1 Задание №4

Надо показать, что $\nabla_x(x^T A x) = 2Ax$, где A – размера $n \times n$, x – размера $n \times 1$.

Для решения этой задачи нужны некоторые факты из теории матричного дифференцирования:

- Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то $df = (\nabla_x f)^T dx$. Таким образом, градиент можно достать из вида дифференциала функции f.
- $d(XY) = X(dY) + (dX)Y$
- $(XY)^T = Y^T X^T$
- Если X – матрица размера 1×1, то $X = X^T$.
- $d(X^T) = (dX)^T$
- Если A - фиксирована, то $d(Ax) = Adx$

Пусть $f = x^T A x$. Тогда:

$$df = d(x^T A x) = d(x^T A)x + x^T A dx = [\text{транспонируем матрицу 1 на 1}] =$$

$$= (d(x^T A)x)^T + x^T A dx = x^T (d(x^T A))^T + x^T A dx = x^T d((x^T A)^T) + x^T A dx =$$

$$= x^T d(A^T x) + x^T A dx = [\text{A - симметричная, значит } A = A^T] = x^T d(Ax) + x^T A dx =$$

$$= x^T A dx + x^T A dx = 2x^T A dx$$

Таким образом, $\nabla_x f = (2x^T A)^T = 2A^T x = 2Ax$.

2 Задание №5

Случайная величина X имеет показательное распределение, если её функция распределения: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$. Найдем $VaR_\gamma(X)$ из уравнения $F_X(x) = \gamma$.

$$1 - e^{-\lambda x} = \gamma$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - \gamma$$

$$-\lambda x = \ln(1 - \gamma)$$

$$x = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)$$

Таким образом, $VaR_\gamma(X) = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)$

3 Задание №6

Сформулируем задачу:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x^T \Sigma x \to \min \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)^T$. Тогда исходная задача перепишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x^T \Sigma x \to \min \\ \mathbb{1}^T x - 1 = 0 \end{cases}$$

Запишем Лагранжан:

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2} x^T \Sigma x + \lambda(\mathbb{1}^T x - 1)$$

Используя задачу 4 имеем: $\nabla_x L = \Sigma x + \lambda \mathbb{1}$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbb{1}^T x - 1$. Таким образом, система линейных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \Sigma x + \lambda \mathbb{1} = 0 \\ \mathbb{1}^T x - 1 = 0 \end{cases}$$

4 Задание №7

Выразим x из первого уравнения: $x = -\lambda \Sigma^{-1} \mathbb{1}$. Подставим x в второе уравнение:

$$-\lambda \mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1} - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}}$$

Тогда:

$$x = \frac{1}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}} \Sigma^{-1} \mathbb{1}$$

5 Задание №8

1. Надо показать, что:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_i x_j \leq \max_i \sigma_{ii}, \ x_i \geq 0$$

Используем неравенство Коши-Буняковского:

$$\sigma_{ij} \leq \sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}$$

Тогда:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_i x_j \leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}} \leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sqrt{\max_k \sigma_{kk} \max_k \sigma_{kk}} \leq$$

$$\leq \max_k \sigma_{kk} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j = \max_k \sigma_{kk} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i \sum_{j=1}^{N} x_j \right) =$$

$$= \max_k \sigma_{kk} \sum_{i=1}^{N} x_i = \max_k \sigma_{kk} = \max_i \sigma_{ii}$$

2. Поскольку матрица Σ положительно определена, то:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ij} x_i x_j > 0$$