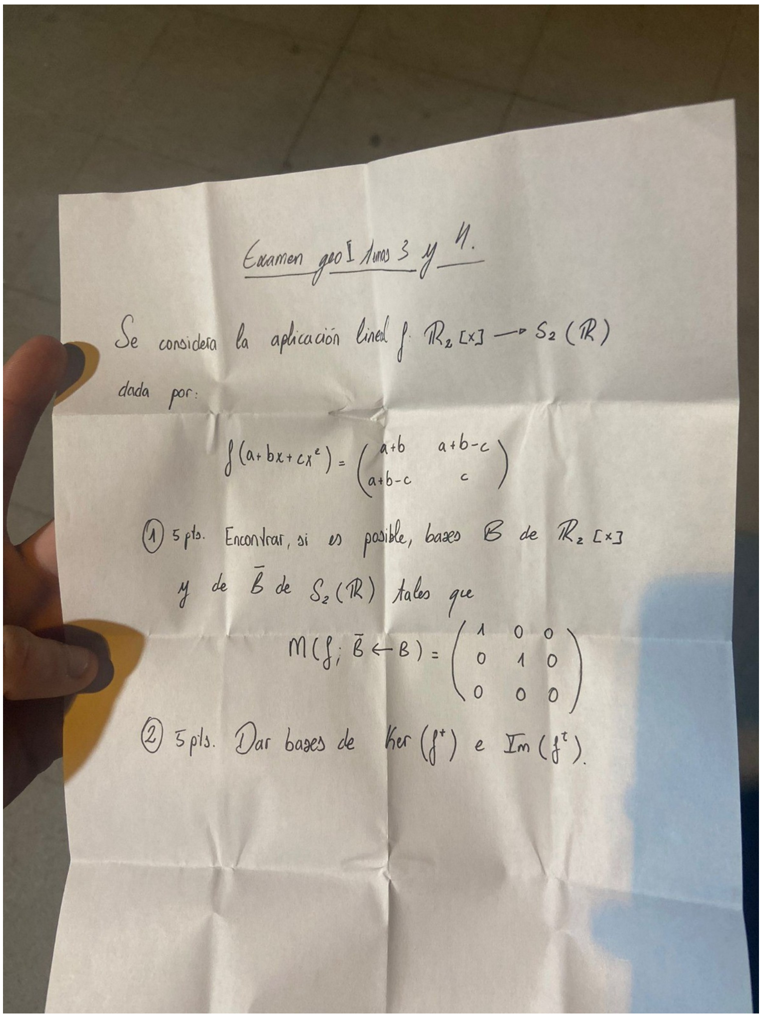
Parcial DGIIM 2021 T.3y4 (Grupo 1)

domingo, 23 de enero de 2022 10:52



Examen geo I temas 3 y 4.

Se considera la aplicación lineal $f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow S_2(\mathbb{R})$ dada por:

$$f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b & a+b-c \\ a+b-c & c \end{pmatrix}$$

① 5 pts. Encontrar, si es posible, bases B de $\mathbb{R}_2[x]$ y de $\bar{B}$ de $S_2(\mathbb{R})$ tales que

$$M(f; \bar{B} \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

② 5 pts. Dar bases de $Ker(f^t)$ e $Im(f^t)$.

$f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow S_2(\mathbb{R})$

$$f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b & a+b-c \\ a+b-c & c \end{pmatrix}$$

① $B = \{p(x), q(x), r(x)\}$ $\quad \bar{B} = \{X, Y, Z\}$

tq $\quad f(p(x)) = (1,0,0)_{\bar{B}} = X$

$f(q(x)) = (0,1,0)_{\bar{B}} = Y$

$f(r(x)) = (0,0,0)_{\bar{B}} \Longrightarrow r(x) \in Ker(f)$

Calculamos $Ker(f)$:

$\forall (a+bx+cx^2) \in Ker(f)$ $\quad \begin{cases} a+b=0 \\ a+b-c=0 \\ c=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \end{cases}$ $\quad \left.\begin{matrix} \text{2 ecuaciones} \\ \text{3 incógnitas} \end{matrix}\right\}$ 1 parámetro: $\lambda \in \mathbb{R}$

$(a,b,c) = (\lambda, -\lambda, 0)$

Luego $\forall (a+bx+cx^2) \in \mathbb{R}_2[x]$ $\quad (a+bx+cx^2) = \lambda(1-x) \Rightarrow Ker(f) = \mathcal{L}(\{(1-x)\})$

Tomemos entonces para B este y dos polinomios L.I. con él,

por ejemplo, (x^2) y (x) $\Rightarrow B = \{x, x^2, 1-x\}$

$$f(x) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = X \quad f(x^2) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = Y$$

Luego $B = \{x^2, x, 1-x\}$ y nos faltará $Z \in \bar{B}$, la cual sea una matriz L.I. con X e Y, por ejemplo $Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{B} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

② Primero, definiré $M(f; \bar{B}_u \leftarrow B_u)$

$$\left.\begin{array}{l} B_u = \{1, x, x^2\} \\ \bar{B}_u = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}\end{array}\right\} \begin{array}{l} f(1) = (1, 1, 0)_{\bar{B}_u} \\ f(x) = (1, 1, 0)_{\bar{B}_u} \\ f(x^2) = (0, -1, 1)_{\bar{B}_u}\end{array}$$

$$M(f; \bar{B}_u \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = A \Rightarrow A^t = M(f^t; B_u^* \leftarrow \bar{B}_u^*) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Siendo $\bar{B}_u^* = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $B_u^* = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{e}_1) = e_1 + e_2 \\ f(\bar{e}_2) = e_1 + e_2 - e_3 \\ f(\bar{e}_3) = e_3 \end{array}\right| \; f(\bar{e}_2) = 1 \cdot (e_1 + e_2) + (-1) \cdot (e_3) \Rightarrow \text{L.D}$$

Una posible base de $Im(f^t)$ será $\{e_1 + e_2, e_3\}$

Por la fórmula de las dimensiones:

$$\cancelto{3}{\dim_{\mathbb{R}}(S_2^*(\mathbb{R}))} = \cancelto{2}{\dim_{\mathbb{R}}(Im(f^t))} + \dim_{\mathbb{R}}(Ker(f^t)) \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(Ker(f^t))$$

Llamemos $\psi = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}_{B_u^*}$ $\quad \psi \in Ker(f)$, de forma que

$$A^t \cdot \psi = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}_{B_u^*} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\ x+y\\ -y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Luego: $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \\ \ldots \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ \ldots = 0 \end{cases} \xrightarrow{y=\lambda} \begin{cases} x = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\quad (x, y, z) = (-\lambda, \lambda, \lambda)$

Luego: $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \xrightarrow{y=\lambda} \begin{cases} x=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad (x,y,z)=(-\lambda,\lambda,\lambda)$

Por lo que $\forall \psi \in \ker(f) \quad \psi = \lambda(-e_1 + e_2 + e_3)$

Una base de $\ker(f)$ será $\{(-e_1 + e_2 + e_3)\}$