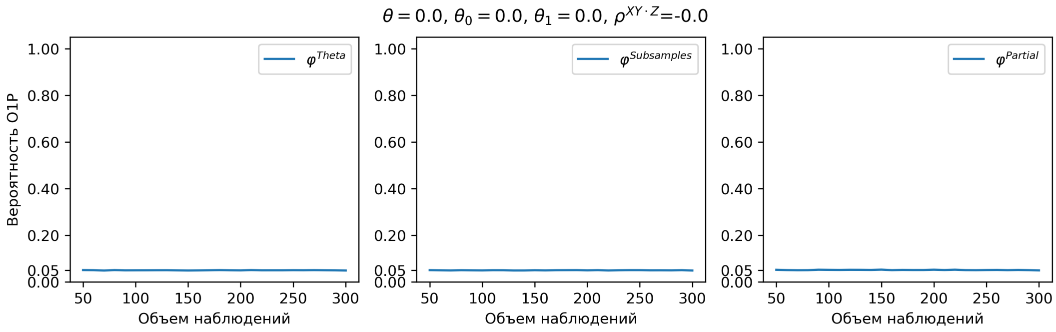

Рис. 2: Графики зависимости вероятности ошибки 1 рода (О1Р) от количества наблюдений на тестах φ^{Theta}, $\varphi^{\text{Subsamples}}$, φ^{Partial} в трехмерном распределении Бернулли с $p_{000} = 0.15, p_{001} = 0.1, p_{010} = 0.3, p_{011} = 0.1, p_{100} = 0.05, p_{101} = 0.1, p_{110} = 0.1, p_{111} = 0.1$. Гипотеза $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ верна. Вероятности оцениваются по 10^5 экспериментам.

Из (рис. 1) и (рис. 2) видно, что тесты φ^{Theta}, $\varphi^{\text{Subsamples}}$, φ^{Partial} контролируют вероятность ошибки первого рода на уровне $\alpha = 0.05$. Для тестов φ^{Theta}, $\varphi^{\text{Subsamples}}$ данный результат согласуется с теорией. Неожиданным оказывается факт того, что тест φ^{Partial} контролирует вероятность ошибки первого рода на уровене $\alpha = 0.05$ в трехмерном распределении Бернулли, хотя данный тест теоретически обоснован только для трехмерного нормального распределения.

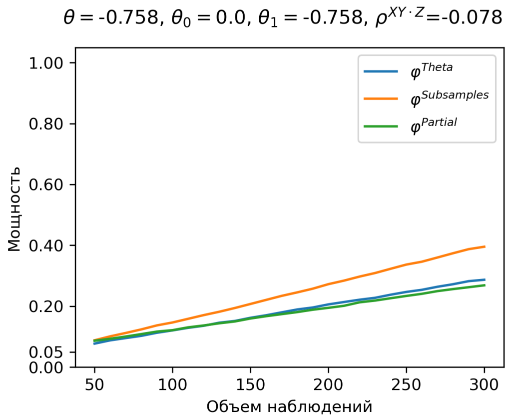

Рис. 3: График зависимости мощности от количества наблюдений на тестах φ^{Theta}, $\varphi^{\text{Subsamples}}$, φ^{Partial} в трехмерном распределении Бернулли с $p_{000} = 0.15, p_{001} = 0.06, p_{010} = 0.3, p_{011} = 0.16, p_{100} = 0.05, p_{101} = 0.08, p_{110} = 0.1, p_{111} = 0.1$. Гипотеза $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ не верна, однако X и Y независимы при условии $Z = 0$, Мощность оцениваются по 10^5 экспериментам.

Одним из возможных отклонений от условной независимости является случай, когда X и Y независимы при условии $Z = 0$, но зависимы при условии $Z = 1$. Такой случай представлен на (рис. 3), в нём даже при $n = 300$ наблюдениях все тесты показывают низкую мощность.

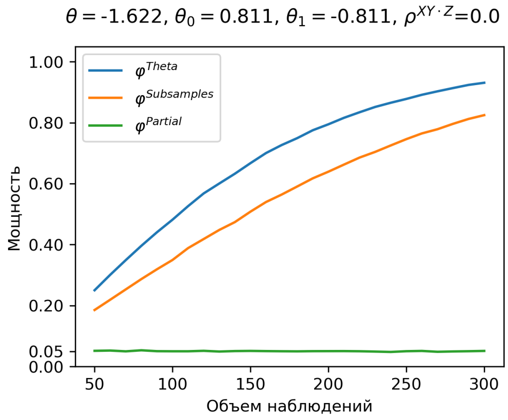

Рис. 4: График зависимости мощности от количества наблюдений на тестах φ^{Theta}, $\varphi^{\text{Subsamples}}$, φ^{Partial} в трехмерном распределении Бернулли с $p_{000} = 0.15, p_{001} = 0.1, p_{010} = 0.1, p_{011} = 0.15, p_{100} = 0.1, p_{101} = 0.15, p_{110} = 0.15, p_{111} = 0.1$. Гипотеза $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ не верна, однако верна гипотеза $\rho^{XY \cdot Z} = 0$. Вероятности оцениваются по 10^5 экспериментам.

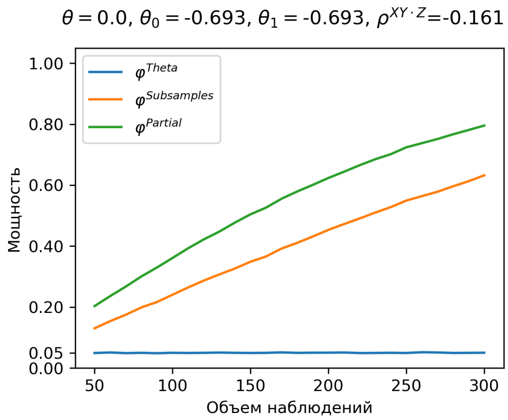

Рис. 5: График зависимости мощности от количества наблюдений на тестах φ^{Theta}, $\varphi^{\text{Subsamples}}$, φ^{Partial} в трехмерном распределении Бернулли с $p_{000} = 0.15, p_{001} = 0.05, p_{010} = 0.3, p_{011} = 0.1, p_{100} = 0.1, p_{101} = 0.1, p_{110} = 0.1, p_{111} = 0.1$. Гипотеза $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ не верна, однако верна гипотеза $\theta = 0$. Вероятности оцениваются по 10^5 экспериментам.

Графики (рис. 4) и (рис. 5) показывают, что тесты φ^{Theta}, $\varphi^{\text{Subsamples}}$ проверяют бо́льшие гипотезы чем $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$. В частности, на (рис. 4) и (рис. 5) параметры $\rho^{XY\cdot Z} = 0$ и $\theta = 0$ соответственно, но гипотеза $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ не верна.

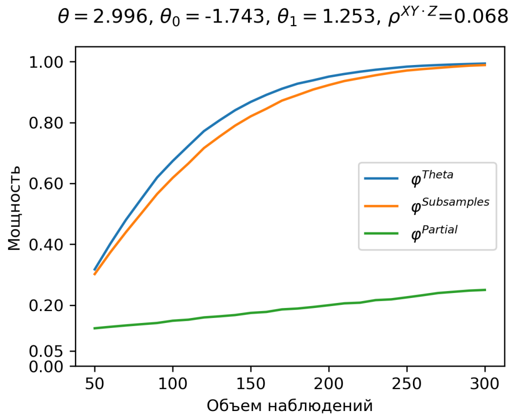

Рис. 6: График зависимости мощности от количества наблюдений на тестах φ^{Theta}, $\varphi^{\text{Subsamples}}$, φ^{Partial} в трехмерном распределении Бернулли с $p_{000} = 0.03, p_{001} = 0.1, p_{010} = 0.04, p_{011} = 0.08, p_{100} = 0.3, p_{101} = 0.1, p_{110} = 0.07, p_{111} = 0.28$. Гипотеза $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ не верна. Вероятности оцениваются по 10^5 экспериментам.

Показательным является пример с (рис. 6). Тесты φ^{Theta} и $\varphi^{\text{Subsamples}}$ при $n = 300$ наблюдениях имеют мощность, близкую к 1. В то время как мощность теста φ^{Partial} приблизительно равна 0.25. Это происходит потому, что в данном примере значение $\rho^{XY\cdot Z} = 0.068$ близко к нулю.

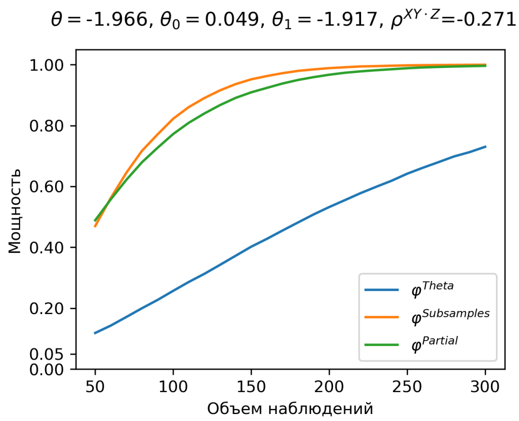

Рис. 7: График зависимости мощности от количества наблюдений на тестах φ^{Theta}, $\varphi^{\text{Subsamples}}$, φ^{Partial} в трехмерном распределении Бернулли с $p_{000} = 0.21, p_{001} = 0.12, p_{010} = 0.04, p_{011} = 0.34, p_{100} = 0.1, p_{101} = 0.12, p_{110} = 0.02, p_{111} = 0.05$. Гипотеза $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ не верна. Вероятности оцениваются по 10^5 экспериментам.

Еще интересен пример с (рис. 7). При $n = 300$ наблюдениях мощность тестов $\varphi^{\text{Subsamples}}$, φ^{Partial} близка к 1, в то время как мощность теста φ^{Theta} примерно равна 0.73.

В данном разделе были изложены результаты численных экспериментов с тестами φ^{Theta}, $\varphi^{\text{Subsamples}}$, φ^{Partial} при $\alpha = 0.05$. На (рис. 1) и (рис. 2) показано, что при истинности гипотезы $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ эти тесты контролируют вероятность ошибки первого рода на уровне $\alpha = 0.05$. Однако, за счет того, что тесты $\varphi^{\text{Subsamples}}$ и φ^{Partial} проверяют более широкие гипотезы, возникают ситуации как на (рис. 4) и (рис. 5), когда гипотеза $h : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ не верна и мощность теста равна 0.05 при любом объеме наблюдений. Особым образом можно выделить тест $\varphi^{\text{Subsamples}}$. На всех графиках $\varphi^{\text{Subsamples}}$ либо лучший по мощности, либо незначительно уступает лучшему по мощности тесту.

Список литературы

1. *Anderson T.* An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. — Wiley-Interscience, 2003.
2. *Cramér H.* Mathematical methods of statistics. — Princeton University Press, 1946.
3. *Dai B.*, *Ding S.*, *Wahba G.* Multivariate Bernoulli distribution // Bernoulli. — 2013. — Т. 19, № 4. — С. 1465—1483.
4. *Lauritzen S. L.* Graphical models. — Clarendon Press, 1996.
5. *Lehmann E. L.* Testing statistical hypotheses. — Wiley, 1986.
6. *Teugels J. L.* Some representations of the multivariate Bernoulli and binomial distributions // Journal of Multivariate Analysis. — 1990. — Т. 32, № 2. — С. 256—268.