1 Введение

Пусть $\{0,1\}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0,1\}\}$.

Определение 1.1. Случайный вектор $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ имеет трехмерное распределение Бернулли, если множество его возможных значений $\{0,1\}^3$ и заданы вероятности:

$$P(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k) = p_{ijk} \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} p_{ijk} = 1$$

Определение 1.2. Пусть $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ – дискретный случайный вектор. Говорят, что случайные величины X_1 и X_2 условно независимы при условии X_3, и пишут $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \mid X_3$, если для любых i, j и k, такого что $P(X_3 = k) > 0$, выполнено:

$$P(X_1 = i, X_2 = j \mid X_3 = k) = P(X_1 = i \mid X_3 = k)P(X_2 = j \mid X_3 = k)$$

Теорема 1.1. Пусть $(X_1, X_2, X_3)^T$ – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли, и $P(X_3 = 0) > 0$. Случайные величины X_1 и X_2 условно независимы при условии X_3 тогда и только тогда, когда $p_{00k}p_{11k} = p_{01k}p_{10k}$, где $k \in \{0,1\}$.

Доказательство. Пусть $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \mid X_3$. Значит, для любых $(i,j,k) \in \{0,1\}^3$ выполнено условие:

$$P(X_1 = i, X_2 = j \mid X_3 = k) = P(X_1 = i \mid X_3 = k)P(X_2 = j \mid X_3 = k) \qquad (1)$$

Найдем маргинальное распределение случайной величины X_3:

$$P(X_3 = k) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} p_{ijk} = p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}$$

Найдем маргинальные распределения $(X_1, X_3)^T$ и $(X_2, X_3)^T$:

$$P(X_1 = i, X_3 = k) = \sum_{j=0}^{1} p_{ijk} = p_{i0k} + p_{i1k}$$

$$P(X_2 = j, X_3 = k) = \sum_{i=0}^{1} p_{ijk} = p_{0jk} + p_{1jk}$$

Запишем условные вероятности из условия 1:

$$P(X_1 = i, X_2 = j \mid X_3 = k) = \frac{P(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k)}{P(X_3 = k)} = \frac{p_{ijk}}{p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}}$$

$$P(X_1 = i \mid X_3 = k) = \frac{P(X_1 = i, X_3 = k)}{P(X_3 = k)} = \frac{p_{i0k} + p_{i1k}}{p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}}$$

$$P(X_2 = j \mid X_3 = k) = \frac{P(X_2 = j, X_3 = k)}{P(X_3 = k)} = \frac{p_{0jk} + p_{1jk}}{p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}}$$

Тогда условие 1 можно переписать в следующем виде:

$$\frac{p_{ijk}}{p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}} = \frac{p_{i0k} + p_{i1k}}{p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}} \frac{p_{0jk} + p_{1jk}}{p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}}$$

$$p_{ijk}(p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}) = (p_{i0k} + p_{i1k})(p_{0jk} + p_{1jk})$$

Это условие выполняется для всех $(i, j, k) \in \{0, 1\}^3$. Пусть $k \in \{0, 1\}$ фиксировано. Если $i = 0$ и $j = 0$, то:

$$p_{00k}(p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}) = (p_{00k} + p_{01k})(p_{00k} + p_{10k})$$

$$p_{00k}p_{00k} + p_{00k}p_{01k} + p_{00k}p_{10k} + p_{00k}p_{11k} = p_{00k}p_{00k} + p_{00k}p_{10k} + p_{01k}p_{00k} + p_{01k}p_{10k}$$

$$p_{00k}p_{11k} = p_{01k}p_{10k}$$

Если $i = 0$ и $j = 1$, то:

$$p_{01k}(p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}) = (p_{00k} + p_{01k})(p_{01k} + p_{11k})$$

$$p_{01k}p_{00k} + p_{01k}p_{01k} + p_{01k}p_{10k} + p_{01k}p_{11k} = p_{00k}p_{01k} + p_{00k}p_{11k} + p_{01k}p_{01k} + p_{01k}p_{11k}$$

$$p_{01k}p_{10k} = p_{00k}p_{11k}$$

Если $i = 1$ и $j = 0$, то:

$$p_{10k}(p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}) = (p_{10k} + p_{11k})(p_{00k} + p_{10k})$$

$$p_{10k}p_{00k} + p_{10k}p_{01k} + p_{10k}p_{10k} + p_{10k}p_{11k} = p_{10k}p_{00k} + p_{10k}p_{10k} + p_{11k}p_{00k} + p_{11k}p_{10k}$$

$$p_{10k}p_{01k} = p_{11k}p_{00k}$$

Если $i = 1$ и $j = 1$, то:

$$p_{11k}(p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}) = (p_{10k} + p_{11k})(p_{01k} + p_{11k})$$

$$p_{11k}p_{00k} + p_{11k}p_{01k} + p_{11k}p_{10k} + p_{11k}p_{11k} = p_{10k}p_{01k} + p_{10k}p_{11k} + p_{11k}p_{01k} + p_{11k}p_{11k}$$

$$p_{11k}p_{00k} = p_{10k}p_{01k}$$

Таким образом, при $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ и фиксированном $k \in \{0, 1\}$ из условия 1 следует:

$$p_{00k}p_{11k} = p_{01k}p_{10k}$$

Поскольку в вышеприведенных рассуждениях все операции обратимые, то доказательство в обратную сторону проводится аналогично. □

Пример 1.1. Пусть (X_1, X_2, X_3) имеет трехмерное распределение Бернулли с вероятностями $p_{000} = 0.15$, $p_{001} = 0.1$, $p_{010} = 0.3$, $p_{011} = 0.1$, $p_{100} = 0.05$, $p_{101} = 0.1$, $p_{110} = 0.1$, $p_{111} = 0.1$. Заметим, что:

$$p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100} = 0.015$$

$$p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101} = 0.01$$

Значит из теоремы 1.1 следует, что $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \mid X_3$.

2 Частный коэффициент корреляции Пирсона

Для удобства введем следующие обозначения:

$$p_{i**} = P(X_1 = i), \quad p_{*j*} = P(X_2 = j), \quad p_{**k} = P(X_3 = k)$$

$$p_{ij*} = P(X_1 = i, X_2 = j), \quad p_{i*k} = P(X_1 = i, X_3 = k), \quad p_{*jk} = P(X_2 = j, X_3 = k)$$

Далее символом Σ будем обозначать ковариационную матрицу:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что $\sigma_{11} = D(X_1) = p_{1**}(1 - p_{1**})$.

Лемма 2.1.

$$\sigma_{12} = \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = p_{11*} - p_{1**}p_{*1*}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$.

$$E(X_1X_2) = 1 \cdot p_{11*} + 0 \cdot (p_{00*} + p_{01*} + p_{10*}) = p_{11*}$$

$$EX_1 = 1 \cdot p_{1**} + 0 \cdot p_{0**} = p_{1**}$$

$$EX_2 = 1 \cdot p_{*1*} + 0 \cdot p_{*0*} = p_{*1*}$$

Таким образом, $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = p_{11*} - p_{1**}p_{*1*}$. □

Частный коэффициент корреляции Пирсона определяется через элементы обратной ковариационной матрицы Σ^{-1}:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{pmatrix}$$

Из линейной алгебры известно, что элемент σ^{12} матрицы Σ^{-1} выражается через соотношение $\sigma^{12} = \frac{(-1)^{2+1}}{\det(\Sigma)} M_{21}$, где

$$M_{21} = \det \begin{pmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Лемма 2.2.

$$M_{21} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100})$$

Доказательство.

$$M_{21} = \det \begin{pmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = (p_{11*} - p_{1**}p_{*1*})p_{**1}(1 - p_{**1}) - (p_{1*1} - p_{1**}p_{**1})(p_{*11} - p_{*1*}p_{**1}) =$$

Раскроем скобки:

$$= p_{11*}p_{**1} - p_{11*}p_{**1}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*}p_{**1} + p_{1**}p_{*1*}p_{**1}p_{**1} -$$

$$- p_{1*1}p_{*11} + p_{1*1}p_{*1*}p_{**1} + p_{1**}p_{**1}p_{*11} - p_{1**}p_{**1}p_{*1*}p_{**1} =$$

Сократим 4-е и 8-е слагаемые. Распишем 1-е слагаемое как сумму вероятностей:

$$= (p_{111}p_{**1} + p_{110}p_{**1}) - p_{11*}p_{**1}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11} + p_{1*1}p_{*1*}p_{**1} + p_{1**}p_{**1}p_{*11} =$$

Перегруппируем слагаемые.

$$= (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110} - p_{11*}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*} + p_{1*1}p_{*1*} + p_{1**}p_{*11})$$

Заметим, что:

$$p_{110} - p_{11*}p_{**1} = p_{110} - p_{110}p_{**1} - p_{111}p_{**1} = p_{110}(1 - p_{**1}) - p_{111}p_{**1} = p_{110}p_{**0} - p_{111}p_{**1}$$

Также заметим, что:

$$-p_{1**}p_{*1*} + p_{1*1}p_{*1*} + p_{1**}p_{*11} =$$
$$= -(p_{1*0} + p_{1*1})(p_{*10} + p_{*11}) + p_{1*1}(p_{*10} + p_{*11}) + (p_{1*0} + p_{1*1})p_{*11} =$$
$$= -p_{1*0}p_{*10} - p_{1*0}p_{*11} - p_{1*1}p_{*10} - p_{1*1}p_{*11} + p_{1*1}p_{*10} + p_{1*1}p_{*11} + p_{1*0}p_{*11} + p_{1*1}p_{*11} =$$
$$= -p_{1*0}p_{*10} + p_{1*1}p_{*11}$$

Запишем выражение для M_{21}:

$$M_{21} = (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}((p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) - (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11})) =$$
$$= (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) - p_{**1}(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) =$$
$$= (1 - p_{**1})(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) =$$
$$= p_{**0}(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10})$$

Преобразуем выражение:

$$p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11} = p_{111}(p_{001} + p_{011} + p_{101} + p_{111}) - (p_{101} + p_{111})(p_{011} + p_{111}) =$$
$$= p_{111}p_{001} + p_{111}p_{011} + p_{111}p_{101} + p_{111}p_{111} - p_{101}p_{011} - p_{101}p_{111} - p_{111}p_{011} - p_{111}p_{111} =$$
$$= p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}$$

Аналогично преобразуем выражение:

$$p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10} = p_{110}(p_{000} + p_{010} + p_{100} + p_{110}) - (p_{100} + p_{110})(p_{010} + p_{110}) =$$
$$= p_{110}p_{000} + p_{110}p_{010} + p_{110}p_{100} + p_{110}p_{110} - p_{100}p_{010} - p_{100}p_{110} - p_{110}p_{010} - p_{110}p_{110} =$$
$$= p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}$$

Таким образом:

$$M_{21} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100})$$

$\square$

Теорема 2.1. Пусть X_1 и X_2 условно независимы при условии X_3. Тогда $\sigma^{12} = 0$.

Доказательство. Пусть X_1 и X_2 условно независимы при условии X_3. Тогда по теореме 1.1:

$$p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100}$$

$$p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101}$$

Используя вышеприведенные соотношения, имеем:

$$M_{21} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}) = p_{**0} \cdot 0 + p_{**1} \cdot 0 = 0$$

Из $M_{21} = 0$ непосредственно следует, что $\sigma^{12} = 0$. □

В обратную сторону теорема 2.1 неверна. Легко построить контрпример при $p_{**0} = 0$. Мы же покажем контрпример в невырожденном случае.

Пример 2.1. Пусть $p_{000} = 0.15$, $p_{001} = 0.1$, $p_{010} = 0.1$, $p_{011} = 0.15$, $p_{100} = 0.1$, $p_{101} = 0.15$, $p_{110} = 0.15$, $p_{111} = 0.1$. Тогда $p_{**0} = 0.5$, $p_{**1} = 0.5$ и

$$M_{21} = p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}) + p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) =$$
$$= 0.5 \cdot (0.15 \cdot 0.15 - 0.1 \cdot 0.1) + 0.5 \cdot (0.1 \cdot 0.1 - 0.15 \cdot 0.15) = 0$$

Однако, случайные величины X_1 и X_2 условно зависимы при условии X_3 поскольку:

$$p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100} = 0.15 \cdot 0.15 - 0.1 \cdot 0.1 = 0.0125 \neq 0$$

$$p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101} = 0.1 \cdot 0.1 - 0.15 \cdot 0.15 = -0.0125 \neq 0$$