Análisis Matemático II

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Objetivos de aprendizaje para el tema 13

1. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados, así como la forma en que se usan en la práctica:

a) Teorema de Tonelli, con especial atención al caso particular de una función característica

b) Teorema de Fubini

2. En ejemplos sencillos, saber estudiar la integrabilidad de funciones de dos o tres variables, usando el teorema de Tonelli

3. En ejemplos sencillos, saber calcular áreas, volúmenes y, en general, integrales dobles o triples, usando el teorema de Fubini.

Objetivos Tema 13

1.- a) <u>Teorema de Tonelli</u>

Si $f: \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty]$ función medible positiva, se tiene

- f_x es medible p.c.t $x \in \mathbb{R}^p$ y f^y es medible p.c.t $y \in \mathbb{R}^q$
- Las funciones φ y ψ definidas c.p.d en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ respectivamente, por
  $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$ p.c.t $x \in \mathbb{R}^p$ y $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx$ p.c.t $y \in \mathbb{R}^q$
  son medibles, verificando
  $$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^q} \psi(y)\,dy$$

Para todo $E \subset \mathbb{R}^N$ conjunto medible se tiene:

- $E_x \in \mathcal{M}_q$ p.c.t $x \in \mathbb{R}^p$ y $E^y \in \mathcal{M}_p$ p.c.t $y \in \mathbb{R}^q$
- Las funciones $x \longmapsto \lambda_q(E_x)$ e $y \longmapsto \lambda_p(E^y)$ definidas en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ respectivamente son medibles con
  $$\lambda_N(E) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(E_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(E^y)\,dy$$

b) <u>Teorema de Fubini</u>

$\forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ se tiene que

- $f_x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$ p.c.t $x \in \mathbb{R}^p$ y $f^y \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p)$ p.c.t $y \in \mathbb{R}^q$
- Las funciones φ y ψ, definidas c.p.d en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ respectivamente por
  $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$ p.c.t $x \in \mathbb{R}^p$ y $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx$ p.c.t $y \in \mathbb{R}^q$
  verifican que $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p)$ y $\psi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$ con
  $$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^q} \psi(y)\,dy$$

Uso: $\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \right) dy$

Si alguna no existe o no coinciden, f no es integrable en $\mathbb{R}^N$