

WUOLAH



ppicky

www.wuolah.com/student/ppicky



10753

Relacion-ejercicios.pdf

Relación Ejercicios



1º Álgebra I



Grado en Matemáticas



Facultad de Ciencias
Universidad de Granada



Descarga la APP de Wuolah.

Ya disponible para el móvil y la tablet.



Lógica y teoría de conjuntos

Ejercicio 1.1. Establecer las siguientes tautologías:

1. $A \wedge A \Leftrightarrow A$
2. $A \vee A \Leftrightarrow A$
3. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
4. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
5. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
6. $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
7. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
8. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
9. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
10. $[(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))] \Rightarrow [(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$
11. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$
12. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
13. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
14. $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$
15. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Ejercicio 1.2. Se define $A \uparrow B = \neg(A \wedge B)$ (llamada función de Sheffer). Expresar los conectores \neg , \wedge , \vee , \Rightarrow y \Leftrightarrow en términos de \uparrow .

Ejercicio 1.3. A partir de las proposiciones A , B y C se define la proposición $P(A, B, C)$ como cierta cuando lo es una de las dadas. Expresar P en términos de \wedge , \vee y \neg , de aquí, en términos de \uparrow .

Ejercicio 1.4. Encontrar expresiones equivalentes a las siguientes en las que sólo figuren los conectores \neg y \wedge :

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$;
2. $\neg A \wedge \neg B \Rightarrow \neg C \wedge D$

Ejercicio 1.5. Expresar el siguiente enunciado utilizando sólo símbolos: Entre dos números reales cualesquiera distintos existe otro número real.

Ejercicio 1.6. Expresar las siguientes afirmaciones en palabras donde x , y , z son números naturales y reemplazar aquellas que son falsas por sus negaciones:

1. $\forall x \exists y (x = y + y)$;
2. $\forall x \forall y \forall z (y \geq x \Rightarrow (y = x + z))$;
3. $\exists x \exists y ((x \neq y) \wedge (x^y = y^x))$;
4. $\exists x \forall y \exists z ((y > x) \Rightarrow (y = xz))$.

Ejercicio 1.7. Decidir si $A = B$, $A \subset B$ ó $A \in B$ en los siguientes casos:

i) $A = \{\emptyset\}, B = \{\{\emptyset\}\}$

ii) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, B = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

iii) $A = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}, B = \{\{\emptyset\}\}$

Ejercicio 1.8. Dar por extensión los siguientes conjuntos:

a) $\mathcal{P}(\emptyset)$; b) $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$; c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$

Ejercicio 1.9. Demostrar las siguientes afirmaciones:

i) $\{a\} = \{b, c\}$ si y solo si $a = b = c$

ii) Si $a \neq b$ y $c \neq d$ entonces $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ si y solo si $a = c$ y $b = d$

Ejercicio 1.10. Si A y B son subconjuntos de un conjunto E demostrar:

i) $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq \bar{B} \iff B \subseteq \bar{A}$

ii) $A \cup B = E \iff \bar{B} \subseteq A \iff \bar{A} \subseteq B$

Ejercicio 1.11. Sea X un conjunto y A, B, C subconjuntos de X . Demostrar que si $A \cup B \subseteq A \cup C$ y $A \cap B \subseteq A \cap C$ entonces $B \subseteq C$. Como consecuencia demostrar que si $A \cup B = A \cup C$ y $A \cap B = A \cap C$ entonces $B = C$.

Ejercicio 1.12. (Leyes de De Morgan) Si A y B son subconjuntos de un conjunto X , demostrar:

$$i) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}; \quad ii) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Ejercicio 1.13. Verificar las siguientes fórmulas donde A, B y C son subconjuntos de un conjunto X y $A \setminus C = \{x \in X / x \in A \wedge x \notin C\}$:

i) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

ii) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$

iii) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

iv) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = A \cap (C \setminus B)$

v) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

vi) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

Ejercicio 1.14. Se define la diferencia simétrica de dos subconjuntos A y B de un conjunto X por

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Demostrar que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ y que $A \triangle B = \emptyset$ si y solo si $A = B$.

Ejercicio 1.15. Sean $A, B \subseteq X$. Demostrar:

i) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ es una representación de A como una unión disjunta.

ii) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ es una representación de $A \cup B$ como una unión disjunta.

Ejercicio 1.16. Sean $A, B \subseteq X$. Si A tiene n elementos y B tiene m elementos ¿Cuántos elementos tiene $A \cup B$?

Ejercicio 1.17. Sean $A, B \subseteq X$. Demostrar que si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Ejercicio 1.18. Se consideran los subconjuntos de \mathbb{R} , $A = [-1, 1]$ y $B = [-3, 4]$. Describir los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $A \times B$, $B \times A$, $(A \times B) \cap (B \times A)$, $(A \times B) \setminus (B \times A)$, $(A \times B) \cup (B \times A)$.

Ejercicio 1.19. Construir todas las aplicaciones del conjunto $X = \{a, b, c\}$ en el conjunto $Y = \{1, 2\}$ y clasificarlas según sean inyectivas, sobreyectivas, biyectivas ó de ninguno de estos tipos.

Ejercicio 1.20. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x - 3$. Demostrar que existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $gf = 1_{\mathbb{R}}$. ¿Es cierto también que $fg = 1_{\mathbb{R}}$?

Ejercicio 1.21. Sea $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación. Demostrar:

i) $f_*(f^*(B)) \subseteq B$ y se da la igualdad si f es sobreyectiva.

ii) $A \subseteq f^*(f_*(A))$ y se da la igualdad si f es inyectiva.

Ejercicio 1.22. Se consideran las aplicaciones

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \text{ y } X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{k} Z.$$

Demostrar que f y h inducen una única aplicación $f \times h : A \times X \rightarrow B \times Y$ verificando que

$$fpr_A = pr_B(f \times h) \text{ y } hpr_X = pr_Y(f \times h).$$

Demostrar que $(g \times k)(f \times h) = (gf) \times (kh)$.

Ejercicio 1.23. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Demostrar

$$f_*(A \cap f^*(B)) = f_*(A) \cap B$$

Ejercicio 1.24. Dada una aplicación $f : X \rightarrow Y$ y $A \subseteq X$, se llama saturación de A al conjunto $f^*(f_*(A))$. Se dice que A es saturado si $A = f^*(f_*(A))$.

i) Caracterizar los subconjuntos saturados de f si $X = Y = \mathbb{R}$ y f es la aplicación definida por $f(x) = x^2 + 1$.

ii) Hallar la saturación del conjunto $\{\pi\}$ si $X = Y = \mathbb{R}$ y f es la aplicación coseno.

Ejercicio 1.25. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación. Demostrar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) f es inyectiva

ii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$.

Ejercicio 1.26. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ dos aplicaciones y sea $h = gf$ la composición de dichas aplicaciones. Demostrar:

i) Si h es inyectiva entonces f es inyectiva.

ii) Si h es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

iii) Si h es inyectiva y f es sobreyectiva entonces g es inyectiva.

iv) Si h es sobreyectiva y g es inyectiva entonces f es sobreyectiva.

Ejercicio 1.27. Sean las aplicaciones $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ y $h : Z \rightarrow X$ tales que hgf es inyectiva, gfh es inyectiva y fgh es sobreyectiva. Demostrar que las aplicaciones f , g y h son biyectivas.

Ejercicio 1.28. Dar ejemplos de relaciones binarias en un conjunto que verifiquen una sola de las siguientes propiedades: reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva.

Ejercicio 1.29. Demostrar que las siguientes relaciones en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son de equivalencia y describir geométricamente las clases de equivalencia:

i) $(a, b)R(c, d) \iff a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

ii) $(a, b)R(c, d) \iff ab = cd$

Ejercicio 1.30. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por $f(x) = x^2$. Determinar R_f y el conjunto cociente de R bajo esta relación.

Ejercicio 1.31. Se considera la aplicación $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = E(+\sqrt{x})$ donde E denota "parte entera".

i) Demostrar que la relación

$$x \sim y \iff E(+\sqrt{x}) = E(+\sqrt{y})$$

es una relación de equivalencia en \mathbb{N} .

ii) Calcular la clase de equivalencia de los elementos 1, 2 y 5.

iii) Calcular la clase de equivalencia de $n \in \mathbb{N}$.

iv) Demostrar que f es sobreyectiva.

v) Hallar la descomposición canónica de f .

Ejercicio 1.32. Sea $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ y $f : X \rightarrow Y$ la aplicación dada por: $f(0) = c$; $f(1) = f(2) = a$; $f(3) = b$. Considerar la aplicación $f^* : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ que a cada subconjunto $B \subseteq Y$ le hace corresponder su imagen inversa por f .

- i) ¿Es f^* inyectiva, sobreyectiva o biyectiva?
- ii) Calcular la relación \sim_{f^*} en $\mathcal{P}(Y)$ asociada a f^* y el conjunto cociente $\mathcal{P}(Y)/\sim_{f^*}$.
- iii) Hallar la descomposición canónica de f^* .

Ejercicio 1.33. Sean X e Y dos conjuntos tales que $Y \subseteq X$. En el conjunto $\mathcal{P}(X)$ se define la siguiente relación binaria:

$$A \sim B \iff A \cap Y = B \cap Y$$

Demostrar que dicha relación es de equivalencia y describir el conjunto cociente.

Ejercicio 1.34.

- i) Dar un ejemplo de una relación binaria que sea reflexiva y simétrica pero que no sea transitiva.
- ii) Calcular cuantas relaciones reflexivas se pueden definir en un conjunto de 4 elementos.
- iii) Calcular cuantas relaciones de equivalencia distintas se pueden definir en un conjunto de 3 elementos y construir todos los conjuntos cocientes.
- iv) Demostrar que un conjunto de 4 elementos admite exactamente 15 conjuntos cociente.

Ejercicio 1.35. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación y sea R una relación de equivalencia en Y . Estudiar si la siguiente relación binaria S en X

$$x_1 S x_2 \iff f(x_1) R f(x_2)$$

es una relación de equivalencia.

Ejercicio 1.36. Una relación binaria R en un conjunto X se dice que es circular si satisface la siguiente propiedad:

$$x_1 R x_2 \wedge x_2 R x_3 \Rightarrow x_3 R x_1$$

Demostrar que una relación binaria en X es de equivalencia si y solo si es reflexiva y circular.

Ejercicio 1.37. Sea $X = Y = \{a, b, c, d\}$ y sea $f : X \rightarrow Y$ la aplicación dada por el grafo $\{(a, a), (b, a), (c, d), (d, c)\}$. Considérense las aplicaciones inducidas $f_* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ y $f^* : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ y determínense entonces los conjuntos cociente de $\mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{P}(Y)$ bajo las relaciones de equivalencia inducidas por f_* y f^* .

Ejercicio 1.38. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Z$ dos aplicaciones tales que f es sobreyectiva y $R_f \subseteq R_g$. Demostrar que existe una aplicación $h : Y \rightarrow Z$ tal que $g = hf$.

Ejercicio 1.39. Si X e Y son dos conjuntos y R y S son relaciones de equivalencia en X e Y respectivamente, definir en el conjunto $X \times Y$ una relación de equivalencia T tal que exista una biyección

$$(X \times Y)/T \cong (X/R) \times (Y/S)$$

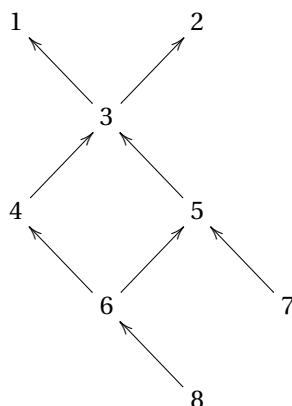
Ejercicio 1.40. Encontrar el error en la siguiente demostración:

“Una relación binaria sobre un conjunto X que es simétrica y transitiva es reflexiva porque $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 R x_2 \Rightarrow x_2 R x_1$ (por simetría) y de aquí, por transitividad, $x_1 R x_1$ ”.

Ejercicio 1.41. Dibujar un diagrama para cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{N} parcialmente ordenados por divisibilidad y encontrar los elementos notables que existan:

- i) $\{1, 2, 3, 6, 12\}$
- ii) $\{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$
- iii) $\{1, 2, 3, 5, 12, 60\}$
- iv) $\{1, 2, 3, 8, 9, 72\}$

Ejercicio 1.42. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ordenado por el diagrama



y sea $A = \{4, 5, 6\}$. Encontrar todos los elementos notables en X y A .

Ejercicio 1.43. Encontrar todos los órdenes parciales que se pueden definir en un conjunto de 3 elementos.

Ejercicio 1.44. Dada una aplicación $f : X \rightarrow Y$ se define en $\mathcal{P}(Y)$ la relación binaria:

$$B R B' \Leftrightarrow f_*(f^*(B)) \subseteq B' \quad \forall B, B' \in \mathcal{P}(Y).$$

Estudiar si R es una relación de orden en $\mathcal{P}(Y)$.

Ejercicio 1.45. Sean X e Y conjuntos ordenados y definamos en $X \times Y$ la siguiente relación binaria:

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \wedge y \leq y'$$

Demostrar que " \leq " es una relación de orden en $X \times Y$ pero que este orden no es total (incluso en el caso de que X e Y fueran totalmente ordenados) salvo en el caso de que X ó Y consistan de un solo elemento.

Ejercicio 1.46. (Orden lexicográfico) Sean X e Y conjuntos ordenados y definamos en $X \times Y$ la siguiente relación binaria:

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \vee (x = x' \wedge y \leq y')$$

Demostrar que " \leq " es una relación de orden en $X \times Y$ y que este orden es total si X e Y son totalmente ordenados.

Ejercicio 1.47.

Sean X e Y conjuntos ordenados y consideremos en $X \times Y$ el orden lexicográfico. Demostrar que si X e Y son bien ordenados entonces $X \times Y$ también es bien ordenado.

Ejercicio 1.48. Considérese en el plano euclídeo \mathbb{R}^2 la siguiente relación de orden:

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \wedge y \leq y'$$

Calcular los elementos maximales, minimales, supremo e ínfimo de la circunferencia $C = \{(x, y)/x^2 + y^2 = 1\}$.

Ejercicio 1.49. Sea $<$ una relación binaria sobre un conjunto X que es transitiva y antirreflexiva (esto último significa que $x < x$ no se verifica para ningún $x \in X$). Demostrar que la relación $x \leq y$ definida por $x < y \vee x = y$ es un orden en X .

Ejercicio 1.50. Una relación reflexiva y transitiva sobre un conjunto X es llamada un "preorden" sobre X . Si $<$ es un preorden sobre X demostrar que la relación:

$$x R y \Leftrightarrow x < y \wedge y < x$$

es una relación de equivalencia sobre el conjunto X . Si \bar{x} denota la clase de equivalencia del elemento x , demostrar que la relación binaria en el conjunto cociente X/R :

$$\bar{x} \leq \bar{y} \Leftrightarrow x_1 < y_1 \quad \forall x_1 \in \bar{x}, \forall y_1 \in \bar{y}$$

es una relación de orden.

Ejercicio 1.51. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2010)

Sea X un conjunto y A un subconjunto de X . Se considera la aplicación:

$$f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(A)$$

definida, para cada $B \in \mathcal{P}(X)$, por $f(B) = B \cap A$.

- i) Estudiar si la aplicación f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.
- ii) En el caso particular de que $X = \{a, b, c\}$ y $A = \{b, c\}$, calcular el conjunto cociente de $\mathcal{P}(X)$ bajo la relación de equivalencia R_f definida por la aplicación f .

Ejercicio 1.52. (Propuesto en Examen Final Febrero 2011)

Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $A = \{1, 3\}$. En $\mathcal{P}(X)$ se define la relación binaria

$$B \mathcal{R} C \Leftrightarrow B \cap \bar{A} = C \cap \bar{A}$$

donde \bar{A} denota el complementario de A en X . Demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia y calcular el conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/\mathcal{R}$.

Ejercicio 1.53. (Propuesto en Examen Final Febrero 2011)

Razonar brevemente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. El conjunto de partes de un conjunto puede ser el conjunto vacío.
2. Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son aplicaciones y la composición $g \circ f$ es biyectiva entonces f y g son biyectivas.
3. Existen relaciones de equivalencia \mathcal{R} en un conjunto X de forma que X y el conjunto cociente X/\mathcal{R} son biyectivos.

Ejercicio 1.54. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2011)

Sea $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide a } 30\}$ y sea $f : D \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ la aplicación definida, para cada $a \in D$, por $f(a)$ = número de divisores de a . Estudiar si la aplicación f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Calcular la imagen de f y la imagen inversa $f^*(\{3, 4\})$. Construir el conjunto cociente D/R_f donde R_f es la relación de equivalencia inducida por f .

Ejercicio 1.55. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2011)

Sea A y B subconjuntos de un conjunto X . Se define

$$A * B = \{x \in X \mid x \notin A \vee x \in B\}.$$

1. Demostrar que si C es otro subconjunto de X se tiene que

$$C \subseteq A * B \iff A \cap C \subseteq B.$$

2. Sea $X = \{0, 1\}$. Consideramos el conjunto $\mathcal{P}(X)$ de partes de X y la aplicación $f : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $f(A, B) = A * B$. Calcular $f(\{0\}, \emptyset)$. Estudiar si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Calcular el conjunto cociente $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)/R_f$ donde R_f es la relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ inducida por la aplicación f .

Ejercicio 1.56. (Propuesto en Examen Final Febrero 2012)

Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y $I = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ es inyectiva}\}$. Se considera la aplicación

$$\varphi : I \rightarrow X \times \mathbb{Z}_2$$

definida por $\varphi(f) = (f(1), \bar{1})$. Listar los elementos de I y estudiar si φ es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Dar explícitamente los elementos del conjunto cociente I/R_φ (donde R_φ denota la relación de equivalencia en I inducida por φ).

Ejercicio 1.57. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2012)

Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ la aplicación definida por $f(x, y) = |xy|$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}$ y se considera el conjunto cociente $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{R_f}$.

1. Halla la clase del par $(p, 1)$ con p primo.
2. ¿Hay alguna clase con 4 elementos?

3. ¿Cuántas hay con infinitos elementos?

4. ¿Hay alguna clase con 12 elementos?

Ejercicio 1.58. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2012)

Sea $X = \{n \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq n \leq 210\}$ y sea $f : X \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ la aplicación definida por $f(n) =$ número de primos distintos e. Razonar que cada elemento de X tiene ciertamente una única imagen. Estudiar si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Describir el conjunto cociente X/R_f (donde R_f denota la relación de equivalencia en X inducida por f). Dar, si es posible, 5 elementos distintos de cada clase de equivalencia en el conjunto cociente X/R_f . Calcular $f_*({2, 6, 12, 100})$, $f^*({4, 5})$ y $f^*({5})$.

Ejercicio 1.59. (Propuesto en Examen Final Febrero 2013)

Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y sea $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ la aplicación definida, para cada $x \in X$, por $f(x) = \text{M.C.D.}(x, 18)$. Determinar el subconjunto $\text{Im}(f)$ imagen de f y estudiar si f es sobreyectiva, inyectiva o biyectiva. Considerando en X la relación de equivalencia R_f inducida por f , dar explícitamente los elementos del conjunto cociente X/R_f .

Ejercicio 1.60. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2013)

Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $f : X \times X \rightarrow \mathbb{N}$ la aplicación definida, para cada $(a, b) \in X \times X$, por $f(a, b) = |a - b|$. Estudiar si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Considerando la relación de equivalencia R_f inducida por f , determinar el conjunto cociente $X \times X/R_f$ explicitando todas las clases de equivalencia y sus elementos.

Ejercicio 1.61. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2013)

Se considera el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ y el conjunto $P(X)$ de partes de X . Para cada $A \in P(X)$, si $|A|$ denota el número de elementos de A y \bar{A} el complementario de A en X , se define la aplicación

$$f : P(X) \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ por } f(A) = (|A|, |\bar{A}|).$$

Razonar si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Determinar el conjunto imagen de f . Considerando R_f la relación de equivalencia en $P(X)$ inducida por f , determinar el conjunto cociente $P(X)/R_f$ explicitando los elementos de cada clase. Calcular la imagen directa $f_*({\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}})$ y la imagen inversa $f^*({(1, 2), (4, 3)})$.

Se considera la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 1$ y, $\forall n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + n$. Demostrar que $\forall n \geq 2$ se tiene que $a_n + a_{n-1} = n^2$.

Ejercicio 1.62. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2014)

Se consideran los conjuntos $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, el conjunto $P(X)$ de partes de X y la aplicación

$$f : P(X) \rightarrow Y$$

definida, $\forall A \in P(X)$, por $f(A) = \sum_{a \in A} a$.

1. Estudiar si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.
2. Calcular el conjunto cociente $P(X)/R_f$ (donde R_f denota la relación de equivalencia inducida por f).
3. Calcular $f^*({3})$.

Ejercicio 1.63. (Propuesto en Examen Final Febrero 2015)

Se considera el conjunto \mathcal{M} de las matrices 2×2 con coeficientes en \mathbb{Z} y se define en él la relación:

$$ARB \iff A - B \text{ tiene todas sus entradas pares}$$

- (a) Razonar que R es una relación de equivalencia. ¿Están relacionados los elementos $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?
- (b) Describir el conjunto cociente \mathcal{M}/R , ¿Qué cardinal tiene?

Ejercicio 1.64. (Propuesto en Examen Septiembre 2015)

Dados $A, B \subseteq E$ y se define

$$f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$

por:

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

- (a) Probar que f es inyectiva $\iff A \cup B = E$
- (b) Probar que f es sobreyectiva $\iff A \cap B = \emptyset$
- (c) Para el caso en que $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$, se considera la relación de equivalencia \sim_f inducida por f . Determinar el conjunto cociente $\frac{\mathcal{P}(E)}{\sim_f}$

El anillo \mathbb{Z} .

Ejercicio 2.1. Demostrar:

1. $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
4. $\sum_{i=1}^n i^5 + \sum_{i=1}^n i^7 = 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4$.
5. $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$.
6. $2^n \leq n!$ para todo $n \geq 4$.
7. $2^n > n^3$ para todo $n \geq 10$.

Ejercicio 2.2. Demostrar que para todo entero $n \geq 1$ se verifica:

- i) $\overline{(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$
- ii) $\overline{(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}$

Ejercicio 2.3. La sucesión de Fibonacci está definida por recurrencia de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

1. Calcular los 10 primeros términos de la sucesión.
2. Probar que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Ejercicio 2.4. Vamos a demostrar por inducción que $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$. Para ello supongamos que el resultado es cierto para n y veamos que ocurre para $n+1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^n i + (n+1) = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n^2+n-2}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n^2+3n}{2} = \\ &= \frac{n(n+3)}{2} = \frac{(n+1)-1)((n+1)+2)}{2}. \end{aligned}$$

¿Es correcta esta demostración?

Ejercicio 2.5. ¿Qué es erróneo en la demostración del siguiente teorema?

Teorema.- Cualquier conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tiene la propiedad de que todos sus elementos son iguales.

Dem: La demostración se hace por inducción sobre n .

Para $n = 1$ el resultado es cierto pues cualquier conjunto $\{a_1\}$ tiene la propiedad requerida.

Supongamos el resultado cierto para $n-1$ y consideremos el conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. La hipótesis de inducción aplicada al subconjunto $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ da $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1}$ y aplicada al subconjunto $\{a_2, \dots, a_n\}$ da $a_2 = \dots = a_n$. Entonces $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n$ como se quería demostrar.

Ejercicio 2.6. Denotamos

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Probar que

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}.$$

Utilizando esta igualdad, probar por inducción

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Ejercicio 2.7. Demostrar por inducción que para todo número par k , el resto de dividir 2^k entre 3 es 1.

Ejercicio 2.8. Demostrar por inducción que para todo número impar k , el resto de dividir 2^k entre 3 es 2.

Ejercicio 2.9. Demostrar que para todo n , entero no negativo, $4^{2n} - 2^n$ es divisible por siete.

Ejercicio 2.10. Demuestra que para todo n , entero no negativo, se tiene que $2^{3n} - 14^n$ es divisible por 6.

Ejercicio 2.11. Para cada una de las siguientes parejas de enteros (a, b) , calcula el máximo común divisor $d = m.c.d.(a, b)$ y enteros u, v que satisfagan la relación de Bezout, esto es, tales que $d = ua + vb$

$$\begin{aligned} a &= -99, & b &= 17, \\ a &= 6643, & b &= 2873, \\ a &= -7655, & b &= 1001 \\ a &= 24230, & b &= 586. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.12. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$:

- a) $3^{2n} - 2^n$ es divisible por 7, b) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7,
c) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es divisible por 11, d) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible por 17.

Ejercicio 2.13. Demostrar que si a y b son enteros primos relativos y n es un entero divisible por a y por b entonces lo es por ab .

Ejercicio 2.14. Demuestra que si $3|a^2 + b^2$, entonces $3|a$ y $3|b$.

Ejercicio 2.15. Demuestra que si $5|a^2 + b^2 + c^2$, entonces $5|a$ o $5|b$ o $5|c$.

Ejercicio 2.16. Sean a, b, c enteros no nulos. Demostrar que $(a, b) = 1$ y $(a, c) = 1$ si y solo si $(a, [b, c]) = 1$.

Ejercicio 2.17. Para n natural calcula: $m.c.d.(n, n^2)$, $m.c.d.(n, n+1)$ y $m.c.d.(n, n+2)$.

Ejercicio 2.18. Resolver las ecuaciones diofánticas

$$60x + 36y = 12, \quad 35x + 6y = 8, \quad 12x + 18y = 11.$$

Ejercicio 2.19. Se dispone de 4050 euros para gastar en bolígrafos de 10 euros y en plumas de 46 euros. Calcular cuantos bolígrafos y plumas se pueden comprar si se quiere el menor número posible de bolígrafos.

Ejercicio 2.20. Definimos la sucesión siguiente:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 2.$$

1. Demuestra que $\text{mcd}(F_n, F_{n+1}) = 1$ y $\text{mcd}(F_n, F_{n+2}) = 1$ para $n \geq 0$.
2. Calcula todas las soluciones enteras de la ecuación $F_7 \cdot x - F_5 \cdot y = 3$.

Ejercicio 2.21. Factorizar en primos cada uno de los siguientes números y, usando estas factorizaciones, calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de cada una de las parejas que puedas formar con ellos: 6643, 2873, 4148, 252.

Ejercicio 2.22. Demostrar que entre $-|b|$ y $|b|$ no hay múltiplos de b salvo el cero.

Ejercicio 2.23. Demostrar que cualquier entero $n > 1$ ó es primo ó tiene un factor primo $\leq \sqrt{n}$. ¿Cuántos primos hay entre 27270 y 27280? ¿y entre 4900 y 4905?

Ejercicio 2.24. Demostrar que cualquier producto de números de la forma $4n + 1$ es otra vez de esa forma. Deducir que hay infinitos primos de la forma $4n - 1$.

Ejercicio 2.25. (Antiguo problema chino) Tres agricultores dividieron equitativamente el arroz que habían cultivado en común. Para venderlo fueron a mercados diferentes, donde se usaban diferentes medidas de peso, además todos ellos usaron carretas en las que podían transportar un máximo de 1000 libras. En el primer mercado la medida era de 11 libras, en el segundo de 14 y en el tercero de 15 libras. Cada agricultor vendió todo lo que pudo en medidas enteras y cuando volvieron al hogar, el primero llevaba 5 libras de arroz, el segundo 6 y el tercero 4. ¿Cuanto arroz habían cultivado entre los tres?

Ejercicio 2.26. (Antiguo problema chino) Cuatro cuadrillas de albañiles emprenden la construcción de un dique, cada una se compromete a ejecutar el mismo número de jornadas de trabajo y todas ellas trabajarán al menos una jornada completa, siendo el número de jornadas completas de trabajo inferior a 1500. La primera de las cuadrillas consta de 2 hombres, la segunda de tres, la tercera de 7 y la cuarta de 25. Completando el trabajo en jornadas completas de cada cuadrilla, al final quedó un día de trabajo para un hombre de la primera cuadrilla, para dos de la segunda y para cinco de la tercera y cuarta. ¿Cuántos fueron los días de trabajo empleados en construir el dique?

Ejercicio 2.27. Un grupo de 12 ladrones decidieron robar un cofre lleno de monedas de oro, que según un informe fidedigno contenía entre 2000 y 3000 monedas. El día del robo, uno de ellos resultó apresado, los 11 restantes decidieron repartir las monedas a partes iguales. Al hacer el reparto resultó que sobraron 8 monedas que decidieron darían a María, la mujer del ladrón apresado. María, no contenta con el reparto, delató a los dos ladrones que lo habían propuesto, después de lo cual quedaron 9 ladrones en libertad que volvieron a repartirse el botín. En este caso solo sobraron 2 monedas, que en su momento darían a María. Indignada María con el comportamiento de los compinches de su marido, decidió acabar con todos ellos y quedarse con todo el botín. Para ello, colocó una bomba en el lugar de reunión de la banda, desafortunadamente para María, la bomba hizo explosión cuando solo se encontraban 4 ladrones en el local. Los que quedaron, volvieron a decidir repartir el botín a partes iguales y dar a María la única moneda que sobraba del reparto. Esto indignó aún más a María, que mediante intrigas consiguió que disputaran los ladrones entre ellos, muriendo 3 en la disputa. Los dos que quedaron con vida repartieron el botín a partes iguales y no sobró moneda alguna. ¿Que cantidad de monedas tenía el cofre?

Ejercicio 2.28. Encontrar todas las soluciones del sistema de congruencias:

$$x \equiv 3 \pmod{5}; x \equiv -2 \pmod{4}; x \equiv 1 \pmod{7}$$

Ejercicio 2.29. Antonio, Pepe y Juan son tres campesinos que principalmente se dedican al cultivo de la aceituna. Este año la producción de los olivos de Antonio fue tres veces la de los de Juan y la de Pepe cinco veces la de los de Juan. Los molinos a los que estos campesinos llevan la aceituna, usan recipientes de 25 litros el de Juan, 7 litros el de Antonio y 16 litros el de Pepe. Al envasar el aceite producido por los olivos de Juan sobraron 21 litros, al envasar el producido por Antonio sobraron 3 litros y al envasar el producido por Pepe sobraron 11 litros. Sabiendo que la producción de Juan está entre 1000 y 2000 litros ¿cual fue la producción de cada uno de ellos?

Ejercicio 2.30. Calcular la menor capacidad posible de un depósito de agua sabiendo que a un depósito de doble capacidad le ha faltado un litro para poder ser llenado con garrafas de 5 litros, mientras que a uno de quintuple capacidad también le ha faltado un litro tanto si se llenaba con garrafas de 7 litros como de 11 litros.

Ejercicio 2.31. En la finca de Juan todos los años se consume la misma cantidad de fertilizante, que siempre viene en un camión de menos de 2 toneladas de capacidad. En los tres últimos años Juan ha utilizado, para envasar el fertilizante, sacos de 75, 56 y 143 kilogramos respectivamente. El primer año al envasar el fertilizante sobraron 21 Kg, el segundo 45 y el tercero 77. ¿Qué cantidad de fertilizante consume Juan anualmente? En la finca vecina de la de Juan se han utilizado, también en los últimos tres años, los mismos sacos que Juan y al envasar su fertilizante en estos sacos han sobrado las mismas cantidades que a Juan, sin embargo en esta finca se necesitan más de un camión para transportar su fertilizante. ¿Qué cantidad mínima de fertilizante se usa en la finca vecina de la de Juan?

Ejercicio 2.32. Calcular el resto de dividir 279^{323} entre 17. Análogamente, si se divide 320^{207} entre 13.

Ejercicio 2.33. Demostrar las reglas del 2,3,5 y 11 para la división.

Ejercicio 2.34. Calcular las dos últimas cifras de $3^{3^{100}}$.

Ejercicio 2.35. En un garaje se aparcen coches (de cuatro ruedas) y camiones (de seis ruedas). ¿Cual es el mayor número de camiones que se puede aparcar si el total de neumáticos en el garaje ha de ser 778? ¿Y si lo que queremos es aparcar el mayor número de coches?

Ejercicio 2.36. Calcular la menor solución positiva del sistema de congruencias

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x & \equiv & 1 \pmod{4} \\ 2x & \equiv & 2 \pmod{5} \\ x & \equiv & -1 \pmod{3} \end{array} \right\}$$

Ejercicio 2.37. Discutir y resolver el siguiente sistema de congruencias:

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x & \equiv & -1 \pmod{7} \\ x & \equiv & -2 \pmod{5} \\ 5x & \equiv & 1 \pmod{6} \end{array} \right\}$$

Ejercicio 2.38. Calcular la última cifra del número 87^{95} .

Ejercicio 2.39. Encuentra el menor entero par positivo que al dividirlo entre cinco dé resto tres, y que sumándole siete sea un múltiplo de trece.

Ejercicio 2.40. Calcula el resto de dividir 1025^{345689} entre 17.

Ejercicio 2.41. Encuentra todas las soluciones enteras de $10x - 15y = -35$.

Ejercicio 2.42. Sea $x = 12341^{56789}$. Sabiendo que al dividir x entre 4 da resto 1, y entre 25 da resto 11, calcula $x \bmod 100$.

Ejercicio 2.43. En un parking, cuya máquina expendedora solo admite importes exactos, tenemos que pagar 37 euros. Si sólo disponemos de monedas de 2 euros y billetes de 5 euros, razonar de cuantas formas podemos hacer el pago y cuales son éstas.

Ejercicio 2.44. Resolver, si es posible, la congruencia $43^{51}x \equiv 2 \pmod{36}$.

Ejercicio 2.45. Del número de monedas que hay en una caja se sabe que al contarlas de siete en siete sobra una, que el doble de esa cantidad menos una es múltiplo de cinco y que si en la caja echamos dos monedas más entonces la cantidad es múltiplo de 4 ¿Cual es el menor número posible de monedas que puede haber en la caja? Razona la respuesta.

Ejercicio 2.46. Decide razonadamente si $[5]^{10077}$ es una unidad de \mathbb{Z}_{38808} . Calcula su inverso en caso de que lo tenga.

Ejercicio 2.47. Calcular el resto de dividir 213^{267} entre 13.

Ejercicio 2.48. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2010)

Demostrar que, para todo $n \geq 1$, se tiene que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

Ejercicio 2.49. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2010)

Calcular dos números enteros a y b que verifiquen que $a + b = 54$, $m.c.d.(a, b) = 6$ y $m.c.m.(a, b) = 120$.

Ejercicio 2.50. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2010)

Encontrar todos los números enteros $x, y \geq 0$ tales que $10x + 46y = 4050$.

Ejercicio 2.51. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2010)

Una persona denuncia ante la policía que le han robado, en billetes de 10 euros, una cantidad de dinero entre 1500 y 2000 euros y que solo recuerda que al contar la cantidad de billetes que tenía de 4 en 4 le sobraba 1, que al doble de dicha cantidad le faltaban 3 billetes para ser múltiplo de 7 y que a 5 veces dicha cantidad le sobraban 2 billetes para ser divisible por 9. ¿Puedes ayudar a la policía a decidir algo sobre esta denuncia calculando el número de billetes que le han podido robar al denunciante? Razona tu respuesta.

Ejercicio 2.52. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2010)

Razonar si tiene solución la congruencia $313^{42}x \equiv 7 \pmod{50}$ y, en caso afirmativo, dar su solución general.

Ejercicio 2.53. (Propuesto en Examen Final Febrero 2011)

1. Utiliza las ecuaciones diofánticas para saber de cuantas formas se puede cambiar una moneda de 2 euros en monedas de 5 y 20 céntimos.
2. En una bodega tienen envases de 6, 7 y 9 litros y una cierta cantidad de vino. El propietario dice que sabe que tiene una cantidad entre 2000 y 2800 litros y que conoce que al verter dicha cantidad en los envases de 6 litros le queda un resto de 3 litros, que si vertiera el triple de esa cantidad en los envases de 7 litros le sobrarían 5 litros y que si repartiera el cuádruple de esa cantidad en los envases de 9 litros le sobrarían 6 litros. ¿Puedes ayudarlo diciéndole la cantidad exacta de vino que tiene?

Ejercicio 2.54. (Propuesto en Examen Final Febrero 2011)

Razonar brevemente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. El resto de dividir 4957^{1212} entre 450 es 1.
2. Existe el inverso de la clase de 295 en \mathbb{Z}_{1274} .

Ejercicio 2.55. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2011)

En el anillo \mathbb{Z}_{2700} , calcular, si existe, el inverso de la clase de 77 y la potencia 77^{1439} .

Ejercicio 2.56. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2011)

Tres agricultores trabajan juntos y al recoger su cosecha la reparten en partes iguales que se proponen vender en mercados diferentes. En el primero de los mercados sólo aceptan sacos de 7 kilos, en el segundo de 5 kilos y en el tercero de 6 kilos. Al regreso de los mercados al primero le sobraron 6 kilos, al segundo 4 kilos y al tercero 5 kilos. ¿Cuál es el menor peso posible de la cosecha de los agricultores?

Ejercicio 2.57. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2011)

1. Demostrar que, para cualquier $n \geq 1$, se tiene que $n^4 \equiv n \pmod{2}$. Usar este resultado para demostrar que, para cualquier $n \geq 1$, las últimas cifras de los números n y n^5 son iguales.
2. Una mujer compra 15 Kg de fruta entre naranjas y plátanos por 9,9 euros. Si 1 Kg de plátanos cuesta 20 céntimos mas que uno de naranjas y compra mas plátanos que naranjas ¿Cuántos Kg de naranjas y plátanos ha podido comprar y a cuanto le ha costado cada Kg de fruta?
3. Se tiene una cantidad **par** de baldosas, menor que 600, que se quieren disponer, de forma contigua, en filas. Cuando así se hace y se completan filas de 17 baldosas sobran 8 baldosas. Si se considera únicamente **la mitad** de las baldosas iniciales y se ordenan en filas de 7 baldosas entonces sobran 3 baldosas. Calcular la posible cantidad inicial de baldosas y razonar, caso de que exista solución, si ésta es única.

Ejercicio 2.58. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2011)

Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. En \mathbb{Z}_{3960} hay 2999 divisores de cero no nulos.
2. La congruencia $35x \equiv 42 \pmod{49}$ tiene 6 soluciones distintas módulo 49 que son todas congruentes módulo 7.
3. El número 27^{189} es divisible por 13 y su último dígito es 5.

Ejercicio 2.59. (Propuesto en Examen Final Febrero 2012)

1. Calcular todos los múltiplos del número 28 cuyas dos últimas cifras sean 16.
2. Determinar los valores de $c \in \mathbb{Z}$, $10 < c < 18$, para los que la ecuación diofántica

$$84x + 990y = c$$

tiene solución y, en su caso, calcular dicha solución.

Ejercicio 2.60. (Propuesto en Examen Final Febrero 2012)

Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Para cualquier $n \geq 1$ se tiene que $7^n \equiv 2^{2n} \pmod{3}$.
2. El resto de dividir 125^{4777} entre 13 es 5.
3. En \mathbb{Z}_{203} se tiene que $\bar{5} + \bar{5} \cdot \bar{4}^{169} \cdot \bar{17}^{-1}$ es una unidad.
4. Si $\text{m.c.d.}(a, 561) = 1$ entonces $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$ y $a^{560} \equiv 1 \pmod{11}$

Ejercicio 2.61. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2012)

1. Calcula la potencia 2623^{1439} en el anillo \mathbb{Z}_{2700} .
2. El diámetro de una moneda de 5 pesetas es de 37 mm y el de la de 1 peseta es 23 mm. ¿Cuántas monedas de cada tipo son necesarias para obtener la longitud de un metro alineando monedas de 5 y de 1 peseta?

3. Justifica que el sistema de congruencias:

$$\left. \begin{array}{rcl} 15x & \equiv & 50 \\ 3x & \equiv & 6 \\ 5x + 2 & \equiv & 252 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (mod\ 170) \\ (mod\ 432) \\ (mod\ 528) \end{array}$$

es compatible y encuentra todas sus soluciones.

Ejercicio 2.62. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2012)

1. Un grupo de turistas, con menos de 300 integrantes, viaja en 5 autobuses iguales que llenan completamente. Llegan a un hotel para cenar y se encuentran con que en el comedor hay mesas redondas con 9 asientos cada una y mesas cuadradas para 4 personas. Los turistas de los dos primeros autobuses se sientan alrededor de las mesas redondas quedando 3 personas sin acomodar; éstas, junto con los turistas de los 3 autobuses restantes, se sientan alrededor de las mesas cuadradas. Quedan así todos acomodados para la cena sin que ninguna mesa resulte incompleta. Al día siguiente, van a realizar una visita a un museo donde deben entrar en grupos de 24 personas. Si al hacer la distribución en grupos, el ultimo es de tan solo 15 personas, ¿cuántos turistas viajan en el grupo?
2. Un hombre va a un banco a cobrar un cheque por valor de x euros e y céntimos. El cajero, por error, le da y euros y x céntimos. El hombre no se da cuenta hasta que gasta 23 céntimos y, además, se da cuenta de que en ese momento tiene $2x$ euros y $2y$ céntimos. ¿Cual era la cantidad que figuraba en el cheque?

Ejercicio 2.63. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2012)

Razonar brevemente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si ahora son las 9 de la mañana entonces hace 8234 horas eran las 7 de la mañana.
2. La congruencia $9x \equiv 6 \pmod{15}$ tiene solución única módulo 15.
3. El sistema $\left. \begin{array}{rcl} x & \equiv & 4 \\ 7x & \equiv & -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (mod\ 6) \\ (mod\ 15) \end{array}$ tiene solución única módulo 30.
4. Si X es un conjunto no vacío la aplicación $X \rightarrow P(X)$ dada por $x \mapsto \{x\}$ es biyectiva.
5. Para todo $n \geq 1$ se tiene que $6 \mid n(n^2 + 5)$.
6. En un conjunto con tres elementos se pueden definir exactamente 2^6 relaciones reflexivas distintas.
7. En \mathbb{Z}_{18} el elemento $[5] + [2][11]^{-1} + [5]^{55}$ es una unidad.
8. El número 401 es primo.
9. Los números enteros -3642 y 3^{485} son congruentes módulo 7.
10. La relación de divisibilidad en \mathbb{N} es una relación de orden total.

Ejercicio 2.64. (Propuesto en Examen Final Febrero 2013)

1. Demostrar que, para cualquier $n \geq 1$, se tiene que $2^n + (-1)^{n+1} \equiv 0 \pmod{3}$.
2. Razonar si $\overline{7} + \overline{3} \cdot \overline{5}^{169} + \overline{23}^{-1}$ es unidad o divisor de cero en \mathbb{Z}_{294} .
3. Utilizar la teoría de ecuaciones diofánticas para resolver el siguiente ejercicio: Una persona va a un supermercado y compra 12 litros de leche, unos de leche entera y otros de desnatada, por 12 euros. Si la leche entera vale 30 céntimos más por litro que la desnatada, y ha comprado el mínimo posible de leche desnatada, ¿Cuántos litros ha comprado de cada una y cuánto vale cada litro?
4. Hallar el menor número positivo de cuatro cifras que dividido por 4, 7 y 11 da resto 3, y que dividido por 13 da resto 1.

Ejercicio 2.65. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2013)

1. Se considera la sucesión

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que $\forall n \geq 1$ se tiene $\sum_{k=1}^n a_k = (n+1)a_n - n$.

- Un granjero compra 100 animales entre pollos, conejos y terneros (se entiende que compra al menos uno de cada tipo). Los pollos valen 1€, los conejos 20€ y los terneros 100€ y el granjero se gasta en total 2000€. ¿Cuántos animales ha comprado de cada tipo?
- Calcula $673^{367^{145}}$ en el anillo \mathbb{Z}_{675} .

Ejercicio 2.66. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2013)

- Un distribuidor de gasoil debe entregar a una determinada hora un pedido de 81000 l. y para ello posee camiones cisterna que transportan 3500 l. cada uno y remolques cisterna que transportan 1500 l. Las cisternas deben ir llenas y cada camión puede llevar un solo remolque. Si el distribuidor quiere minimizar el número de camiones a utilizar ¿Cuántos camiones y remolques debe preparar para el envío? ¿Cuál sería la respuesta si cada camión pudiera llevar dos remolques?
- Una expedición de seguidores de un club de fútbol llega en 5 aviones iguales completamente llenos al aeropuerto de la ciudad del equipo rival con el que van a disputar la semifinal de la Copa de Europa. Se sabe que si a los integrantes de 2 aviones se les transportara al estadio en minibuses de 15 pasajeros quedarían 3 de ellos sin ser transportados; que si a los integrantes de 3 aviones se les llevase en minibuses de 14 pasajeros uno de ellos se quedaría en el aeropuerto y que si a todos los expedicionarios se les transportase en minibuses de 8 pasajeros quedarían 3 asientos libres en el último de ellos. El equipo rival viste camisetas a rayas y, además, se sabe que ha reservado para los expedicionarios un máximo de 2000 entradas. Si todos los aficionados que han viajado van a poder ver el partido ¿Cuántas personas componen la expedición?

Ejercicio 2.67. (Propuesto en Examen Parcial Noviembre 2013) Razonar brevemente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- Si el examen de hoy (que es a las 16 h.) lo hubiéramos hecho hace 213 h. tendría que haber sido convocado a las 9 de la mañana.
- El entero -6 pertenece a tres ideales propios de \mathbb{Z} .
- En \mathbb{Z}_{588} el elemento $[17] + [2][55]^{-1} + [5]^{339}$ es una unidad.
- \mathbb{Z}_{231} tiene 110 divisores de cero no nulos.
- Entre los números 91000 y 91500 no hay ningún número que sea múltiplo de 7 y cuyas dos últimas cifras sean 12.

Ejercicio 2.68. (Propuesto en Examen Final Febrero 2014) En \mathbb{Z}_{101} , se considera la relación:

$$aRb \Leftrightarrow a - b = a^2 - b^2.$$

- Demuestra que R es una relación de equivalencia.
- Calcula las clases de equivalencia $[3]$ y $[51]$.
- Describe en general $[a]$ para cualquier $a \in \mathbb{Z}_{101}$ ¿Cuántos elementos tiene el cociente \mathbb{Z}_{101}/R ?

Ejercicio 2.69. (Propuesto en Examen Final Febrero 2014)

- Toma como n la suma de los cuatro primeros dígitos de tu DNI. Halla las unidades de \mathbb{Z}_n y razona que la ecuación $nx + (n+1)y = 25$ tiene infinitas soluciones en \mathbb{Z} .
- Sea $m \in \mathbb{N}$, calcula los divisores positivos de 6^m ¿Cuántos hay?
- En \mathbb{Z}_{12} calcula

$$\bar{5} \bar{11} + \bar{7}^{-1} + \bar{5}^{1573}$$

y estudia si es un divisor de cero.

Ejercicio 2.70. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2014) Responde razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- $m.c.d.(10^{100}, 10^{300} + 3) = 1$.
- $10^{11} + 1 \equiv 10^{15} + 1 \pmod{11}$.
- $3^{2000} \equiv 3^{100} \pmod{6}$.

Anillos. Dominios euclídeos.

Ejercicio 3.1. Demostrar que en un anillo la conmutatividad de la suma es consecuencia de los restantes axiomas.

Ejercicio 3.2. Sea X un conjunto no vacío y $R = \mathcal{P}(X)$, el conjunto de partes de X . Si se consideran en R las operaciones:

$$A + B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$A \times B = A \cap B$$

demostrar que $(R, +, \times)$ es un anillo con elemento 1 igual a X .

Ejercicio 3.3. Sea A un grupo abeliano y consideremos el producto cartesiano $R = \mathbb{Z} \times A$. Si en R definimos las siguientes operaciones:

$$(n, a) + (m, b) = (n + m, a + b)$$

$$(n, a)(m, b) = (nm, ma + nb)$$

demostrar que $(R, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con elemento 1 igual a $(1, 0)$.

Ejercicio 3.4. En el conjunto \mathbb{Z} de los enteros se definen las siguientes operaciones:

$$a \oplus b = a + b - 1 \text{ y } a \otimes b = a + b - ab.$$

Demuestra que $\langle \mathbb{Z}, \oplus, \otimes \rangle$ es un dominio de integridad.

Ejercicio 3.5. En el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de las parejas de enteros se definen las siguientes operaciones:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \text{ y } (a, b)(c, d) = (ac, bd)$$

Demuestra que $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ es un anillo conmutativo. Prueba que no es dominio de integridad y calcula sus unidades y sus divisores de cero.

Ejercicio 3.6. En un anillo R un elemento a es idempotente si $a^2 = a$. Demuestra que en un dominio de integridad los únicos idempotentes son 0 y 1.

Ejercicio 3.7. Determinar los ideales del anillo cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Describir el retículo de ideales de este anillo cuando $n = pq$ siendo p y q primos positivos distintos.

Ejercicio 3.8. Calcular los divisores de cero en el anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ejercicio 3.9. Sea X el conjunto de los elementos no nulos del anillo $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. En X se define la siguiente relación de equivalencia:

$$x R y \Leftrightarrow x \mid y \wedge y \mid x$$

Describir el conjunto cociente X/R determinando cuantas clases de equivalencia hay y que elementos hay en cada clase.

Ejercicio 3.10. Demostrar que un cuerpo es un dominio de integridad.

Ejercicio 3.11. Sea R un dominio de integridad y $a, b, c \in R$. Demostrar:

$$1. \ b \mid a \Rightarrow b \mid ac.$$

$$2. \ \left. \begin{matrix} b \mid a \\ c \mid b \end{matrix} \right\} \Rightarrow c \mid a.$$

$$3. \ \left. \begin{matrix} b \mid a \\ b \mid (a + c) \end{matrix} \right\} \Rightarrow b \mid c.$$

$$4. \left. \begin{array}{l} b|a \\ b \nmid c \end{array} \right\} \Rightarrow b \nmid (a+c).$$

$$5. \text{ Si } c \neq 0, bc|ac \Leftrightarrow b|a.$$

Ejercicio 3.12. Estudia que tipo de anillos son \mathbb{Z}_7 y \mathbb{Z}_9 . Halla sus unidades y sus divisores de cero. Si n es impar, prueba que $\bar{2} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$.

Ejercicio 3.13. El conjunto $A = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \subseteq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ es cerrado para la suma y el producto.

- Demostrar que A es un cuerpo.
- Demostrar que A no es un subanillo de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Ejercicio 3.14. ¿Cuales de los siguientes conjuntos son subanillos del cuerpo \mathbb{Q} de los números racionales? (Siempre que aparece $\frac{n}{m}$ suponemos que $m.c.d.(n, m) = 1$).

$$1. \left\{ \frac{n}{m} \mid m \text{ es impar} \right\}$$

$$2. \left\{ \frac{n}{m} \mid m \text{ es par} \right\}$$

$$3. \left\{ \frac{n}{m} \mid 4 \nmid m \right\}$$

$$4. \left\{ \frac{n}{m} \mid (m, 6) = 1 \right\}$$

5. ¿Es alguno de los subconjuntos anteriores un ideal de \mathbb{Q} ?

Ejercicio 3.15. Sea $f: R \rightarrow R$ un homomorfismo de anillos y sea $S = \{a \in R \mid f(a) = a\}$. Demostrar que S es un subanillo de R .

Ejercicio 3.16. Sea R un anillo y sea $a \in R$ un elemento invertible. Demostrar que la aplicación $f_a: R \rightarrow R$ dada por $f_a(x) = axa^{-1}$ es un automorfismo de R .

Ejercicio 3.17. Dado un anillo R , demostrar que existe un único homomorfismo de anillos de \mathbb{Z} en R .

Ejercicio 3.18. Demostrar que si A es un anillo de característica n entonces existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en A y que además este homomorfismo es inyectivo.

Ejercicio 3.19. Dados dos números naturales n y m , dar condiciones para que exista un homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Ejercicio 3.20. Describir los ideales de $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ enumerando los elementos de cada uno de ellos.

Ejercicio 3.21. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- El anillo $\frac{\mathbb{Z}}{(6\mathbb{Z}+4\mathbb{Z}) \cap 5\mathbb{Z}} \times \mathbb{Q}$ tiene 4 unidades e infinitos divisores de cero.
- Existe un único homomorfismo de anillos de \mathbb{Z} en $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$ que es sobreyectivo.
- \mathbb{Z}_{1457} es un cuerpo.
- De \mathbb{Z}_7 en \mathbb{Z}_{14} hay exactamente 7 homomorfismos de anillos.

Ejercicio 3.22. Calcular en $\mathbb{Z}[i]$ todos los elementos z que cumplan $N(z) \leq 5$, ¿cuales de ellos son irreducibles?.

Ejercicio 3.23. Calcula $\mathcal{U}(R)$ las unidades del anillo R en los casos $R = \mathbb{Z}[i]$ y $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Ejercicio 3.24. Comprobar que los elementos $2, 3, 4 + \sqrt{10}, 4 - \sqrt{10}$ son irreducibles en $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ pero no son primos. Como consecuencia deducir que en $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ hay dos factorizaciones en irreducibles de 6 distintas.

Ejercicio 3.25. Demostrar que los elementos $2, 7, 1 + \sqrt{-13}$ y $1 - \sqrt{-13}$ son irreducibles no asociados en $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$. Encontrar dos factorizaciones distintas en irreducibles de 14 y a partir de ella concluir que en $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ hay elementos irreducibles que no son primos.

Ejercicio 3.26. En el anillo $\mathbb{Z}[i]$ calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de $a = 2i$ y $b = 3 - 7i$. Calcular además elementos u y v tales que $ua + vb = \text{mcd}(a, b)$.

Ejercicio 3.27. Calcular las unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ y demostrar que en este anillo $4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$ son dos factorizaciones en irreducibles distintas del elemento 4. Razonar que los elementos en las factorizaciones no son primos.

Ejercicio 3.28. En el anillo $\mathbb{Z}[i]$ calcular elementos u y v tales que

$$(2 + 5i)u + (3 - 4i)v = 1 + i.$$

Ejercicio 3.29. Da la solución general, si existe, de la ecuación diofántica en $\mathbb{Z}[i]$,

$$4x + (3 + 3i)y = -1 + 5i.$$

Ejercicio 3.30. Factoriza $15 + 42i$ y $9 - 2i$ en $\mathbb{Z}[i]$. Calcula $\text{mcd}(15 + 42i, 9 - 2i)$.

Ejercicio 3.31. En $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ factoriza $3 + \sqrt{3}$ en irreducibles y calcula $\text{m.c.d.}(3 + \sqrt{3}, 2)$ y $\text{m.c.m.}(3 + \sqrt{3}, 2)$.

Ejercicio 3.32. Demuestra que los elementos $2, 1 + \sqrt{-7}, 1 - \sqrt{-7}$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ son irreducibles pero no son primos y encuentra dos factorizaciones que no sean esencialmente idénticas de 8 en irreducibles. ¿Que se puede concluir entonces de las propiedades aritméticas de $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$?

Ejercicio 3.33. Sea $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ un elemento tal que $ab \neq 0$. Probar que es primo si y solo si $a^2 + b^2$ es un primo.

Ejercicio 3.34. En el anillo $\mathbb{Z}[i]$ se consideran los elementos $x = 1 + 3i, y = 3 + 4i$. Factorizar x e y como producto de irreducibles y calcular su m.c.d. y su m.c.m.

Ejercicio 3.35. En el anillo $\mathbb{Z}[i]$ resolver el siguiente sistema de congruencias

$$\left. \begin{array}{lcl} x & \equiv & i \pmod{3} \\ x & \equiv & 2 \pmod{2+i} \\ x & \equiv & 1+i \pmod{3+2i} \\ x & \equiv & 3+2i \pmod{4+i} \end{array} \right\}$$

Ejercicio 3.36. Resolver, dando la solución general, el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[i]$:

$$\left. \begin{array}{lcl} x & \equiv & 1 \pmod{1+2i} \\ x & \equiv & 1-i \pmod{1+3i} \\ x & \equiv & 2i \pmod{3+2i} \end{array} \right\}$$

Ejercicio 3.37. Calcular en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ el m.c.d. y el m.c.m. de los elementos 3 y $2 + \sqrt{-2}$.

Ejercicio 3.38. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ resolver el siguiente sistema de congruencias

$$\left. \begin{array}{lcl} x & \equiv & 1 + 2\sqrt{-2} \pmod{2 - 3\sqrt{-2}} \\ x & \equiv & 3 \pmod{1 + \sqrt{-2}} \end{array} \right\}$$

Ejercicio 3.39. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ comprobar que $4 = 2 \cdot 2$ y $4 = (1 + \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5})$ son dos factorizaciones en irreducibles no equivalentes, ¿es $(1 + \sqrt{5})$ primo?

Ejercicio 3.40. Factorizar en irreducibles los siguientes elementos: $11 + 7i$ en $\mathbb{Z}[i]$; $4 + 7\sqrt{2}$ en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$; $4 - \sqrt{-3}$ en $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Ejercicio 3.41. Hallar el m.c.d. y las expresiones de Bezout para las siguientes parejas de elementos de $\mathbb{Z}[i]$: $11 + 7i$ y $3 + 7i$; $8 + 6i$ y $5 - 15i$; $16 + 7i$ y $10 - 5i$.

Ejercicio 3.42. i) Encontrar u y v en $\mathbb{Z}[i]$ tales que

$$4u + (3 + 3i)v = -1 + 5i$$

ii) En $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de $2 + \sqrt{-2}$ y 3 .

Ejercicio 3.43. i) Resolver el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ y dar una solución de norma mayor que 7:

$$x \equiv 2 \pmod{1 + \sqrt{-2}}; \quad x \equiv \sqrt{-2} \pmod{3 + \sqrt{-2}}$$

ii) Dar la solución general de la ecuación en \mathbb{Z} $6783x + 613y = 3$.

iii) Calcular $m.c.d.(-1 + 3i, 2)$ en $\mathbb{Z}[i]$.

iv) Descomponer $-3 + 9i$ en factores primos en $\mathbb{Z}[i]$.

Ejercicio 3.44. i) Calcular $m.c.d.(18 - i, 11 + 7i)$ en $\mathbb{Z}[i]$.

ii) Verificar que $4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$ es un ejemplo de factorización no única en elementos irreducibles en $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Ejercicio 3.45. Resolver en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ el siguiente sistema de congruencias:

$$x \equiv 1 + 2\sqrt{-2} \pmod{2 - 3\sqrt{-2}}; x \equiv 3 \pmod{1 + \sqrt{-2}}.$$

Ejercicio 3.46. Resolver en \mathbb{Z} la congruencia $3293x \equiv 222 \pmod{8991}$ y en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ la congruencia $(2 + \sqrt{2})x \equiv 3 - \sqrt{2} \pmod{3}$.

Ejercicio 3.47. Razonar si existe, en el anillo cociente $A = \mathbb{Z}[i]/(2 + 2i)$, el inverso de la clase del elemento $2 + 3i$. Encontrar, si existe, un divisor de cero no nulo en A . ¿Es A un cuerpo?

Ejercicio 3.48. Resolver, dando la solución general, el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 + \sqrt{-2} \pmod{3 + \sqrt{-2}} \\ x \equiv 5 \pmod{2 + \sqrt{-2}} \end{array} \right\}$$

Ejercicio 3.49. Encuentra todas las soluciones en $\mathbb{Z}[i]$ de la ecuación $(3 + 2i)x + 5iy = 4$.

Ejercicio 3.50. Sea R el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$.

1. Demuestra que $2, 3, 1 + \sqrt{-11}$ y $1 - \sqrt{-11}$ son irreducibles en R .
2. ¿Son primos? (ten en cuenta que $12 = 2^2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-11})(1 - \sqrt{-11})$).

Ejercicio 3.51. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de $1 + 4\sqrt{-2}$ y $5 + 2\sqrt{-2}$ en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

Ejercicio 3.52. Encuentra todas las soluciones en $\mathbb{Z}[i]$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + i)x \equiv 2 \pmod{3}, \\ 2x \equiv i \pmod{2 + i}. \end{array} \right.$$

Ejercicio 3.53. 1. Probar que en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, la igualdad

$$9 = 3 \cdot 3 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$$

proporciona dos factorizaciones distintas en irreducibles (aunque no en primos) del elemento 9.

2. Resolver, si es posible, la siguiente congruencia en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

$$(1 + \sqrt{-2})x \equiv 2 - \sqrt{-2} \pmod{\sqrt{-2}}$$

Ejercicio 3.54. 1. Encuentra todas las soluciones en $\mathbb{Z}[i]$ de la ecuación $(3 + i)x + 4y = 4 + 2i$.

2. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ se tiene la igualdad

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-17})(1 - \sqrt{-17}).$$

Utilizando esta igualdad demuestra que en $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ hay elementos irreducibles que no son primos.

3. Dados los elementos $a = 4 - \sqrt{2}$ y $b = -1 - 5\sqrt{2}$ del anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Calcula, en los casos en que existan, $mcd(a, b)$, $mcm(a, b)$ y la factorización en irreducibles de $mcm(a, b)$.

Ejercicio 3.55. Estudiar si el sistema siguiente de congruencias en $\mathbb{Z}[i]$ tiene solución y, en caso afirmativo, dar la solución general:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv i \pmod{1 - 2i} \\ (2 + i)x \equiv i \pmod{1 + i} \\ x \equiv -i \pmod{2 - i} \end{array} \right\}$$

Ejercicio 3.56. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Todo subanillo de un anillo no conmutativo es no conmutativo.
2. Hay un anillo cociente del anillo \mathbb{Z}_{12} que tiene 8 elementos.

- Si α es el ideal principal de $\mathbb{Z}[i]$ generado por el elemento $3+i$ y β el generado por el elemento $2+2i$, entonces el anillo cociente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{\alpha+\beta}$ es un cuerpo con dos elementos.
- De la factorización $15 = 3 \cdot 5 = (1 + \sqrt{-14})(1 - \sqrt{-14})$ en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ se deduce que dicho anillo no es un dominio euclídeo.
- La congruencia en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $(2 + \sqrt{2})x \equiv 3 + 2\sqrt{2} \pmod{3 - \sqrt{2}}$, tiene solución.

Ejercicio 3.57. (Propuesto en Examen Final Febrero 2011)

- Resolver, si es posible, el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ dando la solución general:

$$\begin{cases} x \equiv -2 \pmod{1 + \sqrt{-2}} \\ x \equiv 4\sqrt{-2} \pmod{1 - \sqrt{-2}} \end{cases}$$

- Demostrar que todo elemento del anillo cociente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(2)}$ admite un representante de norma ≤ 3 . Calcular las unidades y los divisores de cero en dicho anillo.

Ejercicio 3.58. (Propuesto en Examen Final Febrero 2011)

Razonar brevemente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- El anillo cociente $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ tiene cinco ideales no triviales.
- El entero 2 es irreducible como elemento de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ pero no lo es como elemento de $\mathbb{Z}[i]$.
- $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ no es un dominio euclídeo porque es posible encontrar para el elemento 8 dos factorizaciones en irreducibles que no son esencialmente idénticas (es decir que se diferencian no atendiendo al orden o a producto por unidades)

Ejercicio 3.59. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2011) Razonar que hay un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. ¿Cual es el núcleo de dicho homomorfismo? Calcular todos los ideales, unidades y divisores de cero de ambos anillos.

Ejercicio 3.60. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2011)

- Discutir y resolver en $\mathbb{Z}[i]$ la ecuación

$$(1 + 3i)X + (-5 + i)Y = 1 + i$$

- Demostrar razonadamente que $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ no es un dominio de factorización única.

Ejercicio 3.61. (Propuesto en Examen Final Febrero 2012)

- Resolver el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[i]$

$$\begin{cases} (3 + i)x \equiv 1 - i \pmod{2 + 5i} \\ x \equiv 1 + i \pmod{3 + i} \end{cases}$$

- En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ se considera el ideal $I = (2 + \sqrt{-2})$ generado por el elemento $2 + \sqrt{-2}$. Estudiar si el anillo cociente $A = \frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]}{I}$ es un cuerpo. Calcular caso de que existan $(\sqrt{-2} + I)^{-1}$ y $((3 + \sqrt{-2}) + I)^{-1}$. ¿Cuántos elementos tiene A ?

Ejercicio 3.62. (Propuesto en Examen Final Febrero 2012) Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- El anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ no es un Dominio euclídeo.
- El anillo cociente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(2)}$ tiene cinco ideales distintos.

Ejercicio 3.63. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2012)

- En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ se considera el ideal $I = (3 + \sqrt{3})$ generado por el elemento $3 + \sqrt{3}$. Estudiar si el anillo cociente $A = \frac{\mathbb{Z}[\sqrt{3}]}{I}$ es un cuerpo. Si es posible, encuentra en este anillo cociente A , de forma razonada, un elemento que sea unidad y otro que sea divisor de cero. ¿Cuántos homomorfismos de anillos se pueden definir de \mathbb{Z} en A ?

2. Calcular máximo común divisor, coeficientes de Bezout y mínimo común múltiplo de los elementos 5 y 7-i del anillo $\mathbb{Z}[i]$. Calcular las factorizaciones en irreducibles de ambos elementos ¿Cuales son sus factorizaciones en primos? ¿Cuántos ideales tiene el anillo cociente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+2i)}$?

Ejercicio 3.64. (Propuesto en Examen Final Febrero 2013)

1. Discute y resuelve en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ el sistema:

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x \equiv -1 \pmod{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3}x \equiv 2 - \sqrt{3} \pmod{1 - \sqrt{3}} \end{cases}$$

2. Dado el cociente $\frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]}{(2 + \sqrt{-2})}$. Contesta razonadamente a las preguntas: ¿Es cuerpo? ¿Cuántos elementos tiene? ¿Cuáles son unidades? ¿Y divisores de cero? ¿Cuáles son sus ideales?

Ejercicio 3.65. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2013)

1. Resolver el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[i]$

$$\begin{cases} x \equiv i \pmod{1+i} \\ x \equiv 1-i \pmod{3i} \\ x \equiv -1 \pmod{2-i} \end{cases}$$

2. Se considera el anillo cociente $A = \frac{\mathbb{Z}[\sqrt{3}]}{(2)}$. En este anillo A encuentra, si es posible y de forma razonada: a) un elemento que sea unidad pero que no sea el 'uno' del anillo; b) un divisor de cero; c) un representante de la clase del elemento $4 + 3\sqrt{3}$ de norma menor que 4; d) un homomorfismo de anillos de \mathbb{Z} en A .

Ejercicio 3.66. (Propuesto en Examen Final Febrero 2014)

1. Resuelve en $\mathbb{Z}[i]$ el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{aligned} x &\equiv i \pmod{1+i} \\ x &\equiv -1 \pmod{2+i} \\ x &\equiv i \pmod{2i} \end{aligned}$$

2. Resuelve la siguiente ecuación en $\mathbb{Z}_3[x]$.

$$(x^3 - x^2 + x - 1)F(x) + (x^4 - x^3 + x^2 - 1)G(x) = x^2 - 1$$

y encuentra una solución en la que el grado del polinomio $F(x)$ sea mínimo.

Ejercicio 3.67. (Propuesto en Examen Final Febrero 2014) Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- El anillo \mathbb{Z}_4 tiene el mismo número de ideales que de subanillos.
- El anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + 2 \rangle$ es un cuerpo y tiene menos de 35 elementos.
- El anillo cociente $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/\langle 1 - \sqrt{2} \rangle$ tiene solo un elemento.
- La aplicación $\varphi : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ dada por $\varphi(a) = a^5$ es un homomorfismo de anillos.

Ejercicio 3.68. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2014)

1. Resolver en $\mathbb{Z}[i]$ el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 + 2i \pmod{1 + 5i} \\ x &\equiv 1 + i \pmod{2 + i} \\ x &\equiv -1 + i \pmod{2i} \end{aligned}$$

2. Resolver la siguiente ecuación en $\mathbb{Z}_3[x]$

$$(x^4 - 1)F(x) + (x^3 + x + 1)G(x) = x^2 - 1$$

y encontrar, si existe, una solución particular en la que el grado del polinomio $G(x)$ sea menor que 3.

Ejercicio 3.69. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2014) Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. El anillo $\mathbb{Z}[i]$ contiene subanillos que no son ideales mientras que en \mathbb{Z} todos sus subanillos son ideales.
2. El homomorfismo de anillos $\varphi : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[i]$ de evaluación en "i", definido por $\varphi(f(x)) = f(i) \forall f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, es inyectivo.
3. Si $D = \mathbb{Z}[i]$, el anillo de polinomios $D[x]$ es un D.F.U. (dominio de factorización única).
4. El anillo $\mathbb{Z}_6[x]$ es un D.E. (dominio euclídeo).
5. Hay cuatro ideales de \mathbb{Z} que contienen al ideal de \mathbb{Z} , $[12\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z}] + [14\mathbb{Z}] \cap 21\mathbb{Z}$.

Ejercicio 3.70. (Propuesto en Examen Final Febrero 2015)

1. Estudiar para que valores de n y m la correspondencia $\varphi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$ dada por $\varphi([a]_n) = [a]_m$ es una aplicación bien definida.
2. Decidir si en el anillo \mathbb{Z}_{12} el elemento $[89]^{27} + [4]^3[6] - [7]^{-1}$ es una unidad o divisor de cero (donde $[a]$ denota clase módulo 12).
3. Sea A un anillo conmutativo y C el subconjunto de A formado por sus divisores de cero ¿Es C un ideal de A ? Razona la respuesta.
4. Razonar que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ es un DFU (dominio de factorización única) pero que el cociente $\frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]}{(3)}$ no lo es.
5. Demostrar que si D es un DE (dominio euclídeo) entonces $\forall a, b \in D$ se tiene que $Da + Db = Dd$ donde $d = \text{mcd}(a, b)$.

Ejercicio 3.71. (Propuesto en Examen Septiembre 2015)

(a) Resolver en $\mathbb{Z}[i]$ el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv 1 + 2i \pmod{1 + 2i} \\ x \equiv 1 + i \pmod{1 + i} \\ x \equiv -1 + i \pmod{3i} \end{cases}$$

(b) Sabiendo que el anillo $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ es un DE respecto de la función norma $N(a + b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$.

- i) Razona que A tiene un número finito de unidades.
- ii) Halla todos los irreducibles en A con norma menor o igual que 5.
- iii) Halla una factorización en irreducibles de $6 \in A$.

Anillos de polinomios.

Ejercicio 4.1. Encontrar un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 3 tal que:
 $f(0) = 6$, $f(1) = 12$ y $f(x) \equiv (3x + 3) \pmod{(x^2 + x + 1)}$.

Ejercicio 4.2. Demostrar que en un D.E. todos los ideales son principales. Concluir entonces que el DFU $\mathbb{Z}[x]$ no es un D.E. viendo que el ideal suyo generado por 2 y x no es principal.

Ejercicio 4.3. Encontrar los polinomios irreducibles de grados 2 y 3 en $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$.

Ejercicio 4.4. Estudiar si los siguientes polinomios son reducibles ó irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$:

- a) $2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15$
- b) $x^4 + 15x^3 + 7$
- c) $x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$
- ch) $2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- d) $x^4 - 22x^2 + 1$
- e) $x^3 + 17x + 36$
- f) $x^5 - x^2 + 1$
- g) $x^4 + 10x^3 + 5x^2 - 2x - 3$
- h) $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 15x + 1$
- i) $x^4 - x^2 - 2x - 1$
- j) $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 3x - 11$
- k) $x^5 - 10x^4 + 36x^3 - 53x^2 + 26x + 1$
- l) $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 15x + 1$
- ll) $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 1$
- m) $x^6 + 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x - 1$
- n) $x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x + 1$
- ñ) $x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 2x - 1$
- o) $2x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 4$
- p) $3x^5 - x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2x + 1$
- q) $x^4 - x^3 + 9x^2 - 4x - 1$
- r) $x^7 + 5x^6 + x^2 + 6x + 5$
- s) $3x^5 + 42x^3 - 147x^2 + 21$
- t) $x^5 + 3x^4 + 10x^2 - 2$
- u) $x^4 + 3x^2 - 2x + 5$
- v) $3x^6 + x^5 + 3x^2 + 4x + 1$

w) $2x^4 + x^3 + 5x + 3$

x) $2x^5 - 2x^2 - 4x - 2$

y) $3x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 6$

z) $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1$

α) $6x^4 + 9x^3 - 3x^2 + 1$

β) $2x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 2$

γ) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$

δ) $x^6 - x^5 + 3x^4 + x + 2$ sabiendo que reducido módulo 7, es producto de un polinomio de grado 1 por un irreducible de grado 5.

Ejercicio 4.5. Dado un anillo conmutativo y un elemento $a \in R$ demuestra que la aplicación $\Phi : R[x] \rightarrow R[x]$ dada por $\Phi(f(x)) = f(x + a)$ es un isomorfismo de anillos. Aplica este resultado y el criterio de Eisenstein para ver que el polinomio $f(x) = x^4 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ estudiando el polinomio $f(x + 1)$.

Ejercicio 4.6. Sea I el ideal de $\mathbb{Z}_3[x]$ generado por $x^2 + 2x + 2$. Demostrar que el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/I$ es un cuerpo y hallar el inverso de $(ax + b) + I$.

Ejercicio 4.7. Hallar el m.c.d. y el m.c.m. en $\mathbb{Z}_5[x]$ de los polinomios $x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ y $3x^6 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$.

Ejercicio 4.8. Calcular, si es posible, el inverso de la clase de x en el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/(x^4 + x + 1)$.

Ejercicio 4.9. Demostrar que $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^4 + x + 1)}$ es un cuerpo y calcular el inverso de la clase de $x^2 + 1$.

Ejercicio 4.10. Considerar el polinomio $f(x) = x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$:

- Probar que $f(x)$ es irreducible.
- Calcular el inverso de la clase $[x^2 + x + 2]$ en el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/f(x)\mathbb{Z}_3[x]$.
- ¿Es el polinomio $x^3 + 9x^2 - x + 244$ irreducible sobre $\mathbb{Z}[x]$?

Ejercicio 4.11. Probar que el anillo cociente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^3 - 2x - 3)}$ es un cuerpo y calcular el inverso de la clase de $x + 1$.

Ejercicio 4.12. Calcular las unidades de los anillos cociente $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + x + 1)$, $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 1)$ y $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 2)$.

Ejercicio 4.13. Calcular el inverso de la clase del polinomio $2x + 1$ en el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/(x^3 + 2x^2 + 4x - 2)$

Ejercicio 4.14. Hallar la intersección, la suma y el producto de los ideales de $\mathbb{Q}[x]$ generados por los polinomios $x^2 + x - 2$ y $x^2 - 1$.

Ejercicio 4.15. Demostrar que el subconjunto de $\mathbb{Z}[x]$ formado por los polinomios con coeficientes de grado uno par es un subanillo. Comprobar que en este subanillo los elementos 2 y $2x$ tienen m.c.d. y no tienen m.c.m.

Ejercicio 4.16. Estudiar si son cuerpos los siguientes anillos cociente $K[x]/I$:

- $K = \mathbb{Q} ; I = (x^2 + 2)$
- $K = \mathbb{R} ; I = (x^2 + 2)$
- $K = \mathbb{Q} ; I = (x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12)$
- $K = \mathbb{Z}_3 ; I = (x^2 + x + 1)$

Ejercicio 4.17. Factoriza los siguientes polinomios como producto de irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$.

- $x^6 - x^5 - 10x^2 + 15x - 5$.
- $3x^4 - 5x^3 - 101$.
- $2x^4 + 4x - 1$.

Ejercicio 4.18. Factoriza en irreducibles de $\mathbb{Q}[x]$ los siguientes polinomios.

- $2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

2. $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 1$.

3. $x^5 - 4x + 1$.

Ejercicio 4.19. Estudiar si es un cuerpo el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/(x^5 + 5x^4 + 3x^2 + 5)$ y calcular, si es posible, el inverso en dicho anillo de la clase de $x + 1$.

Ejercicio 4.20. Estudiar la irreducibilidad en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$ de los polinomios

1. $f(x) = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x - 7$;

2. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 + 9x + 10$;

3. $f(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.

Ejercicio 4.21. En el anillo $A[x]$ se consideran los ideales $I_1 = (7)$, $I_2 = (x)$ e $I_3 = (x^2)$. Describir los ideales $I_1 + I_2$, $I_2 + I_3$, $I_2 \cap I_3$, $I_1 \cap (I_2 + I_3)$, reconociendo cuales de éstos son principales, en los casos en que $A = \mathbb{Z}$ y $A = \mathbb{Q}$.

Ejercicio 4.22. Demostrar que $\mathbb{Z}_3[x]/(x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1)$ es un cuerpo y que todo elemento suyo admite un representante de grado ≤ 3 . Calcular el inverso en dicho cuerpo de la clase de $x + 2$.

Ejercicio 4.23. (Propuesto en Examen Final Febrero 2011)

1. Estudiar si son cuerpos los siguientes anillos cocientes y, caso de existir, calcular en cada caso el inverso de la clase de $x^2 - x + 1$:

$$\frac{\mathbb{Z}_5[x]}{(x^3 + 2)} \quad , \quad \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)} .$$

2. Estudiar si la siguiente congruencia en $\mathbb{Z}_3[x]$ tiene solución y, en caso afirmativo, dar la solución general:

$$(x^4 + x^3 + x + 2)f(x) \equiv (x^3 + x + 1) \pmod{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

Ejercicio 4.24. (Propuesto en Examen Final Febrero 2011)

Razonar brevemente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- El polinomio $3x^5 - 6x^4 + 30x^2 + 12x - 6 \in \mathbb{Z}[x]$ es reducible en $\mathbb{Z}[x]$ pero irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.
- Un polinomio de $\mathbb{Z}[x]$ con raíces racionales no enteras es irreducible.

Ejercicio 4.25. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2011)

- Sea $R = A[x]/(2x^3 + 6x^2 + 18x + 6)$. Estudiar si R es un cuerpo en los casos $A = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}_2$, $A = \mathbb{Z}_3$, $A = \mathbb{Z}_5$. Cuando sea posible, calcular el inverso de la clase de $3x + 2$.
- Estudiar la irreducibilidad en $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$ de los siguientes polinomios y factorizarlos en irreducibles:

i) $2x^7 - 4x^5 + 20x^3 - 8x + 12$; ii) $10x^6 + 7x^5 + 3x^4 + 14x^3 + 7x^2 + 8x + 4$

Ejercicio 4.26. (Propuesto en Examen Final Febrero 2012)

- Factorizar en irreducibles el polinomio $4x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 26x^2 + 16x + 6 \in A[x]$ en los casos: i) $A = \mathbb{Z}$; ii) $A = \mathbb{Q}$; iii) $A = \mathbb{Z}_3$
- Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
 - El anillo cociente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(3x^4 - 15x^2 + 30x + 45)}$ es un cuerpo.
 - Existe un polinomio $f \in \mathbb{Z}_3[x]$ de grado 3 tal que $f(1) = 1$ y $f \equiv 2x + 1 \pmod{x^3 + 2x + 2}$.

Ejercicio 4.27. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2012)

1. Factorizar en irreducibles de $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{Z}_3[x]$ los siguientes polinomios:

(a) $f_1 = 2x^6 + 5x^5 + 12x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 2x - 1$

(b) $f_2 = 2x^5 - 10x^4 + 20x^2 + 50x - 10$

(c) $f_3 = x^4 + 3x^2 - 2x + 5$

2. Estudiar si el anillo cociente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^4 + 3x^2 - 2x + 5)}$ es un cuerpo y, si es posible, calcular:

- (a) El inverso de la clase del polinomio $x^2 + 1$.
- (b) Un representante de la clase del polinomio $x^6 + 1$ de grado menor que 4.

Ejercicio 4.28. (Propuesto en Examen Final Febrero 2013)

1. Factorizar en irreducibles de $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$ los siguientes polinomios:
 - i) $f(x) = 30x^5 + 105x^4 - 135x^3 + 180x^2 + 765x + 315$;
 - ii) $g(x) = 20x^4 + 15x^3 - 15x^2 + 20x - 5$;
 - iii) $h(x) = x^5 + 8x^4 + 18x^3 + 11x^2 + 7x + 3$.
2. Razonar que $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{Z}_2[x]$ son D.F.U.. En el cociente $\frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(x^2 + x + 1)}$ ¿Existe el inverso de la clase del polinomio $x^3 + 1$?
3. Razonar si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:
Existe un polinomio de $\mathbb{Z}[x]$ de grado 8 que tiene, en su factorización en $\mathbb{Z}[x]$ cuatro irreducibles distintos, en su factorización en $\mathbb{Q}[x]$ dos irreducibles distintos y en su factorización en $\mathbb{Z}_2[x]$ tres irreducibles distintos.

Ejercicio 4.29. (Propuesto en Examen Final Febrero 2014)

1. Factoriza como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio

$$f(x) = \frac{2}{17}x^5 - \frac{1}{17}x^4 + 2x - 1.$$

2. Factoriza como producto de irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio

$$f(x) = 12x^5 + 126x^4 + 48x^3 - 6x^2 + 12x + 6.$$

3. ¿Tiene $x^3 + 1$ inverso módulo $x^5 + 2x + 2$ en $\mathbb{Z}_3[x]$? En caso afirmativo calcúlalo.

Ejercicio 4.30. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2014)

1. Factorizar en irreducibles de $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio

$$f(x) = 10x^6 + 30x^2 + 60x + 10 \in \mathbb{Z}[x].$$

2. En el anillo cociente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(f(x))}$, calcular el inverso, si existe, de la clase del polinomio $x + 2$.

Ejercicio 4.31. (Propuesto en Examen Final Febrero 2015)

- (a) Estudiar si los siguientes polinomios son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$ (Si son reducibles no hace falta factorizarlos):
 $f_1(x) = 15x^2 + 2x - 8$.
 $f_2(x) = x^5 + 3x^4 + 9x^2 + 3x + 9$.
- (b) Estudiar si los siguientes polinomios son irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ (Si son reducibles no hace falta factorizarlos):
 $f_3(x) = 24x^7 + 12x^5 - 6$
 $f_4(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 4x + 1$.
- (c) Factorizar en $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio $f(x) = -3x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 1$, utilizando en el método general de factorización, que se sabe que tiene un factor $p(x)$ de grado dos verificando:
 - (a) $p(0) \equiv 1 \pmod{3}$,
 - (b) $p(1) \equiv 0 \pmod{3}$,
 - (c) $p(-1) \equiv 1 \pmod{3}$ y
 - (d) $p(0) \equiv 0 \pmod{5}$.

Ejercicio 4.32. (Propuesto en Examen Septiembre 2015)

- (a) Estudia si los siguientes polinomios son irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ (Si son reducibles no hace falta factorizarlos):
 - (a) $f_1(x) = x^6 + 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 3x - 1$.
 - (b) $f_2(x) = 5x^5 - x^4 + 5x^2 + 4x - 1$.
 - (c) $f_3(x) = x^4 - 2x^2 - 3$.
- (b) ¿Cuántos elementos tiene el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/(x^5 - x^4 - 1)$? Calcular el inverso de la clase del polinomio $x^2 + 1$ ¿Es este anillo cociente un cuerpo? (En caso de no serlo encontrar un polinomio cuya clase no tenga inverso).