Lineare Algebra I

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 12

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov und Oliver Hendrichs im Wintersemester 2024-25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de .

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden.

Aufgabe 1

1. Bestimme die Nullstellen des Polynoms $x^2 - 2x + 2$ über $\mathbb{C}$ und über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
2. Bestimme die Nullstellen des Polynoms $x^3 + x^2 - 9x + 6$ über $\mathbb{C}$.
3. Bestimme die irreduzible Darstellung von $x^4 + 4$ als Polynom in $\mathbb{R}$.

Lösung:
Wir definieren zu Beginn:

> Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Einselement $\mathbb{1}_{\mathbb{K}}$ und Nullelement $0_{\mathbb{K}}$. Dann definieren wir die *Charakteristik von* $\mathbb{K}$ als
> $$\mathsf{char}(\mathbb{K}) = \inf\{n \in \mathbb{N}_+ \mid \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}\}$$
> wobei wir $\inf \varnothing = 0$ vereinbaren.

Wir prüfen also, wie oft wir die Eins in einem Körper addieren müssen um wieder die Null zu bekommen.[1] Das Studium von Körpern, ihrer Charakteristik und Polynomen ist sehr spannend, wird aber erst in der Algebra tiefergehend behandelt. Für uns ist die Charakteristik eigentlich nur aus dem Grund interessant: Gilt $\mathsf{char}(\mathbb{K}) = 2$, gilt also $0 = 2$, bzw. $1 = -1$, dann gelten manche Aussagen nicht mehr so, wie man es erwarten würde. Häufig schließt man von vorneherein aus, dass der betrachtete Körper die Charakteristik 2 haben könnte. Wir wollen auch hier von nun an annehmen, dass unser Körper eine Charakteristik $\neq 2$ hat. Wir werden uns auch immer auf Unterkörper von $\mathbb{C}$ beschränken, obwohl es natürlich in der Realität noch sehr viele andere, interessante Körper gibt.

Wir wollen hier Nullstellen von Polynomen finden. Dafür gibt es mehrere hilfreiche Methoden und Aussagen. Es gilt:

> Sei $F \neq 0$ ein Polynom von Grad n mit Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$. Dann hat F genau n Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) in $\mathbb{C}$.

Diese Nullstellen müssen aber nicht im Körper $\mathbb{K}$ selbst liegen. Beispielsweise hat $1 + x^2$ zwei Nullstellen (i und $-i$), diese liegen aber beide nicht in $\mathbb{R}$, obwohl alle Koeffizienten des Polynoms in $\mathbb{R}$ liegen. Es gilt auch

[1] Achtung: Das Ganze sieht der Definition der Ordnung eines Gruppenelements recht ähnlich, aber hier wählen wir 0, statt $+\infty$, wenn es kein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Sei $F \neq 0$ ein Polynom von Grad n mit Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von F, dann gibt es ein Polynom G von Grad $n-1$ mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$, sodass

$$F = G \cdot (X - \lambda)$$

Wir können also jede Nullstelle eines Polynoms F als Linearfaktor abspalten und das Polynom als Produkt dieses Linearfaktors und einem Polynom G von kleinerem Grad als F aufschreiben. Das Polynom G können wir dann durch Polynomdivision bestimmen. Natürlich gibt es auch den Fall, dass F keine Nullstelle hat, dann geht das nicht.

Verbinden wir das mit der ersten Aussage, dann gilt für ein Polynom F von Grad n mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$, dass wir stets eine Nullstelle finden und damit auch ein Polynom G von Grad $n-1$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Da dieses Polynom in $\mathbb{C}$ ist, finden wir erneut eine Nullstelle und ein Polynom H von Grad $n-2$ etc.. Das kann solange fortgesetzt werden, bis wir bei einem Produkt von Linearfaktoren mit einer Konstanten angekommen sind. Eine Konstante hat keine Nullstellen (außer die Konstante ist 0, aber dann ist das ganze Polynom 0 und den Fall betrachten wir nicht.), also hört unsere Zerlegung hier auf. Die Kernaussage ist

Sei $F \neq 0$ ein Polynom von Grad n mit Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$. Dann gibt es $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, sodass

$$F = \alpha \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)$$

Das nur als kleiner Überblick. Nun zur Frage, wie wir diese Nullstellen finden: Für alle Polynome von Grad $n \leq 4$ gibt es geschlossene Formeln, die für den dritten und vierten Grad sind aber für den alltäglichen Gebrauch zu unhandlich.[2] Die Mitternachtsformel wird allerdings viel Anwendung finden und auch die PQ-Formel kann praktisch sein.

Sei F ein quadratisches Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ von der Form $F(x) = ax^2 + bx + c$, dann sind die Nullstellen bestimmt durch

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{C}$$

Außerdem gilt, dass $c = x_- \cdot x_+$ und $-b = x_- + x_+$.

Die PQ-Formel ist nur in Ausnahmefällen wirklich nützlich, während man mit der Mitternachtsformel immer auf ein Ergebnis kommt. Obige Aussage ist für Polynome in $\mathbb{C}$, aber wenn wir die Nullstellen eines quadratischen Polynoms über $\mathbb{K} \subsetneq \mathbb{C}$ bestimmen wollen, dann können wir die komplexen Nullstellen bestimmen und überprüfen, ob diese in unserem Körper liegen. Wenn nicht, dann wissen wir bereits, dass unser Polynom in unserem Körper keine Nullstellen hat.
In dem Zusammenhang kann man sich auch merken, dass ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten entweder zwei reelle Nullstellen, oder zwei komplex konjugierte nichtreelle Nullstellen hat. Der Fall, dass eine Nullstelle reell ist, die andere aber nicht, kann nicht auftreten, da das Polynom dann keine rellen Koeffizienten mehr hätte. Die PQ-Formel lässt sich übrigens wie folgt verallgemeinern:

[2] Siehe hierfür auch https://de.wikipedia.org/wiki/Quartische_Gleichung, das erste Bild auf der Seite.[Stand 07.02.2025]

Sei F ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ und Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Es gelte

$$F(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

mit $\alpha_j \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$-\alpha_{n-1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$$

$$\alpha_0 = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$$

das heißt der letzte Koeffizient des Polynoms ist das Produkt aller Nullstellen und das Negatives des zweiten Koeffizienten ist die Summe aller Nullstellen. Während wir bei quadratischen Polynomen mit der Mitternachtsformel im Allgemeinen schneller sind, als uns mithilfe der PQ-Formel zu überlegen, was unsere Nullstellen sind, kann diese Methode hilfreich sein um die Nullstellen bei Polynomen höheren Grades zu bestimmen - sofern die Nullstellen alle in $\mathbb{Z}$ liegen. Sei beispielsweise das Polynom

$$F(x) = x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 84x + 45$$

gegeben. Angenommen wir wissen, dass die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ alle in $\mathbb{Z}$ liegen, dann wissen wir, dass ihr Produkt genau 45 ergibt, während ihre Summe genau 12 ergibt. Die eindeutige Primzahlzerlegung von 45 ist $3 \cdot 3 \cdot 5$, also wissen wir, dass unsere Nullstellen entweder ± 1 oder ein Produkt dieser Faktoren sind. Wenn wir das ganze noch mit der Summe vergleichen, dann sehen wir, dass die einzigen Möglichkeiten entweder $(1, 3, 3, 5), (-1, 1, 3, 15)$ oder $(-1, -1, 5, 9)$ sind. Kombinationen wie $(-3, 1, 3, 5)$ würden wegfallen, da die Summe dann $6 \neq 12$ wäre. Wir können das ganze nun weiter einschränken indem wir versuchen effizient die Nullstellen zu erraten. Wenn wir 9 und 15 einsetzten, dann wüssten wir sofort, welche der drei Kombinationen die Nullstellen sind, aber das ist von Hand fehleranfällig, also setzen wir 1 ein. Ist 1 eine Nullstelle, dann ist es eine der ersten beiden Kombinationen. Ist 1 keine Nullstelle, dann ist es die letzte Kombination. Es gilt

$$F(1) = 1 - 12 + 50 - 84 + 45 = 0$$

also wissen wir, dass die Nullstellen entweder $(1, 3, 3, 5)$ oder $(-1, 1, 3, 15)$ sind. Um das zu überprüfen setzen wir nun noch -1 ein. Dann gilt

$$F(-1) = 1 + 12 + 50 + 85 + 45 = 193 \neq 0$$

und wir sehen, dass als mögliche Kombination nur $(1, 3, 3, 5)$ übrig bleibt. Wir schreiben nun

$$F(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 3)(x - 5)$$

und haben die Linearzerlegung von F gefunden.
Natürlich ist das hier ein besonders praktisches Beispiel und in der Praxis wird man vermutlich eher eine Nullstelle bestimmen, Polynomdivision durchführen, die nächste Nullstelle bestimmen, etc.

Noch ein Wort zu Polynomen über Körpern ungleich $\mathbb{C}$ und ihrer Zerlegung. Wie wir gesehen haben, können wir jedes Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerlegen. Das gilt im Allgemeinen nicht - die Zerlegung in Linearfaktoren ist eindeutig. Betrachten wir dafür $f(x) = x^2 + 1$. Wir können die Nullstellen hier zu $-i$ und $+i$ bestimmen, also gilt

$$f(x) = (x - i)(x + i)$$

also eine Zerlegung in Linearfaktoren mit rein imaginären Koeffizienten. Da die Darstellung eindeutig ist, gibt es keine andere Darstellung, das heißt über $\mathbb{R}$ können wir das Polynom $x^2 + 1$ nicht weiter zerlegen. Es gilt

Sei F ein nichtkonstantes Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$. Wir nennen es *irreduzibel über* $\mathbb{K}$, wenn es keine nichtkonstanten Polynome P, Q mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ gibt, sodass $F = P \cdot Q$ gilt.

Das heißt also, dass $x^2 + 1$ irreduzibel über $\mathbb{R}$ ist. Unser obiges Argument zeigt auch, dass in $\mathbb{C}$ die irreduziblen Polynome genau alle linearen Polynome sind. Über $\mathbb{R}$ sind die irreduziblen Polynome genau die Polynome von Grad 1 und 2, die keine reellen Nullstellen haben - auch das sieht man in der Algebra. Wichtig ist hierbei jeweils das Wort "nichtkonstant", denn natürlich kann ich jedes Polynom F in $F \cdot 1$ zerlegen. Nun zur Aufgabenlösung selbst:

1. Wir bestimmen die Nullstellen von $x^2 - 2x + 2$ mithilfe der Mitternachtsformel. Es gilt

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

über $\mathbb{C}$ gilt $\sqrt{-4} = \pm 2i$, also sind die Nullstellen

$$x_{1,2} = 1 \pm i$$

Wir können die Mitternachtsformel auch für $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ anwenden. In diesem Fall gilt aber $-4 = 1 \mod 5$. Es gilt $1^2 = 1$, also ist 1 eine Wurzel und $(-1)^2 = 1$, also ist $4 = -1 \mod 5$ auch eine Wurzel. Dann überlegen wir uns noch, dass $2^{-1} = 3$, da $2 \cdot 3 = 6 = 1 \mod 5$ gilt. Insgesamt lauten unsere Nullstellen also

$$x_{1,2} = 3 \cdot (2 \pm 1)$$

und unsere Nullstellen sind damit

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 3$$

Wir sehen, dass die Mitternachtsformel in beiden Fällen zu einem Ergebnis führt, wir aber unterschiedlich rechnen müssen.

2. Wir bestimmen die Nullstellen von $f(x) = x^3 + x^2 - 9x + 6$ über $\mathbb{C}$. In diesem Fall können wir versuchen eine der Nullstellen zu erraten indem wir uns überlegen, dass das Produkt der Nullstellen der letzte Koeffizient ist, also $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 6$ gilt. Unter der Hoffnung, dass eine der Nullstellen eine ganze Zahl ist, können wir es also mit $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ probieren. Es gilt

$$f(2) = 8 + 4 - 18 + 6 = 0$$

also ist 2 eine der gesuchten Nullstellen. Nach einer Polynomdivision erhalten wir

$$f = (x - 2)(x^2 + 3x - 3)$$

und bestimmen die Nullstellen des zweiten Polynoms mit der Mitternachtsformel:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

also sind unsere Nullstellen insgesamt

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}, \quad \lambda_3 = 2$$

3. Wir wollen $f = x^4 + 4$ als Produkt von irreduziblen Polynomen über $\mathbb{R}$ ausdrücken. Diese irreduziblen Faktoren direkt zu finden ist schwierig, also wählen wir den Umweg über die komplexen Zahlen indem wir zuerst die Nullstellen bestimmen, das Polynom in Linearfaktoren zerlegen und diese danach so miteinander multiplizieren, dass nur reelle Polynome übrig bleiben. Um die Nullstellen zu bestimmen überlegen wir uns folgendes:
   Wenn wir die Nullstellen von $x^4 + 1$ bestimmen, dann können wir jede dieser Nullstellen mit $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ multiplizieren um das gewünschte Ergebnis zu erhalten. Die Nullstellen von $x^4 + 1$ sind aber genau die vierten Einheitswurzeln. Um diese zu berechnen können wir uns das ganze bildhaft vorstellen indem wir uns den Einheitskreis aufmalen und überlegen, dass eine Multiplikation mit einer Zahl z, wobei $|z| = 1$ gilt, eine Rotation um den Mittelpunkt entlang des Einheitskreises ist. Wir beginnen bei 1 und wollen nun viermal die gleiche Rotation ausführen um bei -1 zu landen. Anders gesagt: Einheitswurzeln liegen auf dem Einheitskreis und alle Elemente des Einheitskreises können wir als Produkt $e^{i\pi k}$ darstellen, wobei $k \in \mathbb{R}$ liegt. Es gilt für eine Einheitswurzel $\zeta_j = e^{i\pi j}$, dass

$$-1 \overset{!}{=} \zeta_j^4 = \left(e^{i\pi j}\right)^4 = e^{4i\pi j}$$

   gilt. Da $-1 = e^{i\pi}$ gilt und die Funktion e^{ik} eine Periode von 2π hat, reicht es also aus j so zu bestimmen, dass $4j = 1 + 2k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Eine mögliche Lösung ist also $j = \frac{1}{4}$. Die anderen Lösungen können wir nun erhalten indem wir $j + \frac{2k}{4}$ addieren, also gilt

$$j = \frac{1 + 2k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

   Da $e^{i\pi j} = e^{i\pi(j+2)}$ gilt, können wir uns auf $k \in \{1, 2, 3\}$ beschränken und erhalten genau vier Einheitswurzeln, nämlich

$$\zeta_1 = e^{\frac{1}{4}i\pi} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \zeta_2 = e^{\frac{3}{4}i\pi} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \zeta_3 = e^{\frac{5}{4}i\pi} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \zeta_4 = e^{\frac{7}{4}i\pi} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

   Wir multiplizieren, wie oben angemerkt jede dieser Nullstellen mit $\sqrt{2}$, damit wir nicht die Nullstellen von x^4+1, sondern die von x^4+4 berechnen und erhalten folgende Linearzerlegung:

$$x^4 + 4 = (x - (1 + i))(x - (-1 + i))(x - (-1 - i))(x - (1 - i))$$

   Nun müssen wir das ganze noch als Produkt von Polynomen in $\mathbb{R}$ schreiben. Wir sehen, dass wir jeweils zwei Paare von zueinander komplex konjugierten Wurzeln haben. Wenn wir die Linearterme dieser Wurzeln miteinander multiplizieren, erhalten wir folglich reelle Polynome. Es gilt

$$(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = x^2 - 2x + 2$$
$$(x - (-1 + i))(x - (-1 - i)) = x^2 + 2x + 2$$

   Das heißt insgesamt erhalten wir

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

und da die Nullstellen der beiden quadratischen Faktoren jeweils nichtreell sind, wissen wir, dass wir die Polynome in den reellen Zahlen nicht mehr zerlegen können. Das heißt wir haben unsere irreduzible Darstellung gefunden.

Aufgabe 2
Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Auf dem letzten Blatt hatten wir definiert was Eigenwerte und Eigenvektoren sind, wir werden nun über die Bestimmung derselben sprechen. Es gilt

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix. Wir definieren das *charakteristische Polynom von A* als

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda \mathbb{1}_n)$$

und die *charakteristische Matrix von A* als $A - \lambda \mathbb{1}_n$

Die Definition ist nicht eindeutig. Oft wird das charakteristische Polynom auch als $\det(\lambda \mathbb{1}_n - A)$ definiert. Das ganze unterscheidet sich aber lediglich durch einen Faktor $(-1)^n$. Analog wird die charakteristische Matrix manchmal auch als $\lambda \mathbb{1}_n - A$ definiert.
Das charakteristische Polynom ist wegen folgender Aussage interessant:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix. Dann sind die Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$ genau die Eigenwerte von A.

Das kann man sich so überlegen:
λ ist ein Eigenwert zum Eigenvektor v genau dann, wenn $Av = \lambda v$ gilt. Das ist äquivalent zu $(A - \lambda \mathbb{1}_n)v = 0$ (Es gilt $\lambda v = \lambda \mathbb{1}_n v$, also können wir von beiden Seiten der Gleichung $\lambda \mathbb{1}_n v$ abziehen.) Das heißt v liegt im Kern von $A - \lambda \mathbb{1}_n$. Da wir $v \neq 0$ verlangt haben, ist der Kern der charakteristischen Matrix damit nicht trivial, die Abbildung also nicht bijektiv. Matrizen sind genau dann bijektiv, wenn ihre Determinante ungleich Null ist. Das heißt in diesem Fall also, dass $\det(A - \lambda \mathbb{1}_n)$ gleich Null sein muss - aber das bedeutet, dass λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Wollen wir die Eigenwerte einer Matrix bestimmen, so ist der einfachste Weg also üblicherweise das charakteristische Polynom zu berechnen und dessen Nullstellen zu bestimmen. Wir definieren nun

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A. Der Vektorraum der von allen Eigenvektoren zu λ aufgespannt wird, heißt *Eigenraum zu λ*, geschrieben $E_A(\lambda)$, bzw., falls bezüglich der Matrix keine Verwechslungsgefahr besteht nur $E(\lambda)$.

- Die *algebraische Vielfachheit* $V_\alpha(\lambda)$ von λ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms.
- Die *geometrische Vielfachheit* $V_\mu(\lambda)$ von λ ist die Dimension des Eigenraums zu λ.

Die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von Eigenwerten werden für Aufgabe 3 und auf dem letzten Blatt interessant, wo es um die Diagonalisierung von Matrizen geht. Es gilt jedoch stets $1 \leq V_\mu(\lambda) \leq V_\alpha(\lambda)$. Es gilt nun noch

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A. Ein Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ ist genau dann ein Eigenvektor zu λ, wenn er die Gleichung

$$(A - \lambda \mathbb{1}_n)v = 0$$

erfüllt.

Die letzte Gleichung ergibt intuitiv Sinn. Denn Eigenwert und Eigenvektor lassen sich über die Gleichung $Av = \lambda v$ definieren. Also können wir erneut $(\lambda \mathbb{1}_n)v$ von beiden Seiten abziehen und erhalten genannte Charakterisierung.

In der Praxis ist es häufig Teil einer Aufgabe zu einer gegebenen Matrix A die folgenden Objekte zu bestimmmen:

1. Eigenwerte von A.
2. Algebraische Vielfachheiten der Eigenwerte.
3. Eigenräume, bzw. Eigenvektoren zu den Eigenwerten.
4. Geometrische Vielfachheiten der Eigenwerte.

Wobei die Bestimmung der algebraischen Vielfachheiten häufig in einem Zug mit der Bestimmung der Eigenwerte selbst durchgeführt werden kann und man durch die Bestimmung der Eigenräume automatisch auch die geometrischen Vielfachheiten bestimmt. Es gibt hierbei eine Reihe von Bemerkungen:

Die Eigenwerte einer Matrix müssen nicht alle in dem Körper liegen aus dem die Koeffizienten der Matrix stammen. Wie wir oben bereits besprochen hatten, können wir nur für $\mathbb{C}$ garantieren, dass tatsächlich alle Nullstellen eines Polynoms im zugrundeliegenden Körper sind. Betrachten wir beispielsweise

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Es gilt

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \mathbb{1}_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

Also sind die Eigenwerte $\pm i$ und damit nicht in $\mathbb{R}$. Wir können direkt ablesen, dass die algebraische Vielfachheit beider Eigenwerte 1 ist. Da stets $1 \leq V_\mu(\lambda) \leq V_\alpha(\lambda)$ gilt, wissen wir hier bereits, dass die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte 1 ist.

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren der Matrix indem wir das Gleichungssystem aufstellen. Es gilt für $\lambda_1 = -i$, dass

$$M - (\lambda_1)\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

also lösen wir nun das homogene Gleichungssystem $(M + i\mathbb{1}_2)v = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} ix_1 + x_2 &= 0 \\ -x_1 + ix_2 &= 0 \end{aligned}$$

also sind die beiden Zeilen linear abhängig und wir erhalten als Lösungsvektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

und analog erhalten wir

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Wir sehen also, dass für diese Matrix auch die Einträge der Eigenvektoren nicht in $\mathbb{R}$ liegen.

Zur geometrischen Vielfachheit von Eigenwerten:
Manchmal ist es nicht notwendig die Eigenräume konkret zu bestimmen, sondern nur ihre Dimension, also die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte. Es gilt

$$V_\mu(\lambda) = \dim(E(\lambda)) = \dim(\ker(A - \lambda \mathbb{1}_n)) = n - \mathsf{rk}(A - \lambda \mathbb{1}_n)$$

wobei wir für die letzte Gleichung den Rangsatz verwendet haben. Es reicht also in diesem Fall aus, wenn wir lediglich den Rang der charakteristischen Matrix bestimmen. Wie wir oben festgestellt hatten ist λ genau dann eine Nullstelle, wenn die charakteristische Matrix nicht bijektiv ist - das heißt aber, dass ihr Rang nicht voll sein kann, deswegen ist die geometrische Vielfachheit mindestens 1.

Wir wollen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Die charakteristische Matrix lautet

$$A - \lambda \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 6 & -3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

und das charakteristische Polynom ist die Determinante dieser Matrix, also

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda(5-\lambda)(-1-\lambda) + 6 + 6 - 3\lambda - 2(5-\lambda) + 6(-1-\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda - 4$$

Der letzte Koeffizient ist -4, also teilen unsere Nullstellen 4, als $\mathbb{Z}$-wertige Nullstellen kämen damit $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ in Frage. Es gilt

$$\chi_A(2) = 0$$

also ist 2 der erste Eigenwert. Wir führen eine Polynomdivision durch und erhalten

$$(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda - 4) : (\lambda - 2) = -\lambda^2 + 2\lambda + 2$$

mit der Mitternachtsformel gilt

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{-2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Unsere Eigenwerte sind also

$$\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}$$

alle mit algebraischer Vielfachheit $V_\alpha(\lambda_j) = 1$.[a] Wir bestimmen als nächstes die Eigenvektoren und stellen dafür jeweils das Gleichungssystem auf.

Für λ_1 gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{Z_2 + \frac{1}{3}Z_1 \\ Z_3 - \frac{1}{3}Z_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

hier können wir ablesen, dass $x_3 = 0$ und damit $3x_1 + 6x_2 = 0$, also $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$ gelten muss. Unser Eigenvektor lautet damit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analog lösen wir das Gleichungssystem für $\lambda_{2,3}$ durch (wobei wir die Lösungsspalte weglassen, weil die eh immer Null ist)

$$\begin{pmatrix} 4 \mp \sqrt{3} & 6 & -3 \\ -1 & -1 \mp \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 & -2 \mp \sqrt{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \leftrightarrow Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \mp \sqrt{3} \\ -1 & -1 \mp \sqrt{3} & 1 \\ 4 \mp \sqrt{3} & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{Z_2 + Z_1 \\ Z_3 - (4 \mp \sqrt{3})Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \mp \sqrt{3} \\ 0 & 1 \mp \sqrt{3} & -1 \mp \sqrt{3} \\ 0 & -2 \pm 2\sqrt{3} & 2 \pm 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 + 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \mp \sqrt{3} \\ 0 & 1 \mp \sqrt{3} & -1 \mp \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_2 \cdot (1 \mp \sqrt{3})^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \mp \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 2 \pm \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_1 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \mp 3\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 2 \pm \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen ab, dass $x_1 = (6 \pm 3\sqrt{3})x_3$, sowie $x_2 = (-2 \mp \sqrt{3})$. Die Eigenvektoren lauten also

$$v_{2,3} = \begin{pmatrix} 6 \pm 3\sqrt{3} \\ -2 \mp \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

[a] Auch hier sehen wir, dass die Antwort vom zugrundeliegenden Körper abhängig ist. Während wir in $\mathbb{R}$ also drei Eigenwerte haben, gibt es in $\mathbb{Q}$ nur eine, da $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. In $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ wäre $\sqrt{3} = \sqrt{0} = 0$, also wäre 1 eine zweifache Nullstelle.

Aufgabe 3
Welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

Lösung:
Wir beginnen mit

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dann nennen wir A eine *diagonalisierbare Matrix*, wenn es eine Basis C gibt, sodass A, dargestellt in der Basis C Diagonalform hat. Anders gesagt, A ist diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix T gibt, sodass

$$T^{-1}AT = D$$

und D ist in Diagonalform.

Diagonalmatrizen haben gegenüber allgemeinen Matrizen diverse Vorzüge. Der offensichtlichste ist, dass man mit ihnen sehr viel leichter (und schneller) rechnen kann, da das Produkt zweier Diagonalmatrizen wieder eine Diagonalmatrix ist und man nur die Diagonaleinträge an gleicher Stelle miteinander multiplizieren muss. Wir hatten in der Vorlesung gesehen, dass, wenn eine Matrix diagonalisierbar ist, ihre Diagonalform genau die Eigenwerte der Matrix enthält. Das heißt in dieser Basis sind sowohl die Eigenwerte, als auch die Eigenvektoren direkt ablesbar. Das liegt auch an folgender Charakterisierung:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Matrix A ist diagonalisierbar.
2. Es existiert eine Basis von $\mathbb{K}^n$, die nur aus Eigenvektoren von A besteht.
3. Für alle Eigenwerte stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.
4. Für alle Eigenwerte λ gilt, dass $\dim\ker(A - \lambda\mathbb{1}_n) = V_\alpha(\lambda)$.

Wollen wir also nur wissen ob eine Matrix diagonalisierbar ist, dann müssen wir nicht konkret alle Eigenvektoren ausrechnen und prüfen, ob sie eine Basis bilden, sondern nur überprüfen ob die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten übereinstimmen. Und dafür reicht es aus, die Dimension des Kerns der charakteristischen Matrix zu diesem Eigenwert zu bestimmen. Üblicherweise ist es hierfür am einfachsten, wenn die Matrix mit dem Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform gebracht wird. Dann kann man den Kern der Matrix ablesen, da er der Anzahl der Nullzeilen entspricht.

Es gibt allerdings einige Fälle in denen wir das noch schneller sehen. Hat eine Matrix n verschiedene Eigenwerte, so ist die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwertes gleich 1. Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist aber immer mindestens 1, also folgt direkt, dass die Matrix diagonalisierbar ist. Hat eine Matrix nur einen einzelnen Eigenwert, dann ist sie entweder bereits in Diagonalform, oder sie ist nicht diagonalisierbar. Denn in diesem Fall muss gelten, dass $\dim\ker(A - \lambda\mathbb{1}_n) = n$ gilt. Daraus folgt aber $A - \lambda\mathbb{1}_n = 0$, also $A = \lambda\mathbb{1}_n$.

Dieses Wissen ist alles, was man für die Lösung braucht.

1. Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(\lambda) = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 4 = \lambda^2$$

also haben wir den doppelten Eigenwert 0. Dann können wir aber direkt sehen, dass die Matrix nicht diagonalisierbar ist, denn $A \neq 0$, also ist $\dim\ker(A) \neq 2$ und die geometrische Vielfachheit entspricht nicht der algebraischen Vielfachheit.

2. Wir betrachten
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$
Das charakteristische Polynom ist in diesem Fall
$$\chi_B(\lambda) = (2-\lambda)(-2-\lambda)$$
also sind die Eigenwerte 2 und -2. Da wir nur verschiedene Eigenwerte haben und damit die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwerts 1 ist, ist die Matrix damit diagonalisierbar.

3. Wir betrachten
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
Das charakteristische Polynom ist
$$\chi_C(\lambda) = (2-\lambda)^2$$
also ist 2 ein doppelter Eigenwert. Da $A \neq 2\mathbb{1}_2$ ist, folgt damit auch direkt, dass $\dim\ker(A - 2\mathbb{1}_2) \neq 2$ und deswegen ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 4
Sei für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 11 & -14 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$$
die Folge $(v_n) \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert als
$$v_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad v_{n+1} = Av_n$$
Bestimme alle v_0 für die ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\forall n \geq N$ die erste Koordinate von v_n größer als 0 ist.

Lösung:

Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix. Das charakteristische Polynom von A ist
$$\chi_A(\lambda) = (11-\lambda)(-10-\lambda) + 98 = \lambda^2 - \lambda - 12 = (\lambda+3)(\lambda-4)$$
also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4$. Wir stellen die Gleichungssysteme
$$A + 3\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 14 & -14 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$$
$$A - 4\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 7 & -14 \\ 7 & -14 \end{pmatrix}$$
auf, wobei wir direkt ablesen können, dass
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also kennen wir bereits die Eigenvektoren. Da wir zwei Vektoren in einem zweidimensionalen Vektorraum haben, sind sie eine Basis. Das heißt wir können die Standardbasis durch diese Vektoren ausdrücken. Es gilt

$$e_1 = u_2 - u_1, \quad e_2 = 2u_1 - u_2$$

also gilt

$$v_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ae_1 + be_2 = a(u_2 - u_1) + b(2u_1 - u_2) = (-a + 2b)u_1 + (a - b)u_2$$

und wir bestimmen v_n durch

$$\begin{aligned} v_n &= A^n v_0 \\ &= A^{n-1} A((-a + 2b)u_1 + (a - b)u_2) \\ &= A^{n-1}((-a + 2b)(-3)u_1 + (a - b)4u_2) = (-a + 2b)(-3)^n u_1 + (a - b)4^n u_2 \end{aligned}$$

Wir setzen nun die Vektoren u_1, u_2 wieder ein und erhalten

$$v_n = \begin{pmatrix} (-a + 2b)(-3)^n + 2(a - b)4^n \\ (-a + 2b)(-3)^n + (a - b)4^n \end{pmatrix}$$

wir wollen, dass der erste Eintrag für ein ausreichend großes n ausschließlich positiv ist. Wir haben hier einen Term der mit $(-3)^n$ und einen Term, der mit 4^n skaliert. Unabhängig von den Vorfaktoren $(-a + 2b)$ und $(a - b)$ ist der Absolutbetrag des zweiten Vektors irgendwann dominierend, also interessiert uns nur dieser. Da $2 \cdot 4^n$ positiv ist, wollen wir, dass auch $a - b$ positiv ist, das heißt $a > b$. Unter dieser Bedingung gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$ das unsere Anforderungen erfüllt.