Cálculo I, 1º Informática Matemáticas

Tema 1: NÚMEROS REALES

María D. Acosta

Universidad de Granada

14-9-2021

El cuerpo de los números reales

Supondremos que existe un conjunto ($\mathbb{R}$) dotado de dos operaciones (suma y producto) que verifican:

Propiedades de la suma

- S.1. Propiedad asociativa: $(x+y)+z = x+(y+z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- S.2. Propiedad conmutativa: $x+y = y+x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- S.3. Elemento neutro: Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$ que verifica

$$x+0 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- S.4. Elemento opuesto:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+y = 0$$

El elemento y es único, se llama opuesto de x, y lo notaremos $-x$.

$(\mathbb{R}, +)$ es un grupo conmutativo por verificar las propiedades anteriores.

El cuerpo de los números reales

Propiedades del producto

- P.1. Propiedad asociativa: $(xy)z = x(yz), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- P.2. Propiedad conmutativa: $xy = yx, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- P.3. Elemento neutro (unidad): Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$ con $1 \neq 0$ que verifica
$$x1 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
- P.4. Elemento inverso:
$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \quad \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$$
El elemento y es único y se llama inverso de x y se suele notar por $\frac{1}{x}$.

El cuerpo de los números reales

Propiedad distributiva (del producto con respecto de la suma)

- D.
$$x(y+z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$(\mathbb{R}, +, .)$ es un cuerpo conmutativo. Esto significa que $\mathbb{R}$ es un conjunto, donde están definidas dos operaciones (la suma y el producto) y verifica las 9 propiedades anteriores.

El cuerpo de los números reales

Orden

Existe una relación binaria ($\leq$) definida en $\mathbb{R}$ que verifica

- O1. Reflexiva
$$x \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
- O2. Antisimétrica
$$x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y, y \leq x \ \Rightarrow \ y = x$$
- O3. Transitiva
$$x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leq y, y \leq z \ \Rightarrow \ x \leq z$$
- O4. El orden es total
$$x, y \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \quad x \leq y \ \text{ ó } \ y \leq x$$

El cuerpo de los números reales

Compatibilidad del orden con las operaciones

- C1. Compatibilidad del orden respecto de la suma

$$x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \;\Rightarrow\; x + z \leq y + z$$

- C2. Compatibilidad del orden respecto del producto

$$x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leq y, 0 \leq z \;\Rightarrow\; xz \leq yz$$

$(\mathbb{R}, +, ., \leq)$ es un **cuerpo conmutativo ordenado**. Esto significa que se verifican los axiomas S, P, D, O y C (es decir, todos los enunciados hasta ahora).

El cuerpo de los números reales

TODAS LAS DEMAS PROPIEDADES ALGEBRAICAS SON CONSECUENCIA DE LOS AXIOMAS ANTERIORES

El cuerpo de los números reales

Notación

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y, \; x \neq y$$

Reales no nulos

$$\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

Reales positivos

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$$

Reales negativos

$$\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$$

Reales no negativos

$$\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x\}$$

El cuerpo de los números reales

La recta real

Habitualmente se usa la imagen de una recta horizontal para representar al conjunto de los números reales. Se identifican los puntos de la recta con números reales. En tal caso, si dos reales x e y verifican $x < y$, al representarlos en la recta, el punto asociado a x está a la izquierda del punto que representa a y.
Esta imagen más intuitiva facilita comprender algunos conceptos y algunas demostraciones. Por ejemplo, entre los conceptos, los de mayorante, minorante, supremo e ínfimo, tienen una imagen geométrica clara si se representan en la recta real.

Mayorante, minorante

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $z \in \mathbb{R}$.

Diremos que z es un **mayorante** (o **cota superior**) de A si

$$x \leq z, \quad \forall x \in A.$$

Se dice que z es el **supremo** de A si es el menor de los mayorantes de A. Lo notaremos $z = \mathrm{Sup}\ A$.

Cambiando (revirtiendo) la desigualdad se define **minorante (o cota inferior)**.

Diremos que z es el **ínfimo** de A si es el mayor de los minorantes de A ($z = \mathrm{Inf}\ A$).

El cuerpo de los números reales

Máximo, mínimo

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $a \in A$.

Diremos que a es el **máximo** de A si

$$x \leq a, \quad \forall x \in A.$$

Diremos que a es el **mínimo** de A si

$$a \leq x, \quad \forall x \in A.$$

Notación

$$\text{Max } A \quad \text{(para el máximo)}$$

$$\min A \quad \text{(para el mínimo)}$$

El cuerpo de los números reales

Ejemplos

- $\mathbb{R}^+$
  minorado y no mayorado
  $$\text{Inf } \mathbb{R}^+ = 0$$
  Como $0 \notin \mathbb{R}^+$, entonces $\mathbb{R}^+$ no tiene mínimo.
- $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$
  minorado y mayorado
  $$\text{Inf } [0,1] = \min\, [0,1] = 0, \qquad \text{Sup } [0,1] = \text{Max } [0,1] = 1$$
- $[0,1[= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$
  minorado y mayorado
  $$\text{Inf } [0,1[= \min\, [0,1[= 0, \qquad \text{Sup } [0,1[= 1$$
  Como $1 \notin [0,1[$, entonces $[0,1[$ no tiene máximo.

El cuerpo de los números reales

Axioma de supremo

Todo subconjunto no vacío de números reales que esté mayorado tiene supremo.

El cuerpo de los números reales

Propiedad de ínfimo

Todo subconjunto de números reales no vacío y minorado tiene ínfimo.

Idea de la demostración: Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y minorado

- $$-\{\text{minorantes de } A\} = \{\text{mayorantes de } -A\} := B$$

  donde

  $$-A := \{-a : a \in A\}$$

- Axioma de supremo $\Rightarrow$ $-A$ tiene supremo, y

  $$\text{Sup } -A = \min\ \{\text{mayorantes de } -A\} = \min\ B$$

- B tiene mínimo, luego $-B$ tiene máximo
  y además

  $$-\min\ B = \text{Max } -B$$

El cuerpo de los números reales

Idea de la demostración:

$$-\{\text{minorantes de } A\} = \{\text{mayorantes de } (-A)\} := B$$

$$-\min\ B = \text{Max}\ -B$$

- Como $-B = \{\text{minorantes de } A\}$ tiene máximo, entonces A tiene ínfimo y además
$$\text{Inf}\ A = \text{Max}\ (-B) = -\min\ B =$$
$$-\min\ \{\text{mayorantes de } -A\} = -\text{Sup}\ (-A),$$
esto es
$$\text{Sup}\ (-A) = -\text{Inf}\ A$$

Valor absoluto

Definición

Si $x \in \mathbb{R}$, definimos su **valor absoluto** como sigue:

$$|x| := \mathrm{Max}\ \{x, -x\} = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Se verifica que $|x| = \sqrt{x^2}$. Esto es, $|x|$ es el único número real real mayor o igual que cero cuyo cuadrado es x^2.

Valor absoluto

Propiedades

Sean x e y dos números reales, entonces

- $x^2 = |x|^2$
- $|x| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$ (no degeneración)
- Si $x \neq 0$, entonces $|x| > 0$
- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x||y|$
- Si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x| \leq y$ si, y sólo si $-y \leq x \leq y$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (subaditividad o desigualdad triangular)
- $||x| - |y|| \leq |x-y|$