1 Задание №4

В нашем случае $f(x) = x^T Ax$, где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, A – размера $n \times n$, $a_{ij} = a_{ji}$.

$$f(x) = x^T Ax = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ji} x_j x_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 \right) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ji} x_j + \sum_{i=1}^{n} 2a_{ii} x_i = 2 \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ соответствует умножению i-й строки матрицы $2A$ на вектор x. Поэтому $grad(x^T Ax) = 2Ax$.

2 Задание №5

Случайная величина X имеет показательное распределение, если её функция распределения: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$.

Мы знаем, что $P(X < VaR_\gamma(X)) = F(VaR_\gamma(X)) = \gamma$. Найдем $VaR_\gamma(X)$ из уравнения $F_X(x) = \gamma$.

$$1 - e^{-\lambda x} = \gamma$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - \gamma$$

$$-\lambda x = \ln(1 - \gamma)$$

$$x = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)$$

Таким образом, $VaR_\gamma(X) = \dfrac{1}{\lambda} \ln\left(\dfrac{1}{1-\gamma}\right)$

3 Задание №6

Сформулируем задачу:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x^T \Sigma x \to \min \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)^T$. Тогда исходная задача перепишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x^T \Sigma x \to \min \\ \mathbb{1}^T x - 1 = 0 \end{cases}$$

Запишем Лагранжан:

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2} x^T \Sigma x + \lambda(\mathbb{1}^T x - 1)$$

Используя задачу 4 имеем: $\nabla_x L = \Sigma x + \lambda \mathbb{1}$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbb{1}^T x - 1$. Таким образом, система линейных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \Sigma x + \lambda \mathbb{1} = 0 \\ \mathbb{1}^T x - 1 = 0 \end{cases}$$

4 Задание №7

Выразим x из первого уравнения: $x = -\lambda \Sigma^{-1} \mathbb{1}$. Подставим x в второе уравнение:

$$-\lambda \mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1} - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}}$$

Тогда:

$$x = \frac{1}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}} \Sigma^{-1} \mathbb{1}$$

5 Задание №8

1. Надо показать, что:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_ix_j \le \max_i \sigma_{ii},\ x_i \ge 0$$

Используем неравенство Коши-Буняковского:

$$\sigma_{ij} \le \sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}$$

Тогда:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_ix_j \le \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_ix_j\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}} \le \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_ix_j\sqrt{\max_k \sigma_{kk}\max_k \sigma_{kk}} \le$$

$$\le \max_k \sigma_{kk}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_ix_j = \max_k \sigma_{kk}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i\sum_{j=1}^{N}x_j\right) =$$

$$= \max_k \sigma_{kk}\sum_{i=1}^{N}x_i = \max_k \sigma_{kk} = \max_i \sigma_{ii}$$

2. Поскольку матрица Σ положительно определена, то:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ij}x_ix_j > 0$$

6 Задание №11

Однофакторная модель: $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$

A. $Cov(R_M, \varepsilon_i) = 0$, $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, $E(\varepsilon_i) = 0$.

B. $E(R_i) = E(\alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i) = E(R_i) + \beta_i E(R_M)$.

$$E(R_1) = 0.1 + 1 \cdot 0.5 = 0.6$$

$$E(R_2) = 0.3 + 2 \cdot 0.5 = 1.3$$

Будем использовать свойство:

$$Cov(\alpha X + \beta Y, Z) = Cov(\alpha X, Z) + Cov(\beta Y, Z)$$

Тогда:

$$\sigma^2(R_i) = D(R_i) = Cov(R_i, R_i) = Cov(\alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i, \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i) =$$

$$= Cov(\alpha_i, \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i) + Cov(\beta_i R_M + \varepsilon_i, \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i) =$$

$$= Cov(\beta_i R_M + \varepsilon_i, \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i) =$$

$$= Cov(\beta_i R_M + \varepsilon_i, \alpha_i) + Cov(\beta_i R_M + \varepsilon_i, \beta_i R_M + \varepsilon_i) =$$

$$= Cov(\beta_i R_M + \varepsilon_i, \beta_i R_M + \varepsilon_i) =$$

$$= Cov(\beta_i R_M, \beta_i R_M) + Cov(\beta_i R_M, \varepsilon_i) + Cov(\varepsilon_i, \beta_i R_M) + Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_i) =$$

$$= Cov(\beta_i R_M, \beta_i R_M) + Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \beta_i^2 \sigma^2(R_M) + \sigma^2(\varepsilon_i)$$

Итого: $\sigma^2(R_i) = \beta_i^2 \sigma^2(R_M) + \sigma^2(\varepsilon_i)$

$$\sigma^2(R_1) = 1^2 \cdot 0.2^2 + 0.1^2 = 0.05$$

$$\sigma^2(R_2) = 2^2 \cdot 0.2^2 + 0.2^2 = 0.2$$

Теперь надо сравнить активы по характеристикам:

$$E(R_1) = 0.6, \sigma^2(R_1) = 0.05$$

$$E(R_2) = 1.3, \sigma^2(R_2) = 0.2$$

C. Функция полезности $u = E - \gamma \cdot \sigma^2, \gamma = 4$. Она штрафует за большие значения σ^2.

$$u(R_1) = 0.6 - 4 \cdot 0.05 = 0.4$$

$$u(R_2) = 1.3 - 4 \cdot 0.2 = 0.5$$

7 Задание №12

Нам потребуется факт: $VaR_\beta(X + c) = VaR_\beta(X) + c$. Он очевидный поскольку, если мы сдвинем распределение на $+C$, то и все его квантили (а $VaR_\beta(X)$ это квантиль уровня β) сдвинутся на $+C$.

По определению: $CVaR_\beta(X) = E(X \mid X \geq VaR_\beta(X))$

$$CVaR_\beta(X+c) = E(X+c \mid X+c \geq VaR_\beta(X+c)) = E(X+c \mid X+c \geq VaR_\beta(X)+c) =$$

$$= E(X+c \mid X \geq VaR_\beta(X)) = E(X \mid X \geq VaR_\beta(X)) + E(c \mid X \geq VaR_\beta(X)) =$$

$$E(X \mid X \geq VaR_\beta(X)) + c = CVaR_\beta(X) + c$$

8 Задание №13

Потребуется формула:

$$CVaR_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{x \geq VaR_\beta(X)} x f_X(x) dx$$

По задаче 5 мы знаем, что:

$$VaR_\beta(X) = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right) = a$$

При $x \geq 0$: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Вычислим интеграл:

$$\int_a^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_a^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_a^{+\infty} x d(e^{-\lambda x}) =$$

$$= -\left(xe^{-\lambda x}|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} e^{-\lambda x} dx\right) = -\left((0 - ae^{-\lambda a}) + \frac{1}{\lambda}\int_a^{+\infty} e^{-\lambda x} d(-\lambda x)\right) =$$

$$= ae^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda a}^{+\infty} e^t dt = ae^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda} e^t|_{-\lambda a}^{+\infty} =$$

$$= ae^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda}(0 - e^{-\lambda a}) = ae^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} = \left(a + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda a}$$

Таким образом:

$$CVaR_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta}\left(a + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda a}$$

Подставим:

$$a = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right)$$

Получим:

$$CVaR_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right) + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right) + \frac{1}{\lambda}\right) e^{\ln(1-\beta)} = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right) + \frac{1}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}(1 - \ln(1-\beta))$$