(Sin sucesiones

si $\alpha < 1 \Rightarrow ¿\exists n \in \mathbb{N} : \frac{2n-1}{2n} > \alpha$? ← Basta ver que se cumple para algún n (Luego basta tomar los términos pares o impares)

Despejar n: $2n(1-\alpha) - 1 > 0 \Rightarrow n > \frac{1}{2(1-\alpha)}$ ✓

← $\mathbb{N}$ no está mayorado

Lo mismo se haría para probar $\inf(A) = -1$

Fecha: Lunes 29 Nov. 2021

Tema 9: Series de Números Reales

(Según Guía Docente)

Ejemplo para motivar → $S = \{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots\} = ?$

↳ 0 (Si se asocian todos)

↳ 1 (si se empieza por el segundo término)

Más riguroso

$S_1 = 1$
$S_2 = 0$
$S_3 = 1$
$S_4 = 0$
$\vdots$

← Esa sucesión NO converge ⇒ No tiene sentido hablar del límite $n \to \infty$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\} \right) \right)$$

El concepto de "Suma Infinita" pasa por una sucesión de sumas parciales.

Definición: Dada una sucesión (de nºs reales) $\{a_n\}$, formaremos, a partir de ella, otra sucesión $\{A_n\}$ del siguiente modo: ← "Van a ir acumulando los valores de $\{a_n\}$"

$A_1 = a_1$
$A_2 = a_1 + a_2$
$A_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$\vdots$
$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$
$\vdots$

$\forall n \in \mathbb{N}$

(mejor expresado así):

$$\boxed{\begin{array}{l} A_1 = a_1 \\ A_{n+1} = A_n + a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{array}}$$

La nueva sucesión $\{A_n\}$ se llama "Serie de término general a_n", y la representamos por $\sum_{n \geq 1} a_n$. Al término A_n también le llamamos $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ "Suma truncada".

Si $\{A_n\}$ converge, notaremos $\lim\{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ← ¡OJO! Sólo es notación

(Y sólo tiene sentido si la sucesión $\{A_n\}$ es convergente)

y se le llama "suma de la serie".

Ejemplos

① **Series Geométricas** $a_n = r^{n-1}$ (con $r \in \mathbb{R}$ fijo) $r \neq 1$

Se nota SIN LLAVES

$$\sum_{n\geq 1} r^{n-1} = \left\{\frac{1-r^n}{1-r}\right\}$$

$(1+r+r^2+\ldots+r^n)$

Una serie geométrica de este tipo $\left(\sum_{n\geq 1} r^{n-1}\right)$ es convergente $\Longleftrightarrow |r|<1$

(El ejemplo introductorio era la serie geométrica con $r=1$ → Que NO era convergente)

En ese caso $(|r|<1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r} \quad \left(=2, \text{ si } r=\tfrac{1}{2}, \text{ p.e. } 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\ldots\right)$$

---

② **Serie Armónica** $a_n = \frac{1}{n}$ ← Aunque a_n es decreciente, $\{A_n\}$ es creciente (porque $a_n \in \mathbb{R}^+$)

$$\{A_n\} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right\}$$

Según lo rápido que los sumandos converjan a cero, su suma es ~~convergente~~ FINITA ó diverge.

$$A_2 = 1+\frac{1}{2}$$

$$A_4 = 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} \geq 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$$

← Cambian el resto por el más pequeño

$$A_8 = 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} \geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$A_{16} = 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)}_{\geq\frac{1}{2}} \geq 1+4\cdot\frac{1}{2} \quad (16=2^4)$$

$\vdots$

$$A_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$$

→ Una parcial divergente $\Longrightarrow \{A_n\} \longrightarrow \infty$

$\{1+\frac{n}{2}\} \longrightarrow \infty$

---

③ $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots\right\}$$

¿Converge? Sí ← Converge más rápido a cero la sucesión $\{a_n\}$ $\left(\sim\frac{1}{n^2}\right)$

③ (Continuación)

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$A_1 = a_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$A_2 = a_1 + a_2 = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$A_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$\vdots$

$$A_n = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Se puede probar por inducción

$\Downarrow$

$$\{A_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\} \longrightarrow 1 \quad \text{¡Convergente!}$$

Recopilando:

$\sum_{n\geq 1} r^n$ converge $\Leftrightarrow |r| < 1$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ no converge

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ sí converge

Vale la pena tener un catálogo de series conocidas

④ Consideremos ahora la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (Armónica Alternada)

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)$$

$A_1 = 1$

$A_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$A_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

$A_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

Las impares $A_1 \geq A_3 \geq A_5$ (Decreciente)

Las pares (Creciente)

$$A_2 \leq A_4 \leq \dots \leq A_{2n} \mid \leq A_{2n-1} \leq \dots \leq A_3 \leq A_1$$

La parcial de los pares $\longrightarrow$ Creciente y Mayorada (por A_1, por ejemplo)

La parcial de los impares $\longrightarrow$ Decreciente y Minorada (por A_2 por ejemplo)

$\Downarrow$

Ambas convergen $\left(\text{i.e.: } \begin{array}{l}\{A_{2n}\} \to L \\ \{A_{2n+1}\} \to L'\end{array}\right)$

$\Downarrow$

Veamos si al mismo límite. $\Rightarrow A_{2n} - A_{2n+1} = a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0$

$A_{2n} \to L$, $A_{2n+1} \to L'$

Luego $L - L' = 0 \Rightarrow \boxed{L = L'}$

$\{A_n\} \longrightarrow L$

$L = \ln(2)$ $\longrightarrow$ Podrían reordenarse sus términos para que convergiera a donde uno quisiera.

PERO, antes de enfrentarnos a este tipo de series, vamos a estudiar con detalle primero las Series de términos positivos (Que da igual la reordenación si convergen ⇕ Su suma es la misma)

Propiedades generales de las series convergentes

(1º) Sea $\{a_n\}, \{b_n\}$ dos sucesiones tq $\exists m \in \mathbb{N}$: Si $\underset{n \geq m+1}{n \in \mathbb{N}}$ se tiene $a_n = b_n$

Entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ converge

en cuyo caso: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{m} a_k}_{} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{k=1}^{m} b_k}_{}$ ← Sumas de los términos de las colas

$\Updownarrow$

$$\boxed{\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n}$$

(Demostración → Ej. para uno mismo)

"Restos De orden m"

(2º) Condición Necesaria de Convergencia:

Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ convergente $\Longrightarrow \{a_n\} \longrightarrow 0$

$\cancel{\Longleftarrow}$ (p.e. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$)

Demo

Si $\{A_n\} \longrightarrow L \Rightarrow \{A_{n+1}\} \longrightarrow L$ (Una parcial)

$\{A_{n+1} - A_n\} = \{a_{n+1}\}$ Luego $\{a_n\} \longrightarrow 0$

$A_{n+1} \to L$, $A_n \to L$, $\underbrace{L \quad L}_{\to 0}$

$0 = 0$

→ Contrarrecíproco: p.e: $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1}$ $\boxed{\text{NO CONVERGE}}$ Por que $\{a_n\} \not\longrightarrow 0$, $\longrightarrow 1$

> Para estudiar la condición suficiente, hay que ver que los términos de $\{a_n\}$ converjan a 0 con suficiente velocidad

Series de Términos No-Negativos ($a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$)

Criterio Básico de Convergencia

($a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \iff \{A_n\}$ creciente)

En este caso, $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\iff$ está mayorada.

Corolario (Criterio de Comparación "para Series de Términos No-Negativos")

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ tq $\exists m \in \mathbb{N}$; Si $n \geq m+1$, $0 \leq a_n \leq b_n$

Basta ver si las colas convergen!

Si $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ converge

"La serie de los sumandos mayores"

(Demostración $\longrightarrow$ Ej para uno mismo)

$\sum b_n$ mayorada porque converge ⊕ Usar que las colas convergen $\Bigg\} \Rightarrow \sum a_n$ converge

($\sum_{k=1}^{m} a_k \geq 0$ finito)

$\sum_{n\geq 1} a_n$ mayorada

$\left(\sum_{n\geq 1} b_n \text{ conv.} \iff \sum_{n\geq m+1} b_n \text{ conv.} \iff \sum_{n\geq m+1} b_n \text{ mayorada} \Rightarrow \sum_{n\geq m+1} a_n \text{ mayorada}\right)$

¿$\sum_{n\geq 1} a_n$ converge? Sí

Fecha: Martes 30 Nov 2021

Típica pregunta de examen: ¿$\sum_{n\geq 1} a_n$ converge? $\longrightarrow$ Se pregunta sobre una (Y suele hacer falta conocer alguna otra)

$\hookrightarrow$ Tener un catálogo de series conocidas

$\hookrightarrow$ Ya podemos usar el criterio de comparación (Con otra/s serie/s que sabemos de antemano que convergen)

Contrarrecíproco (del Criterio de Comparación)

MUY ÚTIL (*)

(Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ no converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ no converge)

Criterio Límite de Comparación

La que se supone que uno conoce

Si $\{a_n\}, \{b_n\}$ sucesiones tq $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ y $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow L \in \mathbb{R}_0^+$ (ó $+\infty$)

i) Caso $\boxed{L = 0}$: Si $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ converge
(b_n los "gordos")

ii) Caso $\boxed{L = +\infty}$: Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ converge
(a_n los "gordos")
(Si $\sum_{n\geq 1} b_n$ NO converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ NO converge) (Más útil como contrarrecíproco) PUESTO que a priori la que no conocemos es la a_n.

iii) Caso $L \in \mathbb{R}^+$: $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\iff \sum_{n\geq 1} b_n$ converge

Demo (Usando el Criterio de Comparación GENERAL) ← Aunque el Criterio útil de verdad es el Límite

i) Caso $L=0$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to 0$ $(\varepsilon=1)$ $\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m+1$ se tiene $\left|\frac{a_n}{b_n}-0\right|<1$ $\Leftrightarrow$ $a_n < b_n$

Aplicamos Criterio Comparación → Ya!

ii) Caso $L=+\infty$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to +\infty$ $(K=1)$ $\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m+1$ se tiene $\frac{a_n}{b_n} > 1$ $\Leftrightarrow$ $a_n > b_n$

Aplicamos Criterio Comparación → Ya!

iii) Caso $L \in \mathbb{R}^+$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to L > 0$ $(\varepsilon = \frac{L}{2} > 0)$ $\exists m \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq m+1$ se tiene

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}L < \boxed{2L}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} a_n < 2L\, b_n \\ b_n < \frac{2}{L} a_n \end{cases}$$

$\Leftarrow$ | Si $\sum_{n\geq 1} b_n$ conv. $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} 2L\, b_n$ conv.

Como sucesiones son múltiples de una que converge.

Usando $(a_n < 2L\, b_n) \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ conv. (q.e.d.)
y aplicando Criterio Comparación

$\Rightarrow$ | Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ conv. $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{L} a_n$ conv.

Usando $(b_n < \frac{2}{L} a_n) \Rightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ conv. (q.e.d.)
y aplicando Criterio Comparación.

Catálogo de Series Conocidas

i) Geométricas: $\sum_{n\geq 1} r^n$ conv. $\Leftrightarrow |r|<1$

ii) Armónica: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ NO converge

iii) Otra: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge

Ejemplos: ① ¿$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+7n-3}{5n^2+4}$ converge? NO, porque $\{a_n\} \not\to 0$ (Condición Necesaria)

② ¿$\sum_{n\geq 1} \frac{n+7}{n^2+4n-3}$? $\to$ $a_n = \frac{n+7}{n^2+4n-3}$, $b_n = \frac{1}{n}$ ← Ya la conocemos (Y es, a parece ser, comparable a a_n)

$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{(n+7)n}{n^2+4n+3}\right\} \longrightarrow 1$

Cuando $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow L \in \mathbb{R}^+$ (Ni 0 ni ∞)

Hemos tomado una b_n que se ajusta muy bien a a_n ☺

$\Downarrow$

($\sum a_n$ conv $\Leftrightarrow \sum b_n$ conv., o convergen ambas, o ninguna)

PERO $\sum b_n$ sabemos NO converge $\Rightarrow \sum a_n$ NO converge

Si hubiesemos tomado por $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$, habría salido $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to \infty$

(PERO aquí no podríamos usar el criterio límite comp. $\rightarrow$ pues lo que sabemos es que $\sum b_n$ converge)

---

③ ¿ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$? $\quad a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{n(n+1)}{n^2}\right\} \longrightarrow 1$

Como $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge ✓

Hay que tener buen ojo al escoger b_n para poder compararan y llegar a alguna conclusión

---

④ ¿ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$? $\quad a_n = \frac{1}{n^3}$, $b_n = \frac{1}{n}$ (p.e.) $\Rightarrow \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{n}{n^3}\right\} \longrightarrow 0$

Si $\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

NO!!! $\leftarrow$ Hemos elegido b_n de forma que no sirve para compararla con a_n.

(Sólo sabemos que $\sum b_n$ NO conv. $\rightarrow$ No podemos aplicar Criterio Límite)

Tomando $b_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{n^2}{n^3}\right\} \longrightarrow 0$

Como $\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

---

⑤ ¿ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$? $\quad a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \rightarrow$ está entre 1 y 2 $\Rightarrow$ No podemos usar la info. proporcionada por $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ ni $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

(Todavía no tenemos argumentos para poder decir si es o no convergente)

⑥ $\sum \frac{n^3+4n-2}{5n^5+3n-1} \longrightarrow$ Comparar con $b_n = \frac{1}{n^2}$ $\left(\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \longrightarrow \frac{1}{5} \right)$

Como b_n converge $\longrightarrow$ converge

Fijarse en la diferencia de los grados máximo del numerador y denominador

Cociente de polinomios

Criterio de Condensación: Sea $\boxed{\{a_n\} \text{ decreciente}}$, $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

CONDICIÓN NECESARIA para aplicar el criterio

Entonces $\boxed{\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n\geq 1} 2^n a_{2^n} \text{ converge}}$

(Demostración: Se deja como ej.)

$A_n = a_1 + \dots + a_n$

$B_n = 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}$

y comparar con

$A_{2^n} = \dots\dots$

Algo muy parecido a lo que se hizo con $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

Corolario (Series de Riemann)

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo ¿$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge?

Casos:

i) $\alpha \leq 0$, $\sum n^{-\alpha}$ no converge

ii) $\alpha > 0$, $\left\{ \frac{1}{n^\alpha} \right\}$ decreciente (Y puedo aplicar Criterio Condensación)

Entonces $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge}} \iff \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n\alpha}} \cdot 2^n$ converge

$\Updownarrow$

$\sum_{n\geq 1} (2^{1-\alpha})^n$ converge

Serie Geométrica

$\Updownarrow$

$(r = 2^{1-\alpha})$ $r < 1$ $(2^{1-\alpha} < 1)$

$\Updownarrow$

$1 - \alpha < 0 \iff \boxed{\alpha > 1}$

Identificando

$$\frac{2^n}{2^{n\alpha}} = (2^n)^{1-\alpha} = (2^{1-\alpha})^n$$

Catálogo de Series (Actualizado)

- Geométr.: $\sum_{n\geq 1} r^n$ conv. $\iff |r|<1$
- Riemann: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^q}$ conv. $\iff q>1$

Ejemplo ⑦ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ y $\frac{3}{2}>1 \Rightarrow$ Converge

Nos va a mandar una relación de Series (Para el puente)

Criterio de la Raíz (para Series)

Sea $\{a_n\}$ verificando $a_n \geq 0$ y $\{\sqrt[n]{a_n}\} \longrightarrow L$

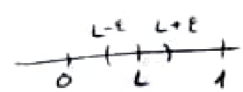
Casos

i) Si $L<1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ converge

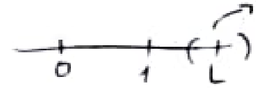
ii) Si $L>1$ ($\acute{o}$ $+\infty$) $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ NO converge

iii) Si $L=1$ (no concluyente)

Idea (Demostración)



$\forall n \geq m+1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < L+\varepsilon < 1$



$\sqrt[n]{a_n} > 1$
$\Downarrow$
$a_n > 1$
$(\{a_n\} \not\to 0)$
No converge

Corolario (Criterio del Cociente para Series de Términos Positivos)

>0 ← Porque habrá que dividir por alguno

Sea $\{a_n\}$ verificando $a_n > 0$ y $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \to L$ $\left(\Rightarrow \{\sqrt[n]{a_n}\} \to L\right)$

Y entonces se usan los 3 Casos del Criterio de la Raíz para Series (Justo el anterior)

Ejemplo ① $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \{\sqrt[n]{a_n}\} = \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right\} \longrightarrow \frac{1}{2} = L < 1$

Por el Criterio de la Raíz $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$ converge ✓

② $\underbrace{\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^3-2n}}_{a_n} \longrightarrow$ Crit. Raíz $\{\sqrt[n]{a_n}\} = \left\{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-2}\right\}$

$\longrightarrow 1$ y $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Puedo aplicar Crit. Exponencial

$$\begin{cases} x_n = \frac{n^2-1}{n^2} \\ y_n = 2n^2-2 \end{cases}$$

$$\{y_n(x_n-1)\} = \left\{(2n^2-2)\left(\frac{n^2-1-n^2}{n^2}\right)\right\}$$

$$= \left\{(2n^2-2)\left(\frac{-1}{n^2}\right)\right\} = \left\{\frac{2-2n^2}{n^2}\right\} \longrightarrow -2$$

$$\Downarrow$$

$$\{x_n^{y_n}\} \longrightarrow e^{-2} = \frac{1}{e^2} < \frac{1}{e} < 1 \checkmark \Longrightarrow$$ Aplicando Crit. Raíz para Series $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge (q.e.d.)

Criterio de Raabe (Útil cuando Criterio Del Cociente da $L=1$)

Donde no podíamos concluir nada a priori

Sea $\{a_n\}$ verificando $a_n > 0$, y

$\boxed{H}$ $\left\{n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right\} \longrightarrow L \in \mathbb{R}$ (ó $\pm\infty$)

Aplicando el Criterio Exponencial

$\boxed{H'}$ (forma alternativa) $\left\{\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n\right\} \longrightarrow e^L$

Demostración de que son equivalentes (Usando Crit. Exp) (Como ejercicio)

Casos:

i) si $L > 1$ (ó $+\infty$) $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ converge

ii) si $L < 1$ (ó $-\infty$) $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ no converge

iii) si $L = 1$ (no concluyente)

Igual

Criterios para estudiar Series de Signo Alternado / Indeterminado.
(Sin restricción de signo)

Criterio de Convergencia Absoluta

Sea $\sum_{n\geq 1} a_n$ serie

Si no está claro que se vayan alternando los signos

Si $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ converge

(Ejemplo $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$ $\cos(n) \in [-1, 1]$

$\Downarrow$

$\sum |a_n| = \sum \frac{|\cos(n)|}{n^2}$

y $\frac{|\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum |a_n|$ converge

$\Downarrow$

$\sum a_n$ converge)

Criterio de Leibnitz

Si $\{a_n\} \searrow 0, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ converge.

Decrecen hacia cero

(Ejemplo $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$)