Demostración teórica de que el algoritmo de Prim modificado es solución óptima

Sea $G(V, A)$ un grafo no dirigido y conexo. Sea $U \subsetneq V$ un subconjunto de los nodos de V, y sea $e = (u, v)$ la arista de peso mínimo tq $u \in U$ y $v \in V \setminus U$. Sabemos que existe un árbol generador minimal T tq $e \in T$.

Supongamos pues que T es un árbol generador minimal que no contiene a e. Luego debe haber como mínimo una arista que unan u y v, sea f la de menor peso. Si añadimos e a T, se crea un ciclo, luego si eliminamos f, obtenemos un nuevo árbol generador mínimo T' que tendrá una longitud menor o igual a T, ya que hemos eliminado f (una arista de peso mayor o igual a e) y la hemos sustituido por e.

Esto es una contradicción, ya que T es un árbol generador mínimo, luego nuestro árbol T es el óptimo.

La única modificación a tener en cuenta a la hora de implementar el algoritmo de Prim para aristas negativas es que no se creen ciclos negativos, ya que no se alcanzaría una solución óptima, pero esta modificación no afecta a nuestra demostración