

1 Задание №4

В нашем случае $f(x) = x^T Ax$, где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, A – размера $n \times n$, $a_{ij} = a_{ji}$.

$$f(x) = x^T Ax = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 \right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ji} x_j x_i + \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 \right) = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ji} x_j + \sum_{i=1}^n 2a_{ii} x_i = 2 \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2 \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j$ соответствует умножению i -й строки матрицы $2A$ на вектор x . Поэтому $\text{grad}(x^T Ax) = 2Ax$.

2 Задание №5

Случайная величина X имеет показательное распределение, если её функция распределения: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$. Найдём $\text{VaR}_\gamma(X)$ из уравнения $F_X(x) = \gamma$.

$$1 - e^{-\lambda x} = \gamma$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - \gamma$$

$$-\lambda x = \ln(1 - \gamma)$$

$$x = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{1 - \gamma} \right)$$

Таким образом, $VaR_\gamma(X) = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{1-\gamma} \right)$

3 Задание №6

Сформулируем задачу:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^T \Sigma x \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)^T$. Тогда исходная задача переписется в виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^T \Sigma x \rightarrow \min \\ \mathbb{1}^T x - 1 = 0 \end{cases}$$

Запишем Лагранжан:

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^T \Sigma x + \lambda(\mathbb{1}^T x - 1)$$

Используя задачу 4 имеем: $\nabla_x L = \Sigma x + \lambda \mathbb{1}$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbb{1}^T x - 1$. Таким образом, система линейных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \Sigma x + \lambda \mathbb{1} = 0 \\ \mathbb{1}^T x - 1 = 0 \end{cases}$$

4 Задание №7

Выразим x из первого уравнения: $x = -\lambda \Sigma^{-1} \mathbb{1}$. Подставим x в второе уравнение:

$$\begin{aligned} -\lambda \mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1} - 1 &= 0 \\ \lambda &= \frac{-1}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}} \end{aligned}$$

Тогда:

$$x = \frac{1}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}} \Sigma^{-1} \mathbb{1}$$

5 Задание №8

1. Надо показать, что:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j \leq \max_i \sigma_{ii}, \quad x_i \geq 0$$

Используем неравенство Коши-Буняковского:

$$\sigma_{ij} \leq \sqrt{\sigma_{ii} \sigma_{jj}}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sqrt{\sigma_{ii} \sigma_{jj}} \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sqrt{\max_k \sigma_{kk} \max_k \sigma_{kk}} \leq \\ &\leq \max_k \sigma_{kk} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j = \max_k \sigma_{kk} \sum_{i=1}^N \left(x_i \sum_{j=1}^N x_j \right) = \\ &= \max_k \sigma_{kk} \sum_{i=1}^N x_i = \max_k \sigma_{kk} = \max_i \sigma_{ii} \end{aligned}$$

2. Поскольку матрица Σ положительно определена, то:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j > 0$$