Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

П Р О Е К Т

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,
учебна година 2015/16

Тема №3

Изготвил: Антон Александров Петков
Фак. №: 61793
Група: 1

05.06.2016 гр. София

Оценка:..............................

Съдържание

1 Тема (задание) на проекта

Проект по ДУПрил за спец. СИ, 2 курс,
летен семестър, уч. год. 2015/16

Тема СИ16-003

Име ... Антон Александров Петков ...

Ф.No. ... 61793 ..., група ... 1 ...

Инструкции за изготвяне на проекта и за реда на предаването му: ***www.fmi.uni-sofia.bg/Members/tsvetan***

Задача 1. Дадено е уравнението $y' \sin x = (1 + y^2) \arctan y$.

а) Да се определи реда му и от кой вид е.

б) Да се начертае полето от прави (slope field) на това уравнение в квадрата $K = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. Опишете използвания метод.

в) На същия чертеж през точката с координати $(1,1)$ да се начертае интегрална крива, получена с помощта на оператора *ode45*, а през точката с координати $(\pi/2, 1)$ да се начертае интегрална крива, получена с помощта на оператора *dsolve*.

Задача 2.

Дадена е смесената задача за уравнението на струната

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \text{ за } 0 < x < L, t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \text{ за } 0 \leq x \leq L,$$

$$u(0,t) = 0, u(L,t) = 0 \text{ за } t \geq 0.$$

Нека

$$\varphi(x) = \frac{1}{9}\, x^3 (3 - x)^3\,,\ \psi(x) = 0\,,\ a = 2,\ L = 3.$$

1/ По метода на разделяне на променливите търсете нейното решение като ред на Фурие от вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, T_k(t)$$

Изведете задачата на Щурм-Лиувил и намерете нейните собствени стойности и собствени функции $X_k(x)$. Решете съответните уравнения за функциите $T_k(t)$. Напишете формулите за пресмятане на коефициентите в реда за $u(x,t)$. Изследвайте има ли равни на нула коефициенти.

2/ Направете анимация на Matlab за трептенето на струната при $t \in [0, 10]$, като използвате частичната сума с номер 20 на намерения в подточка 1/ ред на Фурие. В един прозорец начертайте една под друга графиките на струната в моментите $t_0 = 0$, $t_1 = 5$, $t_2 = 15$ с надписи коя графика за кой момент се отнася.

2 Решение на Задача 1.

$$y' \sin x = (1 + y^2) \arctan y \tag{1}$$

$$y = \begin{cases} \operatorname{tg} c |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| & \text{при } y \geq 0 \\ -\operatorname{tg} c |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

Където $c = const$.

а) Диференциалното уравнение (1) е обикновенно диференциално уравнение от първи ред с разделящи се променливи.

2.1 Теоретична част

$$\int \frac{dy}{(1 + y^2) \arctan y} = \int \frac{dx}{\sin x}$$

Решаваме лявата част от уравнението (1), вкарвайки $\frac{1}{1+y^2}$ зад диференциала.

$$\int \frac{dy}{(1 + y^2) \arctan y} = \int \frac{d(\arctan y)}{\arctan y} = \ln |\arctan y| + c_1$$

Дясната част на (1) решаваме чрез универсална субституция.

$$u = \operatorname{tg} \tfrac{x}{2}, \quad x = 2 \arctan u, \quad dx = \frac{2du}{1 + u^2}$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2u}{1 + u^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1 + u^2}{2u} \cdot \frac{2du}{1 + u^2} = \int \frac{du}{u} = \ln |\operatorname{tg} \tfrac{x}{2}| + c_2$$

$$\ln |\arctan y| + c_1 = \ln |\operatorname{tg} \tfrac{x}{2}| + c_2$$

Полагаме $c_3 = c_2 - c_1$ и правим разлика на логаритмите.

$$\ln \frac{|\arctan y|}{|\operatorname{tg} \frac{x}{2}|} = c_3$$

Нека $c_4 = \mathrm{e}^{c_3}$.

$$\frac{|\arctan y|}{|\operatorname{tg} \frac{x}{2}|} = c_4$$

$$|\arctan y| = c_4 |\operatorname{tg} \tfrac{x}{2}|$$

Прилагаме тангенс от двете страни, спазвайки ограничението на левия модул.

$$y = \begin{cases} \operatorname{tg} c_4 |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| & \text{при } y \geq 0 \\ -\operatorname{tg} c_4 |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

Поле от прави

Нека $y' = f(x, y)$ и нека имаме мрежа от точки с координати (x_k, y_k). За да начертаем права, минаваща през точката (x_k, y_k) с ъглов коефициент s използваме уравнението $y - y_0 = s(x - x_0)$, където ъгловият коефициент $s = y'(x_k) = f(x_k, y_k) = \operatorname{tg} \varphi$, а φ е ъгълът между правата и абсцисната ос.

Избираме някое $\delta > 0$ такова, че дължината на отсечка от полето от прави е 2δ. Нека $\varepsilon > 0$ е такова, че 2ε е дължината на проекцията на отсечката от полето от прави. Така $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\sqrt{\delta^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$. За произволна точка (x_k, y_m) от мрежата от точки ще изразим $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon f(x_k, y_m) = \sqrt{\delta^2 - \varepsilon^2}$$

$$\varepsilon^2 f^2(x_k, y_m) = \delta^2 - \varepsilon^2$$

$$\varepsilon^2 = \frac{\delta^2}{1 + f^2(x_k, y_m)}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{1 + f^2(x_k, y_m)}}$$

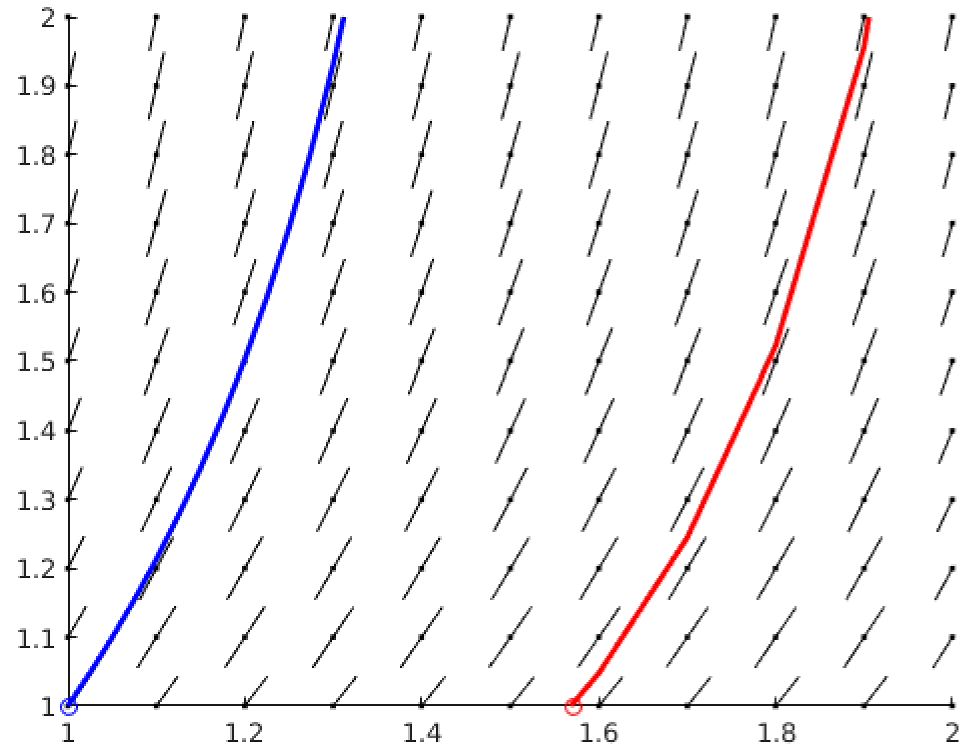
Така двете точки $(x_k - \varepsilon, y_m - \varepsilon f(x_k, y_m))$, $(x_k + \varepsilon, y_m + \varepsilon f(x_k, y_m))$ определят краищата на отсечка от полето от прави.

2.2 MATLAB код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

```
function task1
axis([1, 2, 1, 2]);
hold on;
x = 1:0.1:2;
y = 1:0.1:2;
delta = 0.05;

    function z = ff(x,y)
        z = ((1 + y^2) * atan(y)) / sin(x);
    end

for k=1:length(x)
    for m=1:length(y)
        plot(x(k), y(m), 'k.');
        eps = delta / sqrt(1 + ff(x(k), y(m))^2);
        plot([x(k)-eps, x(k)+eps],...
            [y(m)-eps*ff(x(k), y(m)), y(m)+eps*ff(x(k), y(m))],...
            'k');
    end
end

plot(pi/2, 1, 'ro');
y = dsolve('Dy * sin(x) = (1 + y^2) * atan(y)', 'y(pi/2)=1', 'x');
plot(x, eval(y), 'r', 'LineWidth', 2);

plot(1, 1, 'bo');
[x, y] = ode45(@ff, [1, 2], 1);
plot(x, y, 'b', 'LineWidth', 2);

end
```

Фигура 1: Код на решението на първа задача.

2.3 Графики (включително от анимация)



Фигура 2: Илюстрация на решението на първа задача.

2.4 Коментари към получените с MATLAB резултати

На Фигура 2 с черен цвят е изобразено полето от прави за уравнение (1). В точка (1, 1) започва в син цвят интегралната крива, получена с помощта на оператора **ode45**, а през точката с координати $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ с червен цвят е начертана интегралната крива, получена с помощта на оператора **dsolve**.

3 Решение на Задача 2.

$$\begin{cases} u(x,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{ak\pi}{L}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{L}t\right)\sin\frac{k\pi}{L}x \\ A_k = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L \frac{1}{9}x^3(3-x)^3 \sin\frac{k\pi}{L}x\,dx \\ B_k = 0 \end{cases}$$

3.1 Теоретична част

Търсим решение от вида $u(x,t) = X(x)T(t) \not\equiv 0$.

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \qquad \text{където } \lambda = const$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t \geq 0$$
$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq L$$

От граничните условия:

$$u\Big|_{x=0} = X(0)T(t) = 0, t \geq 0 \implies X(0) = 0$$
$$u\Big|_{x=L} = X(L)T(t) = 0, t \geq 0 \implies X(L) = 0$$

За $X(x)$ получаваме задачата на Щурм-Лиувил:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & ,0 < x < L \\ X(0) = 0, X(L) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Търсим ненулево решение на уравнението (2), което е линейно. Характерситияният полином на (2) е $P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda = 0 \implies \alpha^2 = -\lambda$.

1) ако $\lambda < 0$

$\alpha_1 = -\sqrt{-\lambda},\ \alpha_2 = \sqrt{-\lambda}$

Фундаменталната система решения е $\{e^{-\sqrt{-\lambda}x}, e^{\sqrt{-\lambda}x}\}$.

$X(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$

$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \implies c_2 = -c_1$

$X(L) = c_1\left(e^{-\sqrt{-\lambda}L} - e^{\sqrt{-\lambda}L}\right) \implies c_1 = 0 \implies X(x) = 0$

2) ако $\lambda = 0$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Фундаменталната система решения е $\{1, x\}$.

$X(x) = c_1 x + c_2$

$X(0) = c_2 = 0$

$X(L) = c_1 L = 0 \implies c_1 = 0 \implies X(x) = 0$

3) ако $\lambda > 0$

$\alpha_1 = -i\sqrt{\lambda},\ \alpha_2 = i\sqrt{\lambda}$

Фундаменталната система решения е $\{\cos\sqrt{\lambda}x, \sin\sqrt{\lambda}x\}$.

$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$

$X(0) = c_1 \cos 0 = c_1 = 0$

$$X(L) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} L = 0 \tag{3}$$

Равенство (3) е възможно при $c_2 = 0$ или при $\sin \sqrt{\lambda} L = 0$, което се случва само при $\sqrt{\lambda} L = k\pi$ за $k \in \mathbb{N}$.

Собствените стойности на задачата на Щурм-Лиувил са $\lambda_k = \left(\dfrac{k\pi}{L}\right)^2, k \in \mathbb{N}$.

А собствените функции са $X_k(x) = \sin\left(\dfrac{k\pi x}{L}\right), k \in \mathbb{N}$.

Нека $\lambda = \lambda_k$. Ще решим уравненията за $T_k(t)$.

$T_k''(t) + \left(\dfrac{ak\pi}{L}\right)^2 T_k(t) = 0$

Характеристичният полином е $P_k(\alpha) = \alpha^2 + \left(\dfrac{ak\pi}{L}\right)^2 = 0$.

Корените са $\alpha_1 = -\dfrac{ak\pi}{L},\ \alpha_2 = \dfrac{ak\pi}{L}$.

Фундаменталната система решения е $\{\cos\dfrac{ak\pi}{L}, \sin\dfrac{ak\pi}{L}\}$.

$T_k(t) = A_k \cos\dfrac{ak\pi}{L} + B_k \sin\dfrac{ak\pi}{L}$

Получихме функции $u_k(x,t) = T_k(t)X_k(t)$, които са решението на уравнението на струната и удовлетворяват граничните условия.

Избираме коефициентите A_k и B_k:

$A_k = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L \varphi(x) \sin\dfrac{k\pi x}{L} dx$

$B_k = \dfrac{2}{ak\pi}\displaystyle\int_0^L \psi(x) \sin\dfrac{k\pi x}{L} dx$, но понеже $\psi(x) = 0 \implies B_k = 0$.

3.2 MATLAB код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

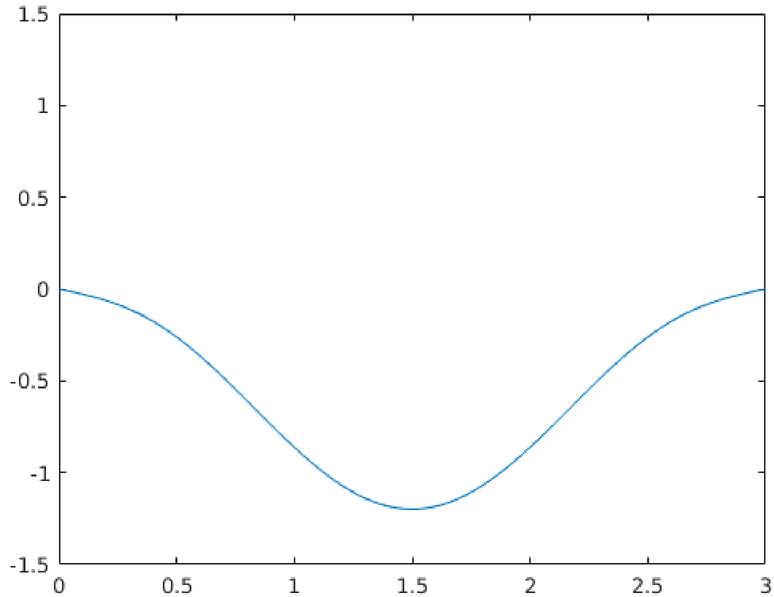
```
function task21
a = 2; L = 3; tmax = 10; ymax = 1.5;
t = 0:tmax/500:tmax;
x = 0:L/100:L;

    function y = phi(x)
        y = ((x.*(3-x)).^3)/9;
    end

    function y = psi(x)
        y = 0 * x;
    end

    function y = fourier(x, t)
        y = 0;
        for k = 1:20
            Xk = sin(k*pi*x/L);
            Ak = (2/L)*trapz(x, phi(x).*Xk);
            Bk = (2/(a*k*pi))*trapz(x, psi(x).*Xk);
            Tk = Ak*cos(a*k*pi*t/L) + Bk*sin(a*k*pi*t/L);
            y = y + Tk*Xk;
        end
    end

for n=1:length(t)
    plot(x, fourier(x, t(n)));
    axis([0, L, -ymax, ymax]);
    M(n) = getframe;
    grid on;
end
movie(M, 2);

end
```

Фигура 3: Код за анимацията на трептенето на струната от втора задача.

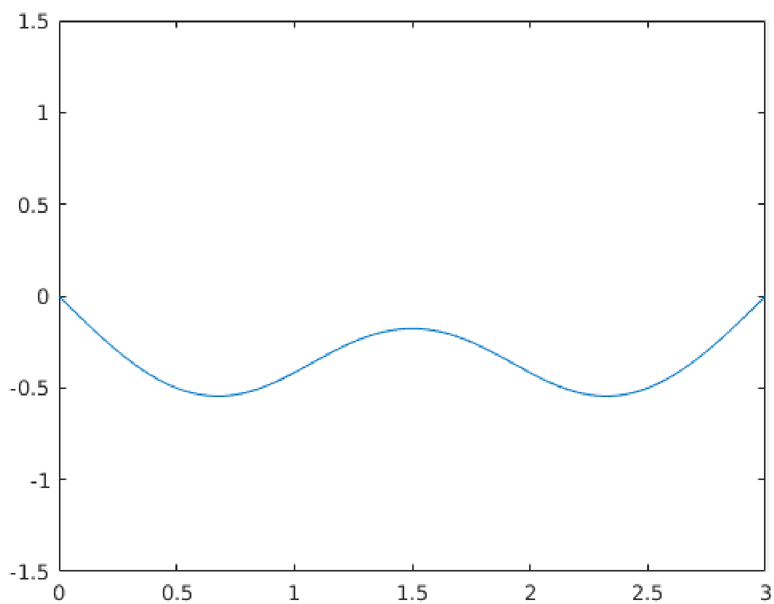
```matlab
function task22
a = 2; L = 3; ymax = 1.5;
x = 0:L/100:L;

    function y = phi(x)
        y = ((x.*(3-x)).^3)/9;
    end

    function y = psi(x)
        y = 0 * x;
    end

    function y = fourier(x, t)
        y = 0;
        for k = 1:20
            Xk = sin(k*pi*x/L);
            Ak = (2/L)*trapz(x, phi(x).*Xk);
            Bk = (2/(a*k*pi))*trapz(x, psi(x).*Xk);
            Tk = Ak*cos(a*k*pi*t/L) + Bk*sin(a*k*pi*t/L);
            y = y + Tk*Xk;
        end
    end

moments = [0, 5, 15];
for i=1:length(moments)
    subplot(3, 1, i);
    plot(x, fourier(x, moments(i)), 'k');
    axis([0, L, -ymax, ymax]);
    title(['t = ' num2str(moments(i))]);
    grid on;
end

end
```

Фигура 4: Код за начертаването на графиките на струната в моментите $t_0 = 0, t_1 = 5, t_2 = 15$.

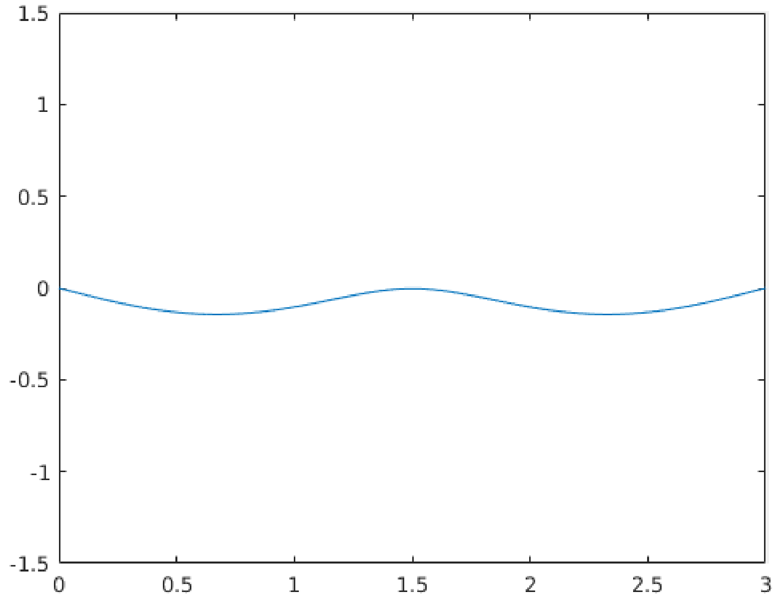
3.3 Графики (включително от анимация)



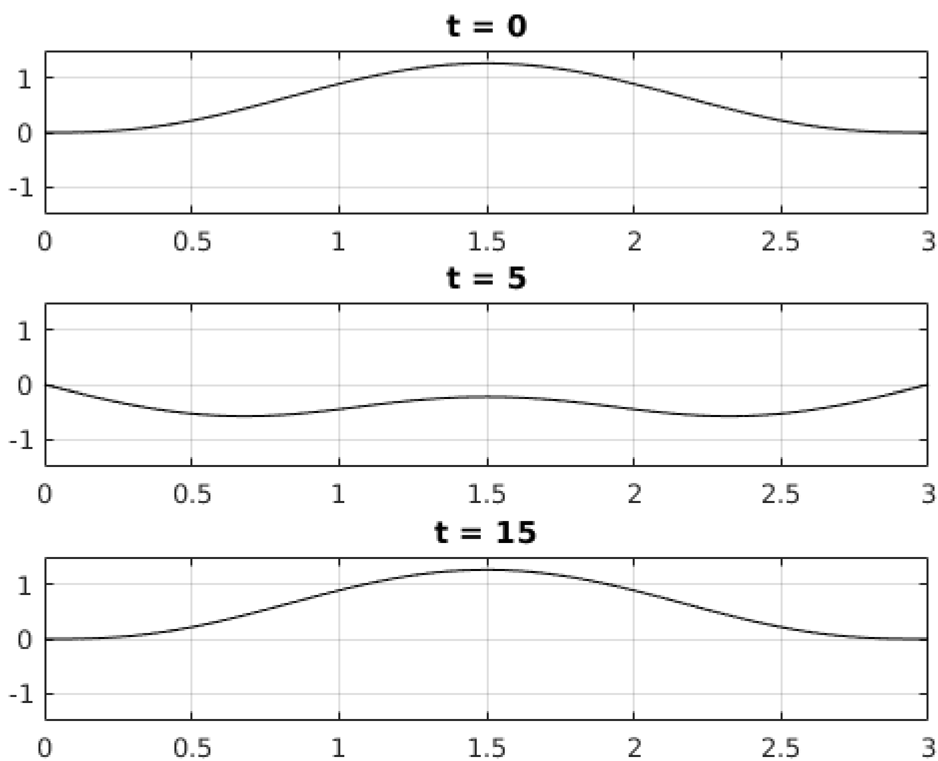
Фигура 5: Анимация на трептенето на струната в момента, когато струната е най-ниско.



Фигура 6: Анимация на трептенето на струната в момента, когато струната се измества от най-ниското си положение към центъра.



Фигура 7: Анимация на трептенето на струната в момент, когато е близко до равновесното си положение.



Фигура 8: Илюстрация на трептенето на струната в трите момента $t_0 = 0, t_1 = 5, t_2 = 15$.

3.4 Коментари към получените с MATLAB резултати

На фигури 5, 6 и 7 се виждат кадри от анимацията на трептенето на струната. Първоначално струната застава в най-високото си положение, максимално далеч от равновесното си положение, като има един глобален максимум. Постепенно се прибира надолу към равновесното си положение, като има момент в който функцията има 3 локални екстремума, два от които са локални максимуми. След като струната премине равновесното си положение, тя минава последователно през състоянията илюстрирани съответно на фигури 7, 6 и 5, като на фигура 5 достига най-ниската си точка, отново максимално отдалечена от равновесното си състояние.

На Фигура 8 е изобразено трептенето на струната в моментите $t_0 = 0, t_1 = 5, t_2 = 15$. Струната е идентична в моментите t_0 и t_2 - има един глобален максимум. Докато в момент t_1 струната е по-вълнообразна и има три локални екстремума.