

Липецкий государственный технический университет

Кафедра прикладной математики

## **ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Лекция 1

**Модели системной динамики**

Составитель - Сысоев А.С., к.т.н., доцент

Липецк - 2020

## Outline

---

- 1.1. Построение моделей системной динамики
- 1.2. Моделирование причинно-следственных связей
- 1.3. Паутинообразная равновесная модель системной динамики
- 1.4. Верификация и оценка устойчивости моделей системной динамики

## 1.1. Построение моделей системной динамики

---

**Моделирование** — это исследование объектов познания не непосредственно, а косвенным путем, при помощи анализа некоторых других вспомогательных объектов.

**Модель** — это материальный или мысленно представленный объект, который в процессе познания (изучения) замещает оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные свойства.

**Имитация** — это численный метод проведения экспериментов с математическими моделями, описывающими поведение сложных систем во времени.

**Имитационное моделирование** — воспроизведение на ЭВМ (симуляция) процесса функционирования исследуемой системы, что позволяет исследовать состояние системы и отдельных ее элементов в определенные моменты модельного времени.

**Системная динамика** — это метод имитационного моделирования, основанный на представлении системы на высоком уровне абстракции как совокупности потоков, накопителей, вспомогательных переменных и субмоделей со своими элементами.

## 1.1. Построение моделей системной динамики

---

Разработка системно-динамической модели осуществляется в несколько этапов:

- Анализ статистических данных. Идентификация причинно- следственных связей.
- Когнитивное моделирование — разработка карты причинно- следственных связей.
- Разработка математической модели, представленной в виде динамической системы одновременных уравнений. Расчет коэффициентов модели с использованием статистических пакетов.
- Реализация математической модели на платформе имитационного моделирования, поддерживающей методы системной динамики (например, Powersim).
- Интеграция имитационной модели с источниками данных (MS Excel, базы данных).
- Проведение численных экспериментов. Калибровка модели. Верификация модели на исторических данных (подтверждение адекватности модели).
- Поиск лучших управленческих, стратегических и оперативных решений с помощью системно-динамической имитационной модели.

## 1.1. Построение моделей системной динамики

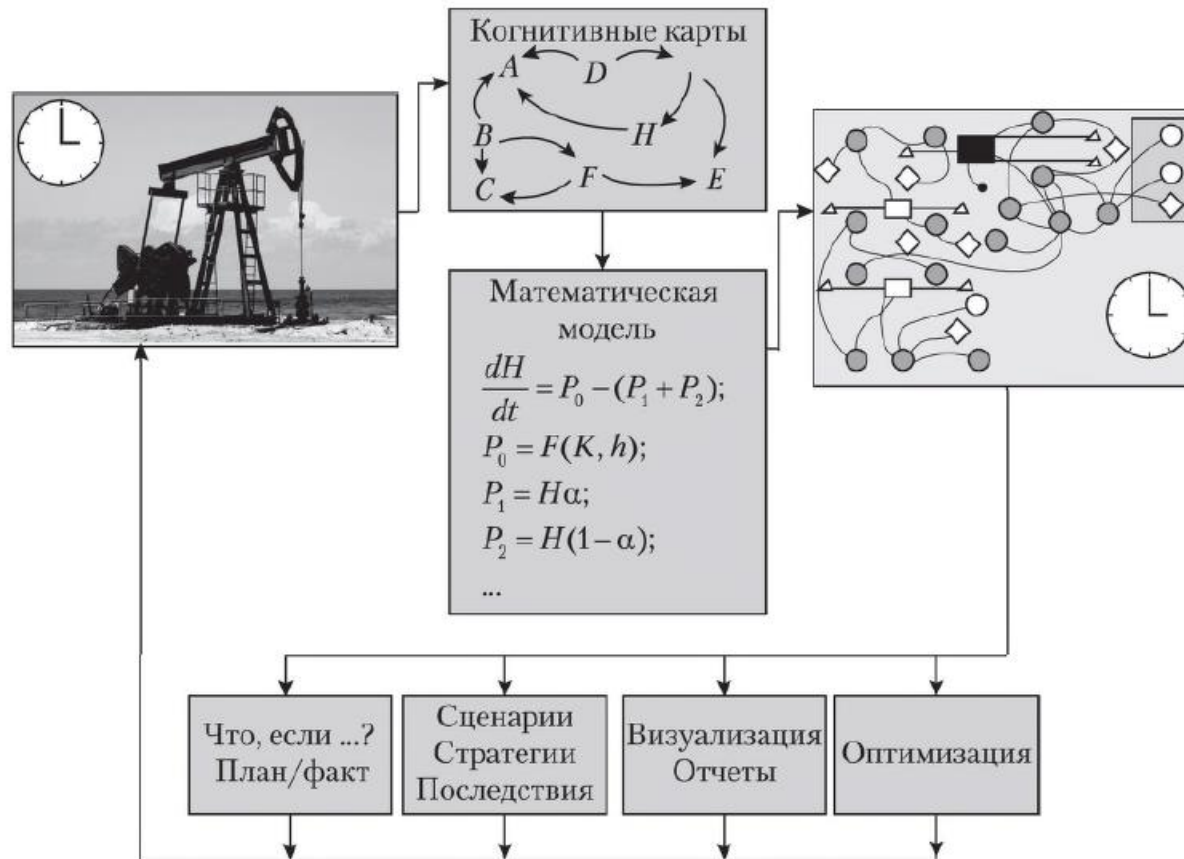


Схема проектирования и использования системно-динамической модели

## 1.1. Построение моделей системной динамики

---

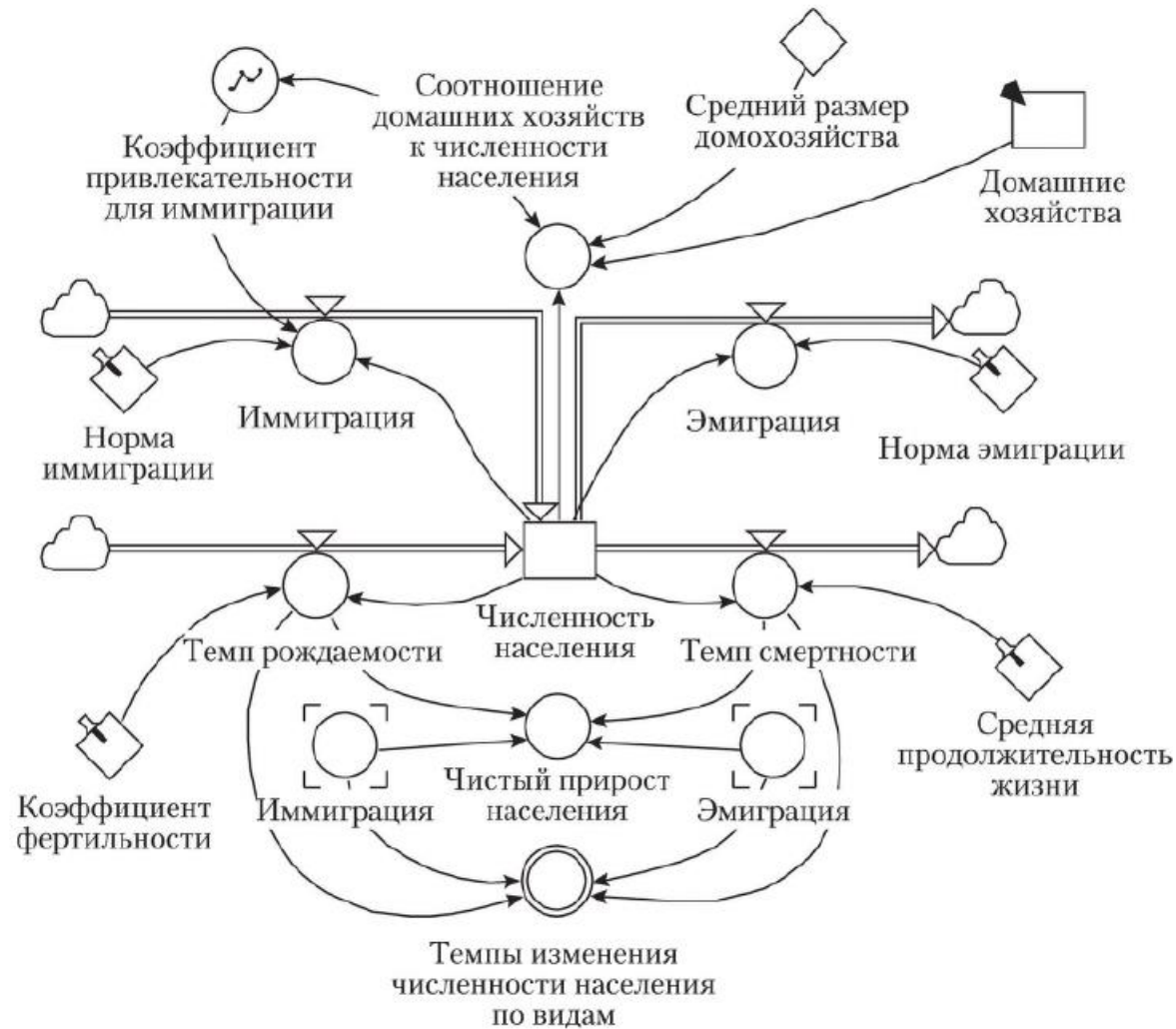
Системно-динамические модели имеют следующую условную классификацию:

- нелинейные модели, реализуемые в виде системы одновременных нелинейных уравнений;
- линейные модели, реализуемые в виде системы одновременных линейных уравнений.

В свою очередь, и линейные, и нелинейные системно-динамические модели могут быть неустойчивыми и устойчивыми, с постоянным и меняющимся режимом.

Системно-динамические модели могут быть *детерминированными* и *недетерминированными*, т.е. учитывать влияние вероятностных характеристик.

## 1.1. Построение моделей системной динамики



Пример модели расчета динамики численности населения

## 1.1. Построение моделей системной динамики

---

Реакция системы на какой-либо входной сигнал называется **переходным процессом**.

Система находится в равновесии, если ее состояние может оставаться неизменным неограниченное время.

Система называется **устойчивой**, если под действием входного сигнала она переходит из одного состояния равновесия в другое.

Для построения моделей системной динамики используются переменные четырех типов: время, уровень, темп и вспомогательные переменные.

Переменная типа «время» является первичной для модели системной динамики: ее значение генерируется системным таймером и изменяется дискретно.

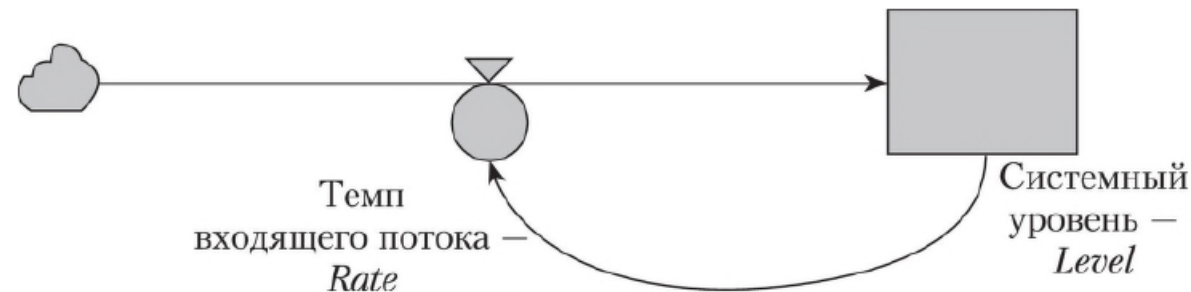
Переменная типа «уровень» равна объему (количеству) некоторого «продукта», накопленного в некотором резервуаре за время жизни модели с начального по текущий момент.

Переменная типа «темп» равна объему продукта, который поступает или извлекается из соответствующего резервуара в единицу модельного времени.



## 1.1. Построение моделей системной динамики

---



Простейший пример цикла с обратной связью

При этом значение системного уровня для момента времени  $(t + dt)$  определяется следующим рекурсивным соотношением:

$$Level(t + dt) = Level(t) + \int_t^{t+dt} Level(t)dt.$$

## 1.2. Моделирование причинно-следственных связей

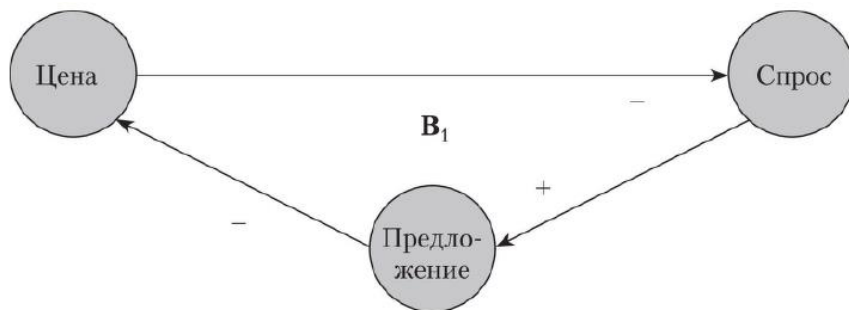
Стадия динамического моделирования – анализ проблем, формализация цели и постановка задач.

Стадия когнитивного моделирования — визуализированное построение причинно-следственных связей между сущностями, описывающими систему.

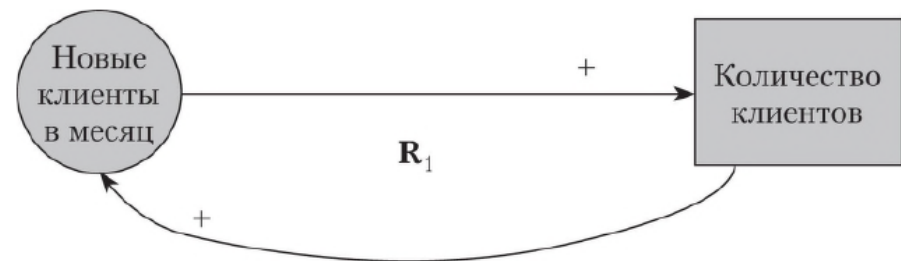
Принято выделять два типа обратных связей:

- балансирующие обратные связи, как правило, обозначаемые литерой  $B$ ;
- усиливающие обратные связи, как правило, обозначаемые литерой  $R$ .

Единичной обратной связью является такая обратная связь, при которой временной лаг между значениями соответствующих связанных характеристик соответствует единичному моменту времени  $t$  (т.е. совпадает с шагом модельного времени).



Пример балансирующей обратной связи



Пример усиливающей обратной связи

## 1.2. Моделирование причинно-следственных связей

Результатом этапа когнитивного моделирования и определения обратных связей является карта причинно-следственных связей.



## 1.2. Моделирование причинно-следственных связей

---

Математической (формальной) основой методов системной динамики являются дифференциальные модели, в которых используются представления динамических процессов в пространстве состояний.

В модели системной динамики предполагается, что для основных фазовых переменных  $y_i$  (так называемых уровней) пишутся дифференциальные уравнения в форме Коши первого рода:

$$\frac{dy_i}{dt} = y_{ji}^+(t) - y_{ki}^-(t),$$
$$i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J_i, k = 1, 2, \dots, K_i,$$

где  $t$  — непрерывное модельное время;  $y_{ji}^+(t)$  — положительные темпы скоростей  $j$ -х переменных, обеспечивающих рост значения переменной  $y_i$  (притоки);  $y_{ki}^-(t)$  — отрицательные темпы скоростей  $k$ -х переменных, обеспечивающих уменьшение значения переменной  $y_i$  (оттоки).

Как правило, темпы притоков и оттоков являются эндогенными и, в свою очередь, могут быть функциями уровней:

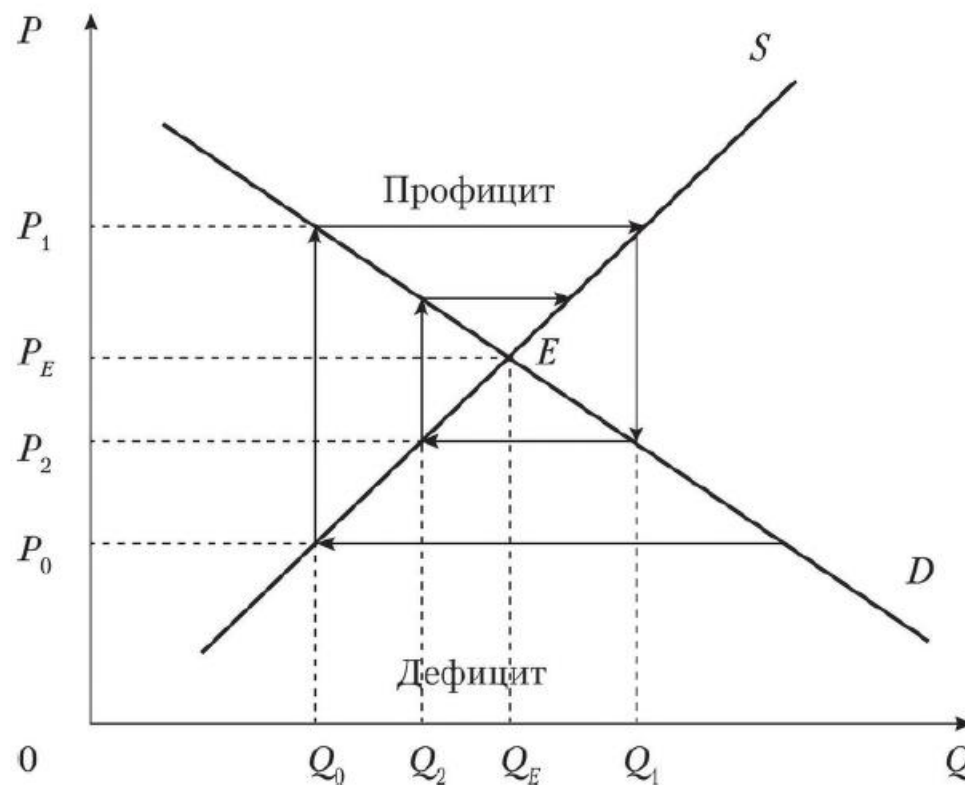
$$y_{ji}^\pm(t) = f_j(y_i(t)), \quad y_{ki}^\pm(t) = f_k(y_i(t)),$$
$$i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J_i, k = 1, 2, \dots, K_i.$$

### 1.3. Паутинообразная равновесная модель системной динамики

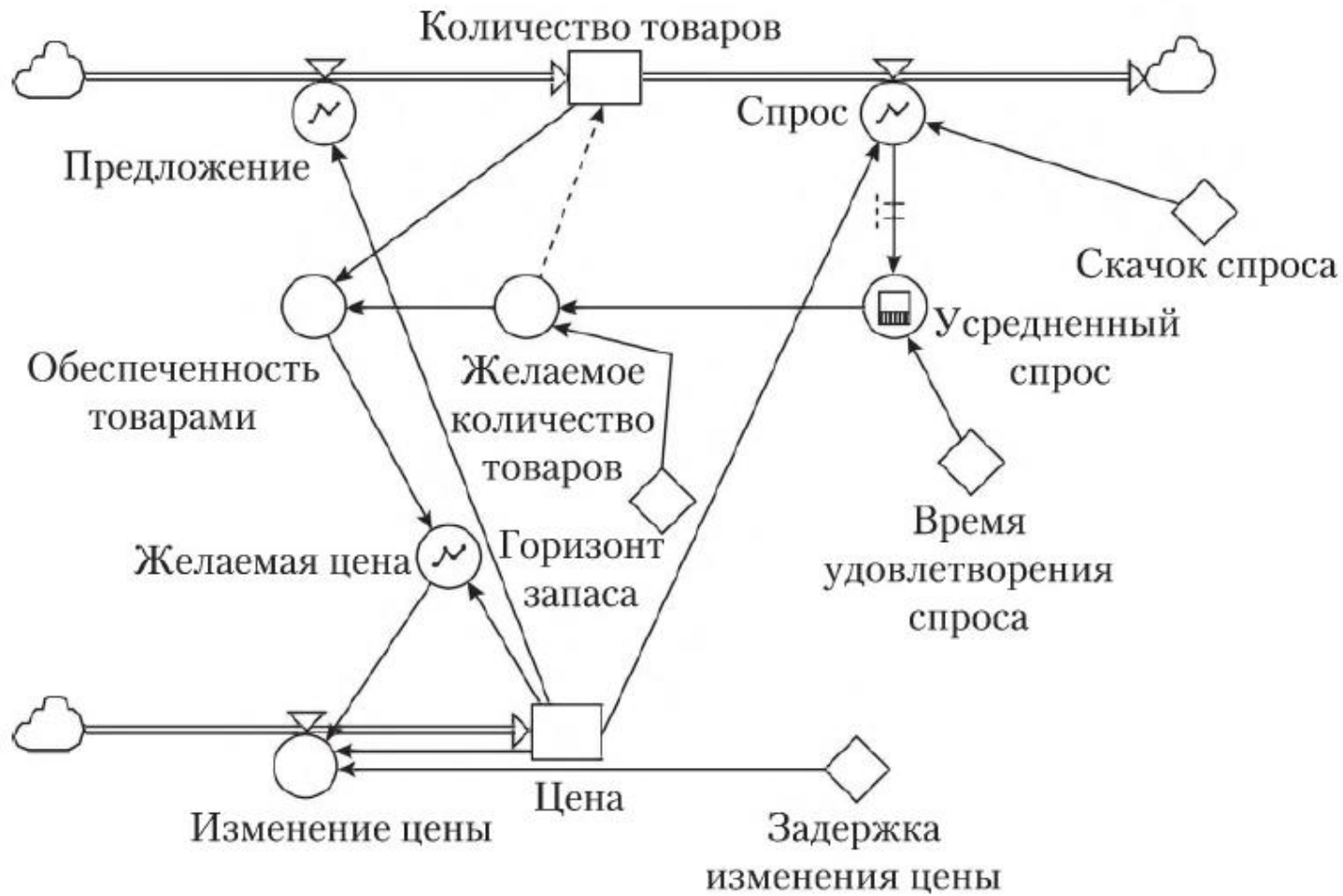
---

**Паутинообразная модель** — простейшая динамическая модель, в которой формируется равновесие, характеризующееся затухающими колебаниями спроса и предложения.

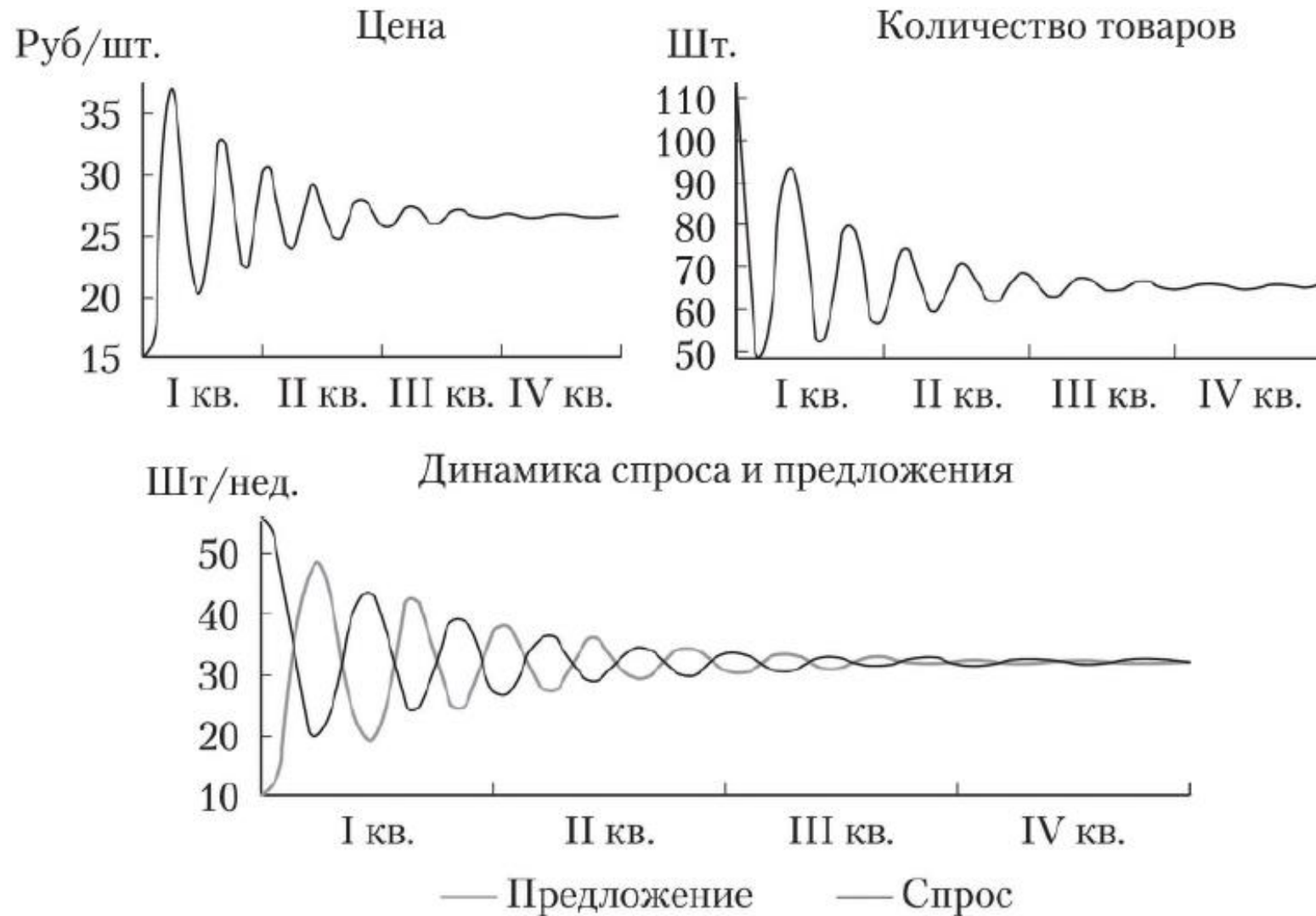
Такая модель отражает формирование равновесия в отрасли с фиксированным циклом производства, когда производители, приняв решение на основании существовавших в предыдущий год цен, уже не могут изменить объем производства.



### 1.3. Паутинообразная равновесная модель системной динамики



### 1.3. Паутинообразная равновесная модель системной динамики



## 1.4. Верификация и оценка устойчивости моделей системной динамики

---

- $t = t_0, t_0 + 1, \dots, T$  — модельное (ретроспективное) время;
- $KPI_i^\Phi(t)$  — фактические значения  $i$ -х ключевых показателей деятельности  $i = 1, 2, \dots, I$ ;
- $KPI_i^\Pi(t)$  — прогнозные значения  $i$ -х ключевых показателей деятельности  $i = 1, 2, \dots, I$ , формируемые в результате прогона имитационной модели.

Для оценки среднеквадратической ошибки (СКО) системно-динамической модели можно использовать следующую формулу:

$$\delta = \sqrt{\sum_{t=t_0}^T \sum_{i=1}^I \left( \frac{KPI_i^\Pi(t) - KPI_i^\Phi(t)}{KPI_i^\Phi(t)} \right)^2}.$$

Одним из известных способов оценки адекватности модели является прогон модели на различных отрезках горизонта прогнозирования (постоянной или переменной длины) с последующим сравнением полученных среднеквадратических ошибок:

$$\delta_\xi = \sqrt{\sum_{t=\xi}^{\xi+\tau} \sum_{i=1}^I \left( \frac{KPI_i^\Pi(t) - KPI_i^\Phi(t)}{KPI_i^\Phi(t)} \right)^2}, \quad \xi = t_0, t_0 + \tau, \dots, T - \tau, \quad \tau \in [t_0; T];$$

$$\hat{\delta} = \max\{\delta_\xi\}.$$



## 1.4. Верификация и оценка устойчивости моделей системной динамики

---

Следует отметить, что для оценки достоверности имитационной модели, функционирующей на длинном горизонте прогнозирования, можно использовать следующую формулу:

$$\delta = \sqrt{\sum_{t=t_0}^T \sum_{i=1}^I \left( w(t) \frac{KPI_i^{\Pi}(t) - KPI_i^{\Phi}(t)}{KPI_i^{\Phi}(t)} \right)^2},$$

где  $w(t)$  — заданный весовой коэффициент (например,  $w(t) = 1/t$ ).

## Литература

---

**Акопов, А.С.** (2019) ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, НИУ ВШЭ, г. Москва

**Вьюненко, Л.Ф.** (2017) Имитационное моделирование — М. : Издательство Юрайт