ASKR

Ejercicios Recurrencia

④ Resuelve el problema de secuencia:

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \quad \forall n \geq 0$$

y encuentra la solución particular que cumple $u_0 = 2$, $u_1 = 5$, $u_2 = 15$

- Tenemos: $u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0 \Longrightarrow$ Lineal y homogéneo → al poner u en un lado, la cc es $=0$
- Polinomio característico: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
- La ecuación característica es: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
- Esta ecuación tiene soluciones: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2 \Longrightarrow$ Simple → no tiene raíces doble, triples...
- Así, la solución general de la ecuación es

$$u_n = a\cdot 3^n + b\cdot 1^n + c\cdot 2^n = a\cdot 3^n + b + c\cdot 2^n, \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

- Calculamos la solución particular imponiendo las condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 2 \Longrightarrow a\cdot 3^0 + b + c\cdot 2^0 = 2 \\ u_1 = 5 \Longrightarrow a\cdot 3^1 + b + c\cdot 2^1 = 5 \\ u_2 = 15 \Longrightarrow a\cdot 3^2 + b + c\cdot 2^2 = 15 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a + b + c = 2 \\ 3a + b + 2c = 5 \\ 9a + b + 4c = 15 \end{array} \Longrightarrow \boxed{a = 2,\ b = 1,\ c = -1}$$

Luego $u_n = 2\cdot 3^n - 2^n + 1$

② Resuelve la relación de recurrencia: $u_n = k\cdot u_{n-1}$ ($u_n - ku_{n-1} = 0$), y encuentra la solución particular que cumple $u_0 = a$, a cte.

- Polinomio característico: $p(x) = x - k$
- La ecuación característica: $x - k = 0 \Longrightarrow x = k$
- Solución general: $u_n = \alpha k^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- Imponiendo la C.I. $u_0 = a \Longrightarrow a = \alpha k^0 \Longrightarrow \boxed{\alpha = a}$
- Solución particular $\boxed{u_n = a k^n}$

<u>Proposición</u>. Sea x_n una sucesión que satisface una relación de recurrencia:

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} = b^n f(n) \quad \text{con } f(n) \text{ polinomio de grado } r$$

Entonces, x_n satisface una relación de secuencia lineal homogénea cuyo polinomio característico es $(x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k)(x-b)^{r+1} = 0$

⑱ $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 2$, $n \geq 3$

$u_1 = 7$, $u_2 = 19$

No es lineal homogénea $u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2} = 1\cdot 2^n + 2\cdot 1^n$ (→ $f(n)$, → $f(n)$)

En este caso, por la proposición, el polinomio será

$$p(x) = (x^2 - 2x + 1)(x-2)(x-1) = (x-1)^3(x-2)$$

Soluciones de la ecuación: $x_1 = 1$ (triple), $x_2 = 2$ (simple)

Así, la solución general es

$$u_n = a\cdot 1^n + b\cdot n\cdot 1^n + c\cdot n^2\cdot 1^n + d\cdot 2^n$$

Usando las C.I.: $a = -3$ $b = 1$ $c = 1$ $d = 4$

16 MAR 2023

23. Empleando la teoría que conocemos sobre recurrencia lineal, demuestra que $1 = 0'\overline{9}$

Tenemos que $0'\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$

Sea $\begin{cases} u_n = u_{n-1} + \frac{9}{10^{n+1}} \\ u_0 = \frac{9}{10} \end{cases}$

Resolvemos la recurrencia lineal no homogénea

$$u_n - u_{n-1} = \underbrace{9\left(1/10\right)^{n+1}}_{f(n) \text{ con grado} = 0}$$

La ecuación característica es $(x-1)(x-\frac{1}{10})^1 = 0 \iff x = 1$ ó $x = 1/10$

Luego la solución general es $u_n = a \cdot 1^n + b \cdot (\frac{1}{10})^n$

Hallamos a y b con las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 9/10 \Rightarrow a \cdot 1^0 + b(1/10)^0 = a + b = 9/10 \\ u_1 &= 99/100 \Rightarrow a \cdot 1^1 + b(1/10)^1 = a + \frac{b}{10} = 99/10 \end{aligned}\right\} \text{Resolvemos sistema: } a = 1 \quad b = -1/10$$

Entonces, la solución particular de nuestra ec. inicial es:

$$u_n = 1 + (\tfrac{-1}{10})(\tfrac{1}{10})^n = 1 - (\tfrac{1}{10})^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \text{ , y queda probado}$$

22

$$1 \text{ nenúfar} \begin{cases} \to 1 \text{ nenúfar} \\ \to 2 \text{ nenúfar} \end{cases} \Rightarrow \text{La alberca se cubre en 60 días}$$

¿Y con 4 nenúfares?

- Tenemos que $\begin{cases} u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 2 = 3u_{n-1} \quad (u_n - 3u_{n-1} = 0) \\ u_0 = 1 \end{cases}$

- Tenemos que la ecuación característica es:

$$3 = x \Rightarrow x - 3 = 0$$

- Luego la solución general será:

$$u_n = a \cdot 3^n$$

- Imponiendo la C.I.: $u_0 = a \cdot 3^0 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

Si en 60 días se cubre la alberca, se necesitan

$$u_{60} = 3^{60} \text{ nenúfares}$$

Con $u_0 = 4$, la solución particular será

$$u_0 = a \cdot 3^0 = 4 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

Averiguamos n tq $u_n = 4 \cdot 3^n = 3^{60} \Rightarrow \boxed{n = 58'73 \text{ días}}$