Analysis III Übungsblatt 12

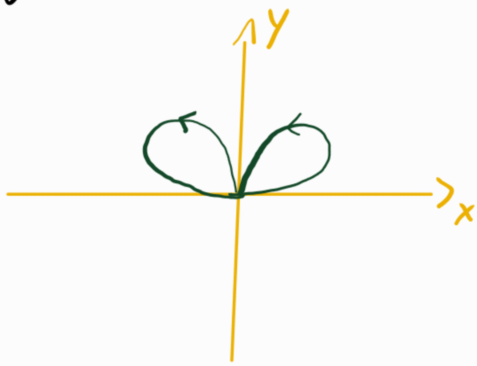
$\boxed{A1}$ $T :=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f: T \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \sin(2t)\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}$,

$M := f(T)$

(i) T ist Intervall ✓

f C^1-Kurve (komponentenweise stetig diffbar)

M C^1-Kurvenbogen



(ii) $Df(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{2\cos(2t)}^{S}\overbrace{\cos t}^{s} - \overbrace{\sin(2t)}^{C}\overbrace{\sin t}^{c} \\ 2\cos(2t)\sin t + \sin(2t)\cos t \end{pmatrix}$

<u>Beh</u>: $\operatorname{rank}(Df(t)) = 1 \ \forall t \in T$

<u>Bew</u> $|Df(t)|^2 = (2\,C_c - S_s)^2 + (2\,C_s + S_s)^2$

$= 4C_c^2 - 4C_cS_s + S^2s^2 + 4C^2s^2 + 4C_sS_c + S_c^2{}^2$

$= 4C^2 + S^2 = 3\cos^2(2t) + 1 > 0$

$\square$

(iii) f ist kein Homöomorphismus, den f^{-1} ist nicht stetig

bei $\binom{0}{0} \in M$: $\quad f\left(\pm\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \binom{0}{0} = f(0)$

$\lim_{\varepsilon \to 0} f^{-1}\left(f\left(\pm\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right)\right) = \pm\frac{\pi}{2} \neq f^{-1}\binom{0}{0} = 0$

(iv) <u>Beh</u> M ist keine C^1-Mannigfaltigkeit

Können wir eine Karte konstruieren die bei $(0,0)$ funktioniert?

Es genüt zu zeigen das es für eine belibig kleine Nachbarschaft des Ursprungs keine Karte geben kann.

Bew Ang. $\tilde{f}: \tilde{U} \to V \cap M$, $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in V$ ist
(und beliebig)

Karte. o.E. $\tilde{f}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Dann ist $\tilde{f}$ stetig umkehrbar und

$$\tilde{f}(\underbrace{g(\varepsilon)}_{\substack{\to 0\\ \varepsilon\to 0}}) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0 \qquad (*)$$

$$\tilde{f}(\underbrace{g(-\tfrac{\pi}{2}+\varepsilon)}_{\to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0 \qquad (**)$$

Somit, da $\tilde{f}$ diffbar angenommen:

$$D\tilde{f}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} \overset{(*)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(g(\varepsilon)))}{\tilde{f}^{-1}(g(\varepsilon))}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(\varepsilon)}{\tilde{f}^{-1}(g(\varepsilon))} = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\frac{\sin(2\varepsilon)}{\tilde{f}^{-1}(g(\varepsilon))}}_{\substack{\text{konvergiert,}\\ \text{da } \tilde{f}^{-1}\circ g \text{ diffbar}}} \underbrace{\begin{pmatrix}\cos(\varepsilon)\\ \sin(\varepsilon)\end{pmatrix}}_{\to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$$

$$= \text{cost.} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Analog: $$D\tilde{f}(0) \overset{(**)}{=} \frac{\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(g(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon)))}{\tilde{f}^{-1}(g(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon))}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin(2(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon))}{\tilde{f}^{-1}(g(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon))} \cdot \begin{pmatrix}\cos(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon)\\ \sin(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon)\end{pmatrix} = \text{cost.} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Insgesamt: cost. $= 0$ ↯ zu $\operatorname{rank}(D\tilde{f}(0)) = 1$.

$\boxed{A2}$ $U, U' \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U' \to U$ (↙ Diffeomorphismus), $u \in C^2(U)$, $\tilde{u} = u \circ f : U' \to \mathbb{R}$

$u : U \to \mathbb{R}$

Konvention: $x \in U$, $\xi \in U'$

(i) Ist $u \in L^1(U)$, so gilt $\int_U u(x)\, d\lambda^d(x) = \int_{U'} \tilde{u}(\xi) \sqrt{g(\xi)}\, d\lambda^d(\xi)$

$g(\xi) = \det\underbrace{\left(Df(\xi)^T)(Df(\xi))\right)}_{=g(\xi)}$

Bew Mit Transformationssatz:

$$\int_U u(x)\, d\lambda^d(x) = \int_{U' = f(U)} u(f(\xi))\, |\det(Df(\xi))|\, d\lambda^d(\xi)$$

Berechnen für $\xi \in U'$

$$\sqrt{g(\xi)} \overset{\text{Def}}{=} \sqrt{\det(Df(\xi)^T \cdot Df(\xi))}$$

$A, B \in \mathbb{K}^{d \times d}$
$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

$$= \sqrt{\underbrace{\det((Df(\xi))^T)}_{=\det(Df(\xi))} \det(Df(\xi))} = |\det Df(\xi)| \quad \blacksquare$$

(ii) Seien $u, v \in C^1(U)$, $\tilde{v} := v \circ f$

Beh: $\{(Du) \circ (Dv)^T\} \cdot f = (D\tilde{u}) \circ g^{-1} \circ (D\tilde{v})^T$

Bew: Mit der Kettenregel gilt für alle $\xi \in U'$

$$D\tilde{u}(\xi) = D(u \circ f)(\xi) = (Du)(f(\xi)) \circ Df(\xi)$$

Damit $(D\tilde{u}) \cdot g^{-1} \cdot (D\tilde{v})^T$

$$= (Du \circ f) \circ Df(\xi) \circ \underbrace{(Df(\xi)^T \circ Df(\xi))^{-1}}_{= Df(\xi)^{-1} (Df(\xi)^T)^{-1}} \underbrace{((Dv \circ f) \cdot Df(\xi))^T}_{= Df(\xi)^T \circ (Dv \circ f)^T}$$

$$= \{Du \cdot Dv\} \circ f$$

In Koordinatenschreibweise $Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$,

$g = (g^{\alpha\beta})_{1 \le \alpha, \beta \le d}$ ergibt nach Ausschreiben der Skalar- und Matrixprodukte

$$\left(Du \cdot (Dv)^T\right) \circ g = \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) \circ g$$

$$\parallel$$

$$D\tilde{u} \circ g^{-1} \circ (D\tilde{v})^T = \sum_{\alpha,\beta=1}^{d} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_\alpha} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi_\beta}$$

$\square$

$\boxed{A3}$ (i) $a, b > 0$, $M_E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ (Ellipse)

__1. Beh.__ M_E ist C^1-Mannigfaltigkeit

__Bew__ Sei $f(x,y) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ (als Polynom)

Dann $M_E = \{f = 0\}$, (wollen Satz 15.8 benutzen)

auch manchmal "Satz vom regulären Wert" genannt.

$$\operatorname{rank}(Df(x,y)) = \operatorname{rank}\left(\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)\right)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } \binom{x}{y} \in \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}}_{\supseteq M_E} \text{ offen} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$$

$\Rightarrow M_E$ C^1 Mfk. nach Satz 15.8

__2. Beh.:__ Setze $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\Theta \mapsto (a\cos\Theta, b\sin\Theta) \in M_E$

Dann sind für $\tilde{\Theta} \in \mathbb{R}$ die Abbildungen

$$g_{\tilde{\Theta}} := g|_{]\tilde{\Theta}, \tilde{\Theta}+2\pi[} : \;]\tilde{\Theta}, \tilde{\Theta}+2\tilde{\pi}[\to M_E \setminus \{g(\tilde{\Theta})\},$$

lokale Kartenabb., und $\{g_0, g_\pi\}$ (Bspw.) ist ein Atlas.

__Bew:__ * $g|_{[0,2\pi)} : [0, 2\pi) \to M_E$ ist bijektiv (Nachrechnen!)

* Mit periodizität: $g_{\tilde{\Theta}} : (\tilde{\Theta}, \tilde{\Theta}+2\pi) \to M_E \setminus \{g(\tilde{\Theta})\}$ bijektiv

$* \; \varphi_{\tilde{\Theta}} \in C^1(]\tilde{\Theta}, \tilde{\Theta}+2\pi[)$, $D\varphi_{\tilde{\Theta}} = (-a\sin\Theta, b\cos\Theta)^T$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(D\varphi_{\tilde{\Theta}}(\Theta)) = 1 \quad \forall \Theta \in I_{\tilde{\Theta}}.$

$* \; \varphi_{\tilde{\Theta}}^{-1} : M_E \setminus \{\varphi(\tilde{\Theta})\} \to I_{\tilde{\Theta}}$ sind stetig.

Betrachte nur $\tilde{\Theta} \in \{0, \pi\}$. Für $\Theta = 0$

$$\Rightarrow \Theta = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) & y > 0 \\ 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) & \text{sonst} \end{cases}$$

$(x,y) \in M_E \setminus \{(a,0)\}$ ist stetig bei

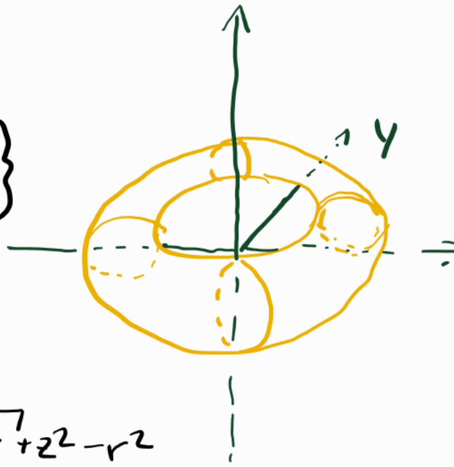
$(x,y) = (0,-a)$

<u>Analog</u>: φ_π stetig, Also φ_0, φ_π Karten-Abbildungen.

Zusammen $\{\varphi_0, \varphi_\pi\}$ Atlas, denn $\underbrace{M_E \setminus \{(a,0)\}}_{\operatorname{Im} \varphi_0} \cup \underbrace{M_E \setminus \{(-a,0)\}}_{\operatorname{Im} \varphi_\pi}$

ist offene Umgebung (bezgl. Relativtopologie auf M_E) von M_E

(ii) $r, R > 0$, $R > r$



$$M_T := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r^2 = z^2 + \left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right) \right\}$$

<u>Beh1</u>: M_T ist C^1-Mannigfaltigkeit

$M_T = \{f = 0\}$ mit $f(x,y,z) := (R - \sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2 - r^2$

Für $\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$ ist f stetig diffbar mit

$$Df(x,y,z) = \left(-\frac{\cancel{2}(R - \sqrt{x^2+y^2})}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} 2x, -\frac{(R - \sqrt{x^2+y^2})2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z \right)$$

Damit $\operatorname{rank}(Df(x,y,z)) = \begin{cases} 1 & z \neq 0 \text{ oder } x^2+y^2 \notin \{R^2, 0\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Für $(x,y,z) \in M_T$ ist $z=0$

$$\Rightarrow r = |R - \sqrt{x^2+y^2}| \Rightarrow \begin{cases} \text{plus} \to \sqrt{x^2+y^2} = R - r > 0 & \text{nach Vorr.: } R > r \\ \text{minus} \; \sqrt{x^2+y^2} = r + R > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{z=0 \wedge x^2+y^2 \in \{0, R^2\}\}$ ist offene Umgebung von M_T mit $\operatorname{rank}(Df) = 1$.

15.8.

$\Rightarrow M_T$ C^1-Mfk.

<u>Beh 2</u>: Setze $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to M_T$

$$(\varphi, \vartheta) \mapsto (\sin\varphi\,(R + r\sin\vartheta), \cos\varphi\,(R + r\sin\vartheta), r\cos\vartheta)$$

$\Phi_{\tilde\varphi, \tilde\vartheta} := \Phi|_{]\tilde\varphi, \tilde\varphi+2\pi[\times]\tilde\vartheta, \tilde\vartheta+2\pi[}$ sind Karten,

$\{\Phi_{\tilde\varphi, \tilde\vartheta} \; \tilde\varphi \in [0, 2\pi[, \tilde\vartheta \in [0, 2\pi[\}$ ist Atlas.