Recuperación Clase del Lunes 13 Dic. 2021
(Semana del Parcial Álgebra → No me encontraba bien "Resfriado")

Tema 12: Funciones Continuas

Definición: Sean A, B conjuntos y una "regla" f, que a cada elemento $x \in A$ le asocia un único elemento $f(x) \in B$.

Ejemplos:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$
$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$
} NO son iguales (Dominio DIFERENTE)

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ (Función definida a trozos)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 - x + 7$

→ Si el codominio no viene dado, se pone el mayor posible ($\mathbb{R}$)
→ Si el dominio no viene dado, se pone el maximal (el mayor conjunto que puede cumplir la regla)

Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, la función $f: A \to B$ se llama "función real de variable real"
($B \subseteq \mathbb{R}$) ($A \subseteq \mathbb{R}$)

Características de funciones:

Contrarrecíproco

- Inyectiva ($f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$) ó ($a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$)
- Sobreyectiva ($\forall b \in B$, $\exists a \in A$ tq $f(a) = b$) NO necesariamente único
- Biyectiva → Inyectiva y Sobreyectiva
- Monótona
  - Creciente si $\forall x, y \in A$ tq $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
  - Decreciente si $\forall x, y \in A$ tq $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

(DESIGUALDADES NO ESTRICTAS) Se mantiene desigualdad. ó Cambia desigualdad al aplicar f

Monotonía estricta
  - Estrictamente creciente si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
  - Estrictamente decreciente si $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

(DESIGUALDADES ESTRICTAS) Dominio y Codominio

Gráfica de f:

$$Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y \in B, y = f(x)\}$$
$$= \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, f(x) \in B\}$$

Definición: Sea f función, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$. Diremos que "f es continua en un punto $a \in A$" si:

$$\forall \{x_n\} \to a \atop (x_n \in A,\ \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(a)$$

Teorema (Caracterización de la Continuidad): Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$.

Son equivalentes:

i) f es continua en a $\left(\forall \{x_n\} \to a \atop x_n \in A,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(a) \right)$ → Definición anterior

ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$: si $x \in A$ cumpliendo $|x - a| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ → Caracterización

---

Álgebra de funciones continuas en el punto $a \in A$

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$

i) Si $\begin{cases} f \text{ continua en } a \\ g \text{ continua en } a \end{cases} \Rightarrow f+g$ continua en a
($f-g$ continua en a)

(Habría que demostrar que si g continua $\Rightarrow -g$ continua
g si) $g(x) = z$
$\Downarrow$
$-g(x) = -z$)

Demo: $\forall \{x_n\} \to a \atop (x_n \in A,\ \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \begin{cases} \{f(x_n)\} \to f(a) \\ \{g(x_n)\} \to g(a) \end{cases} \Rightarrow \{(f+g)(x_n)\} = \{f(x_n) + g(x_n)\} =$

Álgebra de sucesiones

$$\downarrow$$
$$f(a) + g(a) = (f+g)(a)$$

ii) Si $\begin{cases} f \text{ continua en } a \\ g \text{ continua en } a \end{cases} \Rightarrow f \cdot g$ continua en a (Demo análoga a la anterior)

iii) Si $\begin{cases} g(x) \neq 0,\ \forall x \in A \text{ (NO se anula el denominador)} \\ f \text{ continua en } a \\ g \text{ continua en } a \end{cases} \Rightarrow \dfrac{f}{g}$ continua en a

---

Continuidad de la Composición

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$, $f(A) \subseteq B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Si $\begin{cases} f \text{ continua en } a \in A \\ g \text{ continua en } f(a) \in B \end{cases} \Rightarrow g \circ f$ es continua en a
$(\{g(f(x_n))\} \to g(f(a)))$

Definición: Dada $f: A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, llamamos "restricción de f al conjunto B" a una nueva función $f_{|B}: B \to \mathbb{R}$

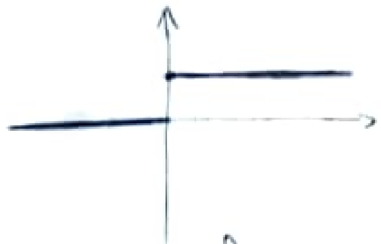
Proposición (Continuidad de la Restricción): Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $a \in B$
(Por tanto $a \in A$)

Si f continua en a $\Rightarrow$ $f_{|B}$ continua en a

$\not\Leftarrow$

Ejemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Claramente f no continua en 0, PERO $f_{|\mathbb{R}_0^+}$ sí lo es

---

Teorema (Carácter Local de la Continuidad): Sean $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, $B \subseteq A$ tal que $\exists r > 0 :]a-r, a+r[\cap A \subseteq B$ — B tiene ptos de A en un entorno de a (En concreto tiene al pto a)

Entonces f continua en a $\Longleftrightarrow$ $f_{|B}$ continua en a.

Demo: $\Rightarrow$ | Trivial $\left(\begin{array}{l} a \in]a-r, a+r[\\ ]a-r, a+r[\cap A \subseteq B \end{array} \Rightarrow \boxed{a \in B} \right)$

$\Leftarrow$ | $\forall \varepsilon > a, \exists \delta > 0 :$ $\begin{array}{l} \text{si } x \in B \\ |x-a| < \delta \end{array}$ se tiene $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (Hipótesis)

$\delta' = \text{mín}\{\delta, r\}$

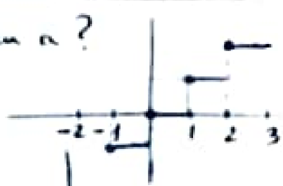
Entonces si $\left.\begin{array}{l} x \in A \\ \text{cumpliendo} \\ |x-a| < \delta' \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \in]a-r, a+r[\\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow x \in B$

$|x-a| < \delta$

(Por la hipótesis se cumplían)

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (q.e.d.)

Ejemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto E(x)$ Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo $\Rightarrow$ ¿f continua en a?



i) Si $a \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \exists r > 0$ tq $]a-r, a+r[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$

Sea $B =]a-r, a+r[$, entonces $f_{|B}$ continua en a $\Rightarrow$ f continua en a.

ii) Si $a \in \mathbb{Z}$, $f(a) = E(a) = a$

Sean $\left\{ \begin{array}{l} \{a + \frac{1}{n}\} \to a, \quad \{f(a + \frac{1}{n})\} \to f(a) = a \\ \{a - \frac{1}{n}\} \to a, \quad \{f(a - \frac{1}{n})\} \to a - 1 \neq f(a) \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ f NO continua en a.

Ejemplos de funciones continuas en todo punto de su(s) dominio(s)

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = K$ (fijo), $\forall x \in \mathbb{R}$ (Función Constante)

Demo:

Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo PERO arbitrario

$\forall \{x_n\} \to a$ ($x_n \in$ Dominio, $\forall n \in \mathbb{N}$), ¿$\{f(x_n)\} \to f(a)$? $\underline{\underline{\text{Sí}}}$, $\boxed{\{K\} \to K}$

ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (Función Identidad)

Demo:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon > 0$: si $x \in \mathbb{R}$ tq $|x - a| < \delta = \varepsilon$ se tiene $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$ (q.e.d.)

(También continua en TODO pto. de su dominio).

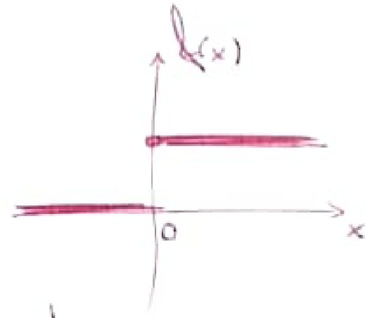
Continuidad de la Restricción

Fecha: Martes 14 Dic. 2021.

$f: A \to \mathbb{R}$, $a \in B \subseteq A$

Si f continua en $a \Rightarrow f|_B$ continua en a
$\not\Leftarrow$

OJO! p.e.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



f no continua en 0
PERO $\mathbb{R}_0^+ \subseteq \mathbb{R}$ y $f|_{\mathbb{R}_0^+}$ continua en 0

Teorema (Carácter Local de la Continuidad) (*) ← IMPORTANTE

Sea $f: A \to \mathbb{R}$, sea $a \in A$ y $B \subseteq A$ tal que $\exists r > 0$:
$]a-r, a+r[\cap A \subseteq B$ → Claramente entonces $a \in B$ y también los puntos necesarios para conocer su continuidad.
→ Los elementos "cerca" de a que estaban TAMBIÉN en A (en un entorno de a)

Entonces f continua en $a \Leftrightarrow f|_B$ continua en a
(es trivial que si $x \in B \Rightarrow x \in A$)

Demo

$\Rightarrow$] $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: Si $x \in B$, $|x-a| < \delta$ se tiene $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
← No de A como la def. de continuidad.

$\Leftarrow$] Coger $\delta' = \min\{\delta, r\}$

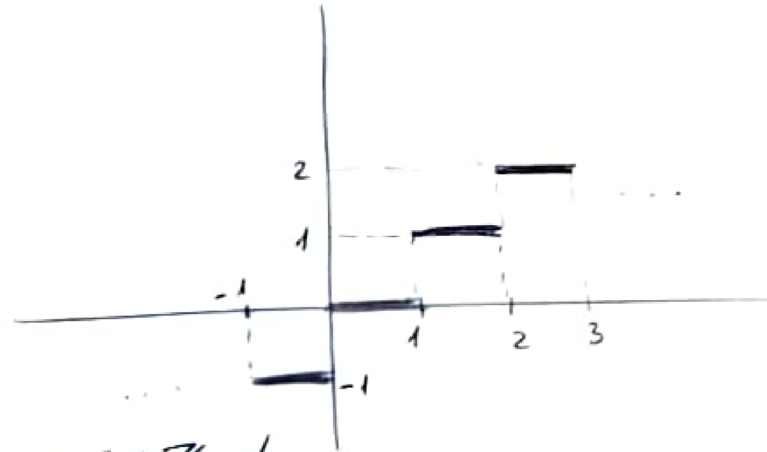
¿Si $x \in A$, $|x-a| < \delta'$ $\Rightarrow$ $x \in B$, $|x-a| < \delta$ → Y usar $\Rightarrow$]

Ejemplo: En una función definida a trozos → Sólo interesa estudiar un entorno del punto sobre el que estudiar la continuidad de la función en ese pto.

p.e.:

$$f(x) = \begin{cases} \text{si } x \ldots \\ \text{si } x \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

Ejemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = E(x)$



Sea $a \in \mathbb{R}$
¿f continua en a?

Si $\boxed{a \notin \mathbb{Z}} \to \exists r > 0$ tq $]a-r, a+r[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$

p.e: consideremos $B =]a-r, a+r[$ (Claramente $\emptyset \subseteq B$)

Como $f_{|B}$ es cont. en $a \Rightarrow$ $\underline{f \text{ es cont. en } a}$. ✓

Si $\boxed{a \in \mathbb{Z}} \Rightarrow f(a) = E(a) = a$

Tomemos 2 sucesiones $\begin{cases} \{a + \frac{1}{n}\} \to a \\ \{a - \frac{1}{n}\} \to a \end{cases}$

Claramente $\{f(a + \frac{1}{n})\} \to a = f(a)$
$\{f(a - \frac{1}{n})\} \to a - 1 \neq f(a) \Rightarrow$ $\underline{f \text{ no cont. en } a}$ ✓

Ejemplos de Funciones Continuas en todo pto. de su(s) dominio(s)

① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = K$ (fijo), $\forall x \in \mathbb{R}$ (Función constante)

→ Son continuas en el ~~conjunto~~ dominio maximal ($\mathbb{R}$)
¿También lo será en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$?

Demo (Continuidad)

Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo (pero arbitrario)

$\forall \{x_n\} \to a \longrightarrow$ ¿$\{f(x_n)\} \to f(a)$?
Con x_n ptos. del dominio $\qquad$ ¿$\{K\}_{n \in \mathbb{N}} \to K$? Sí ✓

$\left(\begin{array}{lll} \forall \varepsilon > 0 & \text{Si } x \in \mathbb{R} & \text{se tiene } |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ ??} \\ \exists \delta > 0: & |x - a| < \delta & |K - K| < \varepsilon \text{ ? Sí} \end{array} \right)$

(Formulación de f continua)

② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (Función Identidad)

↳ En su def. de continuidad $(\delta = \varepsilon) \to |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Demo: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0$
Si $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \delta = \varepsilon$ } se tiene $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ✓
$|f(x) - f(a)| = |x-a|$

Demo (Por sucesiones)

¿¿ $\forall \{x_n\} \to a \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(a)$??
$\{f(x_n)\} = \{x_n\} \to a = f(a)$ ✓

Se quiere llegar a que $\forall f(x)$ polinomio con coefs en $\mathbb{R}$ y dominio en $\mathbb{R}$ es continua en TODO pto. de su dominio

---

③ Cualquier polinomio es (suma, producto, sucesiv.) de los dos anteriores
Por tanto, cualquier función polinómica es cont. en todo pto. a de su dominio.

④ Cualquier cociente de polinomios es cont. en todo pto. de su dominio.
→ Hay que redefinir el dominio natural quitando aquellos ptos de $\mathbb{R}$ en los que el denominador se anule.

⑤ Funciones trigonométricas, exponencial, logaritmo, ...
(Funciones elementales) son cont. en todo pto. $a \in$ dominio.

Teorema (de Bolzano) (***) MUY IMPORTANTE !!!
↳ ó de los Ceros

OJO!: En $\mathbb{Q}$ no sería válido
(Hace falta el Axioma del Supremo)
(p.e: $f(x) = x^2 - 2$)

Como curiosidad, equivale al Axioma del Supremo (Y si lo tomamos como Axioma, el del Supremo aparece como Tª. resultado de este).

T^a Bolzano (Enunciado)

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en TODOS los ptos. de su dominio.

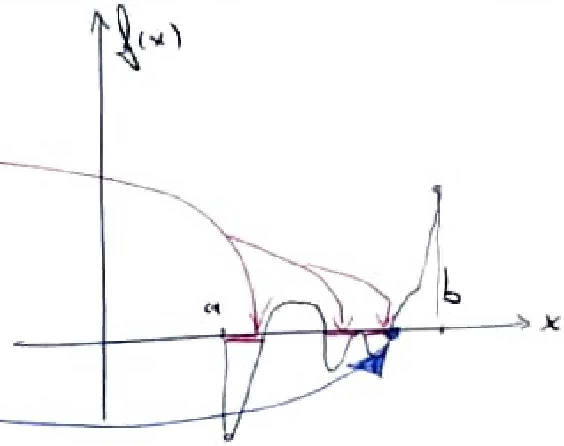
tal que $f(a) \cdot f(b) < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(a) < 0 < f(b) \\ \text{ó} \\ f(b) < 0 < f(a) \end{cases}$

El pto. donde se anula no puede ser ni a ni b

Entonces $\exists c \in]a,b[: f(c) = 0$. ← Al menos se corta en algún pto. (Puede que en más de uno).

Pide hipótesis locales → Da resultados globales

Demo (Caso $f(a) < 0 < f(b)$)



Sea $A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$

no vacío ($a \in A$) y mayorado (por b)

$\Downarrow$ ← Axioma del Supremo

Por tanto existe $c = \sup(A)$

¿¿ $f(c) = 0$??

$\Downarrow$

Vamos a verlo por sucesiones (Caracterización de Supremo por Sucesiones):

$\hookrightarrow \exists \{a_n\} \longrightarrow c$ $(a_n \in A, \forall n \in \mathbb{N})$ $\left(\begin{matrix}\text{Y como } f \text{ es} \\ \text{cont. en } c\end{matrix}\right) \Rightarrow \{f(a_n)\} \longrightarrow \boxed{f(c) \leq 0}$

$f(a_n) < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(a_n \in A)$

El límite hereda la desigualdad NO estricta

$a < c \leq b$

Por ser mayorante de A ($\forall a \in A$)

Por ser el menor mayorante

$c < b$ ← ($f(c) \neq f(b)$ y f es aplicación $\Rightarrow c \neq b$)

De $\begin{matrix} f(c) \leq 0 \\ f(b) > 0 \end{matrix} \Rightarrow f(c) < f(b)$

Sea $\{b_n\} = \{c + \frac{b-c}{n}\} \longrightarrow c$ Y además $b_n > c \Rightarrow b_n \notin A$ (i.e: $f(b_n) \geq 0$)

Luego $\{f(b_n)\} \longrightarrow f(c)$ $\Longrightarrow$ $\boxed{f(c) \geq 0}$

$\geq 0 \Longrightarrow \geq 0$

$\boxed{f(c) = 0}$ (q.e.d.)

↳ Con este resultado ya se puede definir el Método de Bisección para buscar ceros de funciones computacionalmente. (Aunque es muy lento).

En el caso $f(b) < 0 < f(a)$ → Usar los mismos argumentos de antes, pero para $-f(x)$ ⟹ Si tiene ceros, $f(x)$ también.

Consecuencias:

① Todo polinomio de grado impar se anula, al menos, una vez.

$$f(x) = x^K + c_{n-1} x^{K-1} + c_{n-2} x^{K-2} \dots + c_1 x + c_0 \quad (f: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$$

$\boxed{K \text{ impar}}$ (Nº sumandos (K) es fijo)

Demo: $\{f(n)\} = \{ \underbrace{n^K}_{\downarrow +\infty} \underbrace{\left[1 + c_{K-1} \cdot \frac{1}{n} + c_{K-2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + c_1 \cdot \frac{1}{n^{K-1}} + c_0 \cdot \frac{1}{n^K}\right]}_{\downarrow 1} \} \to +\infty$

(Por def. divergente positivo ↳ $\forall K \in \mathbb{R}$ (En particular $\forall K > 0$), $\exists m_+ \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq m_+$, $f(n) > K$ ⟹ $f(n) \in \mathbb{R}^+$)

⟹ $\exists b \in \mathbb{R}^+ : f(b) > 0$

$\{f(-n)\} = \{ \underbrace{(-1)^K}_{(-1)} \cdot n^K \underbrace{[\quad\quad]}_{\downarrow 1} \} \to -\infty$ ($\downarrow -\infty$)

Análogamente $\exists m_-$ tq $f(n) \in \mathbb{R}^-$ $\forall n \geq m_-$ (por def. divergente negativo) ✓

⟹ $\exists a \in \mathbb{R}^- : f(a) < 0$

Tomamos $f|_{[a,b]}$ y aplicamos Tª Bolzano (q.e.d.)

② Seguro que $\exists$ dos ptos. (antípodas) en los que la temperatura sea la misma.

Corolario del T$^{\underline{a}}$ Bolzano

Teorema del Valor Intermedio (T.V.I) (*)

Fecha: Lunes 20 Dic 2021.

TAMBIÉN MUY IMPORTANTE.
(De hecho tiene más aplicación)

La imagen, por una función continua, de un intervalo, es un intervalo.

Su dominio

(Si $f: A \to \mathbb{R}$, continua en todo punto de A, $I \subseteq A$, I intervalo.
Entonces $f_*(I)$ es un intervalo)

Demo (De que $f_*(I)$ es un intervalo)

Sean $v, w \in f_*(I)$, $v < w$. Si z es tal que $v < z < w$ ¿$\Rightarrow z \in f_*(I)$?

Por ser $v \in f_*(I) \Rightarrow \exists a \in I : f(a) = v$
Por ser $w \in f_*(I) \Rightarrow \exists b \in I : f(b) = w$

Consideremos la función $g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (Suponiendo $a<b$) → Sin pérdida de generalidad.
$x \longmapsto f(x) - z$
(Nótese $[a,b] \subseteq I \subseteq A$)

Por ser suma de funciones ctes.

$$\left\{\begin{array}{l} g \text{ es continua en } [a,b] \\ g(a) = f(a) - z = v - z < 0 \quad (z > v) \\ g(b) = f(b) - z = w - z > 0 \quad (z < w) \end{array}\right\} \rightarrow \text{Se puede aplicar T}^{\underline{a}} \text{ Bolzano sobre la función } g$$

(T^a Bolzano sobre $g(x)$)

$\Rightarrow \exists c \in]a,b[\subseteq I$ tq $g(c) = 0 = f(c) - z \Rightarrow z \in f_*(I)$ (q.e.d.)

→ Generalización de Bolzano

→ Se puede demostrar Bolzano usando este resultado como premisa.

Notación

$f: A \to \mathbb{R}$ se dice "continua" si f es continua en todo pto. de su dominio (A)

(i.e: f continua en a, $\forall a \in A$)

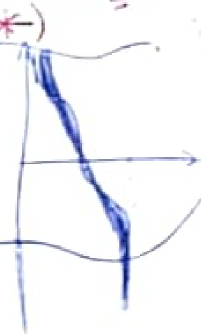
(Casuísticas)

Tipos de Intervalos (que pueden salir, en este Teorema) ó resultar → T.V.I.

MUY CURIOSO (*)

$f(x) = \tan(x)$

Es una biyección entre $]0,1[$ y $\mathbb{R}$



(Llamamos $J = f_*(I)$)

i) I abierto, J abierto

(p.e: $f:]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ / $I = J =]0,1[$)

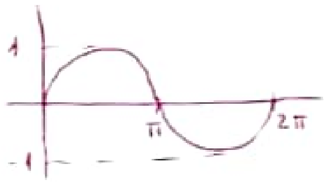
ii) I abierto, J semiabierto

Parábola de la forma

(p.e: $f:]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x(1-x)$ / $I =]0,1[$, $J = [-\frac{1}{4}, 0[$

iii) I abierto, J cerrado

(p.e: $f:]0,2\pi[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{sen}(x)$ / $I =]0,2\pi[$, $J = [0,1]$



iii) I abierto acotado, J no acotado

(p.e: $f:]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ / $I =]0,1[$, $J =]1,+\infty[$

⟿ Parece que NO hubiera una cierta regularidad.

Teorema de Weierstrass (de compacidad)

La imagen, por una función continua, de un intervalo cerrado y acotado, es un intervalo cerrado y acotado.

(Si $f: A \to \mathbb{R}$ "continua", $I \subseteq A$, $\overset{[a,b]}{\overset{\shortparallel}{I}}$ intervalo cerrado y acotado

Entonces $f_*(I)$ es un intervalo cerrado y acotado.)

En particular, f deberá alcanzar su máximo absoluto y su mínimo absoluto

(i.e: $\exists c \in [a,b]$ tq $f(c) = \max(f_*(I))$

$\exists d \in [a,b]$ tq $f(d) = \min(f_*(I))$)

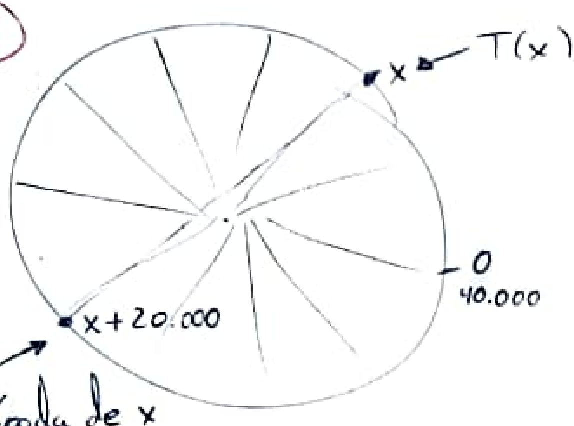
Ejercicios

Págs. 121, 122, 123 (Davier) → Se pueden hacer TODOS

↳ Hacer todos (SALVO
- Ninguno (Pág 121)
- 117, 118, 124, 126 (Pág 122)
- [redacted] TODOS menos el 128 y 130 (Pág 123))

Esos, se pueden hacer

(119)



Antípoda de x

$T: [0, 40.000] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$T(0) = T(40.000)$

$¿\exists\, c \in [0, 20.000] : T(c) = T(c+20.000)?$

$\Updownarrow$

$T(c) - T(c+20.000) = 0$

Sea $f: [0, 20.000] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = T(x) - T(x+20.000)$ continua en todo pto. de $[0, 20000]$

$f(0) = T(0) - T(20.000)$

$f(20.000) = T(20.000) - T(40.000)$

$= T(20.000) - T(0)$

$= -f(0)$

Caso 1

$\boxed{\text{Si } f(0) = 0 \text{ hemos acabado} \Downarrow c = 0}$ ↳ $T(0) = T(20.000)$

Caso 2

$\boxed{f(0) \cdot f(20.000) < 0}$

T.ª Bolzano

$\exists\, c \in [0, 20.000]$ tq $f(c) = 0$

$\Downarrow$

$T(c) = T(c+20.000)$ (q.e.d.)

$t = 0\,h$ $\qquad\qquad$ $t = 10\,h$

$P(0) = 0$ Km $\qquad\qquad$ $P(10) = 1.000$ Km

Demostrar que en un intervalo de 1h, se recorren 100 Km

- En el instante $t_0 = 0$ estamos en el pto. inicial de la ruta
- " " " $t_1 = 10h$ " " " " final de la ruta, a 1000 Km del pto. inicial

Llamémos $P(t)$ a la posición del coche a la hora t

$P: [0,10] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$P(0) = 0$

$P(10) = 1.000$

$P(c+1) = P(c) + 100 \quad (*)$

¿ $\exists c \in [0,9]$ tq se cumple $(*)$?

Sea $f: [0,9] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$t \longmapsto P(t+1) - P(t) - 100$

~~$f(9) \to P(10) - P(9) - 100 = 900 - P(9)$~~

~~$f(0) \to P(1) - P(0) - 100 = P(1) - 100$~~

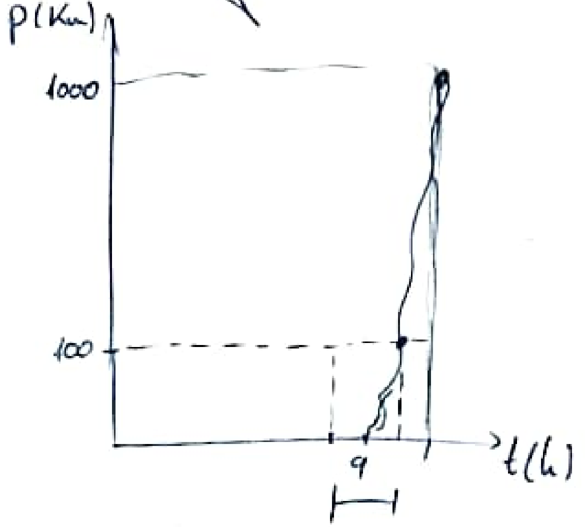
$$\boxed{f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(9)} = \cancel{P(1)} - P(0) - 100$$
$$+ P(2) - \cancel{P(1)} - 100$$
$$+ \dots$$
$$+ P(10) - \cancel{P(9)} - 100$$
$$= \underset{1000}{P(10)} - \underset{0}{P(0)} - 1000 = \boxed{0}$$

2 Casos → Todos los sumandos son cero $\Rightarrow$ Velocidad de $\left(100 \frac{Km}{h}\right)$

→ Alguno es positivo (>0), y algún otro negativo (<0)

$\Downarrow$

f tiene cambio de signo $\Rightarrow \exists c \in]0,9[$ tq $f(c) = 0$ (q.e.d.)

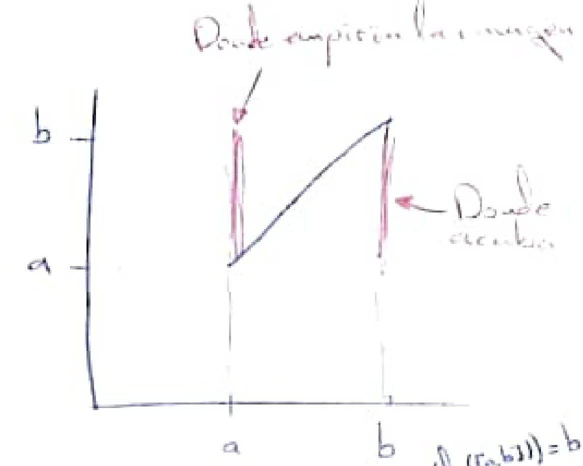


Sea $f: [a,b] \to [a,b]$ continua.

Probar que hay algún pto. fijo
$(\exists c \in [a,b] : f(c) = c)$

$\Updownarrow$

$f(c) - c = 0$



Considerar $g: [a,b] \to \mathbb{R}$
$g(x) = f(x) - x$ continua

$g(a) = f(a) - a \geq 0$ $\quad$ $0 \leq g(a) \leq b - a$ $\quad$ $a-a$ $\quad$ $b-a$ $\quad$ $\text{máx}(f([a,b])) = b$

$g(b) = f(b) - b \leq 0$ $\quad$ $\text{mín}(f([a,b])) = a$

Por el T.ª Bolzano
- Si alguno ($g(a)$ o $g(b)$ es cero) $\Rightarrow$ Ya está
- Si cambio de signo $\Rightarrow \exists c \in]a,b[$ tq $g(c) = 0$

Fecha: Martes 21 Dic. 2021.

$\boxed{\text{Tema Nuevo}}$ (Último)

Límite Funcional

Definición: Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo, $a \in I$, f función real definida (al menos) en $I \setminus \{a\}$, (Da igual que sea $f: I \to \mathbb{R}$ ó $f: I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$)
, $L \in \mathbb{R}$
Entonces se dice "f tiene límite en el pto. a" si:

$\forall \{x_n\} \to a$ $(x_n \in I \setminus \{a\}, \forall n \in \mathbb{N})$ se tiene $\{f(x_n)\} \to L$

y se escribe $\boxed{\exists \lim_{x \to a} f(x) = L}$

Concepto parecido al de continuidad PERO sin la restricción de que a perteneciese al dominio de la función
(La continuidad se restringe entonces a que $\exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$)

Proposición: en las condiciones de la definición inmediatamente anterior, son equivalentes:

i) f tiene límite L en el pto. a

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I \setminus \{a\}$ se tiene $|f(x) - L| < \varepsilon$

Redundante $0 < |x - a| < \delta$

Por falta de tiempo, igual que Weierstrass NO se escribe la demo

Proposición: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Entonces f es continua en el pto. $a \iff \underbrace{\exists \lim_{x \to a}}_{1} f(x) = \underbrace{f(a)}_{2}$ ⟶ 2 Formas de fallar

(Si no se cumple una de las 2, o ninguna de las 2 condiciones

⇓

f es discontinua en el pto. a

Definición (Límites laterales).

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo
$a \in I$

(A) (Por el lado dcho.)

Si el conjunto $I_a^+ = \{x \in I : x > a\} \neq \emptyset$, se dice que "$f$ tiene límite por la derecha, α, en el pto. a" si:

(A1) $\exists \lim_{x \to a} f_{|I_a^+} = \alpha$ (equivale a (A2) y (A3))

(A2) $\forall \{x_n\} \longrightarrow a$ se tiene $\{f(x_n)\} \longrightarrow \alpha$

$x_n \in I$
$x_n > a$
$(\forall n \in \mathbb{N})$

(A3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \begin{matrix} \forall x \in I \\ 0 < x - a < \delta \end{matrix}$ se tiene $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$

3 enunciados equivalentes

↓

y se escribe

$\boxed{\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \alpha}$

☹

Notación desacertada (Debería ser $x \xrightarrow{+} a$)

⇓

Pues son los ptos. x los que se toman desde el intervalo I_a^+.

(B) (Por el lado izdo.) ⟶ Igual que el anterior (Escribirlo estas Navidades)

Relación entre "límite" y "límites laterales".

p.e.: Si a es un extremo de I → Se cumple la condición $I_a^+ \neq \emptyset$ ó $I_a^- \neq \emptyset$

$\exists \lim_{x \to a} f(x) = L \iff$
- (1_1) ($\exists$ TODOS los límites laterales que TENGAN SENTIDO)
- (1_2) (Estos límites son iguales entre sí)
- (2) (Y coinciden con L)

→ 3 Pasos para ver si una función es continua en a (Si $f(a) = L$)

Proposición (la misma de antes, estudio de la continuidad con límites)

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo, $a \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$.

Entonces f continua en el pto. a $\iff$
- (1_1) $\exists$ TODOS los límites laterales que tengan sentido.
- (1_2) Son iguales entre sí
- (2) Son iguales a $f(a)$

$\exists$ el límite de f en el pto. a

IMPORTANTE (*)

Clasificación de Discontinuidades: Sea $f: I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

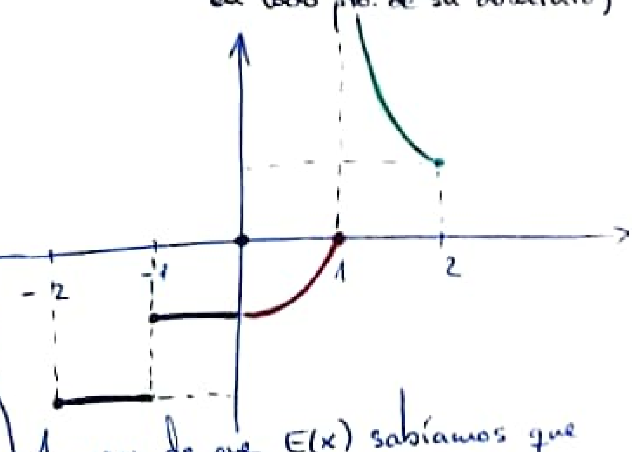
¿Es f continua en el pto. a?

¿Se cumple (1_1)?
- NO → f tiene una discontinuidad esencial en el pto. a
- SÍ ⇒ ¿se cumple (1_2)?
  - NO → Discontinuidad de salto
  - SÍ ($\exists \lim_{x \to a} f(x)$) ⇒ ¿se cumple (2)?
    - SÍ ⇒ $\boxed{f \text{ es continua en el pto. } a}$
    - NO → Discontinuidad EVITABLE

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función: ← Si no se dice en ningún pto. en concreto (Estudiar la continuidad en todo pto. de su dominio)

$f: [-2, 2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } x \in [-2, 0] \\ x^2 - 1 & \text{si } x \in]0, 1] \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x\ ]1, 2] \end{cases}$$



$\boxed{a = -2}$ → No tiene sentido el lím. lateral izdo. (El dcho. SÍ)

(1_1) (1_2) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} E(x) = \lim_{x \to -2^+} (-2) = -2$ ✓

(2) $f(-2) = E(-2) = -2 = \lim_{x \to -2^+} f(x)$ ✓

→ A pesar de que $E(x)$ sabíamos que NO era continua en $x \in \mathbb{Z}$

(Aquí como el dominio no tiene los ptos. $x \in]-\infty, -2[$ Esto se evita)

Si $\boxed{a \in]-2,-1[}$ → Es posible tomar un entorno de a tq la función f es cte. ($f(\ ) = -2$) → Carácter Local continuidad

$(\exists B =]a-\delta, a+\delta[\cdot f|_B = -2$ continua$)$

→ Luego f continua en a

Si $\boxed{a = -1}$ → $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -2 \mid \lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$ → Como son distintos

⇓ (1) NO SE CUMPLE

Discontinuidad de Salto

(Carácter Local Continuidad)

Si $\boxed{a \in]-1, 0[}$ → Igual que $a \in]-2,-1[$

Si $\boxed{a = 0}$ → $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \mid \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$ → Y ambos coinciden

PERO $f(0) = 0 \neq \lim_{x \to 0} f(x)$

⇓

Discontinuidad Evitable (2) NO SE CUMPLE

(Carácter Local Continuidad)

Si $\boxed{a \in]0, 1[}$ → Igual que $a \in]-2,-1[$

Si $\boxed{a = 1}$ → $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 \mid \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ → Discontinuidad Esencial (1) NO SE CUMPLE

Tiene sentido PERO no existe límite real

Si $a \in]1, 2]$ → Continua

Límites "en infinito" y límites "infinitos"

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$\forall \{x_n\} \to a$ ($\pm\infty$), $x_n \in I \setminus \{a\}$ se tiene $\{f(x_n)\} \to L$ ($\pm\infty$)

$$\begin{cases} \lim_{x \to 7} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 7 \end{cases}$$

Mirarse la definición rigurosa en los Apuntes de Javier