1 Задание №4

В нашем случае $f(x) = x^T Ax$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, A – размера $n \times n$, $a_{ij} = a_{ji}$.

$$f(x) = x^T Ax = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ji} x_j x_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 \right) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ji} x_j + \sum_{i=1}^{n} 2a_{ii} x_i = 2 \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ соответствует умножению i-й строки матрицы $2A$ на вектор x. Поэтому $grad(x^T Ax) = 2Ax$.

2 Задание №5

Случайная величина X имеет показательное распределение, если её функция распределения: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$. Найдем $VaR_\gamma(X)$ из уравнения $F_X(x) = \gamma$.

$$1 - e^{-\lambda x} = \gamma$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - \gamma$$

$$-\lambda x = \ln(1 - \gamma)$$

$$x = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{1 - \gamma} \right)$$

Таким образом, $VaR_\gamma(X) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)$

3 Задание №6

Сформулируем задачу:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^T\Sigma x \to \min \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)^T$. Тогда исходная задача перепишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^T\Sigma x \to \min \\ \mathbb{1}^T x - 1 = 0 \end{cases}$$

Запишем Лагранжан:

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^T\Sigma x + \lambda(\mathbb{1}^T x - 1)$$

Используя задачу 4 имеем: $\nabla_x L = \Sigma x + \lambda\mathbb{1}$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbb{1}^T x - 1$. Таким образом, система линейных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \Sigma x + \lambda\mathbb{1} = 0 \\ \mathbb{1}^T x - 1 = 0 \end{cases}$$

4 Задание №7

Выразим x из первого уравнения: $x = -\lambda\Sigma^{-1}\mathbb{1}$. Подставим x в второе уравнение:

$$-\lambda\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1} - 1 = 0$$
$$\lambda = \frac{-1}{\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}}$$

Тогда:

$$x = \frac{1}{\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}}\Sigma^{-1}\mathbb{1}$$

5 Задание №8

1. Надо показать, что:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_ix_j \leq \max_i \sigma_{ii},\ x_i \geq 0$$

Используем неравенство Коши-Буняковского:

$$\sigma_{ij} \leq \sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}$$

Тогда:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_ix_j \leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_ix_j\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}} \leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_ix_j\sqrt{\max_k \sigma_{kk}\max_k \sigma_{kk}} \leq$$

$$\leq \max_k \sigma_{kk}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_ix_j = \max_k \sigma_{kk}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i\sum_{j=1}^{N}x_j\right) =$$

$$= \max_k \sigma_{kk}\sum_{i=1}^{N}x_i = \max_k \sigma_{kk} = \max_i \sigma_{ii}$$

2. Поскольку матрица Σ положительно определена, то:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ij}x_ix_j > 0$$