APUNTES II

lunes, 15 de noviembre de 2021 15:09

Sucesiones Divergentes $\{x_n\} \longrightarrow +\infty \ (-\infty)$

Proposición (Propiedades)

i) Si $\{x_n\}$ diverge positivamente

$\{x_n\} \longrightarrow \infty \iff \{-x_n\} \longrightarrow -\infty$

ii) Si $\{x_n\}$ sucesión tq $x_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\{x_n\} \longrightarrow \infty \iff \left\{\frac{1}{x_n}\right\} \longrightarrow 0$

iii) Si $\left.\begin{array}{l}\{x_n\} \longrightarrow +\infty \\ \{y_n\} \text{ minorada}\end{array}\right\} \{x_n + y_n\} \longrightarrow +\infty$

Si $\left.\begin{array}{l}\{x_n\} \longrightarrow -\infty \\ \{y_n\} \text{ mayorada}\end{array}\right\} \{x_n + y_n\} \longrightarrow -\infty$

Si $\left.\begin{array}{l}\{x_n\} \text{ divergente} \\ \{y_n\} \text{ acotada}\end{array}\right\} \{x_n + y_n\} \text{ divergente}$

iv) $\left.\begin{array}{l}\{x_n\} \longrightarrow +\infty \\ \{y_n\} \longrightarrow y > 0\end{array}\right\} \{x_n y_n\} \longrightarrow +\infty$

Indeterminación: no se otorga suficiente información como para llegar a una conclusión. Por ejemplo

$\{x_n\} \longrightarrow +\infty \quad \{y_n\} \longrightarrow 0$

- $\{x_n \cdot y_n\} \longrightarrow 1 \qquad \left\{n \cdot \frac{1}{n}\right\} \longrightarrow 1$
- $\{x_n \cdot y_n\} \longrightarrow +\infty \qquad \left\{n^2 \cdot \frac{1}{n}\right\} \longrightarrow +\infty$
- ...

$\Longrightarrow$ **Indeterminación**

Op. elementales

Cuidado con exponentes

- "$+\infty - \infty$"
- "$\pm\infty \cdot 0$"
- "$\frac{0}{0}$"
- "1^∞"
- "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$"
- "0^0"
- "$+\infty^0$"

Conocer las sucesiones, no solo los límites

(Regla para $\mathbb{R}$ (y nemotécnica para $\pm\infty$))

$\left.\begin{array}{l}\{x_n\} \longrightarrow x \\ \{y_n\} \longrightarrow y\end{array}\right\} \{x_n + y_n\} \longrightarrow x + y$

Si $x = \pm\infty \quad y \in \mathbb{R}$

$+\infty + y = \infty$

$-\infty + y = -\infty$

$\left.\begin{array}{ll}(y>0) & +\infty \cdot y = +\infty \\ (y<0) & +\infty \cdot y = -\infty\end{array}\right\}$ Regla del producto

Función exponencial

$a^b = \exp(\overset{\text{exp}}{b}\ln \underset{\text{base}}{a}) \Longrightarrow$ Todas las indeterminaciones de exponente se convertirán en indet. de producto

$(a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R})$

$\left.\begin{array}{l}\exp(x) \\ \ln(y)\end{array}\right\}$ inversa

Indeterminaciones. Criterios de convergencia

<u>Proposición</u> (criterio de Stolz) ¿$\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}}$? ¿$\frac{\infty}{\infty}$?

Sea $\{a_n\}$ suc. cualquiera, $\{b_n\}$ cumpliendo $\left\{\begin{array}{l} b_n \neq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \\ \{b_n\} \text{ estrict. creciente} \\ \{b_n\} \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \{b_n\} \nearrow\nearrow +\infty$

$$\text{Si } \left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right\} \longrightarrow L \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow L$$

<u>Ejemplo</u> $\left\{\frac{1^2+2^2+3^2\dots+n^2}{n^3}\right\}$ $a_n = 1^2+2^2+3^2\dots+n^2$ $b_n = n^3$

Stolz? $\{n^3\} \nearrow\nearrow +\infty$

<u>Proposición</u>. (Criterio de Corolario) ¿$\sqrt[n]{a_n}$?

$$\text{Si } \left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \longrightarrow \alpha \Rightarrow \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} \longrightarrow \alpha$$

<u>Ejemplo</u>

$\{\sqrt[n]{n}\} \longrightarrow$??

$\left\{\frac{n+1}{n}\right\} \longrightarrow 1 \Longrightarrow \{\sqrt[n]{n}\} \longrightarrow 1$

<u>Proposición</u>. (Criterio exponencial) ¿$\{x_n^{y_n}\}$?

Requisito: $\{x_n\} \longrightarrow 1$

Sea $\{x_n\} \longrightarrow 1$ $\{y_n\}$ cualquier sucesión
$(x_n > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N})$

$$\{y_n(x_n - 1)\} \longrightarrow L \Longleftrightarrow \{x_n^{y_n}\} \longrightarrow e^L$$

Ejemplo: $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \longrightarrow$??

$\{x_n\} = \left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ $\{y_n\} = \{n\}$

Como $\{x_n\} \longrightarrow 1$, podemos aplicar el crit. exponencial:

$$\left\{y_n(x_n-1)\right\} = \left\{\cancel{n}\left(\cancel{1}+\frac{1}{\cancel{n}}\cancel{-1}\right)\right\} = \left\{1\right\} \longrightarrow 1 \Longleftrightarrow \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \longrightarrow e^1$$