GEOMETRÍA I
Grado en Matemáticas, Grupo A

Prueba de seguimiento (30/11/2020)

1. Sea $V(K)$ un espacio vectorial y $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset V$ un subconjunto linealmente independiente. Demuéstrese que si $\{w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}\}$ es linealmente dependiente entonces:
$$w_{m+1} \in L(\{w_1, \ldots, w_m\}).$$

2. Se considera el polinomio $p(x) = 1 + 2x - x^2 \in \mathbb{R}_2(x)$ y sea $B = (p(x), p'(x), p''(x))$ donde $p'(x), p''(x)$ denotan la primera y segunda derivada de $p(x)$, respectivamente. Se pide:
   - *a*) Demostrar que B es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.
   - *b*) Calcular la matriz de cambio de base de B_u (la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$) a B y las coordenadas de $q(x) = 2 + x + x^2$ en la base B.

3. Se considera en el espacio vectorial producto $M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ el subconjunto $U = \{(A, p(x)) : A$ es diagonal, $p(1) = 0\}$. Se pide:
   - *a*) Demostrar que U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$.
   - *b*) Calcular una base de U.
   - *c*) Calcular unas ecuaciones paramétricas e implícitas de U.

4. Se considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$
   Se pide:
   - *a*) Escribir la fórmula general que define el determinante de una matriz.
   - *b*) Particularizar esa fórmula para la matriz A, escribiendo explícitamente todos los sumandos que no resulten ser directamente nulos.
   - *c*) Para cada sumando no nulo: (i) escribir la permutación con la que se corresponde en la definición del determinante, (ii) hallar el número total de inversiones de esa permutación y (iii) determinar si su signatura es par o impar.

Duración: 2 horas.
Los cuatro ejercicios tienen la misma puntuación.

1 **Sea $V(K)$ un espacio vectorial y $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset V$ un subconjunto linealmente independiente. Demuéstrese que si $\{w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}\}$ es linealmente dependiente entonces:**

$$w_{m+1} \in L(\{w_1, \ldots, w_m\}).$$

Solución. Por ser $\{w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}\}$ linealmente dependiente, existen escalares $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1} \in K$ no todos nulos tales que

$$a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m + a_{m+1} w_{m+1} = 0. \tag{1}$$

Además a_{m+1} debe ser distinto de 0. En efecto, si $a_{m+1} = 0$ la igualdad anterior produciría

$$a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m = 0, \tag{2}$$

siendo alguno de los escalares $a_1, \ldots, a_m$ distinto de 0, lo que contradiría que $\{w_1, \ldots, w_m\}$ es linealmente independiente. La propiedad $a_{m+1} \neq 0$, permite operar en (1) para despejar w_{m+1} como combinación lineal del resto. Concretamente, sumando los opuestos de los m primeros términos de (1) en ambos miembros de esa igualdad y operando en $(V, +)$:

$$a_{m+1} w_{m+1} = -a_1 w_1 \cdots - a_m w_m,$$

y multiplicando en ambos miembros por a_{m+1}^{-1} y usando las propiedades del producto por escalares:

$$w_{m+1} = (-a_{m+1}^{-1} a_1) w_1 + \cdots + (-a_{m+1}^{-1} a_m) w_m,$$

que es una combinación lineal de $\{w_1, \ldots, w_m\}$, como se quería. $\square$

2 **Se considera el polinomio $p(x) = 1 + 2x - x^2 \in \mathbb{R}_2(x)$ y sea $B = (p(x), p'(x), p''(x))$ donde $p'(x), p''(x)$ denotan la primera y segunda derivada de $p(x)$, respectivamente. Se pide:**

a) Demostrar que B es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Calcular la matriz de cambio de base de B_u (la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$) a B y las coordenadas de $q(x) = 2 + x + x^2$ en la base B.

Solución. a) Escribiendo explícitamente las derivadas de $p(x)$ se tiene:

$$B = (1 + 2x - x^2, 2 - 2x, -2).$$

Como se sabe que $\mathbb{R}_2[x]$ tiene dimensión 3, basta con comprobar que los tres vectores de B forman un conjunto linealmente independiente. Aunque esto se puede demostrar directamente[1] lo demostraremos comprobando que las coordenadas de los 3 vectores de B en la base usual $B_u = (1, x, x^2)$ son independientes como elementos de $\mathbb{R}^3$ (con esto anticipamos elementos que se usarán en el apartado (b)). Para ello podemos escribir estas coordenadas por columnas en una matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

y comprobar que el rango de A es 3. Esto es inmediato por cualquiera de los siguientes dos motivos: (i) A es una matriz escalonada por columnas, con tres columnas ninguna de ellas nula, o (ii) $|A| = 4 \neq 0$.

b) Por la definición de matriz de cambio de base, la matriz antes construida es:

$$A = M(I, B_u \leftarrow B).$$

La matriz que se pide es $M(I, B \leftarrow B_u)$, que es la inversa de la anterior. Basta entonces con hallar A^{-1}. Usando, por ejemplo, el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right),$$

esto es (hágase también usando $A^{-1} = \Delta^t/|A|$, donde Δ_{ij} es el adjunto del elemento (i, j)):

$$\boxed{M(I, B \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}.}$$

Por último, para el cálculo de las coordenadas de $q(x)$ en B basta con tener en cuenta:

$$(q(x))_B = M(I, B \leftarrow B_u)(q(x))_{B_u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -3/2 \\ -3 \end{pmatrix}}.$$

[1] Por ejemplo, sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que: $0 = a \cdot (1 + 2x - x^2) + b \cdot (2 - 2x) + c \cdot (-2)$.
Derivando dos veces se obtiene $0 = -2a$, de donde $a = 0$ y sustituyendo en la primera igualdad: $0 = b \cdot (2 - 2x) - 2c$.
Derivando una vez $0 = -2b$, de donde $b = 0$ y sustituyendo $0 = -2c$. Esto es, $0 = c = b = a$, como se quería.

3 **Se considera en el espacio vectorial producto $M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ el subconjunto $U = \{(A, p(x)) : A$ es diagonal, $p(1) = 0\}$. Se pide:**

- **a) Demostrar que U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$.**
- **b) Calcular una base de U.**
- **c) Calcular unas ecuaciones paramétricas e implícitas de U.**

Solución. Como en todo espacio vectorial producto, puede obtenerse una base de $M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ a partir de una de $M_2(\mathbb{R})$ y otra de $\mathbb{R}_1[x]$ construyendo a partir de cada uno de los vectores de esas bases uno del producto con una componente nula. Así, $\dim(M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x])=\dim(M_2(\mathbb{R})) + \dim(\mathbb{R}_1[x]) = 4 + 2 = 6$ y escogiendo las bases usuales de $M_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_1[x]$, se tiene la base:

$$B = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x \right) \right).$$

a) Las matrices diagonales son las del tipo $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ con

$$a_{12} = a_{21} = 0, \qquad a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

y los polinomios $p(x) = a + bx \in \mathbb{R}_1[x]$ que verifican $p(1) = 0$ son los que cumplen:

$$a + b = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Por tanto, los vectores de U son aquellos de $M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ cuyas coordenadas $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a, b)$ en B satisfacen las ecuaciones (3), (4). Estas ecuaciones constituyen un sistema de ecuaciones lineales (SEL) homogéneo y, por tanto, sus soluciones forman un subespacio vectorial, QED.

b) Esencialmente, resolveremos el sistema de ecuaciones anterior. Teniendo en cuenta (3), (4), podemos expresar U del siguiente modo:

$$\begin{aligned} U = & \left\{ (\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, a - ax) : a_{11}, a_{22}, a \in \mathbb{R} \right\} \\ = & \left\{ a_{11}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0) + a_{22}(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0) + a(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 1 - x) : a_{11}, a_{22}, a \in \mathbb{R} \right\} \\ = & L \left\{ (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0), (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0), (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 1 - x) \right\} \end{aligned} \tag{5}$$

En consecuencia, U es el subespacio vectorial generado[2] por

$$B_U = \left\{ (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0), (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0), (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 1 - x) \right\}.$$

Veamos que este sistema de generadores de U es también linealmente independiente y, por tanto, la base requerida. Para ello basta con darse cuenta de que en la segunda línea de (5) aparece una combinación lineal arbitraria de B_U, la cual se puede expresar como aparecen en la primera línea. Por tanto, igualar una combinación lineal de B_U con coeficientes arbitrarios $a_{11}, a_{22}, a \in \mathbb{R}$ al vector nulo equivale a escribir:

$$(\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, a - ax) = (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 + 0x),$$

lo que implica trivialmente $a_{11} = a_{22} = a = 0$, QED.

[2]En particular, se justifica también así que U es un subespacio vectorial, dando otra solución del apartado a).

c) Las ecuaciones paramétricas en las bases B del espacio vectorial producto y B_U del subespacio se calculan directamente de (5) sin más que tomar a_{11}, a_{22}, a como parámetros. No obstante, por claridad en las ecuaciones los llamaremos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y reservaremos $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a, b)$ para las coordenadas en B. Se tiene así que $(A, p(x)) \in M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ pertenece a U si y sólo si sus coordenadas en B satisfacen las ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{\begin{array}{rc} a_{11} = & \lambda_1 \\ a_{12} = & 0 \\ a_{21} = & 0 \\ a_{22} = & \lambda_2 \\ a = & \lambda_3 \\ b = & -\lambda_3 \end{array}} \qquad \text{donde} \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Obsérvese que se obtienen seis ecuaciones correspondientes a la dimensión de $M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ (cada una para una coordenada en B) y tres parámetros correspondientes a la dimensión de U (cada uno para una coordenada en B_U).

Para las implícitas, las ecuaciones (3), (4), esto es,

$$\boxed{\begin{array}{rc} a_{12} = & 0 \\ a_{21} = & 0 \\ a + b = & 0 \end{array}} \qquad a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a, b \in \mathbb{R},$$

proporcionan unas ecuaciones implícitas en la base B, sin más que demostrar que son independientes. Aunque esto se puede hacer directamente[3], se puede razonar mediante dimensiones. En efecto, este SEL de 6 incógnitas y 3 ecuaciones caracteriza U y sabemos que este subespacio tiene dimensión 3 (el número de elementos de B_U en el apartado anterior). Como la dimensión del subespacio de soluciones del SEL es $6 - m$, donde m es el número de ecuaciones independientes, debe verificarse $6 - m = 3$, esto es, $m = 3$, QED.

[3] La matriz del sistema es escalonada $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con tres filas no nulas y, por tanto, de rango 3.

4 Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Se pide:

a) **Escribir la fórmula general que define el determinante de una matriz.**

b) **Particularizar esa fórmula para la matriz A, escribiendo explícitamente todos los sumandos que no resulten ser directamente nulos.**

c) **Para cada sumando no nulo: (i) escribir la permutación con la que se corresponde en la definición del determinante, (ii) hallar el número total de inversiones de esa permutación y (iii) determinar si su signatura es par o impar.**

Solución. a) $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sig(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{1\sigma(1)}$, donde S_n es el grupo de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$. [4]

b) En cada sumando de la expresión aparece, para dada índice de fila i, un único elemento de columna $\sigma(i)$. Se tiene entonces:

- Para $i = 1$, las permutaciones que produzcan sumandos no nulos deben verificar $\sigma(1) = 3$ al ser $a_{13} = 1$ el único elemento no nulo de esa fila.
- Para $i = 2$, las permutaciones que produzcan sumandos no nulos deben verificar $\sigma(2) = 1$ al ser $a_{21} = 2$ el único elemento no nulo de esa fila.
- Para $i = 3$, las permutaciones que produzcan sumandos no nulos deben verificar $\sigma(3) = 4$ al ser $a_{34} = 1$ el único elemento no nulo de esa fila.
- Para $i = 4$, las permutaciones que produzcan sumandos no nulos deben verificar $\sigma(4) = 2$ o bien $\sigma(4) = 4$ al ser $a_{42} = 3$ y $a_{44} = 1$ los únicos dos elementos no nulos de esa fila. No obstante, como ya se ha visto que $\sigma(3) = 4$, y cada permutación σ es una aplicación inyectiva, la elección $\sigma(4) = 4$ no es posible.

En resumen, el único sumando no nulo es:

$$sig(\sigma) \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{42} = sig(\sigma) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3, \tag{6}$$

donde $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 2$.

c) La única permutación correspondiente a un sumando no nulo es pues:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

El cálculo mecánico de su número total de inversiones produce 2+0+1, esto es: $\boxed{[\sigma] = 3}$.

Su signatura es $(-1)^{[\sigma]} = (-1)^3$, esto es[5], $\boxed{sig(\sigma) = -1}$.

[4] La expresión análoga en la que las permutaciones aparecen en el índice de filas también es válida.

[5] En consecuencia, aplicando directamente la fórmula del determinante en a) y la expresión (6) se tiene: $|A| = -6$ (lo que también puede calcularse por otros medios).