1 Введение

Пусть $\{0,1\}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{0,1\}\}$.

Определение 1.1. Случайный вектор $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ имеет трехмерное распределение Бернулли, если множество его возможных значений $\{0,1\}^3$ и заданы вероятности:

$$P(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k) = p_{ijk} \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} p_{ijk} = 1$$

Определение 1.2. Пусть $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ – дискретный случайный вектор. Говорят, что случайные величины X_1 и X_2 условно независимы при условии X_3, и пишут $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \mid X_3$, если для любых i, j и k, такого что $P(X_3 = k) > 0$, выполнено:

$$P(X_1 = i, X_2 = j \mid X_3 = k) = P(X_1 = i \mid X_3 = k)P(X_2 = j \mid X_3 = k)$$

Теорема 1.1. Пусть $(X_1, X_2, X_3)^T$ – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли, и $P(X_3 = 0) > 0$. Случайные величины X_1 и X_2 условно независимы при условии X_3 тогда и только тогда, когда $p_{00k}p_{11k} = p_{01k}p_{10k}$, где $k \in \{0,1\}$.

Доказательство. Пусть $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \mid X_3$. Значит, для любых $(i, j, k) \in \{0,1\}^3$ выполнено условие:

$$P(X_1 = i, X_2 = j \mid X_3 = k) = P(X_1 = i \mid X_3 = k)P(X_2 = j \mid X_3 = k) \tag{1}$$

Найдем маргинальное распределение случайной величины X_3:

$$P(X_3 = k) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} p_{ijk} = p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}$$

Найдем маргинальные распределения $(X_1, X_3)^T$ и $(X_2, X_3)^T$:

$$P(X_1 = i, X_3 = k) = \sum_{j=0}^{1} p_{ijk} = p_{i0k} + p_{i1k}$$

$$P(X_2 = j, X_3 = k) = \sum_{i=0}^{1} p_{ijk} = p_{0jk} + p_{1jk}$$

Запишем условные вероятности из условия 1:

$$P(X_1 = i, X_2 = j \mid X_3 = k) = \frac{P(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k)}{P(X_3 = k)} = \frac{p_{ijk}}{p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}}$$

$$P(X_1 = i \mid X_3 = k) = \frac{P(X_1 = i, X_3 = k)}{P(X_3 = k)} = \frac{p_{i0k} + p_{i1k}}{p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}}$$

$$P(X_2 = j \mid X_3 = k) = \frac{P(X_2 = j, X_3 = k)}{P(X_3 = k)} = \frac{p_{0jk} + p_{1jk}}{p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}}$$

Тогда условие 1 можно переписать в следующем виде:

$$\frac{p_{ijk}}{p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}} = \frac{p_{i0k} + p_{i1k}}{p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}} \frac{p_{0jk} + p_{1jk}}{p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}}$$

$$p_{ijk}(p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}) = (p_{i0k} + p_{i1k})(p_{0jk} + p_{1jk})$$

Это условие выполняется для всех $(i, j, k) \in \{0,1\}^3$. Пусть $k \in \{0,1\}$ фиксировано. Если $i = 0$ и $j = 0$, то:

$$p_{00k}(p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}) = (p_{00k} + p_{01k})(p_{00k} + p_{10k})$$

$$p_{00k}p_{00k} + p_{00k}p_{01k} + p_{00k}p_{10k} + p_{00k}p_{11k} = p_{00k}p_{00k} + p_{00k}p_{10k} + p_{01k}p_{00k} + p_{01k}p_{10k}$$

$$p_{00k}p_{11k} = p_{01k}p_{10k}$$

Если $i = 0$ и $j = 1$, то:

$$p_{01k}(p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}) = (p_{00k} + p_{01k})(p_{01k} + p_{11k})$$

$$p_{01k}p_{00k} + p_{01k}p_{01k} + p_{01k}p_{10k} + p_{01k}p_{11k} = p_{00k}p_{01k} + p_{00k}p_{11k} + p_{01k}p_{01k} + p_{01k}p_{11k}$$

$$p_{01k}p_{10k} = p_{00k}p_{11k}$$

Если $i = 1$ и $j = 0$, то:

$$p_{10k}(p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}) = (p_{10k} + p_{11k})(p_{00k} + p_{10k})$$

$$p_{10k}p_{00k} + p_{10k}p_{01k} + p_{10k}p_{10k} + p_{10k}p_{11k} = p_{10k}p_{00k} + p_{10k}p_{10k} + p_{11k}p_{00k} + p_{11k}p_{10k}$$

$$p_{10k}p_{01k} = p_{11k}p_{00k}$$

Если $i = 1$ и $j = 1$, то:

$$p_{11k}(p_{00k} + p_{01k} + p_{10k} + p_{11k}) = (p_{10k} + p_{11k})(p_{01k} + p_{11k})$$

$$p_{11k}p_{00k} + p_{11k}p_{01k} + p_{11k}p_{10k} + p_{11k}p_{11k} = p_{10k}p_{01k} + p_{10k}p_{11k} + p_{11k}p_{01k} + p_{11k}p_{11k}$$

$$p_{11k}p_{00k} = p_{10k}p_{01k}$$

Таким образом, при $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ и фиксированном $k \in \{0, 1\}$ из условия 1 следует:

$$p_{00k}p_{11k} = p_{01k}p_{10k}$$

Поскольку в вышеприведенных рассуждениях все операции обратимые, то доказательство в обратную сторону проводится аналогично. □

Пример 1.1. Пусть (X_1, X_2, X_3) имеет трехмерное распределение Бернулли с вероятностями $p_{000} = 0.15$, $p_{001} = 0.1$, $p_{010} = 0.3$, $p_{011} = 0.1$, $p_{100} = 0.05$, $p_{101} = 0.1$, $p_{110} = 0.1$, $p_{111} = 0.1$. Заметим, что:

$$p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100} = 0.015$$

$$p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101} = 0.01$$

Значит из теоремы 1.1 следует, что $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \mid X_3$.

2 Частный коэффициент корреляции Пирсона

Для удобства введем следующие обозначения:

$$p_{i**} = P(X_1 = i), \quad p_{*j*} = P(X_2 = j), \quad p_{**k} = P(X_3 = k)$$

$$p_{ij*} = P(X_1 = i, X_2 = j), \quad p_{i*k} = P(X_1 = i, X_3 = k), \quad p_{*jk} = P(X_2 = j, X_3 = k)$$

Далее символом Σ будем обозначать ковариационную матрицу:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что $\sigma_{11} = D(X_1) = p_{1**}(1 - p_{1**})$.

Лемма 2.1.

$$\sigma_{12} = \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = p_{11*} - p_{1**}p_{*1*}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$.

$$E(X_1X_2) = 1 \cdot p_{11*} + 0 \cdot (p_{00*} + p_{01*} + p_{10*}) = p_{11*}$$

$$EX_1 = 1 \cdot p_{1**} + 0 \cdot p_{0**} = p_{1**}$$

$$EX_2 = 1 \cdot p_{*1*} + 0 \cdot p_{*0*} = p_{*1*}$$

Таким образом, $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = p_{11*} - p_{1**}p_{*1*}$. □

Частный коэффициент корреляции Пирсона определяется через элементы обратной ковариационной матрицы Σ^{-1}:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{pmatrix}$$

Из линейной алгебры известно, что элемент σ^{12} матрицы Σ^{-1} выражается через соотношение $\sigma^{12} = \frac{(-1)^{2+1}}{\det(\Sigma)} M_{21}$, где

$$M_{21} = \det \begin{pmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Лемма 2.2.

$$M_{21} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100})$$

Доказательство.

$$M_{21} = \det \begin{pmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = (p_{11*} - p_{1**}p_{*1*})p_{**1}(1 - p_{**1}) - (p_{1*1} - p_{1**}p_{**1})(p_{*11} - p_{*1*}p_{**1}) =$$

Раскроем скобки:

$$= p_{11*}p_{**1} - p_{11*}p_{**1}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*}p_{**1} + p_{1**}p_{*1*}p_{**1}p_{**1} -$$
$$- p_{1*1}p_{*11} + p_{1*1}p_{*1*}p_{**1} + p_{1**}p_{**1}p_{*11} - p_{1**}p_{**1}p_{*1*}p_{**1} =$$

Сократим 4-е и 8-е слагаемые. Распишем 1-е слагаемое как сумму вероятностей:

$$= (p_{111}p_{**1} + p_{110}p_{**1}) - p_{11*}p_{**1}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11} + p_{1*1}p_{*1*}p_{**1} + p_{1**}p_{**1}p_{*11} =$$

Перегруппируем слагаемые.

$$= (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110} - p_{11*}p_{**1} - p_{1**}p_{*1*} + p_{1*1}p_{*1*} + p_{1**}p_{*11})$$

Заметим, что:

$$p_{110} - p_{11*}p_{**1} = p_{110} - p_{110}p_{**1} - p_{111}p_{**1} = p_{110}(1 - p_{**1}) - p_{111}p_{**1} = p_{110}p_{**0} - p_{111}p_{**1}$$

Также заметим, что:

$$-p_{1**}p_{*1*} + p_{1*1}p_{*1*} + p_{1**}p_{*11} =$$
$$= -(p_{1*0} + p_{1*1})(p_{*10} + p_{*11}) + p_{1*1}(p_{*10} + p_{*11}) + (p_{1*0} + p_{1*1})p_{*11} =$$
$$= -p_{1*0}p_{*10} - p_{1*0}p_{*11} - p_{1*1}p_{*10} - p_{1*1}p_{*11} + p_{1*1}p_{*10} + p_{1*1}p_{*11} + p_{1*0}p_{*11} + p_{1*1}p_{*11} =$$
$$= -p_{1*0}p_{*10} + p_{1*1}p_{*11}$$

Запишем выражение для M_{21}:

$$M_{21} = (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}((p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) - (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11})) =$$
$$= (p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) - p_{**1}(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) =$$
$$= (1 - p_{**1})(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10}) =$$
$$= p_{**0}(p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11}) + p_{**1}(p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10})$$

Преобразуем выражение:

$$p_{111}p_{**1} - p_{1*1}p_{*11} = p_{111}(p_{001} + p_{011} + p_{101} + p_{111}) - (p_{101} + p_{111})(p_{011} + p_{111}) =$$
$$= p_{111}p_{001} + p_{111}p_{011} + p_{111}p_{101} + p_{111}p_{111} - p_{101}p_{011} - p_{101}p_{111} - p_{111}p_{011} - p_{111}p_{111} =$$
$$= p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}$$

Аналогично преобразуем выражение:

$$p_{110}p_{**0} - p_{1*0}p_{*10} = p_{110}(p_{000} + p_{010} + p_{100} + p_{110}) - (p_{100} + p_{110})(p_{010} + p_{110}) =$$
$$= p_{110}p_{000} + p_{110}p_{010} + p_{110}p_{100} + p_{110}p_{110} - p_{100}p_{010} - p_{100}p_{110} - p_{110}p_{010} - p_{110}p_{110} =$$
$$= p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}$$

Таким образом:

$$M_{21} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100})$$

□

Теорема 2.1. Пусть X_1 и X_2 условно независимы при условии X_3. Тогда $\sigma^{12} = 0$.

Доказательство. Пусть X_1 и X_2 условно независимы при условии X_3. Тогда по теореме 1.1:

$$p_{000}p_{110} = p_{010}p_{100}$$

$$p_{001}p_{111} = p_{011}p_{101}$$

Используя вышеприведенные соотношения, имеем:

$$M_{21} = p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) + p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}) = p_{**0} \cdot 0 + p_{**1} \cdot 0 = 0$$

Из $M_{21} = 0$ непосредственно следует, что $\sigma^{12} = 0$. □

В обратную сторону теорема 2.1 неверна. Легко построить контрпример при $p_{**0} = 0$. Мы же покажем контрпример в невырожденном случае.

Пример 2.1. Пусть $p_{000} = 0.15$, $p_{001} = 0.1$, $p_{010} = 0.1$, $p_{011} = 0.15$, $p_{100} = 0.1$, $p_{101} = 0.15$, $p_{110} = 0.15$, $p_{111} = 0.1$. Тогда $p_{**0} = 0.5$, $p_{**1} = 0.5$ и

$$M_{21} = p_{**1}(p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100}) + p_{**0}(p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101}) =$$
$$= 0.5 \cdot (0.15 \cdot 0.15 - 0.1 \cdot 0.1) + 0.5 \cdot (0.1 \cdot 0.1 - 0.15 \cdot 0.15) = 0$$

Однако, случайные величины X_1 и X_2 условно зависимы при условии X_3 поскольку:

$$p_{000}p_{110} - p_{010}p_{100} = 0.15 \cdot 0.15 - 0.1 \cdot 0.1 = 0.0125 \neq 0$$

$$p_{001}p_{111} - p_{011}p_{101} = 0.1 \cdot 0.1 - 0.15 \cdot 0.15 = -0.0125 \neq 0$$

3 Равномерно наиболее мощный тест

Пусть $(X, Y, Z)^T$ – случайный вектор, имеющий трехмерное распределение Бернулли. Запишем данное распределение в экспоненциальном виде:

$$p(x_i, y_i, z_i) = P(X = x_i, Y = y_i, Z = z_i) = p_{000}^{(1-x_i)(1-y_i)(1-z_i)} p_{001}^{(1-x_i)(1-y_i)z_i} \ldots p_{111}^{x_i y_i z_i} =$$
$$= \exp\{(1-x_i)(1-y_i)(1-z_i)\ln p_{000} + (1-x_i)(1-y_i)z_i \ln p_{001} + \ldots + x_i y_i z_i \ln p_{111}\}$$

Пусть $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ – повторная выборка из распределения случайного вектора $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. Плотность совместного распределения повторной выборки имеет вид $p(x, y, z) = \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i, z_i)$.

Лемма 3.1.

$$p(x,y,z) = \exp\left\{n \ln p_{000}\right\} \exp\left\{\ln\left(\frac{p_{001}p_{111}}{p_{011}p_{101}} \frac{p_{010}p_{100}}{p_{000}p_{110}}\right) \sum_{i=1}^n x_i y_i z_i + \ln\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right) \sum_{i=1}^n x_i + \ln\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right) \sum_{i=1}^n y_i + \right.$$
$$\left. + \ln\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right) \sum_{i=1}^n z_i + \ln\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right) \sum_{i=1}^n x_i y_i + \ln\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right) \sum_{i=1}^n x_i z_i + \ln\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right) \sum_{i=1}^n y_i z_i \right\}$$

Доказательство.

$$p(x,y,z) = \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i, z_i) = \prod_{i=1}^n \exp\{(1-x_i)(1-y_i)(1-z_i)\ln p_{000} + (1-x_i)(1-y_i)z_i \ln p_{001} + \ldots + x_i y_i z_i \ln p_{111}\} =$$

$$= \exp\left\{\ln p_{000} \sum_{i=1}^n (1-x_i)(1-y_i)(1-z_i) + \ln p_{001} \sum_{i=1}^n (1-x_i)(1-y_i)z_i + \ln p_{010} \sum_{i=1}^n (1-x_i)y_i(1-z_i) + \right.$$

$$+\ln p_{011}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)y_iz_i+\ln p_{100}\sum_{i=1}^{n}x_i(1-y_i)(1-z_i)+\ln p_{101}\sum_{i=1}^{n}x_i(1-y_i)z_i+\ln p_{110}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i(1-z_i)+\ln p_{111}\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i\Bigg\}=$$

$$=\exp\Bigg\{\ln p_{000}\left(\sum_{i=1}^{n}1-\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}z_i+\sum_{i=1}^{n}y_iz_i+\sum_{i=1}^{n}x_iz_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i\right)+$$

$$+\ln p_{001}\left(\sum_{i=1}^{n}z_i-\sum_{i=1}^{n}y_iz_i-\sum_{i=1}^{n}x_iz_i+\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i\right)+\ln p_{010}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}y_iz_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i\right)+$$

$$+\ln p_{011}\left(\sum_{i=1}^{n}y_iz_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i\right)+\ln p_{100}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iz_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i\right)+\ln p_{101}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iz_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i\right)+$$

$$+\ln p_{110}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i\right)+\ln p_{111}\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i\Bigg\}=$$

$$=\exp\Bigg\{n\ln p_{000}\Bigg\}\exp\Bigg\{\ln\left(\frac{p_{001}p_{111}}{p_{011}p_{101}}\frac{p_{010}p_{100}}{p_{000}p_{110}}\right)\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i+\ln\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i+\ln\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right)\sum_{i=1}^{n}y_i+$$

$$+\ln\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right)\sum_{i=1}^{n}z_i+\ln\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right)\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\ln\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right)\sum_{i=1}^{n}x_iz_i+\ln\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)\sum_{i=1}^{n}y_iz_i\Bigg\}$$

□

Пусть $\theta=\ln\left(\frac{p_{001}p_{111}}{p_{011}p_{101}}\right)$. Можно проверить, что если выполнено одно из условий:

- $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \mid X_3$
- $X_1 \perp\!\!\!\perp X_3 \mid X_2$
- $X_2 \perp\!\!\!\perp X_3 \mid X_1$

то параметр θ примет значение $\theta_0=0$ (а в обратную сторону?). В тесте структуры Неймана для проверки гипотезы для проверки гипотезы $H:\theta=\theta_0$ против альтернативы $K:\theta\neq\theta_0$ используются следующие статистики:

$$U=\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i, T_1=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i, T_2=\sum_{i=1}^{n}x_iz_i, T_3=\sum_{i=1}^{n}y_iz_i, T_4=\sum_{i=1}^{n}x_i, T_5=\sum_{i=1}^{n}y_i, T_6=\sum_{i=1}^{n}z_i$$

Для построения теста необходимо найти распределение:

$$P(U=u\mid T_1=t_1,T_2=t_2,T_3=t_3,T_4=t_4,T_5=t_5,T_6=t_6)$$

Найдем совместное распределение вектора $(U,T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6)$.

Лемма 3.2.

$$P(U=u,T_1=t_1,T_2=t_2,T_3=t_3,T_4=t_4,T_5=t_5,T_6=t_6)=$$

$$=M(u)\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^{u}\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right)^{t_1}\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right)^{t_2}\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)^{t_3}\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right)^{t_4}\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right)^{t_5}\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right)^{t_6}p_{000}^{n}$$

где

$$M(u)=\frac{n!}{u!(t_1-u)!(t_2-u)!(t_3-u)!(t_4-t_1-t_2+u)!(t_5-t_1-t_3+u)!(t_6-t_2-t_3+u)!(n-u+t_1+t_2+t_3-t_4-t_5-t_6)!}$$

Доказательство.

$$P(U=u,T_1=t_1,T_2=t_2,T_3=t_3,T_4=t_4,T_5=t_5,T_6=t_6)=$$

$$=P\Big[\sum_{i=1}^n x_iy_iz_i=u,\sum_{i=1}^n x_iy_i=t_1,\sum_{i=1}^n x_iz_i=t_2,\sum_{i=1}^n y_iz_i=t_3,\sum_{i=1}^n x_i=t_4,\sum_{i=1}^n y_i=t_5,\sum_{i=1}^n z_i=t_6\Big]=$$

$$=P\Big[\sum_{i=1}^n x_iy_iz_i=u,\sum_{i=1}^n x_iy_i(1-z_i)=t_1-u,\sum_{i=1}^n x_i(1-y_i)z_i=t_2-u,\sum_{i=1}^n(1-x_i)y_iz_i=t_3-u,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i(1-y_i)(1-z_i)=t_4-t_1-t_2+u,\sum_{i=1}^n(1-x_i)y_i(1-z_i)=t_5-t_1-t_3+u,$$

$$\sum_{i=1}^n(1-x_i)(1-y_i)z_i=t_6-t_2-t_3+u,\sum_{i=1}^n(1-x_i)(1-y_i)(1-z_i)=n-l+t_1+t_2+t_3-t_4-t_5-t_6)\Big]=$$

$$=M(u)p_{111}^u p_{110}^{t_1-u}p_{101}^{t_2-u}p_{011}^{t_3-u}p_{100}^{t_4-t_1-t_2+u}p_{010}^{t_5-t_1-t_3+u}p_{001}^{t_6-t_2-t_3+u}p_{000}^{n-u+t_1+t_2+t_3-t_4-t_5-t_6}=$$

$$=M(u)\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^u\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right)^{t_1}\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right)^{t_2}\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)^{t_3}\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right)^{t_4}\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right)^{t_5}\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right)^{t_6}p_{000}^n$$

□

Лемма 3.3.

$$P_{\theta_0}(U=u\mid T_1=t_1,T_2=t_2,T_3=t_3,T_4=t_4,T_5=t_5,T_6=t_6)=\frac{M(u)}{\sum_s M(s)}$$

Доказательство.

$$P(T_1=t_1,T_2=t_2,T_3=t_3,T_4=t_4,T_5=t_5,T_6=t_6)=$$

$$=\sum_s M(s)\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^s\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right)^{t_1}\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right)^{t_2}\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)^{t_3}\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right)^{t_4}\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right)^{t_5}\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right)^{t_6}p_{000}^n$$

$$P(U=u\mid T_1=t_1,T_2=t_2,T_3=t_3,T_4=t_4,T_5=t_5,T_6=t_6)=$$

$$=\frac{M(u)\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^u\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right)^{t_1}\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right)^{t_2}\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)^{t_3}\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right)^{t_4}\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right)^{t_5}\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right)^{t_6}p_{000}^n}{\sum_s M(s)\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^s\left(\frac{p_{000}p_{110}}{p_{010}p_{100}}\right)^{t_1}\left(\frac{p_{000}p_{101}}{p_{001}p_{100}}\right)^{t_2}\left(\frac{p_{000}p_{011}}{p_{001}p_{010}}\right)^{t_3}\left(\frac{p_{100}}{p_{000}}\right)^{t_4}\left(\frac{p_{010}}{p_{000}}\right)^{t_5}\left(\frac{p_{001}}{p_{000}}\right)^{t_6}p_{000}^n}=$$

$$=\frac{M(u)\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^u}{\sum_s M(s)\left(\frac{p_{001}p_{010}p_{100}p_{111}}{p_{000}p_{011}p_{101}p_{110}}\right)^s}$$

$$P_{\theta_0}(U=u\mid T_1=t_1,T_2=t_2,T_3=t_3,T_4=t_4,T_5=t_5,T_6=t_6)=\frac{M(u)}{\sum_s M(s)}$$

□