1 Введение

Определение 1.1. Случайный вектор $(X, Y, Z)^T$ имеет трехмерное распределение Бернулли, если множество его возможных значений

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и заданы вероятности

$$P(X = x, Y = y, Z = z) = p_{xyz} \geq 0, \quad \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} \sum_{z=0}^{1} p_{xyz} = 1$$

Определение 1.2. Пусть $(X, Y, Z)^T$ – дискретный случайный вектор. Говорят, что случайные величины X и Y условно независимы при условии Z, и пишут $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ если для любых x, y и z, такого что $P(Z = z) > 0$, выполнено:

$$P(X = x, Y = y \mid Z = z) = P(X = x \mid Z = z) P(Y = y \mid Z = z)$$

Теорема 1.1. Пусть $(X, Y, Z)^T$ – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли, и $P(Z = 0) > 0$. Случайные величины X и Y условно независимы при условии Z тогда и только тогда, когда $p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$, где $z = 0, 1$.

Доказательство. Пусть $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$. Значит, для любых $x = 0, 1$, $y = 0, 1$ и $z = 0, 1$ выполнено условие:

$$P(X = x, Y = y \mid Z = z) = P(X = x \mid Z = z) P(Y = y \mid Z = z)$$

После домножения на $P(Z = z)^2$ получаем эквивалентное условие:

$$P(X = x, Y = y, Z = z) P(Z = z) = P(X = x, Z = z) P(Y = y, Z = z)$$

Найдем маргинальное распределение случайной величины Z:

$$P(Z = z) = \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} p_{xyz} = p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}$$

Найдем маргинальные распределения $(X, Z)^T$ и $(Y, Z)^T$:

$$P(X = x, Z = z) = \sum_{y=0}^{1} p_{xyz} = p_{x0z} + p_{x1z}$$

$$P(Y = y, Z = z) = \sum_{x=0}^{1} p_{xyz} = p_{0yz} + p_{1yz}$$

Тогда условие условной независимости перепишем в следующем виде:

$$p_{xyz}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{x0z} + p_{x1z})(p_{0yz} + p_{1yz})$$

Это условие выполняется для всех $x = 0, 1$, $y = 0, 1$, $z = 0, 1$. Пусть z фиксировано. Если $x = 0$ и $y = 0$, то:

$$p_{00z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{00z} + p_{01z})(p_{00z} + p_{10z})$$

$$p_{00z}p_{00z}+p_{00z}p_{01z}+p_{00z}p_{10z}+p_{00z}p_{11z} = p_{00z}p_{00z}+p_{00z}p_{10z}+p_{01z}p_{00z}+p_{01z}p_{10z}$$
$$p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$$

Если $x = 0$ и $y = 1$, то:

$$p_{01z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{00z} + p_{01z})(p_{01z} + p_{11z})$$

$$p_{01z}p_{00z}+p_{01z}p_{01z}+p_{01z}p_{10z}+p_{01z}p_{11z} = p_{00z}p_{01z}+p_{00z}p_{11z}+p_{01z}p_{01z}+p_{01z}p_{11z}$$
$$p_{01z}p_{10z} = p_{00z}p_{11z}$$

Если $x = 1$ и $y = 0$, то:

$$p_{10z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{10z} + p_{11z})(p_{00z} + p_{10z})$$

$$p_{10z}p_{00z}+p_{10z}p_{01z}+p_{10z}p_{10z}+p_{10z}p_{11z} = p_{10z}p_{00z}+p_{10z}p_{10z}+p_{11z}p_{00z}+p_{11z}p_{10z}$$
$$p_{10z}p_{01z} = p_{11z}p_{00z}$$

Если $x = 1$ и $y = 1$, то:

$$p_{11z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{10z} + p_{11z})(p_{01z} + p_{11z})$$

$$p_{11z}p_{00z}+p_{11z}p_{01z}+p_{11z}p_{10z}+p_{11z}p_{11z} = p_{10z}p_{01z}+p_{10z}p_{11z}+p_{11z}p_{01z}+p_{11z}p_{11z}$$

$$p_{11z}p_{00z} = p_{10z}p_{01z}$$

Таким образом, из условной независимости X и Y при условии Z следует $p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$, где $z = 0, 1$.

Доказательство в обратную сторону проводится аналогично. $\square$

Пример 1.1. Пусть $(X, Y, Z)^T$ имеет трехмерное распределение Бернулли с вероятностями $p_{000} = 0.15$, $p_{001} = 0.1$, $p_{010} = 0.3$, $p_{011} = 0.1$, $p_{100} = 0.05$, $p_{101} = 0.1$, $p_{110} = 0.1$, $p_{111} = 0.1$. Заметим, что:

$$p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100} = 0.015$$

$$p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101} = 0.01$$

Значит из теоремы 1.1 следует, что $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$.

2 Трехмерное распределение Бернулли в экспоненциальном виде

Пусть $(X, Y, Z)^T$ – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли. Распределение данного случайного вектора можно записать в экспоненциальной форме:

$$P(X = x, Y = y, Z = z) = p_{000}^{(1-x)(1-y)(1-z)} \dots p_{111}^{xyz}$$

Лемма 2.1.

$$P(X = x, Y = y, Z = z) = \exp\left\{\ln p_{000}\right\} \exp\left\{xyz \ln\left(\frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}}\right) + \right.$$

$$+x \ln\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right) + y \ln\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right) + z \ln\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right) +$$

$$\left. +xy \ln\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right) + xz \ln\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right) + yz \ln\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)\right\}$$

Доказательство.

$$P(X = x, Y = y, Z = z) = p_{000}^{(1-x)(1-y)(1-z)} \dots p_{111}^{xyz} =$$

$$= \exp\left\{(1-x)(1-y)(1-z)\ln p_{000} + (1-x)(1-y)z \ln p_{001} + \right.$$

$$+(1-x)y(1-z)\ln p_{010} + (1-x)yz \ln p_{011} + x(1-y)(1-z)\ln p_{100} +$$

$$\left. +x(1-y)z \ln p_{101} + xy(1-z)\ln p_{110} + xyz \ln p_{111}\right\} =$$

$$= \exp\left\{(1 - y - x + xy - z + yz + xz - xyz)\ln p_{000} + \right.$$

$$+(z - yz - xz + xyz)\ln p_{001} + (y - yz - xy + xyz)\ln p_{010} +$$

$$+(yz-xyz)\ln p_{011}+(x-xz-xy+xyz)\ln p_{100}+$$

$$\left.+(xz-xyz)\ln p_{101}+(xy-xyz)\ln p_{110}+xyz\ln p_{111}\right\}=$$

$$=\exp\left\{\ln p_{000}\right\}\exp\left\{xyz\ln\left(\frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}}\right)+\right.$$

$$+x\ln\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right)+y\ln\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right)+z\ln\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right)+$$

$$\left.+xy\ln\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right)+xz\ln\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right)+yz\ln\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)\right\}$$

$\square$

3 Равномерно наиболее мощный несмещенный тест

Пусть

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

повторная выборка из распределения случайного вектора $(X, Y, Z)^T$.

Из леммы 2.1 непосредственно следует, что совместное распределение повторной выборки имеет вид:

$$P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, Z_1 = z_1, \ldots, X_n = x_n, Y_n = y_n, Z_n = z_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i, Y_i = y_i, Z_i = z_i) =$$

$$= \exp\left\{ n \ln p_{000} \right\} \exp\left\{ \ln\left(\frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i + \right.$$

$$+ \ln\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i + \ln\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right) \sum_{i=1}^{n} y_i + \ln\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right) \sum_{i=1}^{n} z_i +$$

$$\left. + \ln\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \ln\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \ln\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right) \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \right\}$$

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть $\theta = \ln\left(\frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}}\right)$. Если выполнено одно из условий:

- $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$
- $X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$
- $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X$

то параметр θ принимает значение 0.

Доказательство. 1. Пусть $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$, тогда по теореме 1.1 выполнено: $p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100}$ и $p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101}$. Отсюда следует, что $\theta = \ln(1) = 0$.

2. Пусть $X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$, тогда по теореме 1.1 выполнено: $p_{000}p_{101} = p_{001}p_{100}$ и $p_{010}p_{111} = p_{011}p_{110}$. Отсюда следует, что $\theta = \ln(1) = 0$.

3. Пусть $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X$, тогда по теореме 1.1 выполнено: $p_{000}p_{011} = p_{001}p_{010}$ и $p_{100}p_{111} = p_{101}p_{110}$. Отсюда следует, что $\theta = \ln(1) = 0$. $\square$

Из вышеприведенной теоремы следует, что интересующее нас значение параметра θ равно $\theta_0 = 0$. Для проверки гипотезы $H : \theta = \theta_0$ против альтернативы $K : \theta \neq \theta_0$ можно использовать равномерный наиболее мощный в классе несмещенных тест:

$$\varphi(u,t) = \begin{cases} 1, \ u < C_1(t) \text{ или } u > C_2(t) \\ \gamma_i, \ u = C_i(t), \ i = 1,2 \\ 0, \ C_1(t) < u < C_2(t) \end{cases}$$

где константы C_i и γ_i определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} E_{\theta_0}[\varphi(U,T) \mid T = t] = \alpha \\ E_{\theta_0}[U\varphi(U,T) \mid T = t] = \alpha E_{\theta_0}[U \mid T = t] \end{cases}$$

а статистиками являются:

$$U = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i Z_i, T_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i, T_2 = \sum_{i=1}^{n} X_i Z_i, T_3 = \sum_{i=1}^{n} Y_i Z_i,$$

$$T_4 = \sum_{i=1}^{n} X_i, T_5 = \sum_{i=1}^{n} Y_i, T_6 = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Приведем две технические леммы, для того, чтобы найти условное распределение статистики U при условии $T_1 = t_1, \ldots, T_6 = t_6$.

Лемма 3.1.

$$P(U=u,T_1=t_1,T_2=t_2,T_3=t_3,T_4=t_4,T_5=t_5,T_6=t_6)=$$

$$=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{8}k_i(u)!}\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^{u}\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right)^{t_1}\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right)^{t_2}\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)^{t_3}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right)^{t_4}\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right)^{t_5}\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right)^{t_6}p_{000}^{n}$$

где $k_1(u)=u$, $k_2(u)=t_1-u$, $k_3(u)=t_2-u$, $k_4(u)=t_3-u$, $k_5(u)=t_4-t_1-t_2+u$, $k_6(u)=t_5-t_1-t_3+u$, $k_7(u)=t_6-t_2-t_3+u$, $k_8(u)=n-u+t_1+t_2+t_3-t_4-t_5-t_6$

Доказательство.

$$P(U=u,T_1=t_1,T_2=t_2,T_3=t_3,T_4=t_4,T_5=t_5,T_6=t_6)=$$

$$=P\Bigg(\sum_{i=1}^{n}X_iY_iZ_i=u,\sum_{i=1}^{n}X_iY_i=t_1,\sum_{i=1}^{n}X_iZ_i=t_2,\sum_{i=1}^{n}Y_iZ_i=t_3,$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_i=t_4,\sum_{i=1}^{n}Y_i=t_5,\sum_{i=1}^{n}Z_i=t_6\Bigg)=$$

$$=P\Bigg(\sum_{i=1}^{n}X_iY_iZ_i=u,\sum_{i=1}^{n}X_iY_i(1-Z_i)=t_1-u,\sum_{i=1}^{n}X_i(1-Y_i)Z_i=t_2-u,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1-X_i)Y_iZ_i=t_3-u,\sum_{i=1}^{n}X_i(1-Y_i)(1-Z_i)=t_4-t_1-t_2+u,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1-X_i)Y_i(1-Z_i)=t_5-t_1-t_3+u,\sum_{i=1}^{n}(1-X_i)(1-Y_i)Z_i=t_6-t_2-t_3+u,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1-X_i)(1-Y_i)(1-Z_i)=n-u+t_1+t_2+t_3-t_4-t_5-t_6\Bigg)=$$

$$=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{8}k_i(u)!}p_{111}^{u}p_{110}^{t_1-u}p_{101}^{t_2-u}p_{011}^{t_3-u}p_{100}^{t_4-t_1-t_2+u}p_{010}^{t_5-t_1-t_3+u}p_{001}^{t_6-t_2-t_3+u}.$$

$$\cdot p_{000}^{n-u+t_1+t_2+t_3-t_4-t_5-t_6} =$$

$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!} \left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^u \left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right)^{t_1} \left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right)^{t_2} \left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)^{t_3} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right)^{t_4} \left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right)^{t_5} \left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right)^{t_6} p_{000}^{n}$$

□

Лемма 3.2.

$$P_{\theta_0}(U = u \mid T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_3 = t_3, T_4 = t_4, T_5 = t_5, T_6 = t_6) = \frac{\frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!}}{\sum_s \frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!}}$$

где в знаменателе вышеприведенной формулы суммирование ведется по таким s, что $0 \le k_i(s) \le n$ для всех $i = 1 \ldots, 8$.

Доказательство. Найдем маргинальное распределение вектора $(T_1, \ldots, T_6)^T$:

$$P(T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_3 = t_3, T_4 = t_4, T_5 = t_5, T_6 = t_6) =$$

$$= \sum_s P(U = s, T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_3 = t_3, T_4 = t_4, T_5 = t_5, T_6 = t_6)$$

Тогда условное распределение статистики U при условии $T_1 = t_1, \ldots, T_6 = t_6$ можно записать в виде:

$$P(U = u \mid T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_3 = t_3, T_4 = t_4, T_5 = t_5, T_6 = t_6) =$$

$$= \frac{\frac{n!}{\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!} \left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^u}{\sum_s \frac{n!}{\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!} \left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^s}$$

При истинности гипотезы $\theta = \theta_0 = 0$ параметр $\dfrac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}} = 1$.

$$P_{\theta_0}(U = u \mid T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_3 = t_3, T_4 = t_4, T_5 = t_5, T_6 = t_6) = \frac{\frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!}}{\sum_s \frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!}}$$

□

Условную вероятность из леммы 3.2 можно эффективно вычислить на ЭВМ. Пусть $f(i) = \sum_{j=1}^{i} \ln(j)$. Тогда значение условной вероятности можно переписать в виде:

$$\frac{\frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!}}{\sum_s \frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!}} = \frac{\exp\left\{\ln\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(u)!}\right)\right\}}{\sum_s \exp\left\{\ln\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{8} k_i(s)!}\right)\right\}} = \frac{\exp\left\{-\sum_{i=1}^{8} \ln(k_i(u)!)\right\}}{\sum_s \exp\left\{-\sum_{i=1}^{8} \ln(k_i(s)!)\right\}} =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\sum_{i=1}^{8} f(k_i(u))\right\}}{\sum_s \exp\left\{-\sum_{i=1}^{8} f(k_i(s))\right\}}$$

Полученное выражение удобно с позиции того, что современные ЭВМ умеют вычислять функцию

$$\varphi(x, i) = \frac{\exp\{x_i\}}{\sum_{j=1}^{n} \exp\{x_j\}},\ x = (x_1, \dots, x_n)$$

За счет свойства

$$\varphi(x, i) = \frac{\exp\{x_i\}}{\sum_{j=1}^{n} \exp\{x_j\}} = \frac{\exp\{x_i - C\}}{\sum_{j=1}^{n} \exp\{x_j - C\}},\ \text{где } C = \max_{1 \le j \le n} x_j$$

удается избежать переполнения вещественного типа данных, связанного с экспонентой.

4 Тест проверки условной независимости в трехмерном нормальном распределении

Пусть

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

повторная выборка из распределения $(X, Y, Z)^T$ с трехмерным нормальным распределением $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, где μ – вектор математических ожиданий, а Σ – ковариационная матрица:

$$\mu = \begin{pmatrix} EX \\ EY \\ EZ \end{pmatrix}, \ \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{pmatrix}$$

а также $\sigma_{XY} = E[(X - EX)(Y - EY)]$. Для матрицы Σ элементы обратной матрицы Σ^{-1} будем обозначать:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^{XX} & \sigma^{XY} & \sigma^{XZ} \\ \sigma^{YX} & \sigma^{YY} & \sigma^{YZ} \\ \sigma^{ZX} & \sigma^{ZY} & \sigma^{ZZ} \end{pmatrix}$$

Определение 4.1. В трехмерном нормальном распределении частным коэффициентом корреляции Пирсона называется:

$$\rho^{XY \cdot Z} = \frac{\sigma^{XY}}{\sqrt{\sigma^{XX}\sigma^{YY}}}$$

Известно, что в трехмерном нормальном распределении частный коэффициент корреляции совпадает с условным коэффициентом корреляции и выполнено:

$$X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z \text{ тогда и только тогда, когда } \rho^{XY \cdot Z} = 0$$

Определение 4.2. Выборочной ковариационной матрицей называется матрица S, такая что:

$$S = \begin{pmatrix} s_{XX} & s_{XY} & s_{XZ} \\ s_{YX} & s_{YY} & s_{YZ} \\ s_{ZX} & s_{ZY} & s_{ZZ} \end{pmatrix}$$

где

$$s_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}),\ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Для матрицы S элементы обратной матрицы S^{-1} будем обозначать:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} s^{XX} & s^{XY} & s^{XZ} \\ s^{YX} & s^{YY} & s^{YZ} \\ s^{ZX} & s^{ZY} & s^{ZZ} \end{pmatrix}$$

Определение 4.3. Выборочным частным коэффициентом корреляции Пирсона называется:

$$r^{XY \cdot Z} = \frac{s^{XY}}{\sqrt{s^{XX} s^{YY}}}$$

Известно, что при истинности гипотезы $\rho^{XY \cdot Z} = 0$ статистика

$$T = \sqrt{n-3}\frac{r^{XY \cdot Z}}{\sqrt{1 - (r^{XY \cdot Z})^2}}$$

имеет распределение Стьюдента с $n - 3$ степенями свободы. Тогда тест уровня α проверки гипотезы $H : \rho^{XY \cdot Z} = 0$ против альтернативы $K : \rho^{XY \cdot Z} \neq 0$ имеет вид:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1,\ t < C_1 \text{ или } t > C_2 \\ 0,\ C_1 \leq t \leq C_2 \end{cases}$$

где константы C_1 и C_2, удовлетворяющие уравнениям $P(T < C_1) = \alpha/2$ и $P(T > C_2) = 1 - \alpha/2$, берутся из таблиц квантилей распределения Стьюдента с $n - 3$ степенями свободы.