ASRR

$\alpha 5$
* Consideramos las siguientes fórmulas en un lpo

$\alpha_1 = \forall x (\exists y Q(x,y) \longrightarrow \neg P(x))$

$\alpha_2 = \forall x (Q(x, f(x)) \wedge \forall y Q(y, g(y)))$

$\alpha_3 = \forall x (P(x) \longrightarrow P(f(x)) \vee P(g(x)))$

$\beta = \forall x \neg P(x)$

Estudia si β es consecuencia lógica de $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

Forma normal clausulada

1º Forma normal prenexa (FNP): fórmula donde todos los cuantificadores están al principio y su radio de acción es la fórmula completa

2º Forma de Skolem (FS): fórmula en FNP y sin cuantif. existenciales

3º.- Forma Normal Clausulada (F.N.C): forma que viene dada como conjunción de cierres universales de disyunciones de literales

---

Paso 1. Queremos ver que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \beta$

Esto equivale que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \neg\beta\}$ es insatisfacible

Paso 2. Calculamos las FNC de las fórmulas

- $\alpha_1 \equiv \forall x (\neg \exists y\, Q(y,x) \vee \neg P(x)) \equiv \forall x (\forall y\, \neg Q(y,x) \vee \neg P(x)) \equiv$
  $\equiv \forall x \forall y (\neg Q(y,x) \vee \neg P(x))^{FNP, FS\ y\ FNC}$
- $\alpha_2 \equiv \forall x \forall y (Q(x, f(x)) \wedge Q(y, g(y)))^{FNP, FS} \equiv$
  $\equiv \forall x\, Q(x, f(x)) \wedge \forall y\, Q(y, g(y))^{FNC}$
- $\alpha_3 \equiv \forall x (\neg P(x) \vee P(f(x)) \vee P(g(x)))$ FNP, FS, FNC
- $\neg\beta = \neg \forall x \neg P(x) \equiv \exists x \neg\neg P(x) \equiv \exists x\, P(x)$ FNP $\equiv P(a)$ FS, FNC

Si aparece...

- $\exists x \forall y Q(x,y) \Rightarrow \forall y Q(a,y)$ func nueva
- $\forall y \exists x Q(x,y) \Rightarrow \forall y Q(f(y), y)$
- $\forall z \forall y \exists x Q(x,y,z) \Rightarrow \forall z \forall y Q(g(z,y), y, z)$

Paso 3. A partir de las cláusulas de las FNC, buscamos una deducción de la cláusula vacía ($\square$) por resolución

$\{\neg Q(y,x) \vee \neg P(x),\ Q(z, f(z)),\ Q(t, g(t)),\ \neg P(w) \vee P(f(w)) \vee P(g(w)),\ P(a)\}$

$P(a)$; $\neg P(w) \vee P(f(w)) \vee P(g(w))$; $(w|a)$

$P(f(a)) \vee P(g(a))$; $\neg Q(y,x) \vee \neg P(x)$; $(x|f(a))$

$P(g(a)) \vee \neg Q(y, f(a))$

⋮

$P(g(a)) \vee \neg Q(y, f(a))$; $Q(z, f(z))$; $(y|a)$; $(z|a)$

$P(g(a))$; $\neg Q(y,x) \vee \neg P(x)$; $(x|g(a))$

$\neg Q(y, g(a))$; $Q(t, g(t))$; $(y|a)$

$\square \Longrightarrow$ luego $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \beta$

* Consideramos las siguientes fórmulas

$\alpha_1 = \forall x ((R(x) \wedge T(x)) \to \exists y (P(x,y) \wedge Q(y)))$

$\alpha_2 = \forall x (S(x) \to T(x) \wedge \neg Q(x))$

$\beta = \forall x (S(x) \wedge R(x) \to \neg \forall y (P(x,y) \to S(y)))$

Estudia si $\{\alpha_1, \alpha_2\} \models \beta$

Paso 1. $\{\alpha_1, \alpha_2\} \models \beta \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \neg\beta\}$ insatisfacible

Paso 2.

$\cdot\ \alpha_1 \equiv \forall x (\neg(R(x) \wedge T(x)) \vee \exists y (P(x,y) \wedge Q(y))) \equiv$

$\equiv \forall x ((\neg R(x) \vee \neg T(x)) \vee \exists y (P(x,y) \wedge Q(y))) \equiv$

$\equiv \forall x \exists y ((\neg R(x) \vee \neg T(x)) \vee (P(x,y) \wedge Q(y))) \equiv$ FNP

$\equiv \forall x ((\neg R(x) \vee \neg T(x)) \vee (P(x, f(x)) \wedge Q(f(x)))) \equiv$ FS

$\equiv \forall x (\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee P(x, f(x))) \wedge \forall x (\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(f(x)))$ FNC

$\cdot\ \alpha_2 \equiv \forall x (\neg S(x) \vee (T(x) \wedge \neg Q(x))) \equiv$ FNP, FS

$\forall x (\neg S(x) \vee T(x)) \wedge \forall x (\neg S(x) \vee \neg Q(x))$ F.N.C

$\cdot\ \neg\beta = \neg \forall x ((S(x) \wedge R(x)) \to \neg \forall y (P(x,y) \to S(y))) \equiv \ldots$

$\equiv \forall y\ S(a) \wedge \forall y R(a) \wedge \forall y \ldots$

Lenguaje proposicional

Sujeto $\begin{cases} \text{Constantes: María, Pablo} \\ \text{Variables: un alumno} \\ \text{Funciones: el padre de María} \end{cases}$

Predicado: es está

Ej: α_1: A ningún hobbit le gusta la guerra

α_2: A todos los orcos les gusta la guerra

¿Podemos deducir que α_3: Ningún hobbit es un orco

Paso 1: Definir una estructura

Dominio: las criaturas de la Tierra Media

Variables: $V = \{x, y\}$

Asignación de predicados → $H(x) \Rightarrow$ Es hobbit x

→ $G(x) \Rightarrow$ le gusta la guerra a x

→ $O(x) \Rightarrow$ Es orco x

Paso 2: Traducimos a l.p.o.

α_1: $\forall x (H(x) \rightarrow \neg G(x))$

α_2: $\forall x (O(x) \rightarrow G(x))$

α_3: $\forall x (H(x) \rightarrow \neg O(x))$

Paso 3. Queremos ver $\{\alpha_1, \alpha_2\} \models \alpha_3$

Esto equivale a $\{\alpha_1, \alpha_2, \neg\alpha_3\}$ insatisfacible

Paso 3 Formas clausuladas → $\forall x \forall y (F(x,y) \vee G(x))$ Clausula

→ $\forall x \forall y (F(x,y) \vee G(x)) \wedge \forall y F(y)$ Forma clausulada

α_1: $\forall x (H(x) \rightarrow \neg G(x)) \equiv \forall x (\neg H(x) \vee \neg G(x)) \Rightarrow$ F.N.C.

α_2: $\forall x (O(x) \rightarrow G(x)) \equiv \forall x (\neg O(x) \vee G(x)) \Rightarrow$ F.N.C.

$\neg\alpha_3$: $\neg\forall x (H(x) \rightarrow \neg O(x)) \equiv \exists x \neg(H(x) \rightarrow \neg O(x)) \equiv \exists x \neg(\neg H(x) \vee \neg O(x)) \equiv \exists x (H(x) \vee O(x)) \equiv$ F.N.P

$\equiv H(a) \wedge O(a)$ F.N. de Skolem

F.N. Clausulada

Paso 5. Deducimos por resolución la clausula vacía

$\{\neg H(x) \vee \neg G(x), \neg O(x) \vee G(x), H(a), O(a)\}$

$\neg H(x) \vee \neg G(x)$ $\quad H(a)$ $\quad \neg O(x) \vee G(x)$ $\quad O(a)$

$\neg G(a)$ $\quad G(a)$

$\{\square\}$

Por lo tanto, $\{\alpha_1, \alpha_2\} \models \alpha_3$

25/05/23

·> Consideramos las siguientes funciones en un l.p.o

$\alpha_1 = \forall x(\exists y\, Q(y,x) \longrightarrow \neg P(x))$

$\alpha_2 = \forall x(Q(x,f(x)) \wedge \forall y\, Q(y,g(y)))$

$\alpha_3 = \forall x(P(x) \longrightarrow P(f(x)) \vee P(g(x)))$

$\beta = \forall x\, \neg P(x)$

Estudia si $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \beta$

1.- $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \beta \iff \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \neg\beta\}$ insatisfacible

2.- Calculamos F.N.C.

$\alpha_1 \equiv \forall x(\neg\exists y\, Q(x,y) \vee \neg P(x)) \equiv \forall x(\forall y\, \neg Q(x,y) \vee \neg P(x)) \equiv \forall x \forall y\, (\neg Q(x,y) \vee \neg P(x))$

$\alpha_2 \equiv \forall x\, Q(x,f(x)) \wedge \forall y\, Q(y,g(y))$

$\alpha_3 \equiv \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)) \vee P(g(x)))$

$\neg\beta \equiv \neg\forall x\, \neg P(x) \equiv \exists x\, P(x) \equiv P(a)$

Luego tenemos $\{\neg Q(x,y) \vee \neg P(x),\ Q(z,f(z)),\ Q(w,g(w)),\ (\neg P(t) \vee P(f(t)) \vee P(g(t))),\ Pa\}$

3.- Por resolución llegamos a la cláusula vacía

$P(a)$ $\quad$ $\neg P(w) \vee P(f(w)) \vee P(g(w))$ $\quad (w|a)$

$P(f(a)) \vee P(g(a))$ $\quad$ $\neg Q(x,y) \vee \neg P(x)$ $\quad (x|f(a))$

$\neg Q(f(a),y) \vee P(g(a))$ $\quad$ $Q(z,f(z))$ $\quad (z|a)$

$P(g(a))$ $\quad$ $\neg Q(y,x) \vee \neg P(x)$ $\quad (x|g(a))$

$\neg Q(y,g(a))$ $\quad$ $Q(t,g(t))$ $\quad (y|a)$ $\quad (t|a)$

$\{\square\}$

Entonces $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \neg\beta\}$ insatisfacible y, por lo tanto, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \beta$

Ej. $\alpha_1 = \forall x(R(x) \wedge T(x) \longrightarrow \exists y(P(x,y) \wedge Q(y)))$

$\alpha_2 = \forall x(S(x) \longrightarrow T(x) \wedge \neg Q(x))$

$\beta = \forall x(S(x) \wedge R(x) \longrightarrow \neg\forall y(P(x,y) \longrightarrow S(y)))$

Estudia si $\{\alpha_1, \alpha_2\} \models \beta$

1.- $\{\alpha_1, \alpha_2\} \models \beta \iff \{\alpha_1, \alpha_2, \neg\beta\}$ insatisfacible

2.- F.N.C.

$\alpha_1 \equiv \forall x(\neg(R(x) \wedge T(x)) \vee \exists y(P(x,y) \wedge Q(y))) \equiv$

$\equiv \forall x(\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee \exists y(P(x,y) \wedge Q(y))) \equiv$

$\equiv \forall x \exists y((\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee P(x,y)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(y))) \equiv$

$\equiv \forall x((\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee P(x,f(x))) \wedge (\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(f(x)))) \equiv$

$\equiv \forall x(\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee P(x,f(x))) \wedge \forall x(\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(f(x)))$

$\alpha_2 \equiv \forall x(\neg S(x) \vee (T(x) \wedge \neg Q(x))) \equiv \forall x(\neg S(x) \vee T(x)) \wedge \forall x(\neg S(x) \vee \neg Q(x))$

$\neg\beta \equiv \exists x \neg((S(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \neg\forall y(P(x,y) \longrightarrow S(y))) \equiv$

$\equiv \exists x \neg(\neg(S(x) \wedge R(x)) \vee \neg\forall y(\neg P(x,y) \vee S(y))) \equiv$

$\equiv \exists x(S(x) \wedge R(x) \wedge \forall y(\neg P(x,y) \vee S(y)))$

$\equiv S(a) \wedge R(a) \wedge \forall y(\neg P(a,y) \vee S(y))$

3.- Llegar a $\square$ con

$\{\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee P(x, f(x))^{3}, \neg R(y) \vee \neg T(y) \vee Q(f(y))^{5},$

$\neg S(z) \vee T(z)^{2}, \neg S(t) \vee \neg Q(t)^{1},$

$S(a)^{0}, R(a)^{4}, \neg P(a,w) \vee S(w)^{6}\}$

$$
\begin{array}{ccc}
S(a) & & S(a) \\
\big|\ {}^{2} & & \big|\ {}^{2} \\
T(a) & & T(a) \\
\big|\ {}^{5} & & \big|\ {}^{3} \\
\neg R(a) \vee Q(f(a)) & & \neg R(a) \vee P(a, f(a)) \\
\big|\ {}^{4} & & \big|\ {}^{4} \\
Q(f(a)) & & P(a, f(a)) \\
\big|\ {}^{1} & & \big| \\
\neg S(f(a)) & & \big| \\
\big|\ {}^{6} & & \big| \\
\neg P(a, f(a)) & \text{———————} & \{\square\}
\end{array}
$$