Criterios de Convergencia

sábado, 15 de enero de 2022 17:44

Condición: $\sum a_n$ converge $\Longrightarrow \{a_n\} \longrightarrow 0$

- Criterio básico de convergencia $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow$ está mayorada $\left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e\right)$

- Criterio básico de comparación $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} a_n, \sum_{n\geq 1} b_n \Longrightarrow$ Serie términos positivos
  $\exists k \in \mathbb{N} / a_n \leq b_n \ \forall n > k \Longrightarrow$ Si $\sum b_n$ converge $\sum a_n$ converge
  Si $\sum a_n$ diverge $\sum b_n$ diverge

- Criterio límite de comparación $\Longrightarrow$ $\sum a_n, \sum b_n$ $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup (+\infty)$
  a) $L = +\infty$ y $\sum b_n$ diverge $\Longrightarrow \sum a_n$ diverge
  b) $L = 0$ y $\sum b_n$ converge $\Longrightarrow \sum a_n$ converge
  c) $L \in \mathbb{R}^+$ $\sum b_n$ y $\sum a_n$ convergen ó ambas divergen

- Criterio de condensación de Cauchy $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ decrece y $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
  $\sum \frac{1}{n \log n}$
  $\{A_n\} \Rightarrow A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
  $\{B_n\} \Rightarrow B_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}$
  Ambas divergen o convergen

- Criterio de Corolario (Series de Riemann)
  $\alpha \in \mathbb{R}$ es fijo; $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ?
  Casos:
  i) $\alpha \leq 0$ $\sum n^{+\alpha}$, no converge
  ii) $\alpha > 0$ $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}$ decreciente

  $$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Longleftrightarrow \alpha > 1$$

- Criterio de la raiz (Series)
  $\{a_n\}$ $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
  $\{\sqrt[n]{a_n}\} \longrightarrow L$ Regla de la e (1^∞): $\{g(x)(f(x)-1)\} \longrightarrow L \Longrightarrow \{f(x)^{g(x)}\} \longrightarrow e^L$

$\{\sqrt[n]{a_n}\} \longrightarrow L$ Regla de la e (1^∞) : $\{g(x)(f(x)-1)\} \longrightarrow L \Rightarrow \{f(x)^{g(x)}\} \longrightarrow e^L$

Casos:

i) $L<1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ converge

ii) $L>1 \Rightarrow \sum a_n$ no converge

iii) $L=1 \Rightarrow$ No aporta nada

- Criterio de Corolario (Factoriales)

$\{a_n\}$ $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \longrightarrow L \not\Longrightarrow \{\sqrt[n]{a_n}\} \longrightarrow L$$

Criterio de la raiz

- Criterio de Raabe

$\{a_n\}$ $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\{n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right\} \longrightarrow L \in \mathbb{R} \text{ ó } \pm\infty$$

$$\left\{\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n\right\} \longrightarrow e^L$$

Casos

i) $L>1$ ó $+\infty \Rightarrow \sum a_n$ converge

ii) $L<1$ ó $-\infty \Rightarrow \sum a_n$ no converge

iii) $L=1 \Rightarrow$ No aporta

- Criterio de Convergencia Absoluta (Signo [±])

Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$ serie $\Rightarrow$ Si $\sum |a_n|$ converge
$\Downarrow$
$\sum a_n$ converge

- Criterio de Leibniz

$\{a_n\} \searrow 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ converge

Conceptos importantes

- Álgebra de límites

- $\lim f(x)\cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
- $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$
- $\lim f(x)^{g(x)} = \lim f(x)^{\lim g(x)}$
- $\lim (f(x)+g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$

- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}$

– Series importantes

- Series geométricas $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} r^n$ converge $\Rightarrow |r|<1$

$\frac{1}{n^2}$ y $\frac{1}{2^n}$ converge

- Serie Armónica $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \geq 1+\frac{n}{2}$

  * Alternada $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
    - $\Rightarrow \left\{ \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} \right\}$ Creciente y mayorada
    - $\Rightarrow \left\{ \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} \right\}$ Decreciente y minorada

- Otras: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow$ Converge