1 Введение

Определение 1.1. Случайный вектор $(X, Y, Z)^T$ имеет трехмерное распределение Бернулли, если множество его возможных значений

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

и заданы вероятности

$$P(X = x, Y = y, Z = z) = p_{xyz} \geq 0, \quad \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1}\sum_{z=0}^{1} p_{xyz} = 1$$

Определение 1.2. Пусть $(X, Y, Z)^T$ – дискретный случайный вектор. Говорят, что случайные величины X и Y условно независимы при условии Z, и пишут $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$, если для любых x, y и z, такого что $P(Z = z) > 0$, выполнено:

$$P(X = x, Y = y \mid Z = z) = P(X = x \mid Z = z)P(Y = y \mid Z = z)$$

Теорема 1.1. Пусть $(X, Y, Z)^T$ – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли, и $P(Z = 0) > 0$. Случайные величины X и Y условно независимы при условии Z тогда и только тогда, когда $p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$, где $z = 0, 1$.

Доказательство. Пусть $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$. Значит, для любых $x = 0, 1$, $y = 0, 1$ и $z = 0, 1$ выполнено условие:

$$P(X = x, Y = y \mid Z = z) = P(X = x \mid Z = z)P(Y = y \mid Z = z)$$

После домножения на $P(Z = z)^2$ получаем эквивалентное условие:

$$P(X = x, Y = y, Z = z)P(Z = z) = P(X = x, Z = z)P(Y = y, Z = z)$$

Найдем маргинальное распределение случайной величины Z:

$$P(Z = z) = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} p_{xyz} = p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}$$

Найдем маргинальные распределения $(X, Z)^T$ и $(Y, Z)^T$:

$$P(X = x, Z = z) = \sum_{y=0}^{1} p_{xyz} = p_{x0z} + p_{x1z}$$

$$P(Y = y, Z = z) = \sum_{x=0}^{1} p_{xyz} = p_{0yz} + p_{1yz}$$

Тогда условие условной независимости перепишем в следующем виде:

$$p_{xyz}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{x0z} + p_{x1z})(p_{0yz} + p_{1yz})$$

Это условие выполняется для всех $x = 0, 1$, $y = 0, 1$, $z = 0, 1$. Пусть z фиксировано. Если $x = 0$ и $y = 0$, то:

$$p_{00z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{00z} + p_{01z})(p_{00z} + p_{10z})$$

$$p_{00z}p_{00z} + p_{00z}p_{01z} + p_{00z}p_{10z} + p_{00z}p_{11z} = p_{00z}p_{00z} + p_{00z}p_{10z} + p_{01z}p_{00z} + p_{01z}p_{10z}$$
$$p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$$

Если $x = 0$ и $y = 1$, то:

$$p_{01z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{00z} + p_{01z})(p_{01z} + p_{11z})$$

$$p_{01z}p_{00z} + p_{01z}p_{01z} + p_{01z}p_{10z} + p_{01z}p_{11z} = p_{00z}p_{01z} + p_{00z}p_{11z} + p_{01z}p_{01z} + p_{01z}p_{11z}$$
$$p_{01z}p_{10z} = p_{00z}p_{11z}$$

Если $x = 1$ и $y = 0$, то:

$$p_{10z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{10z} + p_{11z})(p_{00z} + p_{10z})$$

$$p_{10z}p_{00z} + p_{10z}p_{01z} + p_{10z}p_{10z} + p_{10z}p_{11z} = p_{10z}p_{00z} + p_{10z}p_{10z} + p_{11z}p_{00z} + p_{11z}p_{10z}$$
$$p_{10z}p_{01z} = p_{11z}p_{00z}$$

Если $x = 1$ и $y = 1$, то:

$$p_{11z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{10z} + p_{11z})(p_{01z} + p_{11z})$$

$$p_{11z}p_{00z} + p_{11z}p_{01z} + p_{11z}p_{10z} + p_{11z}p_{11z} = p_{10z}p_{01z} + p_{10z}p_{11z} + p_{11z}p_{01z} + p_{11z}p_{11z}$$
$$p_{11z}p_{00z} = p_{10z}p_{01z}$$

Таким образом, из условной независимости X и Y при условии Z следует $p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$, где $z = 0, 1$.

Доказательство в обратную сторону проводится аналогично. □

Пример 1.1. Пусть (X, Y, Z) имеет трехмерное распределение Бернулли с вероятностями $p_{000} = 0.15$, $p_{001} = 0.1$, $p_{010} = 0.3$, $p_{011} = 0.1$, $p_{100} = 0.05$, $p_{101} = 0.1$, $p_{110} = 0.1$, $p_{111} = 0.1$. Заметим, что:

$$p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100} = 0.015$$

$$p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101} = 0.01$$

Значит из теоремы 1.1 следует, что $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$.

2 Частный коэффициент корреляции Пирсона

Для удобства введем следующие обозначения:

$$p_{x**} = P(X = x),\ p_{*y*} = P(Y = y),\ p_{**z} = P(Z = z)$$

$$p_{xy*} = P(X = x, Y = y),\ p_{x*z} = P(X = x, Z = z),\ p_{*yz} = P(Y = y, Z = z)$$

Символом Σ будем обозначать ковариационную матрицу:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что $\sigma_{11} = D(X) = p_{1**}(1 - p_{1**})$.

Лемма 2.1.

$$\sigma_{12} = \mathrm{Cov}(X, Y) = p_{11*} - p_{1**}p_{*1*}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY)- -E(X)E(Y)$.

$$E(XY) = 1 \cdot p_{11*} + 0 \cdot (p_{00*} + p_{01*} + p_{10*}) = p_{11*}$$

$$EX = 1 \cdot p_{1**} + 0 \cdot p_{0**} = p_{1**}$$

$$EY = 1 \cdot p_{*1*} + 0 \cdot p_{*0*} = p_{*1*}$$

Таким образом, $\mathrm{Cov}(X, Y) = p_{11*} - p_{1**}p_{*1*}$. □

Частный коэффициент корреляции Пирсона определяется через элементы обратной ковариационной матрицы Σ^{-1}:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{pmatrix}$$

Известно, что элемент σ^{12} матрицы Σ^{-1} выражается через соотношение $\sigma^{12} = \dfrac{(-1)^{2+1}}{\det(\Sigma)} M_{21}$, где $M_{21} = \det \begin{pmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$.

Лемма 2.2.

$$M_{21} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100})$$

Доказательство.

$$M_{21} = \det \begin{pmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = (p_{11*} - p_{1**}p_{*1*})p_{**1}(1 - p_{**1}) -$$

$$-(p_{1*1}-p_{1**}p_{**1})(p_{*11}-p_{*1*}p_{**1}) =$$
$$= p_{11*}p_{**1} - p_{11*}p_{**1}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*}p_{**1} + p_{1**}p_{*1*}p_{**1}p_{**1} -$$
$$-p_{1*1}p_{*11} + p_{1*1}p_{*1*}p_{**1} + p_{1**}p_{**1}p_{*11} - p_{1**}p_{**1}p_{*1*}p_{**1} =$$

Заметим, что четвертое и восьмое слагаемые сокращаются. Распишем первое слагаемое как сумму вероятностей:

$$= p_{111}p_{**1} + p_{110}p_{**1} - p_{11*}p_{**1}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*}p_{**1} -$$
$$-p_{1*1}p_{*11} + p_{1*1}p_{*1*}p_{**1} + p_{1**}p_{**1}p_{*11} =$$

Осуществим перегруппировку слагаемых:

$$= (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110} - p_{11*}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*} + p_{1*1}p_{*1*} + p_{1**}p_{*11})$$

Преобразуем выражения для отдельных слагаемых. Заметим, что:

$$p_{110} - p_{11*}p_{**1} = p_{110} - p_{110}p_{**1} - p_{111}p_{**1} =$$
$$= p_{110}(1-p_{**1}) - p_{111}p_{**1} = p_{110}p_{**0} - p_{111}p_{**1}$$

Также заметим, что:

$$-p_{1**}p_{*1*} + p_{1*1}p_{*1*} + p_{1**}p_{*11} =$$
$$= -(p_{1*0}+p_{1*1})(p_{*10}+p_{*11}) + p_{1*1}(p_{*10}+p_{*11}) + (p_{1*0}+p_{1*1})p_{*11} =$$
$$= -p_{1*0}p_{*10} - p_{1*0}p_{*11} - p_{1*1}p_{*10} - p_{1*1}p_{*11} +$$
$$+p_{1*1}p_{*10} + p_{1*1}p_{*11} + p_{1*0}p_{*11} + p_{1*1}p_{*11} =$$
$$= -p_{1*0}p_{*10} + p_{1*1}p_{*11}$$

Запишем выражение для M_{21} с преобразованными слагаемыми:

$$M_{21} = (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}((p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) - (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11})) =$$
$$= (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) - p_{**1}(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) =$$
$$= (1-p_{**1})(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) =$$
$$= p_{**0}(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10})$$

Снова преобразуем отдельные слагаемые.

$$p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11} = p_{111}(p_{001}+p_{011}+p_{101}+p_{111}) - (p_{101}+p_{111})(p_{011}+p_{111}) =$$
$$= p_{111}p_{001} + p_{111}p_{011} + p_{111}p_{101} + p_{111}p_{111} - p_{101}p_{011} - p_{101}p_{111} - p_{111}p_{011} - p_{111}p_{111} =$$
$$= p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}$$

Аналогично преобразуем выражение:

$$p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10} = p_{110}(p_{000} + p_{010} + p_{100} + p_{110}) - (p_{100} + p_{110})(p_{010} + p_{110}) =$$

$$= p_{110}p_{000} + p_{110}p_{010} + p_{110}p_{100} + p_{110}p_{110} - p_{100}p_{010} - p_{100}p_{110} - p_{110}p_{010} - p_{110}p_{110} =$$
$$= p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}$$

Таким образом:

$$M_{21} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100})$$

□

Теорема 2.1. Пусть X и Y условно независимы при условии Z. Тогда $\sigma^{12} = 0$.

Доказательство. Пусть X и Y условно независимы при условии Z. Тогда по теореме 1.1:

$$p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100}$$

$$p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101}$$

Используя вышеприведенные соотношения, имеем:

$$M_{21} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}) = 0$$

Из $M_{21} = 0$ непосредственно следует, что $\sigma^{12} = 0$. □

В обратную сторону теорема 2.1 неверна. Легко построить контрпример при $p_{**0} = 0$. Далее покажем контрпример в невырожденном случае.

Пример 2.1. Пусть $p_{000} = 0.15$, $p_{001} = 0.1$, $p_{010} = 0.1$, $p_{011} = 0.15$, $p_{100} = 0.1$, $p_{101} = 0.15$, $p_{110} = 0.15$, $p_{111} = 0.1$. Тогда $p_{**0} = 0.5$, $p_{**1} = 0.5$ и $M_{21} = p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}) + p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) == 0.5 \cdot (0.15 \cdot 0.15 - 0.1 \cdot 0.1) + 0.5 \cdot (0.1 \cdot 0.1 - 0.15 \cdot 0.15) = 0$.

Однако, случайные величины X и Y условно зависимы при условии Z поскольку:

$$p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100} = 0.15 \cdot 0.15 - 0.1 \cdot 0.1 = 0.0125 \neq 0$$

$$p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101} = 0.1 \cdot 0.1 - 0.15 \cdot 0.15 = -0.0125 \neq 0$$

3 Трехмерное распределение Бернулли в экспоненциальном виде

Пусть $(X, Y, Z)^T$ – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли. Данное распределение можно записать в экспоненциальном виде:

$$p(x, y, z) = P(X = x, Y = y, Z = z) = p_{000}^{(1-x)(1-y)(1-z)} \dots p_{111}^{xyz}$$

Лемма 3.1.

$$p(x,y,z) = \exp\left\{\ln p_{000}\right\} \exp\left\{xyz \ln\left(\frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}}\right) + \right.$$

$$+x\ln\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right) + y\ln\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right) + z\ln\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right) +$$

$$\left. +xy\ln\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right) + xz\ln\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right) + yz\ln\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)\right\}$$

Доказательство.

$$p(x,y,z) = p_{000}^{(1-x)(1-y)(1-z)} \ldots p_{111}^{xyz} =$$

$$= \exp\left\{(1-x)(1-y)(1-z)\ln p_{000} + (1-x)(1-y)z\ln p_{001} + \right.$$

$$+(1-x)y(1-z)\ln p_{010} + (1-x)yz\ln p_{011} + x(1-y)(1-z)\ln p_{100} +$$

$$\left. +x(1-y)z\ln p_{101} + xy(1-z)\ln p_{110} + xyz\ln p_{111}\right\} =$$

$$= \exp\left\{(1-y-x+xy-z+yz+xz-xyz)\ln p_{000} + \right.$$

$$+(z-yz-xz+xyz)\ln p_{001} + (y-yz-xy+xyz)\ln p_{010} +$$

$$+(yz-xyz)\ln p_{011} + (x-xz-xy+xyz)\ln p_{100} +$$

$$\left. +(xz-xyz)\ln p_{101} + (xy-xyz)\ln p_{110} + xyz\ln p_{111}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\ln p_{000}\right\} \exp\left\{xyz \ln\left(\frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}}\right) + \right.$$

$$+x\ln\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right) + y\ln\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right) + z\ln\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right) +$$

$$\left. +xy\ln\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right) + xz\ln\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right) + yz\ln\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)\right\}$$

□

4 Равномерно наиболее мощный тест

Пусть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

– повторная выборка из распределения случайного вектора $(X, Y, Z)^T$. Из леммы 3.1 непосредственно следует, что плотность совместного распределения повторной выборки имеет вид

$$p(x, y, z) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, y_i, z_i) =$$

$$= \exp\left\{ n \ln p_{000} \right\} \exp\left\{ \ln\left(\frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i + \right.$$

$$+ \ln\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i + \ln\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right) \sum_{i=1}^{n} y_i + \ln\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right) \sum_{i=1}^{n} z_i +$$

$$\left. + \ln\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \ln\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \ln\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right) \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \right\}$$

Пусть $\theta = \ln\left(\frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}}\right)$. Можно проверить, что если выполнено одно из условий:

- $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$
- $X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$
- $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X$

то параметр θ примет значение $\theta_0 = 0$ (а в обратную сторону?). В тесте структуры Неймана для проверки гипотезы для проверки гипотезы $H : \theta = \theta_0$ против альтернативы $K : \theta \neq \theta_0$ используются следующие статистики:

$$U = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i, T_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, T_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i, T_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$$

$$T_4 = \sum_{i=1}^{n} x_i, T_5 = \sum_{i=1}^{n} y_i, T_6 = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

Для построения теста необходимо найти распределение:

$$P(U = u \mid T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_3 = t_3, T_4 = t_4, T_5 = t_5, T_6 = t_6)$$

Найдем совместное распределение вектора $(U, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$.

Лемма 4.1.

$$P(U=u,T_1=t_1,T_2=t_2,T_3=t_3,T_4=t_4,T_5=t_5,T_6=t_6)=$$
$$=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{8}k_i(u)!}\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^u\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right)^{t_1}\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right)^{t_2}\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)^{t_3}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right)^{t_4}\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right)^{t_5}\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right)^{t_6}p_{000}^n$$

где $k_1(u)=u$, $k_2(u)=t_1-u$, $k_3(u)=t_2-u$, $k_4(u)=t_3-u$, $k_5(u)=t_4-t_1-t_2+u$, $k_6(u)=t_5-t_1-t_3+u$, $k_7(u)=t_6-t_2-t_3+u$, $k_8(u)=n-u+t_1+t_2+t_3-t_4-t_5-t_6$

Доказательство.

$$P(U=u,T_1=t_1,T_2=t_2,T_3=t_3,T_4=t_4,T_5=t_5,T_6=t_6)=$$
$$=P\Bigg(\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i=u,\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=t_1,\sum_{i=1}^{n}x_iz_i=t_2,\sum_{i=1}^{n}y_iz_i=t_3,$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_i=t_4,\sum_{i=1}^{n}y_i=t_5,\sum_{i=1}^{n}z_i=t_6\Bigg)=$$
$$=P\Bigg(\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i=u,\sum_{i=1}^{n}x_iy_i(1-z_i)=t_1-u,\sum_{i=1}^{n}x_i(1-y_i)z_i=t_2-u,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)y_iz_i=t_3-u,\sum_{i=1}^{n}x_i(1-y_i)(1-z_i)=t_4-t_1-t_2+u,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)y_i(1-z_i)=t_5-t_1-t_3+u,\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)(1-y_i)z_i=t_6-t_2-t_3+u,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)(1-y_i)(1-z_i)=n-u+t_1+t_2+t_3-t_4-t_5-t_6\Bigg)=$$
$$=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{8}k_i(u)!}p_{111}^{u}p_{110}^{t_1-u}p_{101}^{t_2-u}p_{011}^{t_3-u}p_{100}^{t_4-t_1-t_2+u}p_{010}^{t_5-t_1-t_3+u}p_{001}^{t_6-t_2-t_3+u}\cdot$$
$$\cdot p_{000}^{n-u+t_1+t_2+t_3-t_4-t_5-t_6}=$$
$$=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{8}k_i(u)!}\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^u\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right)^{t_1}\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right)^{t_2}\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)^{t_3}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right)^{t_4}\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right)^{t_5}\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right)^{t_6}p_{000}^n$$

□

Лемма 4.2.

$$P_{\theta_0}(U = u \mid T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_3 = t_3, T_4 = t_4, T_5 = t_5, T_6 = t_6) = \frac{\frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!}}{\sum_s \frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!}}$$

Доказательство.

$$P(T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_3 = t_3, T_4 = t_4, T_5 = t_5, T_6 = t_6) =$$

$$= \sum_s P(U = s, T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_3 = t_3, T_4 = t_4, T_5 = t_5, T_6 = t_6)$$

$$P(U = u \mid T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_3 = t_3, T_4 = t_4, T_5 = t_5, T_6 = t_6) =$$

$$= \frac{\frac{n!}{\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!}\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^u}{\sum_s \frac{n!}{\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!}\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^s}$$

При истинности гипотезы $\theta = \theta_0 = 0$ параметр $\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}} = 1$.

$$P_{\theta_0}(U = u \mid T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_3 = t_3, T_4 = t_4, T_5 = t_5, T_6 = t_6) = \frac{\frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!}}{\sum_s \frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!}}$$

□

Приведем способ, с помощью которого на компьютере можно эффективно вычислить значение $\frac{\frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!}}{\sum_s \frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!}}$. Пусть $f(i) = \sum_{j=1}^{i} \ln(j)$. Проведем некоторые преобразования искомого выражения:

$$\frac{\frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!}}{\sum_s \frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!}} = \frac{\exp\left\{\ln\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!}\right)\right\}}{\sum_s \exp\left\{\ln\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!}\right)\right\}} = \frac{\exp\left\{-\sum_{i=1}^{8} \ln(k_i(u)!)\right\}}{\sum_s \exp\left\{-\sum_{i=1}^{8} \ln(k_i(s)!)\right\}} =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\sum_{i=1}^{8} f(k_i(u))\right\}}{\sum_s \exp\left\{-\sum_{i=1}^{8} f(k_i(s))\right\}}$$

Полученное выражение можно посчитать с помощью функции

$$\text{softmax}(x, i) = \frac{\exp\{x_i\}}{\sum_{j=1}^{n} \exp\{x_j\}}, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Благодаря свойству

$$\operatorname{softmax}(x, i) = \frac{\exp\{x_i\}}{\sum_{j=1}^{n} \exp\{x_j\}} = \frac{\exp\{x_i - C\}}{\sum_{j=1}^{n} \exp\{x_j - C\}}$$

современные компьютеры умеют вычислять softmax даже при больших значениях x_i. Для вычисления softmax в вышеприведенной формуле полагают $C = \max_{1 \leq j \leq n} x_j$.