Липецкий государственный технический университет

Кафедра прикладной математики

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лекция 6

6. Дисперсионный анализ

Составитель - Сысоев А.С., к.т.н., доц.

Липецк – 2022

Outline

6.1. Основные понятия

Задача: лечение состояния тревоги

Способ лечения	
КТ	**ДПДГ**
п1	п6
п2	п7
п3	п8
п4	п9
п5	п10

Межгрупповой фактор

Зависимая переменная

Независимая переменная

План эксперимента

Сбалансированный эксперимент

Несбалансированный эксперимент

При наличии одной классифицирующей переменной - **однофакторный дисперсионный анализ (one-way between-groups ANOVA)**.

Внутригрупповой фактор -> **однофакторный дисперсионный анализ для зависимых наблюдений (one-way within-groups ANOVA).**

При измерении каждого объекта более одного раза -> **дисперсионный анализ для повторных измерений (repeated measures ANOVA).**

6.1. Основные понятия

		Пациент	Время	
			5 недель	6 месяцев
Способ лечения	КТ	п1		
		п2		
		п3		
		п4		
		п5		
	ДПДГ	п6		
		п7		
		п8		
		п9		
		п10		

Исследование сочетания нескольких факторов называется **многофакторным дизайном (планом) дисперсионного анализа (factorial ANOVA design).**

Когда многофакторный дизайн включает и межгрупповые, и внутригрупповые факторы, он называется **смешанной моделью дисперсионного анализа (mixed-model ANOVA).**

Поскольку уровень депрессии также может объяснять межгрупповые различия зависимой переменной, это смешивающий фактор (confounding factor).

Мешающая переменная (nuisance variable).

6.1. Основные понятия

- суммирование квадратов расстояний между каждым значением (со всех уровней) до среднего, вычисленного по всем значениям

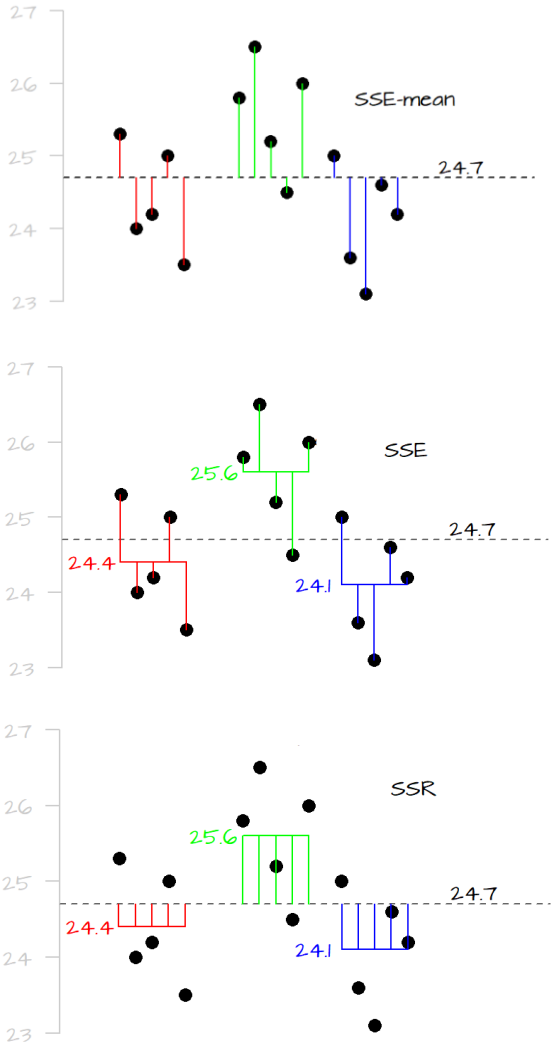
$$SSE_{mean} = \sum (y - \bar{\bar{y}})^2$$

- сравнение значений на каждом уровне с средними значениями на соответствующем уровне

$$SSE = \sum (y_1 - \bar{y}_1)^2 + \sum (y_2 - \bar{y}_2)^2 + \sum (y_3 - \bar{y}_3)^2$$

- вычисление объясненной суммы квадратов

$$SSR = SSE_{mean} - SSE$$



6.1. Основные понятия

- вычисление среднего квадратического отклонения (p – количество уровней фактора)

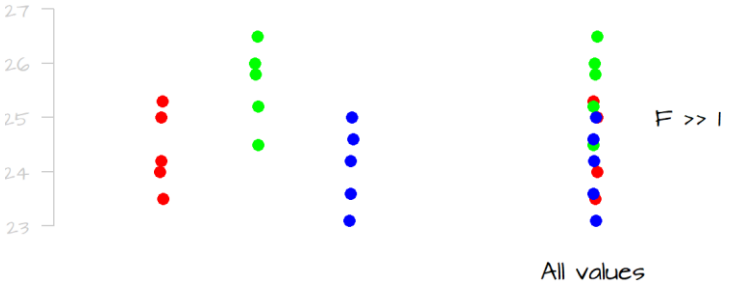
$$MSR = \frac{SSR}{p-1}$$

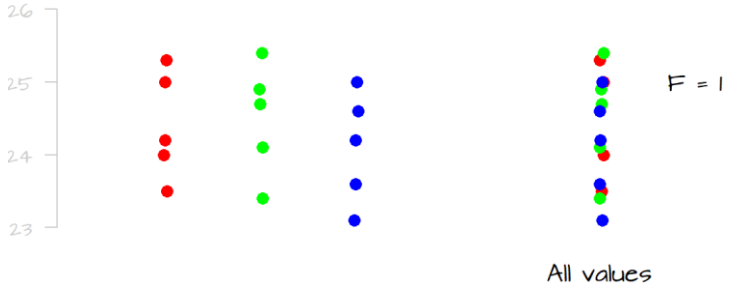
- вычисление средней квадратической ошибки (n – число реализаций)

$$MSE = \frac{SSE}{n-p}$$

- вычисление F-статистики

$$F = \frac{MSR}{MSE}$$





6.2. Подгонка ANOVA-моделей

Функция aov()

aov(*формула*, data=*таблица_данных*)

Символ	Использование
~	Разделяет зависимые переменные в левой части уравнения и независимые – в правой. Например, предсказание значений y по значениям A, B и C будет закодировано в виде `y ~ A + B + C`
+	Разделяет независимые переменные
:	Обозначает взаимодействие между переменными. Предсказание значений y по значениям A, B и взаимодействия между A и B будет закодировано в виде `y ~ A + B + A:B`
*	Обозначает все возможные сочетания переменных. Выражение `y ~ A*B*C` расшифровывается как `y ~ A + B + C + A:B + A:C + B:C + A:B:C`
^	Обозначает сочетание определенного числа переменных. Выражение `y ~ (A+B+C)^2` расшифровывается как `y ~ A + B + C + A:B + A:C + A:B`
.	Символ-заполнитель для всех остальных переменных в таблице данных, за исключением зависимой переменной. Например, если таблица данных содержит переменные y, A, B и C, то выражение `y ~ .` расшифровывается как `y ~ A + B + C`

6.2. Подгонка ANOVA-моделей

Функция aov()

Дизайн	Формула
Однофакторный дисперсионный анализ	`y ~ A`
Однофакторный ковариационный анализ с одной ковариатой	`y ~ x + A`
Двухфакторный дисперсионный анализ	`y ~ A * B`
Двухфакторный ковариационный анализ с двумя ковариатами	`y ~ x1 + x2 + A * B`
Случайный блоковый	`y ~ B + A` (где `B` – определяющий блоки фактор)
Однофакторный дисперсионный анализ для зависимых переменных	`y ~ A + Error(Объект/A)`
Дисперсионный анализ с повторными изменениями с одним внутригрупповым фактором (W) и одним межгрупповым фактором (B)	`y ~ B * W + Error(Объект/W)`

6.2. Подгонка ANOVA-моделей

Порядок членов в формуле важен, если есть больше одного фактора и эксперимент несбалансирован.

При двухфакторном дисперсионном анализе с неравным числом наблюдений для разных комбинаций факторов модель `y ~ A*B` не даст того же результата, что и модель `y ~ B*A`.

```
Y ~ A + B + A:B
```

Существует три основных подхода для распределения дисперсии y между эффектами, перечисленными в правой части уравнения.

Тип I (последовательный). Эффекты масштабируются по эффектам, которые указаны в формуле раньше. A не масштабируется, B масштабируется по A. Взаимодействие A:B масштабируется по A и B.

Тип II (иерархический). Эффекты масштабируются по тем эффектам, которые имеют такой же или более низкий уровень. A масштабируется по B, B масштабируется по A. Взаимодействие A:B масштабируется и по A, и по B.

Тип III (краевой). Каждый эффект масштабируется по любому другому эффекту в модели. A масштабируется по B и по A:B. B масштабируется по A и A:B. Взаимодействие A:B масштабируется по A и B. В R по умолчанию реализуется тип I.

Более важные эффекты должны стоять в формуле раньше.

6.3. Однофакторный дисперсионный анализ

Задача: Пятьдесят пациентов проходили один из пяти снижающих уровень холестерина курсов лечения (переменная trt). Три из этих курсов заключались в использовании одного и того же препарата в количестве 20 мг один раз в день (1time), в количестве 10 мг дважды в день (2times) или 5 мг четыре раза в день (4times). Два других курса лечения заключались в приеме альтернативных препаратов (drugD и drugE). Какой из курсов лечения привел к наиболее заметному снижению уровня холестерина (переменная response)?

```
> library(multcomp)
> attach(cholesterol)
> table(trt)
trt
 1time 2times 4times  drugD  drugE
    10     10     10     10     10

> aggregate(response, by=list(trt), FUN=mean)
  Group.1     x
1   1time  5.78
2  2times  9.22
3  4times 12.37
4   drugD 15.36
5   drugE 20.95
```

❶ **Объем выборки в каждой группе**

❷ **Средние значения в каждой группе**

6.3. Однофакторный дисперсионный анализ

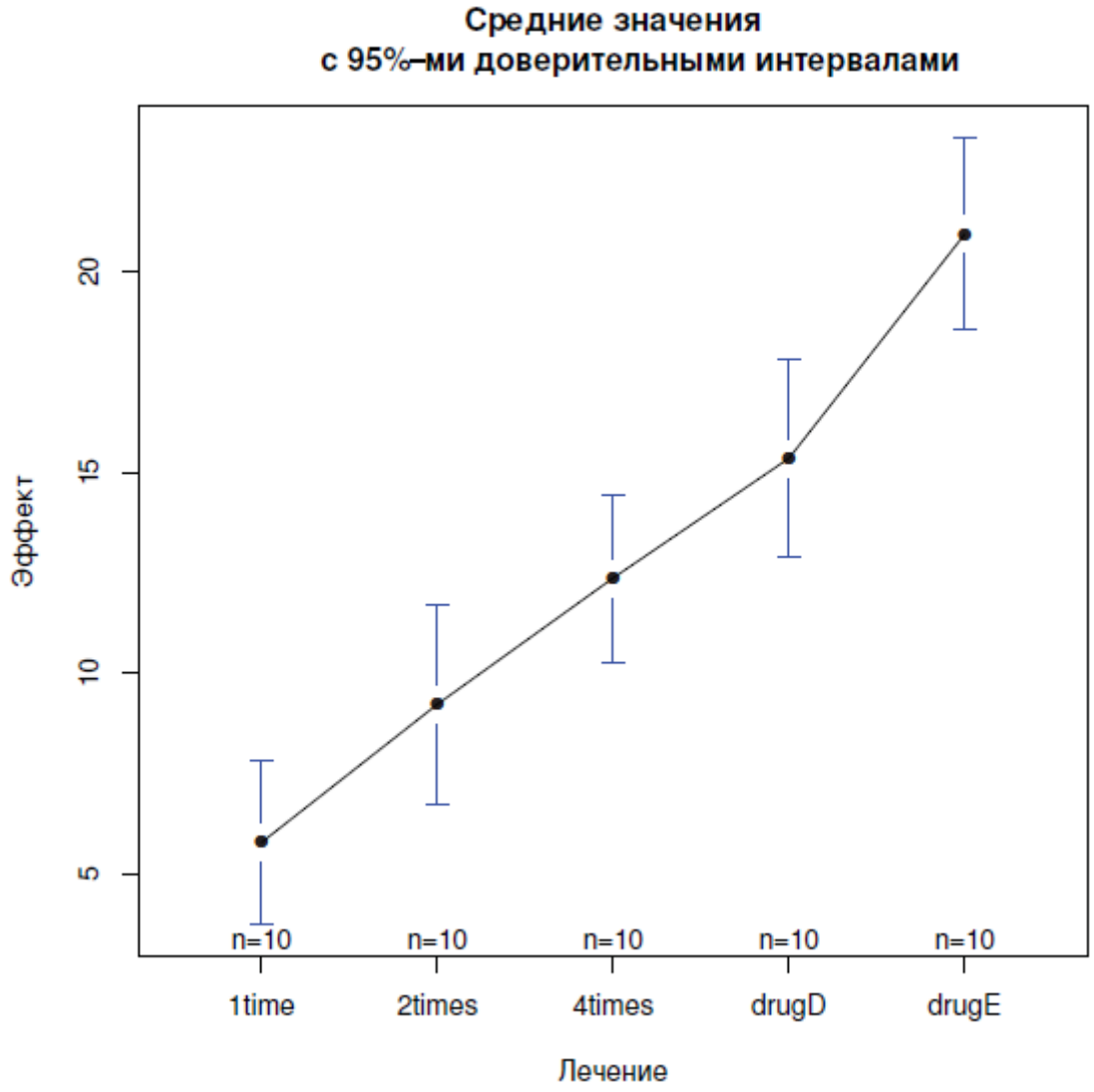
```
> aggregate(response, by=list(trt), FUN=sd)
  Group.1    x
1   1time 2.88
2  2times 3.48
3  4times 2.92
4   drugD 3.45
5   drugE 3.35

> fit <- aov(response ~ trt)
> summary(fit)
            Df Sum Sq   Mean Sq    F value             Pr(>F)
trt          4   1351       338       32.4     9.8e-13  ***
Residuals   45    469        10
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

> library(gplots)
> plotmeans(response ~ trt, xlab="Лечение", ylab="Эффект",
     main="Средние значения с 95%-ми доверительными интервалами")
> detach(cholesterol)
```

❸ **Стандартные отклонения в каждой группе**

❹ **Тест на межгрупповые различия (ANOVA)**

❺ **Графическое изображение средних значений с доверительными интервалами для каждой группы**

6.3. Однофакторный дисперсионный анализ

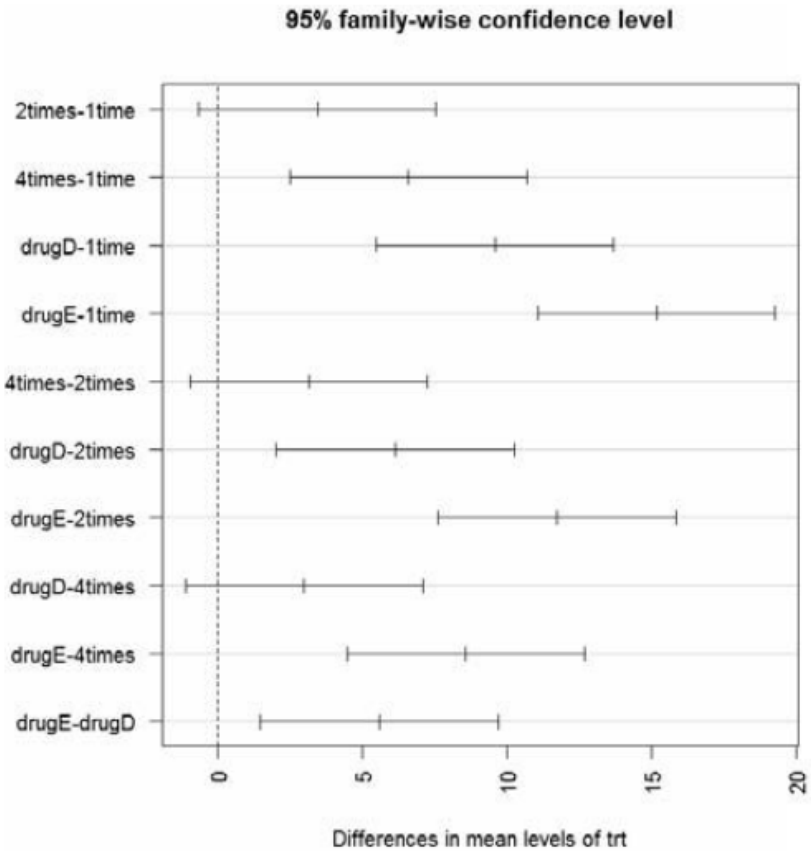


6.3. Однофакторный дисперсионный анализ

6.3.1. Множественные сравнения

Задача: Какие именно способы лечения различаются между собой?

```
> TukeyHSD(fit)
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level
Fit: aov(formula = response ~ trt)
$trt
                diff    lwr   upr p adj
2times-1time    3.44 -0.658  7.54 0.138
4times-1time    6.59  2.492 10.69 0.000
drugD-1time     9.58  5.478 13.68 0.000
drugE-1time    15.17 11.064 19.27 0.000
4times-2times   3.15 -0.951  7.25 0.205
drugD-2times    6.14  2.035 10.24 0.001
drugE-2times   11.72  7.621 15.82 0.000
drugD-4times    2.99 -1.115  7.09 0.251
drugE-4times    8.57  4.471 12.67 0.000
drugE-drugD     5.59  1.485  9.69 0.003
> par(las=2)
> par(mar=c(5,8,4,2))
> plot(TukeyHSD(fit))
```

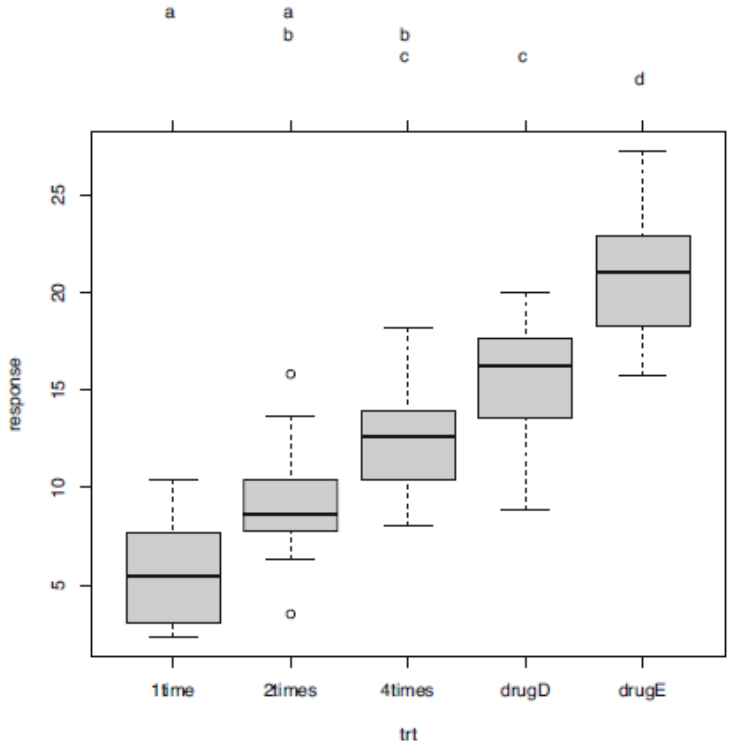


6.3. Однофакторный дисперсионный анализ

6.3.1. Множественные сравнения

Тест честных оценок достоверности различий Тьюки (Tukey honest significant differences test)

```
> library(multcomp)
> par(mar=c(5,4,6,2))
> tuk <- glht(fit, linfct=mcp(trt="Tukey"))
> plot(cld(tuk, level=.05),col="lightgrey")
```



6.3. Однофакторный дисперсионный анализ

6.3.2. Проверка справедливости допущений, лежащих в основе теста

В случае однофакторного дисперсионного анализа предполагается, что значения зависимой переменной распределены нормально и имеют одинаковую дисперсию в каждой группе.

```
> library(car)
> qqPlot(lm(response ~ trt, data=cholesterol),
         simulate=TRUE, main="Q-Q Plot", labels=FALSE)
```

Тест Барлетта (Bartlett's test)

```
> bartlett.test(response ~ trt, data=cholesterol)
        Bartlett test of homogeneity of variances
data:  response by trt
Bartlett's K-squared = 0.5797, df = 4, p-value = 0.9653
```

Проверка данных на наличие выбросов

```
> library(car)
> outlierTest(fit)
No Studentized residuals with Bonferonni p < 0.05
Largest |rstudent|:
   rstudent unadjusted p-value Bonferonni p
19 2.251149           0.029422           NA
```

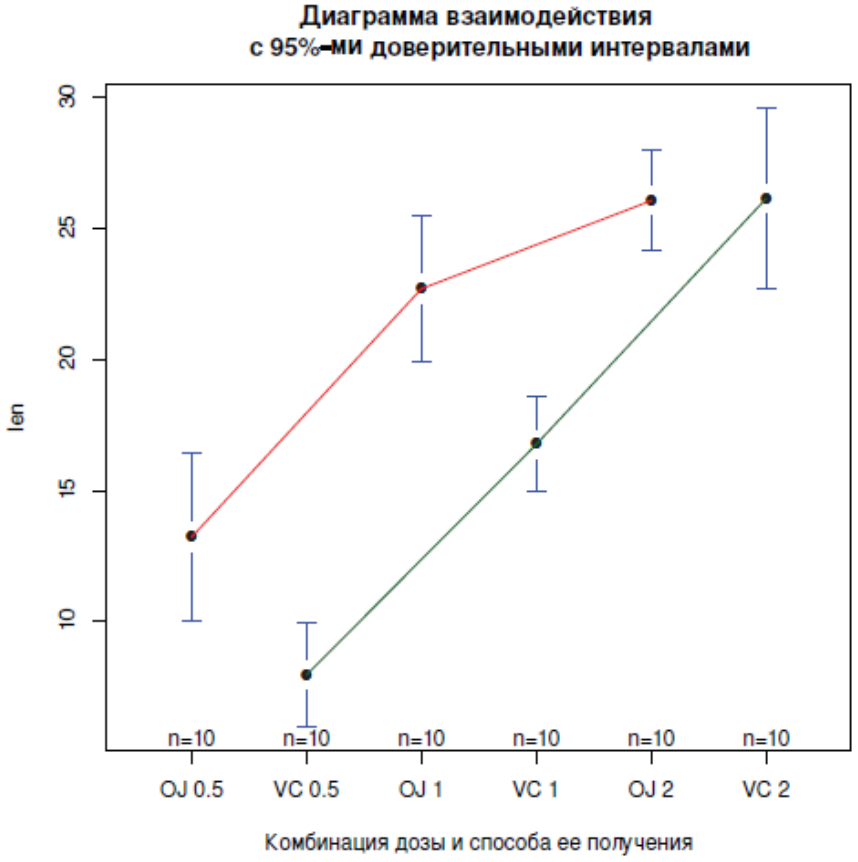
6.4. Двухфакторный дисперсионный анализ

Задача: Шестьдесят морских свинок были случайно распределены по группам, получавшим три разных количества аскорбиновой кислоты (dose: 0.5, 1 или 2 мг) двумя способами (supp: апельсиновый сок – OJ или витамин C – VC) – по 10 свинок в каждой из шести групп. Зависимая переменная – это длина зубов (len).

```
> attach(ToothGrowth)
> table(supp, dose)
    dose
supp 0.5  1  2
  OJ  10 10 10
  VC  10 10 10
> aggregate(len, by=list(supp, dose), FUN=mean)
> aggregate(len, by=list(supp, dose), FUN=sd)
> fit <- aov(len ~ supp*dose)
> summary(fit)
            Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
supp         1    205     205   12.32 0.0009 ***
dose         1   2224    2224  133.42 <2e-16 ***
supp:dose    1     89      89    5.33 0.0246 *
Residuals   56    934      17
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

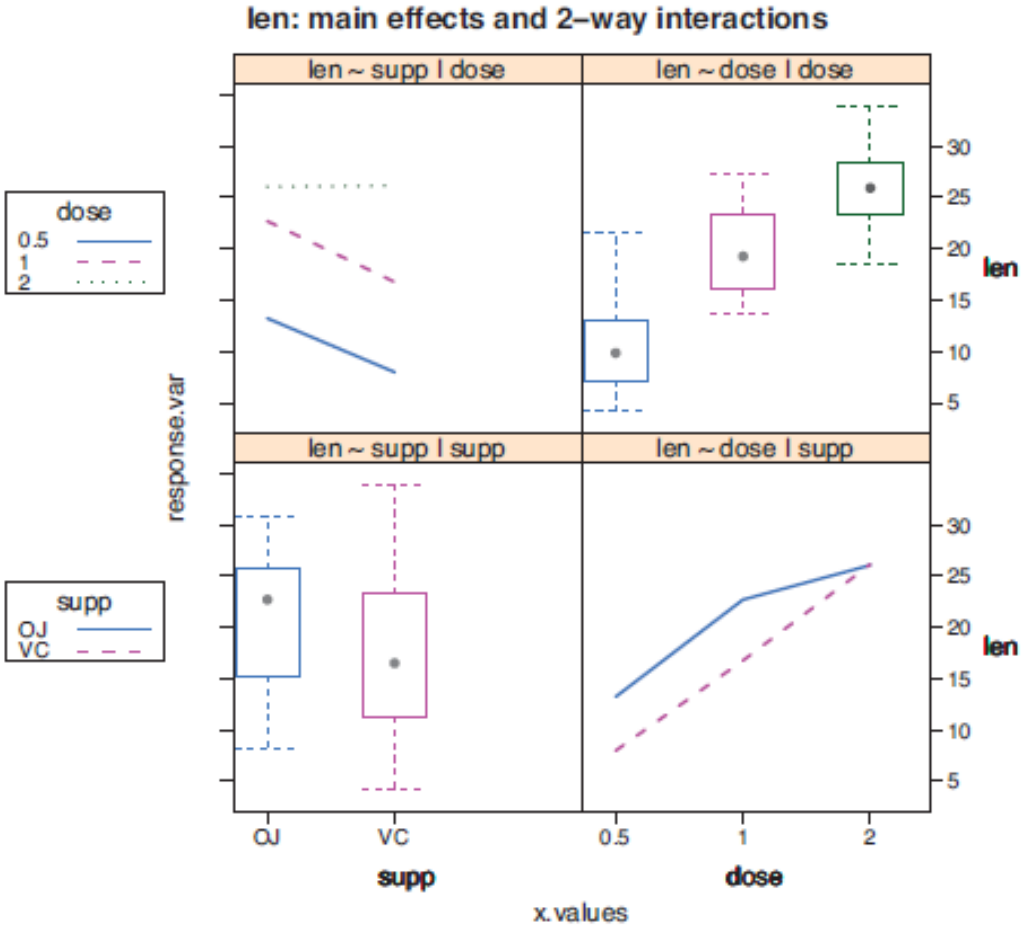
6.4. Двухфакторный дисперсионный анализ

```
library(gplots)
plotmeans(len ~ interaction(supp, dose, sep=" "),
          connect=list(c(1,3,5),c(2,4,6)),
          col=c("red", "darkgreen"),
          main = "Диаграмма взаимодействия с 95%-ми доверительными
➥интервалами",
          xlab= "Комбинация дозы и способа ее получения")
```



6.4. Двухфакторный дисперсионный анализ

```
library(HH)
interaction2wt(len~supp*dose)
```



6.5. Многомерный дисперсионный анализ

Задача: Как зависит содержание калорий (calories), жиров (fat) и углеводов (sugars) в американских сухих завтраках от того, на какой полке в магазине они стоят (shelf: 1 – нижняя полка, 2 – средняя, 3 – верхняя). Количество калорий, жиров и углеводов – это зависимые переменные, а номер полки – независимая переменная с тремя уровнями (1, 2 и 3).

```
> library(MASS)
> attach(UScereal)
> y <- cbind(calories, fat, sugars)
> aggregate(y, by=list(shelf), FUN=mean)
  Group.1 calories   fat sugars
1       1      119 0.662    6.3
2       2      130 1.341   12.5
3       3      180 1.945   10.9
> cov(y)
          calories   fat sugars
calories   3895.2 60.67 180.38
fat          60.7  2.71   4.00
sugars      180.4  4.00  34.05
> fit <- manova(y ~ shelf)
> summary(fit)
           Df Pillai approx F num Df den Df  Pr(>F)
shelf       1 0.1959   4.9550      3     61 0.00383 **
Residuals 63
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

6.5. Многомерный дисперсионный анализ

```
> summary.aov(fit)          <— Вывод результатов для каждого признака
 Response calories :
            Df  Sum Sq  Mean Sq  F value          Pr(>F)
shelf        1   45313   45313   13.995 0.0003983  ***
Residuals   63  203982    3238
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

 Response fat :
            Df   Sum Sq   Mean Sq  F value         Pr(>F)
shelf        1   18.421   18.421   7.476 0.008108  **
Residuals   63  155.236    2.464
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

 Response sugars :
            Df   Sum Sq   Mean Sq  F value       Pr(>F)
shelf        1   183.34   183.34   5.787 0.01909   *
Residuals   63  1995.87    31.68
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Функция manova() осуществляет многомерный тест на межгрупповые различия. Статистически значимая величина F-статистики свидетельствует о том, что наши три группы злаков различаются по питательной ценности.

Библиографический список

Кабаков Р. К. (2014) R в действии. Анализ и визуализация данных на языке R Издательство: ДМК Пресс, 580 с.

Шипунов А. Б., Балдин Е. М., Волкова П. А., Коробейников А. И., Назарова С. А., Петров С. В., Суфиянов В. Г. (2012) Наглядная статистика. Используем R! - М.: ДМК Пресс, 298 с.