Ciclos

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha_1) = \alpha_2 \\ f(\alpha_2) = \alpha_3 \\ f(\alpha_3) = \dots \\ f(\alpha_k) = \alpha_1 \end{array}\right\} \text{distintos} \qquad k\text{-ciclos}$$

Ej: Determina los 2-ciclos de $x_{n+1} = x_n^2 + 7x_n$

Siendo α, $f(\alpha) = \alpha^2 + 7\alpha = \alpha_2$

$$f(\alpha_2) = (\alpha^2 + 7\alpha)^2 + 7(\alpha^2 + 7\alpha) =$$
$$= \alpha^4 + 49\alpha^2 + 14\alpha^3 + 7\alpha^2 + 49\alpha$$

Para ser 2-ciclos, $f(\alpha_2) = \alpha \Rightarrow \alpha^4 + 14\alpha^3 + 56\alpha^2 + 48\alpha = 0$

$\alpha = 0$ ó $\alpha^3 + 14\alpha^2 + 56\alpha + 48 = 0$

como $f(\alpha) = 0$ es pto fijo $\Rightarrow$ no vale si $\alpha = 0$.

Tenemos, (truco)

sacando ptos fijos de f, $\alpha^2 + 7\alpha = \alpha \iff \alpha = 0$ ó $\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = -6$ es solución a nuestra ecuación

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 14 & 56 & 48 \\ -6 & \downarrow & -6 & -48 & -48 \\ \hline & 1 & 8 & 8 & \underline{|0} \end{array}$$

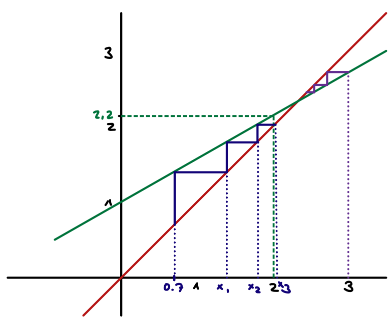
luego $\alpha^2 + 8\alpha + 8 = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64-32}}{2} = \begin{cases} -4 + 2\sqrt{2} \\ -4 - 2\sqrt{2} \end{cases}$ único 2-ciclo

Diagrama de Cobweb

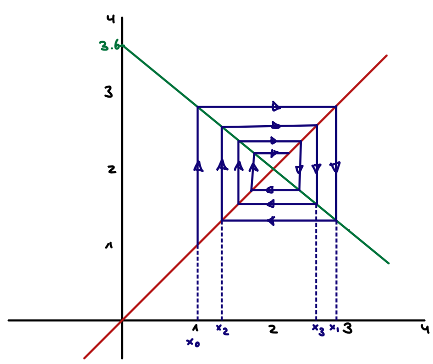
Tenemos $f: D \longrightarrow D \subset \mathbb{R}$, $x_{n+1} = f(x_n)$

1. Dibujar gráfica
2. Marcar x_0
3. $x_1 = f(x_0)$ (subiendo de x_0 hasta donde corta con la gráfica)
4. Dibujo la diagonal
5. Reflejo en la diagonal de x_1
6. Se repite desde el paso 3. con el punto $x_2 = f(x_1)$

Ejemplo: $x_{n+1} = 0.6x_n + 1$. Valores iniciales $x_0 = 0.7$ y $x_0 = 3$



Ejemplo: $f(x) = 3.6 - 0.8x$



Ejercicio:

Crecimiento de una población estructurada por sexos

- Equilibrada
- Nacimiento de la pareja
- Mortalidad por individuo

x_n = nº de individuos de un sexo

$x_{n+1} - x_n$ = Nacimientos − Muertes

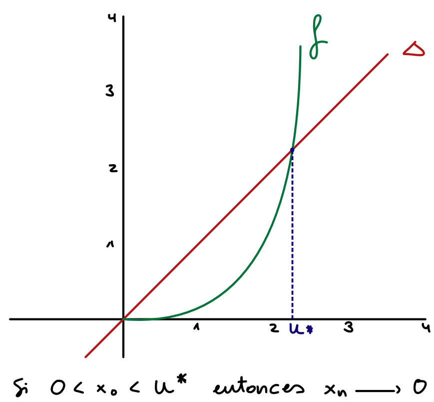
$x_{n+1} = \gamma x_n^2 + (1-\mu)x_n \qquad 0 < \mu < 1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma > 0$

$f: [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$

$f(x) = \gamma x^2 + (1-\mu)x$

Ptos fijos: $\gamma x^2 + (1-\mu)x = x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{\mu}{\gamma} = u^* \end{cases}$



Si $0 < x_0 < u^*$ entonces $x_n \longrightarrow 0$

si $u^* < x_0$ entonces $x_n \longrightarrow +\infty$

Si $x_0 \in]0, u^*[$, entonces $x_1 < x_0$, $x > f(x)$ si $x \in]0, u^*[$ luego $x_2 < x_1$

$x_n \longrightarrow L$ y $x_n \in]0, u^*[\Rightarrow L \in [0, u^*[$

↳ monótona y acotada luego convergente

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & f(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & = & f(L) \end{array}$$

$\Rightarrow L$ es 0 pq ya hemos visto que no puede ser $= u^*$ (decreciente)

$f(x) > x$ si $x > u^*$

$x_0 \in]u^*, +\infty[$

$x_1 = f(x_0) > x_0$ y $x_n \longrightarrow +\infty$

Estabilidad de las soluciones

Sea α_n solución de un sistema dinámico $x_{n+1} = f(x_n)$

α_n se dice estable (frente a pequeñas perturbaciones del dato inicial) si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: si $x_0 \in D$ y $x_0 \in]\alpha_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ entonces $|x_n - \alpha_n| < \delta$

Ej: si $x_0 = 0$ en $x_{n+1} = x_n$, es estable $\delta = \varepsilon$

Def: $T: D \longrightarrow D$ contractiva si $\exists\ 0 < \delta < 1$: $|T(x) - T(y)| \leq \delta |x - y|$

Si D cerrado $\Rightarrow$ existe un único pto fijo α, que es estable.

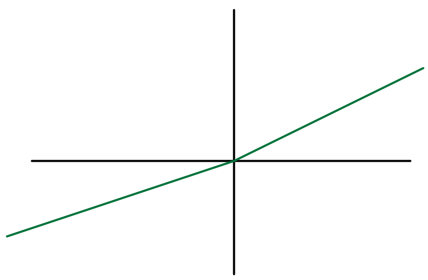
$|T^n(x) - \alpha| \leq \delta^n |x - \alpha|$

Ej: El umbral en el modelo de crecimiento de poblaciones por sexar es inestable

Def: α_n solución se dice asintóticamente estable si

es estable y además existe $\varepsilon_0 > 0$ tq si $x_0 \in D \cap (\alpha_0 - \varepsilon_0, \alpha_0 + \varepsilon_0)$ entonces $|x_n - \alpha_n| \longrightarrow 0$

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \geq 0 \\ x/3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Estudia la estabilidad de $\alpha_n = 0$ en $x_{n+1} = f(x_n)$



Si $x > 0$, $|f(x) - f(0)| \leq \frac{1}{2}|x|$

Si $x < 0$, $|f(x) - f(0)| \leq \frac{1}{3}|x| \leq \frac{1}{2}|x|$

Si x_n es una solución

$x_{n+1} = f(x_n)$

$|x_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0| \Rightarrow \alpha = 0$ asintóticamente estable

7/3/23

Ej: $x_{n+1} = \operatorname{sen}(x_n)$, estudie estabilidad de los ptos fijos

Los ptos fijos vienen dados por $\operatorname{sen}(x) = x$

$|\operatorname{sen}(x)| < |x|$ si $x \neq 0 \Rightarrow x = 0$ es el único pto fijo

Tenemos $|x_n| = |\operatorname{sen}(x_{n-1})| \leq |x_{n-1}| \leq |x_0|$

Si $\varepsilon = \delta$, $x_0 \in]-\varepsilon, \varepsilon[\Rightarrow |x_n - 0| < \delta$, $\alpha_n = 0$ es estable.

Por otro lado, si $x_0 \neq 0$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$

$|x_n| = |\operatorname{sen}(x_{n-1})| < |x_{n-1}| < |x_0|$

Si $x_0 \neq 0$, $|x_n|$ decreciente $\Rightarrow |x_n| \longrightarrow L$

SE DEJA PENDIENTE PROBAR ESTABILIDAD ASINTÓTICA

Carácter local de la estabilidad

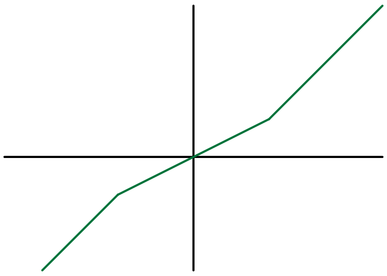
Si α es una solución, se llama órbita a $O(\alpha_n) = \overline{\{\alpha_n : n \geq 0\}}$.

Dado K un cerrado, $\varepsilon > 0$,

$K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^k : \text{dist}(x, K) < \varepsilon\}$

Si $f_1 : D_1 \longrightarrow D_1$, $f_2 : D_2 \longrightarrow D_2$ y α_n una solución común a $x_{n+1} = f_i(x_n)$ entonces si $f_1 = f_2$ en $(O(\alpha_n))_\varepsilon$ la estabilidad / estabilidad asintótica de α_n en ambos sistemas dinámicos es equivalente

Ej: Sea $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x}{2} & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x-1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$. Estudie la estabilidad de $\alpha = 0$ en $x_{n+1} = f(x_n)$



$f \equiv f_2$, $f_2(x) = \frac{x}{2}$, en $(-2, 2)$, $O_2(0)$

Con $\alpha = 0$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} \Rightarrow f_2(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow |f_2(x) - f_2(y)| = \frac{|x-y|}{2} \Rightarrow$ es contractiva

Como f coincide en un entorno $]-2, 2[$ con una función contractiva, $\alpha = 0$ es asintóticamente estable (pero f no es contractiva)

Estudio de la estabilidad mediante el uso de la derivada

Teorema

Sea $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow D$, α pto fijo de $x_{n+1} = f(x_n)$. Entonces,

1. Si $|f'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \alpha$ es asintóticamente estable
2. Si $|f'(\alpha)| > 1 \Rightarrow \alpha$ es inestable (falta saber qué pasa si $= 1$, siguiente tema dice)

Uso: Estudie la estabilidad de los ptos fijos de $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{4} - \frac{3x_n}{2} + 4$

Los ptos fijos vienen dados por $\frac{x_n^2}{4} - \frac{5}{2}x_n + 4 = 0 \Rightarrow x_n^2 - 10x_n + 16 = 0 \Rightarrow (x-8)(x-2) = 0$ → $x = 8$, $x = 2$

$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow f'(8) = 4 - 3/2 = 5/2 > 1 \Rightarrow \alpha = 8$ es inestable

$f'(2) = 1 - 3/2 = -1/2$ y $|-1/2| < 1 \Rightarrow \alpha = 2$ es asintóticamente estable