Examen 2018 Álgebra I

Ejercicio 1

$I \leq A$ $\quad \forall J \leq A/I$ $\quad B = \{ \cancel{K} \leq A / I \subseteq K \}$

$I = aA$

$\cancel{(A/I = \{ \bar{x} \in \bar{0}, \bar{1} \ldots \overline{a-1} \})}$

Que estén en correspondencia biyectiva significa que existe un isomorfismo que relacionará los elementos de cada uno.

$\cancel{(f : A/I}$

$B = \{ K \leq A / I \subseteq K \} \quad \forall K \in B \quad K = bA$

$I \subseteq K \Longrightarrow b | a \Longrightarrow a = bq$ con $q \leq a$

Además, $qA \leq A$ $\quad \cancel{qA}$ $\quad$ y $qA \supseteq I$ $\quad qA \in B$

$f : A/I \longrightarrow B$

$f(cA) =$

Ejercicio 2

Hecho en otro folio

Ejercicio 3

1) $N(4+3i) = 4^2 + 3^2 = 25 = 5 \cdot 5$

$\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tq $N(\alpha) = 5 \Longrightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 1+2i \\ \alpha_2 = 2+i \end{array}$

$\dfrac{4+3i}{1+2i} \cdot \dfrac{1-2i}{1-2i} = \dfrac{4+3i-8i+6}{5} = \dfrac{10-5i}{5} = 2-i = (-i)(1+2i)$

$4+3i = (-i)(1+2i)^2$

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 \mod 13 \implies 1 = \cancel{(-1)\cdot 13} + 2\cdot 7 \implies 2^{-1} = 7 \\ \qquad x \equiv 1\cdot 7 \mod 13 \\ \qquad x = 7 + 13k \\ 3x \equiv 2 \mod 11 \end{cases}$$

$$3\cdot 4x \equiv 2\cdot 4 \mod 11$$
$$x \equiv 8 \mod 11$$
$$7 + 13k \equiv 8 \mod 11$$
$$13k \equiv 1 \mod 11$$
$$2k \equiv 1 \mod 11$$
$$k \equiv 6 \mod 11 \implies k = 6 + 1\cancel{3}1T \implies x = 7 + 13\cdot 6 + 11\cdot 13T$$
$$x = 85 + 143T$$
$$x \equiv 85 \mod \cancel{7}\,143$$

$$\frac{1200}{143} \approx 8 \implies x = 85 + 143\cdot 8 = 1229$$

$$\underline{x = 1229}$$

(3) $(7+3i)x + (5-i)y = 2$ Simplifico entre $1+i$

$(5-2i)x + (2-3i)y = (1-i)$

	$5-2i$	1	0
	$2-3i$	0	1
$1+i$	$-i$	1	$-1-i$

$$-i = (5-2i)(1) + (2-3i)(-1-i)$$
$$1-i = (5-2i)(1+i) + (2-3i)(-(1+i)^2)$$
$$2 = (5-2i)(1+i)^{\cancel{2}} + (2-3i)(-(1+i)^{\cancel{2}\,3})$$
$$\cancel{2 = (5-2i)\overset{(1+i)}{(2i)} + (2-3i)(2-2i)}$$
$$2 = (7+3i)(1+i) + (5-i)(-2i)$$

$$\cancel{\begin{cases} x = 2i + \dfrac{2-3i}{1+i} = 2i \\ y = 2-2i - \dfrac{5-2i}{1+i} \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x = (1+i) + (2-3i)k \\ y = (-2i) - \dfrac{5-2i}{1}k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}[i]$$

Ejercicio 4

(1) $2x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1 = f$

Posibles factores de grado 1 : $(x \pm 1), (x \pm \frac{1}{2})$

(En $\mathbb{Q}[x]$)

$f(1) = 5 \neq 0$ $\quad f(-1) = 5 \neq 0$ $\quad f(\frac{1}{2}) = 2 \neq 0$ $\quad f(-\frac{1}{2}) \neq 0$

No tiene factores de grado 1 $\Longrightarrow$ ni de gr 3

En $\mathbb{Z}_3[x]$: $R_3(f) = -x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$

Posibles factores de grado 2: $x^2 + 1$ $\quad x^2 + x + 2$ $\quad x^2 + 2x + 2$

$$
\begin{array}{l|l}
-\cancel{x^4} - x^3 - \cancel{x^2} + x + 1 & x^2 + 1 \\
\cancel{x^4} \quad + \cancel{x^2} & -x^2 - x \\
-\cancel{x^3} & \\
\cancel{x^3} \quad + x & \\
-x + 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\cancel{x^4} - \cancel{x^3} - x^2 + x + 1 & x^2 + x + 2 \\
\cancel{x^4} + \cancel{x^3} + 2x^2 & -x^2 + 1 \\
\cancel{x^2} + \cancel{x} + 1 & \\
-\cancel{x^2} - \cancel{x} - 2 & \\
-1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\cancel{x^4} - x^3 - x^2 + x + 1 & x^2 + 2x + 2 \\
\cancel{x^4} + 2x^3 + 2x^2 & -x^2 + x - 1 \\
\cancel{x^3} + x^2 + x & \\
-\cancel{x^3} - 2x^2 - 2x & \\
-\cancel{x^2} - x + \cancel{1} & \\
\cancel{x^2} + 2x + \cancel{2} & \\
x &
\end{array}
$$

$2x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$ irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$

(2) $x^5+x^2+1=f$

Posibles raices: ± 1 $\quad f(1)=3 \quad f(-1)=1$

No tiene de gr 1 $\Longrightarrow$ ni de gr 4

En $\mathbb{Z}_2[x] \Longrightarrow R_2(f)=x^5+x^2+1$

Posibles de grado 2: x^2+x+1

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^5}+x^2+1 & x^2+x+1 \\ \hline -\cancel{x^5}-x^4-x^3 & x^3-x^2 \\ -\cancel{x^4}-\cancel{x^3}+\cancel{x^2} & \\ +\cancel{x^4}+\cancel{x^3}+\cancel{x^2} & \\ \quad 1 & \end{array} \Longrightarrow \text{Irreducible}$$

En $\mathbb{Z}_2[x]$:

- Grado 2:
  - x^2+x+1
- Grado 3:
  - x^3+x+1
  - x^3+x^2+1

En $\mathbb{Z}_3[x]$

- Grado 2:
  - x^2+x+2
  - x^2+2x+2
  - x^2+1
- Grado 3:
  - $\cancel{x^3+x+1}$ x^3+x^2+x+1
  - x^3+2x^2+1
  - x^3+2x+1

$x^5 - 4x^4 - 2x^2 + x - 1 = f$

Raices (Posibles) : $\pm 1 \Longrightarrow f(1) = -5 \neq 0 \quad f(-1) \neq 0$

No tiene factores de grado $1 \Longrightarrow$ Ni de gr 4

En $\mathbb{Z}_2[x]$, $R_2(f) = x^5 + x - 1$

Posible factor gr=(2) : $x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5} + x - 1 & x^2 + x + 1 \\ \hline
-\cancel{x^5} - x^4 - x^3 & x^3 - x^2 + 1 \\
-\cancel{x^4} - \cancel{x^3} + x & \\
\cancel{x^4} + \cancel{x^3} + x^2 & \\
x^2 + x + 1 & \\
\underbrace{}_{0} &
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ No aporta nada

Posibles factores de gr = 3 : $x^3 + x + 1 \quad x^3 + x^2 + 1$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5} + x - \cancel{1} & x^3 + x + 1 \\ \hline
-\cancel{x^5} - x^3 - x^2 & x^2 - 1 \\
-\cancel{x^3} - x^2 + \cancel{x} & \\
\cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \cancel{1} & \\
\underbrace{}_{x^2} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5} + x - 1 & x^3 + x^2 + 1 \\ \hline
-\cancel{x^5} - x^4 - x^2 & x^2 - x + 1 \\
-\cancel{x^4} - x^2 + \cancel{x} & \\
\cancel{x^4} + x^3 + \cancel{x} & \\
\cancel{x^3} - \cancel{x^2} - \cancel{1} & \\
-\cancel{x^3} - \cancel{x^2} - \cancel{1} & \\
\underbrace{}_{0} &
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ No aporta

En $\mathbb{Z}_3[x]$, $R_3(f) = x^5 - x^4 + x^2 + x - 1$

Irreducibles grado 2 : $x^2 + 1 \quad x^2 + 2x + 2 \quad x^2 + x + 2$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5} - x^4 + x^2 + x - 1 & x^2 + 1 \\ \hline
-\cancel{x^5} \quad -x^3 & x^3 - x^2 - x - 1 \\
-\cancel{x^4} - x^3 + x^2 & \\
\cancel{x^4} \quad + x^2 & \\
-\cancel{x^3} - x^2 + x & \\
\cancel{x^3} \quad + x & \\
-\cancel{x^2} - x - \cancel{1} & \\
\cancel{x^2} \underbrace{}_{} + \cancel{1} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5} - \cancel{x^4} + x^2 + x - 1 & x^2 + 2x + 1 \\ \hline
-\cancel{x^5} - 2\cancel{x^4} - x^3 & x^3 + x \\
-\cancel{x^3} + \cancel{x^2} + x & \\
\cancel{x^3} + 2\cancel{x^2} + x & \\
-x - 1 & \\
\underbrace{}_{} &
\end{array}$$

Escaneado con CamScanner

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5} - x^4 + x^2 + x + 1 & x^2 + x + 2 \\
\hline
-\cancel{x^5} - x^4 - 2x^3 & x^3 + x^2 - 1 \\
\quad \cancel{x^4} + \cancel{x^3} + x^2 & \\
\quad -\cancel{x^4} - \cancel{x^3} - 2x^2 & \\
\qquad -\cancel{x^2} + x - 1 & \\
\qquad \cancel{x^2} + x + 2 & \\
\qquad \underbrace{-x + 1}_{} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5} - \cancel{x^4} + x^2 + x - 1 & x^2 + 2x + 2 \\
\hline
-\cancel{x^5} - \cancel{2x^4} - 2x^3 & x^3 + x - 1 \\
\quad \cancel{x^3} + x^2 + x & \\
\quad -\cancel{x^3} - 2x^2 - 2x & \\
\qquad -\cancel{x^2} - x - 1 & \\
\qquad \cancel{x^2} + 2x + 2 & \\
\qquad \underbrace{x + 1}_{} &
\end{array}
$$

No tiene factores de grado 2 en $\mathbb{Z}_3[x] \Longrightarrow$ No tiene
f en $\mathbb{Z}[x]$

Como no tiene de gr 2 $\Longrightarrow$ no tiene de gr 3

f irreducible //