Álgebra de Boole

Deducimos que un conjunto con dos operaciones es un álgebra de Boole si cumple
- i) Asociativa
- ii) Conmutativa
- iii) Distributiva
- iv) Elementos neutros
- v) Elemento complementario

Ej: Sea $D(42)$ el conj. de los divisores de 42. Con las op. "$x \vee y = mcm(x,y)$" y "$x \wedge y = mcd(x,y)$", con $\overline{x} = \frac{42}{x}$ (complementario) con $x, y \in D(42)$ y $e_1 = 1$, $e_2 = 42$ (neutros)

Entonces es álgebra de Boole $(D(42), \vee, \wedge)$, habría que ver que cumple las prop.

Con conjuntos del tipo $(D(n), \vee, \wedge)$ serán álg de Boole $\iff$ n descompone como primos elevados a 1

Otros posibles: $(P(X), \cup, \cap)$ y $(\mathbb{B}^n, \vee, \wedge)$

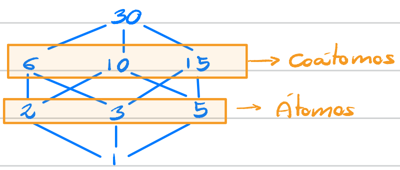
27/04/23

$(D(n), \overset{mcm}{\vee}, \underset{mcd}{\wedge})$

Def.
- Supremo: $sup(x,y) = x \vee y$
- Ínfimo: $inf(x,y) = x \wedge y$

$(D(30), \vee, \wedge)$, $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Diagrama de Hasse



Átomos: elementos minimales sin contar el mínimo

Coátomos: elementos maximales sin contar el máximo

El núm de elem en un álgebra de Boole es 2^n (n = núm átomos)

1.- Encuentra n tq $D(n)$ es A.B., con 468 y 798 coátomos

Además, obtén todos los $x \in D(n)$ tq $\overline{154} \vee x = 1254$

a) $\begin{cases} 462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \\ 798 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 \end{cases}$ Los átomos serán $\{2, 3, 7, 11, 19\}$

Luego $n = sup\{2,3,7,11,19\} = 8778 \implies (D(8778), \vee, \wedge)$

b) Tenemos que $\overline{154} = \frac{8778}{154} = 57$. Se nos pide $x \in D(8778)$ tq $x \vee \overline{154} = mcm(\overset{3 \cdot 19}{57}, x) = \overset{2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19}{1254}$

Tomamos entonces

$x = \begin{cases} 2 \cdot 11 = 22 \\ 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19 = 1254 \\ 2 \cdot 11 \cdot 19 = 418 \\ 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66 \end{cases}$

2.- $P(\{1,2,3,4,5\})$. Escribe $\{1,3,4\}$ como sup de átomos y como inf de coátomos

Tenemos como A.B $(P(\{1,2,3,4,5\}), \cup, \cap)$

Átomos: $(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\})$

Coátomos: $\{\{2,3,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}$

Así, $\{1,3,4\} = sup(\{1\}, \{3\}, \{4\})$ y $\{1,3,4\} = inf(\{1,2,3,4\}, \{1,3,4,5\})$

13.- Para $f(x,y,z) = xy + xz + yz$, dar la forma normal disyuntiva calculada por dos métodos disyuntivos

Forma 1

	x	y	z	xy	xz	yz	$f(x,y,z)$
m_0	0	0	0	0	0	0	0
m_1	0	0	1	0	0	0	0
m_2	0	1	0	0	0	0	0
m_3	0	1	1	0	0	1	1
m_4	1	0	0	0	0	0	0
m_5	1	0	1	0	1	0	1
m_6	1	1	0	1	0	0	1
m_7	1	1	1	1	1	1	1

$f(x,y,z) = m_3 + m_5 + m_6 + m_7 = m(3,5,6,7) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$

Forma 2

$f(x,y,z) = xy + xz + yz$

$xy \Rightarrow 11\_ \to 110 \to xy\bar{z}$, $111 \to xyz$

$xz \Rightarrow 1\_1 \to 101 \to x\bar{y}z$, $111 \to xyz$

$yz \Rightarrow \_11 \to 011 \to \bar{x}yz$, $111 \to xyz$

$f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + xyz$

4.- Calcula la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva de

$$f(x,y,z,t,w) = \overline{(x+\bar{y}+t)} \cdot (y + \bar{z} \cdot w) + x$$

Operamos: $\overline{(x+\bar{y}+t)} = \bar{x} \cdot y \cdot \bar{t} \Rightarrow f(x,y,z,t,w) = \bar{x}y\bar{t} \cdot (y+\bar{z}w) + x = \bar{x}y\bar{t} + \bar{x}y\bar{t}\bar{z}w + x$

Vemos que $\bar{x}y\bar{z}\bar{t}w \Rightarrow 01001 \Rightarrow \bar{x}y\bar{z}\bar{t}w$

$\bar{x}y\bar{t} \Rightarrow 01\_0\_$:
- $01000 \Rightarrow \bar{x}y\bar{z}\bar{t}\bar{w}$
- $01001 \Rightarrow \bar{x}y\bar{z}\bar{t}w$
- $01100 \Rightarrow \bar{x}yz\bar{t}\bar{w}$
- $01101 \Rightarrow \bar{x}yz\bar{t}w$

$x \Rightarrow 1\_\_\_\_$

Forma conjuntiva: $f(x,y,z,t,w) = \bar{x}y\bar{z}\bar{t}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{t}\bar{w} + \bar{x}yz\bar{t}\bar{w} + \bar{x}yz\bar{t}w + x \ldots$

11/05/23

Calcula los implicantes primos de la siguiente función booleana y halla una expresión óptima

$$f(x,y,z,t) = x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}t + x\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}zt + \bar{x}\bar{y}\bar{z}t + \bar{x}yzt + \bar{x}\bar{y}z\bar{t}$$

Método de Quine-McCluskey

- Si f no está en forma normal disyuntiva, la calculamos primero
- Encontramos la expresión binaria asociada a cada minterm

$x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	$\bar{x}y\bar{z}t$	$x\bar{y}z\bar{t}$	$\bar{x}\bar{y}zt$	$\bar{x}\bar{y}zt$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}t$	$\bar{x}yzt$	$\bar{x}\bar{y}z\bar{t}$
1000	0101	1010	0011	0011	0001	0111	0010

· Ordenamos las secuencias de bits según el nº de 1:

0111	01_1	0__1
0101	0_11	
1010	0_01	
0011	10_0	
1000	_010	
0001	00_1	
0010	001_	

Luego los implicantes primos serán:
$\bar{x}t,\ x\bar{y}\bar{t},\ \bar{y}z\bar{t},\ \bar{x}\bar{y}z$

$f(x,y,z,t) = \bar{x}t + x\bar{y}\bar{t} + \bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z \longrightarrow$ No sabemos si es óptima

· Vemos si "sobra" algún implicante primo en la expresión óptima

	$x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	$\bar{x}y\bar{z}t$	$x\bar{y}z\bar{t}$	$\bar{x}\bar{y}zt$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}t$	$\bar{x}yz\bar{t}$	$\bar{x}\bar{y}zt$
$x\bar{y}\bar{t}$	✓		✓				
$\bar{y}z\bar{t}$			✓				✓
$\bar{x}\bar{y}z$				✓			✓
$\bar{x}t$		✓		✓	✓	✓	

⇒ Implicantes primos esenciales: $x\bar{y}\bar{t}$, $\bar{x}t$

· Tachamos filas y columnas, nos queda:

	$\bar{x}\bar{y}z\bar{t}$
$\bar{y}z\bar{t}$	✓
$\bar{x}\bar{y}z$	✓

⇒ Implicantes intercambiables

Tenemos por lo tanto 2 expresiones óptimas

$f(x,y,z,t) = x\bar{y}\bar{t} + \bar{x}t + \bar{y}z\bar{t}$

$f(x,y,z,t) = x\bar{y}\bar{t} + \bar{x}t + \bar{x}\bar{y}z$

Con tabla de Karnaugh:

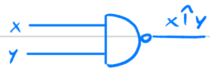
	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
$\bar{z}\bar{t}$				1
$\bar{z}t$	1	1		
zt	1	1		
$z\bar{t}$	1			1

Las 2 opciones

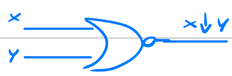
18/05/23

Conjuntos funcionalmente completos

· NAND: $x \uparrow y = \overline{xy}$



· NOR: $x \downarrow y = \overline{(x+y)}$



Ej. $f(x,y,z) = xy + yz + \bar{x}\bar{y}z$

Diseñar un circuito con puertas NAND

$xy + yz + \bar{x}\bar{y}z = \overline{\overline{xy} \cdot \overline{yz} \cdot \overline{\bar{x}\bar{y}z}}$