

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

Программа подготовки бакалавров по направлению  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

*Антонов Илья Витальевич*

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

Проверка условной независимости в трехмерном распределении Бернулли

Рецензент

д.ф.-м.н., проф.

ФИО

Научный руководитель

д.ф.-м.н., проф.

П. А. Колданов

Нижний Новгород, 2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Теоретическая часть</b>	<b>3</b>
1.1	Условная независимость в трехмерном распределение Бернулли	3
1.2	Частный коэффициент корреляции Пирсона в трехмерном распределении Бернулли . . . . .	5
1.3	РНМН тест проверки необходимого условия условной независимости . . . . .	9
1.4	РНМН тест проверки независимости в условном распределении	13
1.5	Проверка условной независимости по подвыборкам из условных распределений . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Практическая часть</b>	<b>21</b>
2.1	Способ вычисления вероятностей для РНМН теста на ЭВМ . .	21
2.2	Сравнение тестов . . . . .	22
	<b>Список литературы</b>	<b>26</b>

# 1 Теоретическая часть

## 1.1 Условная независимость в трехмерном распределении Бернулли

Определим трехмерное распределение Бернулли [3; 6].

**Определение 1.1.1.** *Случайный вектор  $(X, Y, Z)^T$  имеет трехмерное распределение Бернулли, если множество его возможных значений:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*и заданы  $P(X = x, Y = y, Z = z) = p_{xyz} \geq 0, \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^1 \sum_{z=0}^1 p_{xyz} = 1$ .*

Приведем определение понятия условной независимости [4].

**Определение 1.1.2.** *Пусть  $(X, Y, Z)^T$  – дискретный случайный вектор. Говорят, что случайные величины  $X$  и  $Y$  условно независимы при условии  $Z$ , и пишут  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ , если:*

$$P(X = x, Y = y \mid Z = z) = P(X = x \mid Z = z)P(Y = y \mid Z = z)$$

*при любых  $x, y$  и  $z$  для которого  $P(Z = z) > 0$ .*

Найдем условия на параметры трехмерного распределения Бернулли при условной независимости.

**Теорема 1.1.1.** *Пусть  $(X, Y, Z)^T$  – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли, в котором  $P(Z = 0) > 0$ . Случайные величины  $X$  и  $Y$  условно независимы при условии  $Z$  тогда и только тогда, когда*

$$p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$$

*для всех  $z = \overline{0, 1}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ . Значит, для любых  $x = \overline{0, 1}$ ,  $y = \overline{0, 1}$  и  $z = \overline{0, 1}$  выполнено условие:

$$P(X = x, Y = y \mid Z = z) = P(X = x \mid Z = z)P(Y = y \mid Z = z) \quad (1)$$

После домножения (1) на  $P(Z = z)^2 > 0$  получаем эквивалентное условие:

$$P(X = x, Y = y, Z = z)P(Z = z) = P(X = x, Z = z)P(Y = y, Z = z) \quad (2)$$

Найдем следующие вероятности:

$$P(X = x, Z = z) = p_{x0z} + p_{x1z}, \quad P(Y = y, Z = z) = p_{0yz} + p_{1yz}$$

$$P(Z = z) = p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}$$

Тогда условие (2) перепишем в следующем виде:

$$p_{xyz}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{x0z} + p_{x1z})(p_{0yz} + p_{1yz})$$

Это условие выполняется для всех  $x = \overline{0, 1}$ ,  $y = \overline{0, 1}$ ,  $z = \overline{0, 1}$ . Пусть  $z$  фиксировано. Если  $x = 0$  и  $y = 0$ , то:

$$p_{00z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{00z} + p_{01z})(p_{00z} + p_{10z}) \Leftrightarrow p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$$

Если  $x = 0$  и  $y = 1$ , то:

$$p_{01z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{00z} + p_{01z})(p_{01z} + p_{11z}) \Leftrightarrow p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$$

Если  $x = 1$  и  $y = 0$ , то:

$$p_{10z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{10z} + p_{11z})(p_{00z} + p_{10z}) \Leftrightarrow p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$$

Если  $x = 1$  и  $y = 1$ , то:

$$p_{11z}(p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}) = (p_{10z} + p_{11z})(p_{01z} + p_{11z}) \Leftrightarrow p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$$

Таким образом, из  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  следует  $p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$  для всех  $z = \overline{0, 1}$ .

Поскольку в вышеприведенных рассуждениях все переходы равносильные, мы также доказали, что из условия  $p_{00z}p_{11z} = p_{01z}p_{10z}$  для всех  $z = \overline{0, 1}$  следует  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ .  $\square$

Покажем, что существует случайный вектор  $(X, Y, Z)^T$  с трехмерным распределением Бернулли, в котором  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ .

**Пример 1.1.1.** Пусть  $(X, Y, Z)^T$  имеет трехмерное распределение Бернулли с вероятностями  $p_{000} = 0.15$ ,  $p_{001} = 0.1$ ,  $p_{010} = 0.3$ ,  $p_{011} = 0.1$ ,  $p_{100} = 0.05$ ,  $p_{101} = 0.1$ ,  $p_{110} = 0.1$ ,  $p_{111} = 0.1$ . Заметим, что:

$$p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100} = 0.015$$

$$p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101} = 0.01$$

Следовательно из теор. 1.1.1 следует, что  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ .

## 1.2 Частный коэффициент корреляции Пирсона в трехмерном распределении Бернулли

В данном разделе исследуем свойства частного коэффициента корреляции Пирсона в трехмерном распределении Бернулли.

Для случайного вектора  $(X, Y, Z)^T$  определим ковариационную матрицу:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{pmatrix}$$

где  $\sigma_{XY} = E[(X - EX)(Y - EY)]$ . Остатками от  $X$  и  $Y$  при регрессии на  $Z$  называются случайные величины:

$$X' = (X - EX) - \frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_{ZZ}}(Z - EZ)$$

$$Y' = (Y - EY) - \frac{\sigma_{YZ}}{\sigma_{ZZ}}(Z - EZ)$$

Согласно работе [2], частный коэффициент корреляции Пирсона определяется как коэффициент корреляции Пирсона между остатками, другими словами:

$$\rho^{XY \cdot Z} = \frac{E(X'Y')}{\sqrt{E(X')^2 E(Y')^2}}$$

Приведем соотношения, которые справедливы для  $\rho^{XY \cdot Z}$  в произвольном распределении.

**Лемма 1.2.1.** Пусть  $(X, Y, Z)^T$  – произвольный случайный вектор. Тогда:

$$\rho^{XY \cdot Z} = \frac{\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ}}{\sqrt{\sigma_{XX}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}^2}\sqrt{\sigma_{YY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{YZ}^2}} = \frac{\rho_{XY} - \rho_{XZ}\rho_{YZ}}{\sqrt{1 - \rho_{XZ}^2}\sqrt{1 - \rho_{YZ}^2}}$$

где  $\rho_{XY}$ ,  $\rho_{XZ}$ ,  $\rho_{YZ}$  – коэффициент корреляции Пирсона между случайными величинами  $X$  и  $Y$ ,  $X$  и  $Z$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} E(X'Y') &= E\left[\left((X - EX) - \frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_{ZZ}}(Z - EZ)\right)\left((Y - EY) - \frac{\sigma_{YZ}}{\sigma_{ZZ}}(Z - EZ)\right)\right] = \\ &= \sigma_{XY} - \frac{\sigma_{YZ}}{\sigma_{ZZ}}\sigma_{XZ} - \frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_{ZZ}}\sigma_{YZ} + \frac{\sigma_{XZ}\sigma_{YZ}}{\sigma_{ZZ}\sigma_{ZZ}}\sigma_{ZZ} = \frac{\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ}}{\sigma_{ZZ}} \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \rho^{XY \cdot Z} &= \frac{E(X'Y')}{\sqrt{E(X')^2 E(Y')^2}} = \frac{\frac{\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ}}{\sigma_{ZZ}}}{\sqrt{\frac{\sigma_{XX}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{XZ}}{\sigma_{ZZ}}} \sqrt{\frac{\sigma_{YY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{YZ}\sigma_{YZ}}{\sigma_{ZZ}}}} = \\ &= \frac{\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ}}{\sqrt{\sigma_{XX}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}^2} \sqrt{\sigma_{YY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{YZ}^2}} = \\ &= \frac{\sigma_{ZZ}\sqrt{\sigma_{XX}\sigma_{YY}} \left( \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_{XX}\sigma_{YY}}} - \frac{\sigma_{XZ}}{\sqrt{\sigma_{XX}\sigma_{ZZ}}} \frac{\sigma_{YZ}}{\sqrt{\sigma_{YY}\sigma_{ZZ}}} \right)}{\sqrt{\sigma_{XX}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}^2} \sqrt{\sigma_{YY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{YZ}^2}} = \\ &= \frac{\rho_{XY} - \rho_{XZ}\rho_{YZ}}{\sqrt{1 - \frac{\sigma_{XZ}^2}{\sigma_{XX}\sigma_{ZZ}}} \sqrt{1 - \frac{\sigma_{YZ}^2}{\sigma_{YY}\sigma_{ZZ}}}} = \frac{\rho_{XY} - \rho_{XZ}\rho_{YZ}}{\sqrt{1 - \rho_{XZ}^2} \sqrt{1 - \rho_{YZ}^2}} \end{aligned}$$

□

Для дальнейших рассуждений примем следующие обозначения:

$$p_{x**} = P(X = x), \quad p_{*y*} = P(Y = y), \quad p_{**z} = P(Z = z)$$

$$p_{xy*} = P(X = x, Y = y), \quad p_{x*z} = P(X = x, Z = z), \quad p_{*yz} = P(Y = y, Z = z)$$

Найдем значение выражения  $\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ}$  в трехмерном распределении Бернулли.

**Лемма 1.2.2.** Пусть  $(X, Y, Z)^T$  – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли. Тогда:

$$\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100})$$

*Доказательство.* Легко проверить, что  $\sigma_{ZZ} = p_{**1}(1 - p_{**1})$ . Найдем соотношение для  $\sigma_{XY}$ . Воспользуемся формулой  $\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$ .

$$E(XY) = 1 \cdot p_{11*} + 0 \cdot (p_{00*} + p_{01*} + p_{10*}) = p_{11*}$$

Таким образом,  $\sigma_{XY} = p_{11*} - p_{1**}p_{*1*}$ . Аналогично,  $\sigma_{XZ} = p_{1*1} - p_{1**}p_{**1}$  и  $\sigma_{YZ} = p_{*11} - p_{*1*}p_{**1}$ . Преобразуем выражение  $\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ} =$

$$\begin{aligned} &= (p_{11*} - p_{1**}p_{*1*})p_{**1}(1 - p_{**1}) - (p_{1*1} - p_{1**}p_{**1})(p_{*11} - p_{*1*}p_{**1}) = \\ &= p_{11*}p_{**1} - p_{11*}p_{**1}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11} + p_{1*1}p_{*1*}p_{**1} + p_{1**}p_{**1}p_{*11} = \\ &= (p_{111}p_{**1} + p_{110}p_{**1}) - p_{11*}p_{**1}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*}p_{**1} - \\ &\quad - p_{1*1}p_{*11} + p_{1*1}p_{*1*}p_{**1} + p_{1**}p_{**1}p_{*11} = \\ &= (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110} - p_{11*}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*} + p_{1*1}p_{*1*} + p_{1**}p_{*11}) \quad (3) \end{aligned}$$

Заметим, что:

- 1)  $p_{110} - p_{11*}p_{**1} = p_{110} - p_{110}p_{**1} - p_{111}p_{**1} = p_{110}(1 - p_{**1}) - p_{111}p_{**1} = p_{110}p_{**0} - p_{111}p_{**1}$
- 2)  $-p_{1**}p_{*1*} + p_{1*1}p_{*1*} + p_{1**}p_{*11} = -(p_{1*0} + p_{1*1})(p_{*10} + p_{*11}) + p_{1*1}(p_{*10} + p_{*11}) + (p_{1*0} + p_{1*1})p_{*11} = -p_{1*0}p_{*10} + p_{1*1}p_{*11}$

Учитывая вышеприведенные соотношения, запишем (3):

$$\begin{aligned} &(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}((p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) - (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11})) = \\ &= (1 - p_{**1})(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) = \\ &= p_{**0}(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) \quad (4) \end{aligned}$$

Также заметим, что:

- 1)  $p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11} = p_{111}(p_{001} + p_{011} + p_{101} + p_{111}) - (p_{101} + p_{111})(p_{011} + p_{111}) = p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}$
- 2)  $p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10} = p_{110}(p_{000} + p_{010} + p_{100} + p_{110}) - (p_{100} + p_{110})(p_{010} + p_{110}) = p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}$

Подставляя преобразованные выражения в (4) имеем:

$$\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100})$$

□

Вышеприведенное соотношение для  $\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ}$  позволяет доказать следующую теорему.

**Теорема 1.2.1.** Пусть  $(X, Y, Z)^T$  – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли. Если  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ , то  $\rho^{XY \cdot Z} = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ . Тогда по теор. 1.1.1:  $p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100}$  и  $p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101}$ . Используя лемм. 1.2.2, имеем:

$$\sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}) = 0$$

Следовательно,  $\rho^{XY \cdot Z} = 0$ . □

Таким образом, равенство нулю частного коэффициента корреляции Пирсона является необходимым условием условной независимости. Однако, это условие не является достаточным, так как в обратную сторону теор. 1.2.1 неверна. Приведем контрпример.

**Пример 1.2.1.** Пусть  $p_{000} = 0.15$ ,  $p_{001} = 0.1$ ,  $p_{010} = 0.1$ ,  $p_{011} = 0.15$ ,  $p_{100} = 0.1$ ,  $p_{101} = 0.15$ ,  $p_{110} = 0.15$ ,  $p_{111} = 0.1$ . Тогда  $p_{**0} = 0.5$ ,  $p_{**1} = 0.5$  и

$$\begin{aligned} \sigma_{XY}\sigma_{ZZ} - \sigma_{XZ}\sigma_{YZ} &= p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}) + p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) = \\ &= 0.5 \cdot (0.15 \cdot 0.15 - 0.1 \cdot 0.1) + 0.5 \cdot (0.1 \cdot 0.1 - 0.15 \cdot 0.15) = 0 \end{aligned}$$

А значит  $\rho^{XY \cdot Z} = 0$ . Однако, случайные величины  $X$  и  $Y$  условно зависимы при условии  $Z$  поскольку:

$$p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100} = 0.15 \cdot 0.15 - 0.1 \cdot 0.1 = 0.0125 \neq 0$$

$$p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101} = 0.1 \cdot 0.1 - 0.15 \cdot 0.15 = -0.0125 \neq 0$$

Для оценки частного коэффициента корреляции Пирсона можно использовать выборочный частный коэффициент корреляции Пирсона:

$$r^{XY \cdot Z} = \frac{r_{XY} - r_{XZ}r_{YZ}}{\sqrt{1 - r_{XZ}^2}\sqrt{1 - r_{YZ}^2}}$$

где  $r_{XY}$ ,  $r_{XZ}$ ,  $r_{YZ}$  – выборочный коэффициент корреляции Пирсона между случайными величинами  $X$  и  $Y$ ,  $X$  и  $Z$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно. Известно



[1], что в трехмерном нормальном распределении при истинности гипотезы  $H^{\text{Partial}} : \rho^{XY \cdot Z} = 0$  статистика

$$T^{\text{Partial}} = \sqrt{n-3} \frac{r^{XY \cdot Z}}{\sqrt{1 - (r^{XY \cdot Z})^2}}$$

имеет распределение Стюдента с  $n-3$  степенями свободы, где  $n$  – количество наблюдений. Тогда тест уровня  $\alpha$  проверки гипотезы  $H^{\text{Partial}} : \rho^{XY \cdot Z} = 0$  против альтернативы  $K^{\text{Partial}} : \rho^{XY \cdot Z} \neq 0$  определяется как:

$$\varphi^{\text{Partial}}(t) = \begin{cases} 1, & |t| > C \\ 0, & |t| \leq C \end{cases}$$

где константа  $C$  удовлетворяет уравнению  $P(T^{\text{Partial}} > C) = 1 - \alpha/2$ . В разделе 2.2 с помощью численных экспериментов будет проверено контролирует ли тест  $\varphi^{\text{Partial}}$  уровень значимости для гипотезы  $H^{\text{Partial}} : \rho^{XY \cdot Z} = 0$  в трехмерном распределении Бернулли.

### 1.3 РНМН тест проверки необходимого условия условной независимости

Запишем вид трехмерного распределения Бернулли в экспоненциальной форме:

$$\begin{aligned} P(X = x, Y = y, Z = z) &= p_{000}^{(1-x)(1-y)(1-z)} \dots p_{111}^{xyz} = \\ &= \exp \left\{ \ln(p_{000}) + \ln \left( \frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}} \right) xyz + \ln \left( \frac{p_{100}}{p_{000}} \right) x + \ln \left( \frac{p_{010}}{p_{000}} \right) y + \right. \\ &\quad \left. + \ln \left( \frac{p_{001}}{p_{000}} \right) z + \ln \left( \frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}} \right) xy + \ln \left( \frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}} \right) xz + \ln \left( \frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}} \right) yz \right\} \end{aligned}$$

Среди параметров, стоящих при статистиках  $xyz, x, y, z, xy, xz, yz$ , выделим параметр, связанный с условной независимостью.

**Теорема 1.3.1.** Пусть  $(X, Y, Z)^T$  – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли, и  $\theta = \ln \left( \frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}} \right)$ . Если выполнено одно из условий:

- $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$

- $X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$
- $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X$

то параметр  $\theta$  принимает значение 0.

*Доказательство.* Результаты теор. 1.1.1 можно обобщить следующим образом:

$$X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y \Leftrightarrow p_{000}p_{101} = p_{001}p_{100} \text{ и } p_{010}p_{111} = p_{011}p_{110}$$

$$Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X \Leftrightarrow p_{000}p_{011} = p_{001}p_{010} \text{ и } p_{100}p_{111} = p_{101}p_{110}$$

1. Пусть  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ , тогда по теор. 1.1.1 выполнено:  $p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100}$  и  $p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101}$ . Отсюда следует, что  $\theta = \ln(1) = 0$ .
2. Пусть  $X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$ , тогда из вышеприведенного  $p_{000}p_{101} = p_{001}p_{100}$  и  $p_{010}p_{111} = p_{011}p_{110}$ . Отсюда следует, что  $\theta = \ln(1) = 0$ .
3. Пусть  $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X$ , тогда из вышеприведенного  $p_{000}p_{011} = p_{001}p_{010}$  и  $p_{100}p_{111} = p_{101}p_{110}$ . Отсюда следует, что  $\theta = \ln(1) = 0$ .

□

Таким образом, нулевое значение параметра  $\theta$  является необходимым условием наличия условно независимой пары случайных величин в трехмерном распределении Бернулли. В частности, нулевое значение параметра  $\theta$  является необходимым условием  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ . Для проверки гипотезы о равенстве параметра  $\theta$  нулю используем теорию РНМН тестов [5] в многопараметрическом экспоненциальном семействе. Пусть

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

повторная выборка из распределения случайного вектора  $(X, Y, Z)^T$ . Совместное распределение повторной выборки имеет вид:

$$P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, Z_1 = z_1, \dots, X_n = x_n, Y_n = y_n, Z_n = z_n) =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i, Y_i = y_i, Z_i = z_i) = \\
&= \exp \left\{ \ln(p_{000})n + \ln \left( \frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}} \right) \sum_{i=1}^n x_i y_i z_i + \right. \\
&+ \ln \left( \frac{p_{100}}{p_{000}} \right) \sum_{i=1}^n x_i + \ln \left( \frac{p_{010}}{p_{000}} \right) \sum_{i=1}^n y_i + \ln \left( \frac{p_{001}}{p_{000}} \right) \sum_{i=1}^n z_i + \\
&\left. + \ln \left( \frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}} \right) \sum_{i=1}^n x_i y_i + \ln \left( \frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}} \right) \sum_{i=1}^n x_i z_i + \ln \left( \frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}} \right) \sum_{i=1}^n y_i z_i \right\}
\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i Z_i, \quad T_1 = \sum_{i=1}^n X_i Y_i, \quad T_2 = \sum_{i=1}^n X_i Z_i, \\
T_3 &= \sum_{i=1}^n Y_i Z_i, \quad T_4 = \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_5 = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad T_6 = \sum_{i=1}^n Z_i
\end{aligned}$$

Обозначим  $T = (T_1, \dots, T_6)$ ,  $t = (t_1, \dots, t_6)$ . Согласно [5] РНМН тест уровня  $\alpha$  проверки гипотезы  $H^{\text{Theta}} : \theta = 0$  против альтернативы  $K^{\text{Theta}} : \theta \neq 0$  имеет вид:

$$\varphi^{\text{Theta}}(u, t) = \begin{cases} 1, & u < C_1(t) \text{ или } u > C_2(t) \\ \gamma_i, & u = C_i(t), \quad i = 1, 2 \\ 0, & C_1(t) < u < C_2(t) \end{cases}$$

где константы  $C_i$  и  $\gamma_i$  определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} E_{\theta=0}[\varphi^{\text{Theta}}(U, T) \mid T = t] = \alpha \\ E_{\theta=0}[U \varphi^{\text{Theta}}(U, T) \mid T = t] = \alpha E_{\theta=0}[U \mid T = t] \end{cases}$$

Приведем распределение статистики  $U$  при условии  $T = t$ .

**Лемма 1.3.1.** Пусть  $k_1(u) = u$ ,  $k_2(u) = t_1 - u$ ,  $k_3(u) = t_2 - u$ ,  $k_4(u) = t_3 - u$ ,  $k_5(u) = t_4 - t_1 - t_2 + u$ ,  $k_6(u) = t_5 - t_1 - t_3 + u$ ,  $k_7(u) = t_6 - t_2 - t_3 + u$ ,  $k_8(u) = n - u + t_1 + t_2 + t_3 - t_4 - t_5 - t_6$ . Тогда

$$P_{\theta=0}(U = u \mid T = t) = \frac{(\prod_{i=1}^8 k_i(u)!)^{-1}}{\sum_{s \in \mathcal{D}} (\prod_{i=1}^8 k_i(s)!)^{-1}}$$

где  $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{Z} : 0 \leq k_i(s) \leq n \text{ для всех } i = 1 \dots, 8\}$ .

*Доказательство.* Найдем совместное распределение статистик  $(U, T_1, \dots, T_6)$ :

$$\begin{aligned}
 P(U = u, T = t) &= P(U = u, T_1 = t_1, T_2 = t_2, T_3 = t_3, T_4 = t_4, T_5 = t_5, T_6 = t_6) = \\
 &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i Z_i = u, \sum_{i=1}^n X_i Y_i = t_1, \sum_{i=1}^n X_i Z_i = t_2, \sum_{i=1}^n Y_i Z_i = t_3, \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i=1}^n X_i = t_4, \sum_{i=1}^n Y_i = t_5, \sum_{i=1}^n Z_i = t_6\right) = \\
 &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i Z_i = u, \sum_{i=1}^n X_i Y_i (1 - Z_i) = t_1 - u, \sum_{i=1}^n X_i (1 - Y_i) Z_i = t_2 - u, \right. \\
 &\quad \sum_{i=1}^n (1 - X_i) Y_i Z_i = t_3 - u, \sum_{i=1}^n X_i (1 - Y_i) (1 - Z_i) = t_4 - t_1 - t_2 + u, \\
 &\quad \sum_{i=1}^n (1 - X_i) Y_i (1 - Z_i) = t_5 - t_1 - t_3 + u, \sum_{i=1}^n (1 - X_i) (1 - Y_i) Z_i = t_6 - t_2 - t_3 + u, \\
 &\quad \left. \sum_{i=1}^n (1 - X_i) (1 - Y_i) (1 - Z_i) = n - u + t_1 + t_2 + t_3 - t_4 - t_5 - t_6\right) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^8 k_i(u)!} \times \\
 &\quad \times p_{111}^u p_{110}^{t_1-u} p_{101}^{t_2-u} p_{011}^{t_3-u} p_{100}^{t_4-t_1-t_2+u} p_{010}^{t_5-t_1-t_3+u} p_{001}^{t_6-t_2-t_3+u} p_{000}^{n-u+t_1+t_2+t_3-t_4-t_5-t_6}
 \end{aligned}$$

Тогда условное распределение статистики  $U$  при условии  $T = t$  можно записать как:

$$\begin{aligned}
 P(U = u \mid T = t) &= \frac{P(U = u, T = t)}{P(T = t)} = \frac{P(U = u, T = t)}{\sum_{s \in \mathcal{D}} P(U = s, T = t)} = \\
 &= \frac{(\prod_{i=1}^8 k_i(u)!)^{-1} \left( \frac{p_{001} p_{010} p_{100} p_{111}}{p_{000} p_{011} p_{101} p_{110}} \right)^u}{\sum_{s \in \mathcal{D}} (\prod_{i=1}^8 k_i(s)!)^{-1} \left( \frac{p_{001} p_{010} p_{100} p_{111}}{p_{000} p_{011} p_{101} p_{110}} \right)^s}
 \end{aligned}$$

При истинности гипотезы  $\theta = 0$  параметр  $\frac{p_{001} p_{010} p_{100} p_{111}}{p_{000} p_{011} p_{101} p_{110}} = 1$ . Следовательно:

$$P_{\theta=0}(U = u \mid T = t) = \frac{(\prod_{i=1}^8 k_i(u)!)^{-1}}{\sum_{s \in \mathcal{D}} (\prod_{i=1}^8 k_i(s)!)^{-1}}$$

□

Так как  $\varphi^{\text{Theta}}$  является РНМН тестом, и в частности несмещенным, уровня  $\alpha$  проверки гипотезы  $H^{\text{Theta}} : \theta = 0$ , и из  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  следует  $\theta = 0$ , то  $\varphi^{\text{Theta}}$  также является несмещенным тестом уровня  $\alpha$  проверки гипотезы  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ .

## 1.4 РНМН тест проверки независимости в условном распределении

Пусть  $(X, Y, Z)^T$  – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли. При фиксированном  $Z = z$ :

$$P(X = x, Y = y \mid Z = z) = \frac{p_{xyz}}{p_{00z} + p_{01z} + p_{10z} + p_{11z}} = q_{xy}$$

Приведем определение случайного вектора с двумерным распределением Бернулли [3].

**Определение 1.4.1.** *Случайный вектор  $(X, Y)^T$  имеет двумерное распределение Бернулли, если множество его возможных значений:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*и заданы  $P(X = x, Y = y) = q_{xy} \geq 0, \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^1 q_{xy} = 1$ .*

Таким образом,  $(X, Y)^T$  при условии  $Z = z$  имеет двумерное распределение Бернулли. Изложим теорию проверки независимости в двумерном распределении Бернулли, которая в разд. 1.5 будет использована для проверки условной независимости.

В работе [3] показано, что:

$$P(X = x, Y = y) = \exp \left\{ \ln(q_{00}) + \ln \left( \frac{q_{10}}{q_{00}} \right) x + \ln \left( \frac{q_{01}}{q_{00}} \right) y + \ln \left( \frac{q_{00}q_{11}}{q_{01}q_{10}} \right) xy \right\}$$

Также, в [3] доказано, что  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда

$$\theta = \ln \left( \frac{q_{00}q_{11}}{q_{01}q_{10}} \right) = 0$$

Пусть

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$$

повторная выборка из распределения случайного вектора  $(X, Y)^T$ . Тогда:

$$P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, \dots, X_n = x_n, Y_n = y_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i, Y_i = y_i) =$$

$$= \exp \left\{ \ln(q_{00})n + \ln \left( \frac{q_{10}}{q_{00}} \right) \sum_{i=1}^n x_i + \ln \left( \frac{q_{01}}{q_{00}} \right) \sum_{i=1}^n y_i + \ln \left( \frac{q_{00}q_{11}}{q_{01}q_{10}} \right) \sum_{i=1}^n x_i y_i \right\}$$

Пусть

$$U = \sum_{i=1}^n X_i Y_i, \quad T_1 = \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_2 = \sum_{i=1}^n Y_i$$

Обозначим  $T = (T_1, T_2)$ ,  $t = (t_1, t_2)$ . Согласно [5] РНМН тест уровня  $\alpha$  проверки гипотезы  $H^{\text{Independence}} : \theta = 0$  против альтернативы  $K^{\text{Independence}} : \theta \neq 0$  имеет вид:

$$\varphi^{\text{Independence}}(u, t) = \begin{cases} 1, & u < C_1(t) \text{ или } u > C_2(t) \\ \gamma_i, & u = C_i(t), \quad i = 1, 2 \\ 0, & C_1(t) < u < C_2(t) \end{cases}$$

где константы  $C_i$  и  $\gamma_i$  определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} E_{\theta=0}[\varphi^{\text{Independence}}(U, T) \mid T = t] = \alpha \\ E_{\theta=0}[U \varphi^{\text{Independence}}(U, T) \mid T = t] = \alpha E_{\theta=0}[U \mid T = t] \end{cases}$$

Приведем распределение статистики  $U$  при условии  $T = t$ .

**Лемма 1.4.1.** Пусть  $k_1(u) = u$ ,  $k_2(u) = t_1 - u$ ,  $k_3(u) = t_2 - u$ ,  $k_4(u) = n - t_1 - t_2 + u$ . Тогда

$$P_{\theta=0}(U = u \mid T = t) = \frac{(\prod_{i=1}^4 k_i(u)!)^{-1}}{\sum_{s \in \mathcal{D}} (\prod_{i=1}^4 k_i(s)!)^{-1}}$$

где  $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{Z} : 0 \leq k_i(s) \leq n \text{ для всех } i = 1, \dots, 4\}$ .

Доказательство лемм. 1.4.1 не приводится, поскольку оно полностью аналогично доказательству лемм. 1.3.1.

Стоит отметить, что  $\ln \left( \frac{q_{00}q_{11}}{q_{01}q_{10}} \right) = \ln \left( \frac{p_{00z}p_{11z}}{p_{01z}p_{10z}} \right)$ . Поэтому, проверяя гипотезу о параметре  $\ln \left( \frac{q_{00}q_{11}}{q_{01}q_{10}} \right)$  в условном распределении, мы проверяем гипотезу о параметре  $\ln \left( \frac{p_{00z}p_{11z}}{p_{01z}p_{10z}} \right)$  в трехмерном распределении Бернулли.

## 1.5 Проверка условной независимости по подвыборкам из условных распределений

Приведем трактовку опр. 1.1.2 для трехмерного распределения Бернулли.

**Определение 1.5.1.** В трехмерном распределении Бернулли случайные величины  $X$  и  $Y$  условно независимы при условии  $Z$ , если выполнены следующие условия:

- $X$  и  $Y$  независимы при условии  $Z = 0$
- $X$  и  $Y$  независимы при условии  $Z = 1$

Используя опр. 1.5.1, сформулируем индивидуальные гипотезы:

- $H_0$  :  $X$  и  $Y$  независимы при условии  $Z = 0$
- $H_1$  :  $X$  и  $Y$  независимы при условии  $Z = 1$

Тогда гипотеза об условной независимости имеет вид  $H = H_0 \cap H_1$ . Естественным образом, гипотезу  $H_0$  необходимо проверять по наблюдениям  $(x_i, y_i, z_i)^T$ , в которых  $z_i = 0$ . Поскольку  $(X, Y)^T$  при условии  $Z = z$  имеет двумерное распределение Бернулли, то в качестве теста для  $H_0$  можно использовать  $\varphi_0 = \varphi_0^{\text{Independence}}$ , приведенный в разд. 1.4. Аналогичные рассуждения справедливы и для гипотезы  $H_1$ . Учитывая озвученные соображения, построим тест проверки гипотезы  $H$ , контролирующий вероятность ошибки первого рода на уровне  $\alpha$ . Пусть

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

повторная выборка из распределения случайного вектора  $(X, Y, Z)^T$ . Обозначим  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$  и  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ . Покажем, что в условном распределении при  $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$  наблюдения

$$\Xi = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$$

являются независимыми.

**Лемма 1.5.1.**

$$\begin{aligned}
P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, \dots, X_n = x_n, Y_n = y_n \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \\
= \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i, Y_i = y_i \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z})
\end{aligned}$$

*Доказательство.* С одной стороны:

$$\begin{aligned}
P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, Z_1 = z_1, \dots, X_n = x_n, Y_n = y_n, Z_n = z_n) = \\
= P(\mathbf{Z} = \mathbf{z})P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, \dots, X_n = x_n, Y_n = y_n \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z})
\end{aligned}$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned}
P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, Z_1 = z_1, \dots, X_n = x_n, Y_n = y_n, Z_n = z_n) = \\
= \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i, Y_i = y_i, Z_i = z_i) = \\
= \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i, Y_i = y_i \mid Z_i = z_i)P(Z_i = z_i) = \\
= P(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i, Y_i = y_i \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z})
\end{aligned}$$

□

Пусть также  $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$  фиксированы. Разобьем выборку  $\Xi$  на две подвыборки  $\Xi_0$  и  $\Xi_1$ , такие что:

$$\Xi_0 = \left( \begin{matrix} X_{i_1} \\ Y_{i_1} \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} X_{i_2} \\ Y_{i_2} \end{matrix} \right), \dots, \left( \begin{matrix} X_{i_{n_0}} \\ Y_{i_{n_0}} \end{matrix} \right)$$

где  $Z_{i_k} = z_{i_k} = 0$  для всех  $i_k$  при  $k = \overline{1, n_0}$  и

$$\Xi_1 = \left( \begin{matrix} X_{j_1} \\ Y_{j_1} \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} X_{j_2} \\ Y_{j_2} \end{matrix} \right), \dots, \left( \begin{matrix} X_{j_{n_1}} \\ Y_{j_{n_1}} \end{matrix} \right)$$

где  $Z_{j_k} = z_{j_k} = 1$  для всех  $j_k$  при  $k = \overline{1, n_1}$ . Причем  $n = n_0 + n_1$ . Отметим, что разбиение  $\Xi = \Xi_0 \sqcup \Xi_1$  опреляется лишь набором  $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ .

Сформулируем следующую теорему.



**Теорема 1.5.1.** Пусть  $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$  – фиксированы. Тогда выборка  $\Xi_0$  является повторной выборкой из распределения  $(X, Y)^T$  при условии  $Z = 0$ .

*Доказательство.* По лемме 1.5.1:

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1, \dots, X_n = x_n, Y_n = y_n \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \\ = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i, Y_i = y_i \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \end{aligned}$$

Просуммировав обе части вышепредставленного равенства по всем возможным значениям  $x_{j_1}, y_{j_1}, \dots, x_{j_{n_1}}, y_{j_{n_1}}$  получаем:

$$\begin{aligned} P(X_{i_1} = x_{i_1}, Y_{i_1} = y_{i_1}, \dots, X_{i_{n_0}} = x_{i_{n_0}}, Y_{i_{n_0}} = y_{i_{n_0}} \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \\ = \prod_{k=1}^{n_0} P(X_{i_k} = x_{i_k}, Y_{i_k} = y_{i_k} \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z}) \end{aligned}$$

Значит

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} X_{i_1} \\ Y_{i_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{i_2} \\ Y_{i_2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_{i_{n_0}} \\ Y_{i_{n_0}} \end{pmatrix}$$

независимые наблюдения при условии  $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ .

Покажем, что  $(X_{i_k}, Y_{i_k})^T$  при условии  $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$  распределен также как и  $(X, Y)^T$  при условии  $Z = 0$ .

$$\begin{aligned} P(X_{i_k} = x_{i_k}, Y_{i_k} = y_{i_k} \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z}) &= P(X_{i_k} = x_{i_k}, Y_{i_k} = y_{i_k} \mid Z_{i_k} = z_{i_k}) = \\ &= P(X_{i_k} = x_{i_k}, Y_{i_k} = y_{i_k} \mid Z_{i_k} = 0) = P(X = x_{i_k}, Y = y_{i_k} \mid Z = 0) \end{aligned}$$

□

Аналогично показывается, что  $\Xi_1$  является повторной выборкой из распределения  $(X, Y)^T$  при условии  $Z = 1$ .

Сформулируем теорему.

**Теорема 1.5.2.** Пусть  $\Xi_0$  и  $\Xi_1$  – подвыборки, полученные разбиением случайной выборки  $\Xi$ . Пусть  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  – рандомизированные тесты проверки гипотез  $H_0$  и  $H_1$  по повторным выборкам  $\Xi_0$  и  $\Xi_1$  соответственно. Введем события:

$$A_0 = \{\text{отвергнуть гипотезу } H_0 \text{ рандомизированным тестом } \varphi_0\}$$

$A_1 = \{\text{отвергнуть гипотезу } H_1 \text{ рандомизированным тестом } \varphi_1\}$

Пусть  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  тесты уровня  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  при любом объеме наблюдений в подвыборках  $\Xi_0$  и  $\Xi_1$  соответственно, то есть:

$$P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0) = \alpha_0$$

$$P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_1) = \alpha_1$$

Тогда  $P_{H_0 \cap H_1}(A_0 \cap A_1) = P_{H_0 \cap H_1}(A_0)P_{H_0 \cap H_1}(A_1)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$  фиксировано. Обозначим через

$$T_0 = (X_{i_1}, Y_{i_1}, \dots, X_{i_{n_0}}, Y_{i_{n_0}})^T, \quad T_1 = (X_{j_1}, Y_{j_1}, \dots, X_{j_{n_1}}, Y_{j_{n_1}})^T$$

случайные векторы наблюдений, используемые в тестах  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  соответственно. Распишем следующую вероятность

$$\begin{aligned} P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0 \cap A_1) &= \\ &= \sum_{t_0} \sum_{t_1} P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0 \cap A_1 \mid T_0 = t_0, T_1 = t_1) P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_0 = t_0, T_1 = t_1) \end{aligned}$$

Отметим, что  $P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0 \cap A_1 \mid T_0 = t_0, T_1 = t_1) = \varphi_0(t_0)\varphi_1(t_1)$ , поскольку для того, чтобы при известных значениях статистик  $t_0$  и  $t_1$  отвергнуть гипотезы  $H_0$  и  $H_1$ , в рандомизированном тесте нужно провести два испытания с вероятностью успеха  $\varphi_0(t_0)$  и  $\varphi_1(t_1)$ . Постулируется, что такие испытания независимые. Тогда:

$$\begin{aligned} P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0 \cap A_1) &= \sum_{t_0} \sum_{t_1} \varphi_0(t_0)\varphi_1(t_1) P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_0 = t_0, T_1 = t_1) = \\ &= \sum_{t_0} \sum_{t_1} \varphi_0(t_0)\varphi_1(t_1) P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_0 = t_0) P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_1 = t_1) = \\ &= \sum_{t_0} \left[ \varphi_0(t_0) P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_0 = t_0) \left( \sum_{t_1} \varphi_1(t_1) P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_1 = t_1) \right) \right] = \\ &= \sum_{t_0} \varphi_0(t_0) P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(T_0 = t_0) \alpha_1 = \alpha_0 \alpha_1 \end{aligned}$$

По формуле полной вероятности:

$$P_{H_0 \cap H_1}(A_0) = \sum_{\mathbf{z}} P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0) P_{H_0 \cap H_1}(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{z}} \alpha_0 P_{H_0 \cap H_1}(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \alpha_0$$

Аналогично,  $P_{H_0 \cap H_1}(A_1) = \alpha_1$ . Также по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P_{H_0 \cap H_1}(A_0 \cap A_1) &= \sum_{\mathbf{z}} P_{H_0 \cap H_1, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0 \cap A_1) P_{H_0 \cap H_1}(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \\ &= \sum_{\mathbf{z}} \alpha_0 \alpha_1 P_{H_0 \cap H_1}(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \alpha_0 \alpha_1 \end{aligned}$$

Таким образом,  $P_{H_0 \cap H_1}(A_0 \cap A_1) = P_{H_0 \cap H_1}(A_0) P_{H_0 \cap H_1}(A_1) = \alpha_0 \alpha_1$ .  $\square$

Применим теор. 1.5.2 для проверки условной независимости в трехмерном распределении Бернулли. Положим индивидуальные гипотезы:

- $H_0$  :  $X$  и  $Y$  независимы при условии  $Z = 0$
- $H_1$  :  $X$  и  $Y$  независимы при условии  $Z = 1$

Для проверки гипотез  $H_0$  и  $H_1$  будем использовать тесты  $\varphi_0 = \varphi_0^{\text{Independence}}$  и  $\varphi_1 = \varphi_1^{\text{Independence}}$  уровня  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  по повторным выборкам  $\Xi_0$  и  $\Xi_1$  соответственно. Тогда гипотеза об условной независимости имеет вид  $H = H_0 \cap H_1$  и тест проверки условной независимости можно определить как:

$$\varphi^{\text{Subsamples}} = \begin{cases} 1, & \text{наступило событие } A_0 \cup A_1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пусть далее  $\alpha_0 = \alpha_1 = \gamma$ . Тогда

$$\begin{aligned} P_{H_0 \cap H_1}(\varphi^{\text{Subsamples}} = 1) &= P_{H_0 \cap H_1}(A_0 \cup A_1) = \\ &= P_{H_0 \cap H_1}(A_0) + P_{H_0 \cap H_1}(A_1) - P_{H_0 \cap H_1}(A_0 \cap A_1) = 2\gamma - \gamma^2 \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что для контроля  $P_{H_0 \cap H_1}(\varphi^{\text{Subsamples}} = 1) = \alpha$  достаточно положить уровень значимости  $\gamma = 1 - \sqrt{1 - \alpha}$  на тестах проверки индивидуальных гипотез  $H_0$  и  $H_1$ .

Покажем, что тест  $\varphi^{\text{Subsamples}}$  является несмещенным.

**Теорема 1.5.3.** Тест  $\varphi^{\text{Subsamples}}$  уровня  $\alpha$  проверки гипотезы  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  является несмещенным.

*Доказательство.* Положим  $\Theta_H = \{\theta : p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100} \text{ и } p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101}\}$ ,  $\Theta_K = \{\theta : p_{000}p_{110} \neq p_{010}p_{100} \text{ или } p_{001}p_{111} \neq p_{011}p_{101}\}$ .

Отметим, что  $\varphi_0 = \varphi_0^{\text{Independence}}$  и  $\varphi_1 = \varphi_1^{\text{Independence}}$  – несмещенные тесты проверки гипотез  $H_0$  и  $H_1$  уровня  $\gamma$  соответственно. Причем, при истинности гипотез  $H_0$  и  $H_1$  на тестах  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  вероятность ошибки первого рода в точности равна  $\gamma$ . Поэтому,  $E_\theta(\varphi_0) = P_\theta(A_0) \geq \gamma$  и  $E_\theta(\varphi_1) = P_\theta(A_1) \geq \gamma$  для любого  $\theta \in \Theta_H \cup \Theta_K$ .

Пусть  $\theta \in \Theta_H$ , тогда  $E_\theta(\varphi^{\text{Subsamples}}) = P_\theta(\varphi^{\text{Subsamples}} = 1) = \alpha$  поскольку  $\varphi^{\text{Subsamples}}$  тест уровня  $\alpha$ .

Пусть  $\theta \in \Theta_K$ . Как и в доказательстве теор. 1.5.2 можно показать, что  $P_{\theta, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0 \cap A_1) = P_{\theta, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0)P_{\theta, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_1)$ . Следовательно:

$$P_{\theta, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0 \cup A_1) = P_{\theta, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0) + P_{\theta, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_1) - P_{\theta, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0)P_{\theta, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_1) \geq \gamma + \gamma - \gamma^2 = \alpha$$

Тогда:

$$\begin{aligned} E_\theta(\varphi^{\text{Subsamples}}) &= P_\theta(\varphi^{\text{Subsamples}} = 1) = P_\theta(A_0 \cup A_1) = \\ &= \sum_{\mathbf{z}} P_{\theta, \mathbf{Z}=\mathbf{z}}(A_0 \cup A_1)P_\theta(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) \geq \sum_{\mathbf{z}} \alpha P_\theta(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \alpha \end{aligned}$$

□

## 2 Практическая часть

### 2.1 Способ вычисления вероятностей для РНМН теста на ЭВМ

Для нахождения порогов в РНМН тестах возникает необходимость подсчета вероятностей вида:

$$P_{\theta_0}(U = u \mid T = t) = \frac{(\prod_{i=1}^p k_i(u)!)^{-1}}{\sum_{s \in \mathcal{D}} (\prod_{i=1}^p k_i(s)!)^{-1}}$$

где  $\mathcal{D}$  – некая область допустимых значений,  $k_i(u) : \mathcal{D} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ ,  $i = \overline{1, p}$ . Основную проблему в этой формуле представляют факториалы, вычисление которых затруднительно на ЭВМ. Предложим методологию, которая поможет обойти эту проблему.

Пусть  $f(i) = \sum_{j=1}^i \ln(j)$ . Тогда  $\ln(n!) = f(n)$ . Учитывая это, запишем:

$$\begin{aligned} \frac{(\prod_{i=1}^p k_i(u)!)^{-1}}{\sum_{s \in \mathcal{D}} (\prod_{i=1}^p k_i(s)!)^{-1}} &= \frac{\exp\{-\ln(\prod_{i=1}^p k_i(u)!) \}}{\sum_{s \in \mathcal{D}} \exp\{-\ln(\prod_{i=1}^p k_i(s)!) \}} = \\ &= \frac{\exp\{-\sum_{i=1}^p f(k_i(u))\}}{\sum_{s \in \mathcal{D}} \exp\{-\sum_{i=1}^p f(k_i(s))\}} \end{aligned}$$

Полученное выражение удобно с позиции того, что мы ушли от вычисления факториалов и ЭВМ умеют эффективно считать функцию:

$$\text{softmax}(x, i) = \frac{\exp\{x_i\}}{\sum_{j=1}^N \exp\{x_j\}}, \quad x = (x_1, \dots, x_N)$$

Это происходит благодаря свойству:

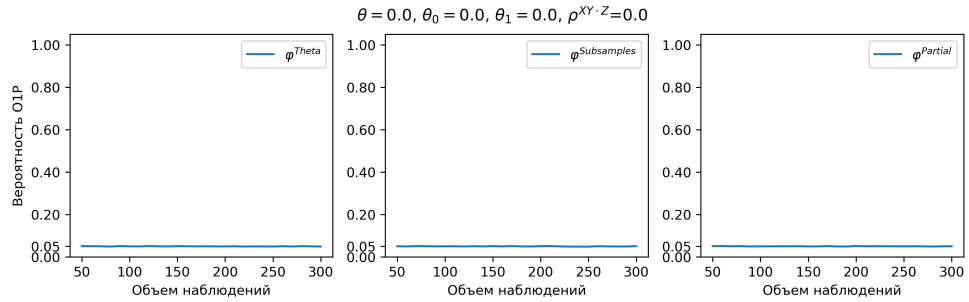
$$\text{softmax}(x, i) = \frac{\exp\{x_i\}}{\sum_{j=1}^N \exp\{x_j\}} = \frac{\exp\{x_i - C\}}{\sum_{j=1}^N \exp\{x_j - C\}}, \quad \text{где } C = \max_{1 \leq j \leq N} x_j$$

за счет которого удастся избежать переполнения вещественного типа данных, связанного с вычислением экспоненты.

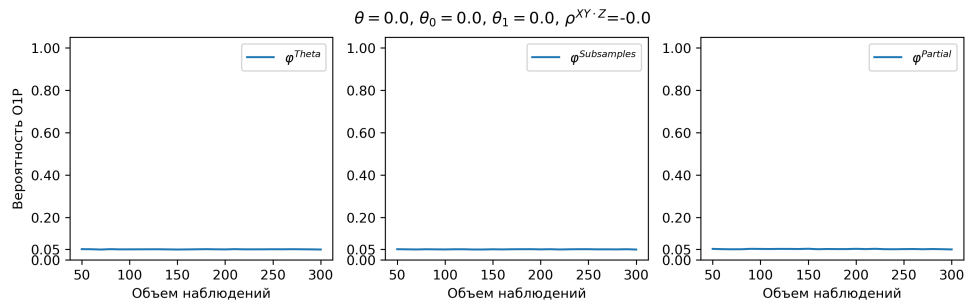
## 2.2 Сравнение тестов

Кратко напомним тесты, которые будут сравниваться.

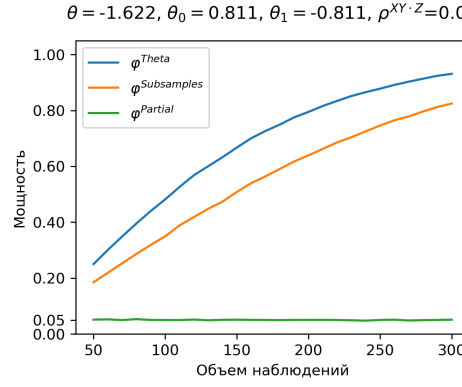
1.  $\varphi^{\text{Theta}}$  – РНМН тест уровня  $\alpha = 0.05$  проверки гипотезы  $H^{\text{Theta}} : \theta = 0$ , где  $\theta = \ln \left( \frac{p_{001}p_{111}p_{010}p_{100}}{p_{011}p_{101}p_{000}p_{110}} \right)$ . Поскольку из  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  следует  $\theta = 0$ , то  $\varphi^{\text{Theta}}$  также является несмещенным тестом уровня  $\alpha = 0.05$  проверки гипотезы  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ .
2.  $\varphi^{\text{Subsamples}}$  – несмещенный тест уровня  $\alpha = 0.05$  проверки гипотезы  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ . Гипотеза  $H$  отвергается, если РНМН-тестами уровня  $\gamma = 1 - \sqrt{1 - \alpha}$  отвергается хотя бы одна гипотеза  $H_z : \theta_z = 0$ , где  $\theta_z = \ln \left( \frac{p_{00z}p_{11z}}{p_{01z}p_{10z}} \right)$ . Напомним, что гипотеза  $H_z : \theta_z = 0$  проверяется по подвыборке из условного распределения  $(X, Y)^T$  при условии  $Z = z$ .
3.  $\varphi^{\text{Partial}}$  – точный тест уровня  $\alpha = 0.05$  проверки гипотезы  $H^{\text{Partial}} : \rho^{XY \cdot Z} = 0$  в трехмерном нормальном распределении.



**Рис. 1:** Графики зависимости вероятности ошибки 1 рода (O1P) от количества наблюдений,  $p_{000} = 0.125, p_{001} = 0.125, p_{010} = 0.125, p_{011} = 0.125, p_{100} = 0.125, p_{101} = 0.125, p_{110} = 0.125, p_{111} = 0.125$ . Гипотеза  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  верна. Вероятность оценивается по  $10^5$  экспериментам.



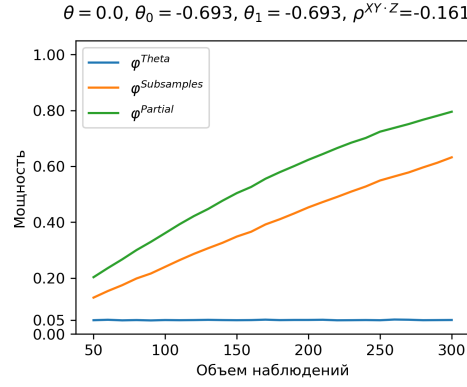
**Рис. 2:** Графики зависимости вероятности ошибки 1 рода (O1P) от количества наблюдений,  $p_{000} = 0.15, p_{001} = 0.1, p_{010} = 0.3, p_{011} = 0.1, p_{100} = 0.05, p_{101} = 0.1, p_{110} = 0.1, p_{111} = 0.1$ . Гипотеза  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  верна. Вероятность оценивается по  $10^5$  экспериментам.



**Рис. 3:** График зависимости мощности от количества наблюдений,  $p_{000} = 0.15, p_{001} = 0.1, p_{010} = 0.1, p_{011} = 0.15, p_{100} = 0.1, p_{101} = 0.15, p_{110} = 0.15, p_{111} = 0.1$ . Гипотеза  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  не верна, однако верна гипотеза  $H^{Partial} : \rho^{XY \cdot Z} = 0$ . Мощность оценивается по  $10^5$  экспериментам.

Из (рис. 1) и (рис. 2) видно, что для гипотезы  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  тесты  $\varphi^{Theta}$ ,  $\varphi^{Subsamples}$ , контролируют вероятность ошибки первого рода на уровне  $\alpha = 0.05$ . Этот результат полностью согласуется с теорией из разд. 1.3, разд. 1.5.

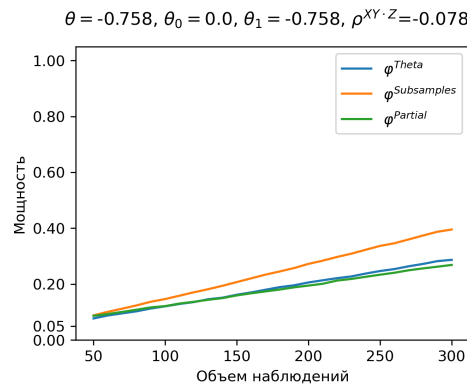
(рис. 1), (рис. 2), (рис. 3) показывают, что тест  $\varphi^{Partial}$  контролирует вероятность ошибки первого рода на уровне  $\alpha = 0.05$  для гипотезы  $H^{Partial} : \rho^{XY \cdot Z} = 0$  в трехмерном распределении Бернулли. Этот результат является неожиданным, поскольку тест  $\varphi^{Partial}$  теоретически обоснован лишь для трехмерного нормального распределения. Поскольку из  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  следует  $\rho^{XY \cdot Z} = 0$ , то тест  $\varphi^{Partial}$  также контролирует вероятность ошибки первого рода на уровне  $\alpha = 0.05$  и для гипотезы  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ , что показано на (рис. 1), (рис. 2). Однако, стоит отметить, что  $\varphi^{Partial}$  проверяет необходимое условие условной независимости. Поэтому может возникнуть ситуация как на (рис. 3), когда гипотеза  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  не верна, но тест  $\varphi^{Partial}$  не распознает отклонение от условной независимости, поскольку контролирует вероятность ошибки первого рода на уровне  $\alpha = 0.05$  для гипотезы  $H^{Partial} : \rho^{XY \cdot Z} = 0$ .



**Рис. 4:** График зависимости мощности от количества наблюдений,  $p_{000} = 0.15, p_{001} = 0.05, p_{010} = 0.3, p_{011} = 0.1, p_{100} = 0.1, p_{101} = 0.1, p_{110} = 0.1, p_{111} = 0.1$ . Гипотеза  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  не верна, однако верна гипотеза  $H^{Theta} : \theta = 0$ . Мощность оценивается по  $10^5$  экспериментам.

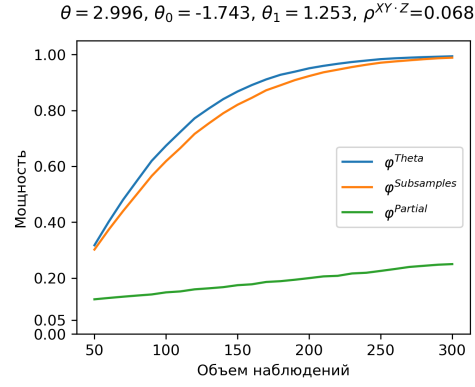
Напомним, что тест  $\varphi^{Theta}$  проверяет необходимое условие условной независимости. Так на (рис. 4) гипотеза  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  не верна, но тест  $\varphi^{Theta}$  не распознает отклонение от условной независимости и контролирует вероятность ошибки первого рода на уровне  $\alpha = 0.05$  для гипотезы  $H^{Theta} : \theta = 0$ .

Отметим, что  $\varphi^{Theta}$  – несмещенный тест уровня  $\alpha$  проверки гипотезы  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ . Так как по теор. 1.5.3 тест  $\varphi^{Subsamples}$  является несмещенным тестом уровня  $\alpha$  проверки гипотезы  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ , и на (рис. 4) тест  $\varphi^{Subsamples}$  мощнее теста  $\varphi^{Theta}$ , то тест  $\varphi^{Theta}$  не является РНМН тестом проверки гипотезы  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ , хотя является РНМН тестом проверки гипотезы  $H^{Theta} : \theta = 0$ .

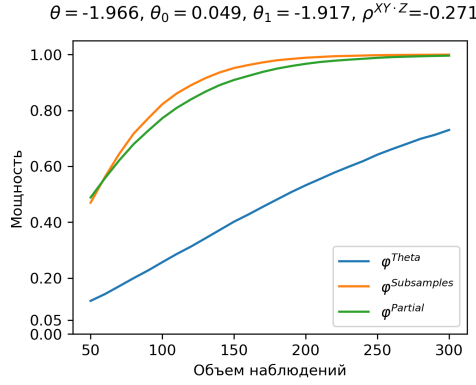


**Рис. 5:** График зависимости мощности от количества наблюдений,  $p_{000} = 0.15, p_{001} = 0.06, p_{010} = 0.3, p_{011} = 0.16, p_{100} = 0.05, p_{101} = 0.08, p_{110} = 0.1, p_{111} = 0.1$ . Гипотеза  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  не верна, однако  $X$  и  $Y$  независимы при условии  $Z = 0$ . Мощность оценивается по  $10^5$  экспериментам.





**Рис. 6:** График зависимости мощности от количества наблюдений,  $p_{000} = 0.03, p_{001} = 0.1, p_{010} = 0.04, p_{011} = 0.08, p_{100} = 0.3, p_{101} = 0.1, p_{110} = 0.07, p_{111} = 0.28$ . Гипотеза  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  не верна. Мощность оценивается по  $10^5$  экспериментам.



**Рис. 7:** График зависимости мощности от количества наблюдений,  $p_{000} = 0.21, p_{001} = 0.12, p_{010} = 0.04, p_{011} = 0.34, p_{100} = 0.1, p_{101} = 0.12, p_{110} = 0.02, p_{111} = 0.05$ . Гипотеза  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  не верна. Мощность оценивается по  $10^5$  экспериментам.

(рис. 3), (рис. 4), (рис. 5), (рис. 6), (рис. 7) показывают, что, вообще говоря, рассматриваемые тесты нельзя упорядочить по мощности. Кроме того, несмещенные тесты  $\varphi^{\text{Subsamples}}$  и  $\varphi^{\text{Theta}}$  уровня  $\alpha$  проверки гипотезы  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  также нельзя упорядочить по мощности. Поэтому вопрос построения РНМН теста проверки гипотезы  $H : X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  остается открытым.

## Список литературы

1. *Anderson T.* An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. — Wiley-Interscience, 2003.
2. *Cramér H.* Mathematical methods of statistics. — Princeton University Press, 1946.
3. *Dai B., Ding S., Wahba G.* Multivariate Bernoulli distribution // Bernoulli. — 2013. — Т. 19, № 4. — С. 1465—1483.
4. *Lauritzen S. L.* Graphical models. — Clarendon Press, 1996.
5. *Lehmann E. L.* Testing statistical hypotheses. — Wiley, 1986.
6. *Teugels J. L.* Some representations of the multivariate Bernoulli and binomial distributions // Journal of Multivariate Analysis. — 1990. — Т. 32, № 2. — С. 256—268.