



Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

П Р О Е К Т

по

Диференциални уравнения и приложения
спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,
учебна година 2015/16

Тема №3

Изготвил: Антон Александров Петков

Фак. №: 61793

Група: 1

05.06.2016 гр. София

Оценка:.....

Съдържание

1	Тема (задание) на проекта	3
2	Решение на Задача 1.	4
2.1	Теоретична част	4
2.2	MATLAB код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му	5
2.3	Графики (включително от анимация)	6
2.4	Коментари към получените с MATLAB резултати	6
3	Решение на Задача 2.	6
3.1	Теоретична част	7
3.2	MATLAB код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му	8
3.3	Графики (включително от анимация)	9

1 Тема (задание) на проекта

Проект по ДУПрил за спец. СИ, 2 курс,
летен семестър, уч. год. 2015/16

Тема СИ16-003

Име... Антон Александров Петков

Ф.No... 61793, група 1

Инструкции за изготвяне на проекта и за реда на предаването му: www.fmi.uni-sofia.bg/Members/tsvetan

Задача 1. Дадено е уравнението $y' \sin x = (1 + y^2) \arctan y$.

а) Да се определи реда му и от кой вид е.

б) Да се начертае полето от прави (slope field) на това уравнение в квадрата $K = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. Опишете използвания метод.

в) На същия чертеж през точката с координати $(1, 1)$ да се начертае интегрална крива, получена с помощта на оператора *ode45*, а през точката с координати $(\pi/2, 1)$ да се начертае интегрална крива, получена с помощта на оператора *dsolve*.

Задача 2.

Дадена е смесената задача за уравнението на струната

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \text{ за } 0 < x < L, t > 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \text{ за } 0 \leq x \leq L,$$

$$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \text{ за } t \geq 0.$$

Нека

$$\varphi(x) = \frac{1}{9} x^3 (3 - x)^3, \psi(x) = 0, a = 2, L = 3.$$

1/ По метода на разделяне на променливите търсете нейното решение като ред на Фурие от вида

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$$

Изведете задачата на Щурм-Лиувил и намерете нейните собствени стойности и собствени функции $X_k(x)$. Решете съответните уравнения за функциите $T_k(t)$. Напишете формулите за пресмятане на коефициентите в реда за $u(x, t)$. Изследвайте има ли равни на нула коефициенти.

2/ Направете анимация на Matlab за трептенето на струната при $t \in [0, 10]$, като използвате частичната сума с номер 20 на намерения в подточка 1/ ред на Фурие. В един прозорец начертайте една под друга графиките на струната в моментите $t_0 = 0, t_1 = 5, t_2 = 15$ с надписи коя графика за кой момент се отнася.

2 Решение на Задача 1.

$$y' \sin x = (1 + y^2) \arctan y \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} \operatorname{tg} c |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| & \text{при } y \geq 0 \\ -\operatorname{tg} c |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| & \text{при } y < 0 \\ c = \operatorname{const} \end{cases}$$

а) Дифференциалното уравнение (1) е обикновено дифференциално уравнение от първи ред с разделящи се променливи.

2.1 Теоретична част

$$\int \frac{dy}{(1 + y^2) \arctan y} = \int \frac{dx}{\sin x}$$

Решаваме лявата част от уравнението (1), вкарвайки $\frac{1}{1+y^2}$ зад диференциала.

$$\int \frac{dy}{(1 + y^2) \arctan y} = \int \frac{d(\arctan y)}{\arctan y} = \ln |\arctan y| + c_1$$

Дясната част на (1) решаваме чрез универсална субституция.

$$u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x = 2 \arctan u, \quad dx = \frac{2du}{1 + u^2}$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2u}{1 + u^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1 + u^2}{2u} \cdot \frac{2du}{1 + u^2} = \int \frac{du}{u} = \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + c_2$$

$$\ln |\arctan y| + c_1 = \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + c_2$$

Полагаме $c_3 = c_2 - c_1$ и правим разлика на логаритмите.

$$\ln \frac{|\arctan y|}{|\operatorname{tg} \frac{x}{2}|} = c_3$$

Нека $c_4 = e^{c_3}$.

$$\frac{|\arctan y|}{|\operatorname{tg} \frac{x}{2}|} = c_4$$

$$|\arctan y| = c_4 |\operatorname{tg} \frac{x}{2}|$$

Прилагаме тангенс от двете страни, спазвайки ограничението на левия модул.

$$y = \begin{cases} \operatorname{tg} c_4 |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| & \text{при } y \geq 0 \\ -\operatorname{tg} c_4 |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

2.2 MATLAB код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

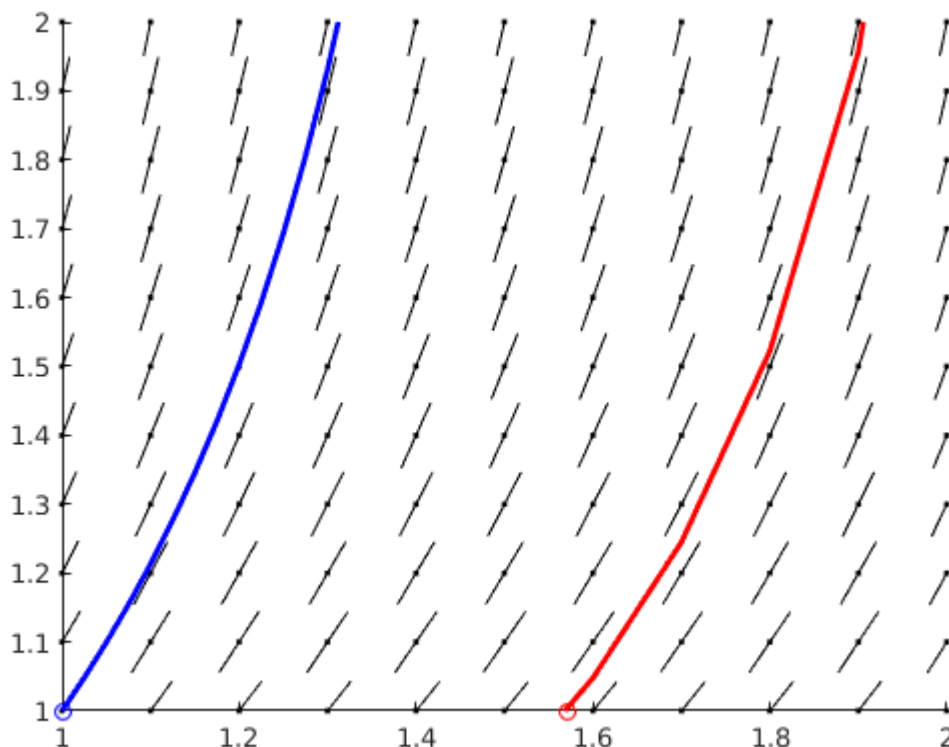
```

1 function task1
2 axis([1, 2, 1, 2]);
3 hold on;
4 x = 1:0.1:2;
5 y = 1:0.1:2;
6 delta = 0.05;
7
8     function z = ff(x,y)
9         z = ((1 + y^2) * atan(y)) / sin(x);
10    end
11
12 for k=1:length(x)
13     for m=1:length(y)
14         plot(x(k), y(m), 'k. ');
15         eps = delta / sqrt(1 + ff(x(k), y(m))^2);
16         plot([x(k)-eps, x(k)+eps],...
17             [y(m)-eps*ff(x(k), y(m)), y(m)+eps*ff(x(k), y(m))],...
18             'k. ');
19     end
20 end
21
22 plot(pi/2, 1, 'ro');
23 y = dsolve('Dy * sin(x) = (1 + y^2) * atan(y)', 'y(pi/2)=1', 'x');
24 plot(x, eval(y), 'r', 'LineWidth', 2);
25
26 plot(1, 1, 'bo');
27 [x, y] = ode45(@ff, [1, 2], 1);
28 plot(x, y, 'b', 'LineWidth', 2);
29
30 end

```

Фигура 1: Код на първа задача.

2.3 Графики (включително от анимация)



Фигура 2: Илюстрация на решението на първа задача.

2.4 Коментари към получените с MATLAB резултати

На Фигура 2 с черен цвят е изобразено полето от прави за уравнение (1). В точка (1, 1) започва в син цвят интегралната крива, получена с помощта на оператора **ode45**, а през точката с координати $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ с червен цвят е начертана интегралната крива, получена с помощта на оператора **dsolve**.

3 Решение на Задача 2.

$$\begin{cases} u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{ak\pi}{L} + B_k \sin \frac{ak\pi}{L} \right) \sin \frac{k\pi x}{L} \\ A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{9} x^3 (3-x)^3 \sin \frac{k\pi}{L} dx \\ B_k = 0 \end{cases}$$

3.1 Теоретична част

Търсим решение от вида $u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0$.

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \text{където } \lambda = \text{const}$$

$$\begin{aligned} T''(t) + \lambda a^2 T(t) &= 0, & t \geq 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0, & 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

От граничните условия:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= X(0)T(t) = 0, t \geq 0 \implies X(0) = 0 \\ u|_{x=L} &= X(L)T(t) = 0, t \geq 0 \implies X(L) = 0 \end{aligned}$$

За $X(x)$ получаваме задачата на Шюрм-Лиувил:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < L \\ X(0) = 0, X(L) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Търсим ненулево решение на уравнението (2), което е линейно. Характеристичният полином на (2) е $P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda = 0$.

1) ако $\lambda < 0$

$$\alpha_1 = -\sqrt{-\lambda}, \quad \alpha_2 = \sqrt{-\lambda}$$

Фундаменталната система решения е $\{e^{-\sqrt{-\lambda}x}, e^{\sqrt{-\lambda}x}\}$.

$$X(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \implies c_2 = -c_1$$

$$X(L) = c_1 (e^{-\sqrt{-\lambda}L} - e^{\sqrt{-\lambda}L}) \implies c_1 = 0 \implies X(x) = 0$$

2) ако $\lambda = 0$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Фундаменталната система решения е $\{1, x\}$.

$$X(x) = c_1 x + c_2$$

$$X(0) = c_2 = 0$$

$$X(L) = c_1 L = 0 \implies c_1 = 0 \implies X(x) = 0$$

3) ако $\lambda > 0$

$$\alpha_1 = -i\sqrt{\lambda}, \quad \alpha_2 = i\sqrt{\lambda}$$

Фундаменталната система решения е $\{\cos \sqrt{\lambda}x, \sin \sqrt{\lambda}x\}$.

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

$$X(0) = c_1 \cos 0 = c_1 = 0$$

$$X(L) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} L = 0 \quad (3)$$

Равенство (3) е възможно при $c_2 = 0$ или при $\sin \sqrt{\lambda} L = 0$, което се случва само при $\sqrt{\lambda} L = k\pi$ за $k \in \mathbb{N}$.

Собствените стойности на задачата на Шурм-Лиувил са $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, k \in \mathbb{N}$.

А собствените функции са $X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), k \in \mathbb{N}$.

Нека $\lambda = \lambda_k$. Ще решим уравненията за $T_k(t)$.

$$T_k''(t) + \left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 T_k(t) = 0$$

Характеристичният полином е $P_k(\alpha) = \alpha^2 + \left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 = 0$.

Корените са $\alpha_1 = -\frac{ak\pi}{L}, \alpha_2 = \frac{ak\pi}{L}$.

Фундаменталната система решения е $\left\{\cos \frac{ak\pi}{L}, \sin \frac{ak\pi}{L}\right\}$.

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{ak\pi}{L} + B_k \sin \frac{ak\pi}{L}$$

Получихме функции $u_k(x, t) = T_k(t)X_k(x)$, които са решението на уравнението на струната и удовлетворяват граничните условия.

Избираме коефициентите A_k и B_k :

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx$$

$$B_k = \frac{2}{ak\pi} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \text{ но понеже } \psi(x) = 0 \implies B_k = 0.$$

3.2 MATLAB код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

```

1 function task2
2 a = 2; L = 3; tmax = 10; ymax = 1.5;
3 t = 0:tmax/100:tmax;
4 x = 0:L/100:L;
5
6 function y = phi(x)
7     y = ((x.*(3-x)).^3)/9;
8 end
9
10 function y = psi(x)
11     y = 0 * x;
12 end
13
14 function y = fourier(x, t)
```



```

15         y = 0;
16     for k = 1:20
17         Xk = sin(k*pi*x/L);
18         Ak = (2/L)*trapz(x, phi(x).*Xk);
19         Bk = (2/(a*k*pi))*trapz(x, psi(x).*Xk);
20         Tk = Ak*cos(a*k*pi*t/L) + Bk*sin(a*k*pi*t/L);
21         y = y + Tk*Xk;
22     end
23 end
24
25 for n=1:length(t)
26     plot(x, fourier(x, t(n)));
27     axis([0, L, -ymax, ymax]);
28     M(n) = getframe;
29 end
30 movie(M, 2)
31
32 % 2.2, remember to set the step in t to be small (e.g. 50)
33 % moments = [0, 5, 15];
34 % for i=1:length(moments)
35 %     subplot(3, 1, i);
36 %     plot(x, fourier(x, moments(i)), 'k');
37 %     axis([0, L, -ymax, ymax]);
38 %     title(['t = ' num2str(moments(i))]);
39 %     grid on;
40 % end
41
42 end

```

3.3 Графики (включительно от анимация)