Ejemplo de resolución de circuitos en corriente continua con distintas técnicas

Isabel M. Tienda Luna

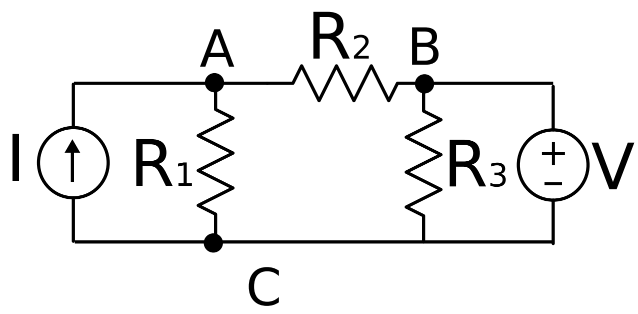

Figura 1: Circuito a resolver.

En este documento analizaremos cómo solucionar el circuito de la figura usando las distintas técnicas que hemos estudiado en clase. En lo que sigue utilizaré como sinónimos:

- Tensión = voltaje = potencial.
- Intensidad = intensidad de corriente = corriente.

1. Método de mallas

Para aprender a utilizar el método de mallas, usaremos el circuito de la figura 1 utilizando los siguientes valores para las resistencias y fuentes: $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$, $R_3 = 1k\Omega$, $V = 2V$ y $I = 1mA$.

Como hemos visto en clase, a la hora de resolver circuitos utilizando el método de mallas vamos a seguir una serie de pasos que se enumeran a continuación:

1. Buscar el número de nudos esenciales (n) y el número de ramas esenciales (r) en el circuito.
2. Usar el n y r para calcular el número de mallas independientes. Escoger las mallas independientes.

3. Dibujar las intensidades en cada una de las mallas independiente escogidas.

4. Aplicar a cada malla la ley de Kirchhoff de mallas.

5. Calcular las intensidades de cada una de las mallas.

1.1. Buscar el número de nudos esenciales (n) y el número de ramas esenciales (r) en el circuito.

Para encontrar el número de nudos esenciales en el circuito recordamos la definición de nudo esencial que es aquel que une tres o más elementos. En el circuito de la figura 1 sólo hay tres nudos que cumplan esta condición y son los nudos A, B y C. Por tanto, $n = 3$.

Para encontrar el número de ramas esenciales en el circuito recordamos que una rama esencial es aquella que conecta dos nudos esenciales. Por tanto, para encontrar las ramas esenciales en el circuito hay que buscar los distintos caminos que conectan los nudos esenciales. En la figura 1 puede verse que hay cinco caminos distintos entre los nudos esenciales, por tanto, hay cinco ramas esenciales. Esto es, $r = 5$.

1.2. Usar n y r para calcular el número de mallas independientes. Escoger las mallas independientes.

Para calcular el número de mallas independiente usamos la expresión que hemos visto en clase, esto es, el número de mallas independientes se puede calcular como $r - (n - 1)$. Si aplicamos esta fórmula, llegamos a que en el circuito de la figura 1 hay tres mallas independientes.

1.2.1. ¿Cómo escojo las mallas independientes con las que voy a trabajar?

La elección de las mallas con las que se va a trabajar es totalmente arbitraria, esto es, cada uno puede elegir las que quiera siempre y cuando sean independientes. En la figura 2 se muestran las tres mallas independientes que se van a escoger para resolver este problema.

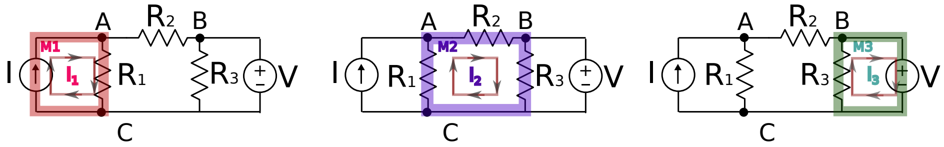

Figura 2: Mallas independientes escogidas.

1.3. Dibujar las intensidades en cada una de las mallas independiente escogidas.

El siguiente paso consiste en dibujar las intensidades que circulan por cada malla. De nuevo, existen varias posibilidades de elección. De las distintas posibilidades que existen para el circuito de la figura 1, se han escogido las que aparecen representadas en la figura 2. Todas ellas en sentido horario. Podrían haberse escogido en cualquier otro sentido, cuando resolvamos el circuito y calculemos las intensidades, el signo de las mismas nos dirá si nuestra elección era correcta o si por el contrario no equivocamos de sentido de recorrido.

1.4. Aplicar a cada malla la ley de Kirchhoff de mallas.

Para aplicar a cada malla la ley de Kirchhoff de mallas, tenemos que distinguir entre las tres mallas del circuito. Vamos a llamarlas malla 1 (en rojo en la figura 2), malla 2 (en azul en la figura 2) y malla 3 (en verde en la figura 2).

1.4.1. Análisis de la malla 1

La ley de mallas de Kirchhoff dice:

$$\sum \varepsilon = \sum RI \tag{1}$$

por tanto, para aplicarla tenemos que calcular cada miembro de la ecuación por separado.

Comenzamos calculando el primer miembro de la ecuación 1. Para ello necesito saber cuántas fuentes hay en la malla 1. Según podemos observar en la figura 1, en la malla 1 hay una fuente de corriente de la que desconozco su fuerza electromotriz. La llamaremos ε.

¿Cómo se el signo de ε? Como ε es una incógnita, no sé su signo.

¿Y entonces con qué signo escribo ε en la ecuación 1? Puedo escribirla con el signo que quiera. Si la pongo positiva estaré considerando implícitamente que el potencial en el nudo A es mayor que en el punto C. ¿Por qué? Porque la corriente de la malla 1 sale por A y entra por C y hemos dicho que cuando la intensidad de malla sale por la parte de la fuente donde hay más potencial el signo de la fuerza electromotriz es positivo.

Para calcular el segundo miembro de la ecuación 1 hay que fijarse en cada una de las resistencias que están en la malla 1. Según la figura 2, en la malla 1 hay una única resistencia (R_1) que además está compartida con la malla 2. Por tanto, por R_1 pasa tanto la corriente de intensidad I_1 como la I_2.

¿Cómo se el signo de IR? El criterio es el siguiente: los productos de las resistencias de la malla por la intensidad de malla ($R_1 I_1$ en este caso) son siempre positivos. Si alguna resistencia está compartida con otra malla, si la intensidad I de esa otra malla (I_2 en este caso) va en el mismo sentido que la intensidad de la malla que estoy analizando (I_1 en este caso), entonces IR es positivo. El producto será negativo en caso contrario. Esto es, si la intensidad I de la otra malla (I_2 en este caso) va en sentido contrario a la intensidad de la malla que estoy analizando (I_1 en este caso). Por tanto, el segundo miembro de la ecuación 1 se calcula de la siguiente manera:

$$\sum RI = 1k\Omega I_1 - 1k\Omega I_2 \tag{2}$$

Si sustituyo en la ecuación 1 el resultado obtenido en la ecuación 2 obtengo:

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon &= \sum RI \\ \varepsilon &= 1k\Omega I_1 - 1k\Omega I_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Pero el valor numérico de I_1 es conocido, se corresponde con la intensidad de la fuente de corriente que hay en la malla 1. Por tanto, la expresión final de la ecuación 3 queda como sigue:

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon &= \sum RI \\ \varepsilon &= 1V - 1k\Omega I_2 \end{aligned} \tag{4}$$

1.4.2. Análisis de la malla 2

Para realizar el análisis de la malla 2 comenzamos de nuevo calculando el primer miembro de la ecuación 1. Para ello necesito saber cuántas fuentes hay en la malla 2. Según podemos observar en la figura 2, en la malla 2 no hay fuentes así que la suma $\sum \varepsilon$ es cero.

Para calcular el segundo miembro de la ecuación 1 hay que fijarse en cada una de las resistencias que están en la malla 2. Según la figura 1, en la malla 2 hay 3 resistencias. Mientras que por R_2 sólo pasa la corriente de intensidad I_2, por la resistencia R_1 pasan tanto la corriente I_1 como la I_2 (en sentidos opuestos) y por la resistencia R_3 pasan tanto la corriente I_2 como la I_3 (en sentidos opuestos).

¿Cómo se el signo de IR? El criterio es el siguiente: los productos de las resistencias de la malla por la intensidad de malla son siempre positivos. Si alguna resistencia está compartida con otra malla, si la intensidad I que atraviesa la resistencia R va en el mismo sentido que la intensidad de la malla que estoy analizando (I_2 en este caso), entonces IR es positivo. Será negativo en caso contrario. Esto es, si la intensidad I que atraviesa la resistencia R va en sentido contrario a la intensidad de la malla que estoy analizando (I_2 en este caso). Por tanto, el segundo miembro de la ecuación 1 se calcula de la siguiente manera:

$$\sum RI = 1k\Omega I_2 + 1k\Omega I_2 + 1k\Omega I_2 - 1k\Omega I_1 - 1k\Omega I_3 = 3k\Omega I_2 - 1k\Omega I_1 - 1k\Omega I_3 \tag{5}$$

Si sustituyo en la ecuación 1 los resultados obtenidos en la ecuación 5 obtengo:

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon &= \sum RI \\ 0V &= 3k\Omega I_2 - 1k\Omega I_1 - 1k\Omega I_3 \end{aligned} \tag{6}$$

Pero el valor numérico de I_1 es conocido, se corresponde con la intensidad de la fuente de corriente que hay en la malla 1. Por tanto, la expresión final de la ecuación 6 queda como sigue:

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon &= \sum RI \\ 0V &= 3k\Omega I_2 - 1V - 1k\Omega I_3 \\ 1V &= 3k\Omega I_2 - 1k\Omega I_3 \end{aligned} \tag{7}$$

1.4.3. Análisis de la malla 3

Para realizar el análisis de la malla 3 comenzamos de nuevo calculando el primer miembro de la ecuación 1. Para ello necesito saber cuántas fuentes hay en la malla 3. Según podemos observar en la figura 2, en la malla 3 hay 1 fuente de tensión. Para hacer la suma $\sum \varepsilon$ necesitamos utilizar el signo correcto en la fuente.

¿Cómo se el signo de ε? Si la intensidad de la malla que estoy analizando (I_3 en este caso) sale de la fuente por el polo positivo, entonces el signo de la fuerza electromotriz de esa fuente es positivo. El signo será negativo en caso contrario. Esto es, si la intensidad de la malla que estoy analizando (I_3 en este caso) sale de la fuente por el polo negativo.

Entonces, aplicando el criterio anterior, como I_3 sale por el polo negativo de la fuente de tensión:

$$\sum \varepsilon = -2V \tag{8}$$

Para calcular el segundo miembro de la ecuación 1 las resistencias que están en la malla 3. Si nos fijamos en la figura 2, veremos que en la malla 3 hay 1 resistencia que además está compartida con la malla 2. Por tanto, por la resistencia R_3 pasan tanto la corriente I_2 como la I_3.

¿Cómo se el signo de IR? El criterio es el siguiente: los productos de resistencia por la intensidad de la malla que estoy analizando son siempre positivos. Para resistencias compartidas con otras mallas, si la intensidad I de la otra malla atraviesa la resistencia R en el mismo sentido que la intensidad de la malla que estoy analizando (I_3 en este caso), entonces IR es positivo. Será negativo en caso contrario. Esto es, si la intensidad I que atraviesa la resistencia R va en sentido contrario a la intensidad de la malla que estoy analizando (I_3 en este caso). Por tanto, el segundo miembro de la ecuación 1 se calcula de la siguiente manera:

$$\sum RI = 1k\Omega I_3 - 1k\Omega I_2 \tag{9}$$

Si sustituyo en la ecuación 1 los resultados obtenidos en las ecuaciones 8 y 9 obtengo:

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon &= \sum RI \\ -2V &= 1k\Omega I_3 - 1k\Omega I_2 \end{aligned} \tag{10}$$

1.5. Calcular las intensidades de cada una de las mallas.

En este problema, las incógnitas son tres: la fuerza electromotriz de la fuente de corriente (ε), la intensidad que circula por la malla 2 (I_2) y la que lo hace por la malla 3 (I_3). Para calcularlas sólo hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1V - 1k\Omega I_2 \\ 1V &= 3k\Omega I_2 - 1k\Omega I_3 \\ -2V &= 1k\Omega I_3 - 1k\Omega I_2 \end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1{,}5V \\ I_2 &= -0{,}0005A \\ I_3 &= -0{,}0025A \end{aligned}$$

1.5.1. Cálculo de las intensidades de rama

Pero lo que realmente tiene sentido físico no son las intensidades de malla sino las de rama, las que pasan por cada uno de los elementos del circuito. A continuación vamos a calcular esas intensidades, esas corrientes de rama.

Si nos fijamos en el circuito de la figura 2, vemos que por la resistencia R_2 pasa la intensidad $I_2 = -0{,}005A$ y que por la fuente de tensión pasa la intensidad $I_3 = -0{,}0025A$. Es por esto, que para los elementos anteriores no hay que hacer ninguna consideración o cálculo adicional una vez que se han calculado las corrientes de malla: sabiendo la intensidad de malla, se la de rama.

Sin embargo, si nos fijamos en la figura 2 vemos que por la resistencia R_1 pasan tanto I_1 como I_2. ¿Cuál es entonces la intensidad real que pasa por esos elementos? La intensidad que pasa por esos elementos se calcula usando I_1 e I_2. Como I_1 e I_2 atraviesan este elemento en sentido contrario, la intensidad que estamos buscando será la diferencia de las dos e irá en el sentido de la más grande (I_1 en este caso). Por tanto, por la resistencia R_1 pasa una intensidad de corriente $I_1 - I_2 = 0{,}001A - (-0{,}0005A) = 0,0015A$ en el mismo sentido que I_1, esto es, de A a C.

Finalmente, si nos fijamos en la figura 2 vemos que por la resistencia R_3 pasan tanto I_2 como I_3. ¿Cuál es entonces la intensidad real que pasa por ese elemento? La intensidad se calcula usando I_2 e I_3. Como I_2 e I_3 atraviesan este elemento en sentido contrario, la intensidad que estamos buscando será la diferencia de las dos e irá en el sentido de la más grande (I_2 en este caso). Por tanto, por la resistencia R_3 pasa una intensidad de corriente $I_2 - I_3 = -0{,}0005A - (-0{,}0025A) = 0,002A$ en el mismo sentido que I_2, esto es, de B a C.

Si trabajar con intensidades negativas me resulta complicado a la hora de hacer los cálculos, una vez que se haya resuelto el circuito, se pueden redibujar las intensidades de malla cambiando el sentido de aquellas que hayan salido negativas. Los resultados anteriores y los razonamientos empleados para realizarlos son exactamente los mismos. En la figura 3 se muestran estas equivalencias.

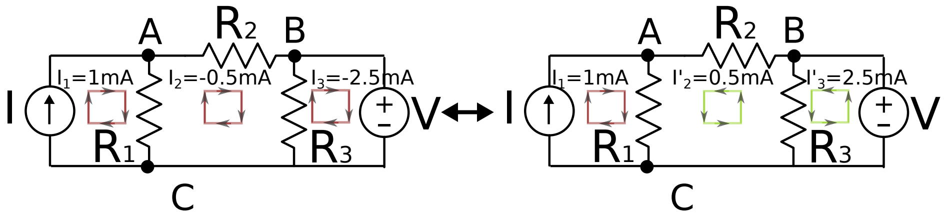

Figura 3: Izquierda: circuito con los resultados numéricos obtenidos. Derecha: mismo circuito donde las intensidades negativas se han puesto positivas y se han cambiado de sentido. Por tanto, $I'_2 = -I_2$ e $I'_3 = -I_3$.

1.5.2. Cálculo de las diferencias entre los potenciales de los nudos esenciales

1. $V_A - V_C$. Esta diferencia de potencial ya se conoce porque coincide con la fuerza electromotriz de la fuente de corriente que ya se ha calculado. Por tanto, $V_A - V_C = \varepsilon = 1{,}5V$. Otra posibilidad para calcular esta diferencia de potencial es aplicar la ley de Ohm a la resistencia R_1: $V_A - V_C = R_1 1{,}5mA = 1{,}5V$.

2. $V_B - V_C$. Esta diferencia de potencial ya se conoce porque coincide con la fuerza electromotriz de la fuente de tensión. Por tanto, $V_B - V_C = 2V$. Otra posibilidad para calcular esta diferencia de potencial es aplicar la ley de Ohm a la resistencia R_3: $V_B - V_C = R_3 2mA = 2V$.

3. $V_B - V_A$. Esta diferencia de potencial se calcula aplicando la ley de Ohm a la resistencia R_2: $V_B - V_A = R_2 0{,}5mA = 0{,}5V$.

¿Y cómo sé que esas diferencias de potencial son positivas? Cuando calculamos la diferencia de potencial usando la ley de Ohm, usamos el sentido de la intensidad de corriente. Dijimos en clase que el sentido de la intensidad de corriente me marcaba el movimiento de las cargas positivas en los conductores. Las cargas positivas siempre van en la misma dirección que el campo eléctrico y el campo eléctrico siempre va hacia potenciales decrecientes (desde donde hay más potencial hasta donde hay menos potencial). En el caso en el que usemos fuentes para calcular las diferencias de potencial, usaremos los polos positivos y negativos para saber en qué punto hay más potencial (polo positivo) y en qué punto hay menos (polo negativo).

2. Método de nudos

A continuación resolveremos el mismo circuito utilizando el método de nudos. Como hemos visto en clase, a la hora de resolver circuitos utilizando el método de nudos vamos a seguir una serie de pasos que se enumeran a continuación:

1. Buscar el número de nudos esenciales (n) en el circuito.
2. Escoger el nudo de referencia (0V, masa o tierra).
3. Dibujar las intensidades en cada una de las ramas.
4. Relacionar las intensidades de rama con los potenciales de los nudos esenciales.
5. Aplicar a cada nudo esencial la ley de Kirchhoff de nudos.
6. Calcular los potenciales de cada uno de los nudos.

2.1. Buscar el número de nudos esenciales (n) en el circuito.

Para encontrar el número de nudos esenciales en el circuito hay que recordar la definición de nudo esencial como aquel que conecta tres o más elementos. Si nos fijamos en la figura 1, vemos que en el circuito hay 3 nudos esenciales que se han llamado A, B y C.

2.2. Escoger el nudo de referencia (0V, masa o tierra).

El nudo de referencia es aquel al que vamos a asignar el valor de referencia para la tensión, voltaje o potencial (0V). La elección de este nudo es totalmente arbitraria, esto es, el nudo de referencia puede ser cualquiera de los nudos esenciales del circuito. Sin embargo, lo más conveniente de cara a facilitar la resolución de los problemas es escoger como nudo de referencia a aquel que conecta un mayor número de elementos. En el circuito de la figura 1 se trata del nudo C. Por tanto, en lo que sigue el nudo C será el nudo de referencia y esto significa que el valor de su potencial será 0V.

2.3. Dibujar las intensidades en cada una de las ramas.

El siguiente paso consiste en dibujar cada una de las intensidades de rama en el circuito. Para ello, lo primero es saber cuántas ramas esenciales hay en el circuito. Recordamos que una rama esencial es el camino entre dos nudos esenciales consecutivos. En nuestro circuito hay 5 ramas esenciales, 5 caminos entre los tres nudos esenciales. En la figura 4 se han usado distintos colores para cada una de las ramas esenciales del circuito.

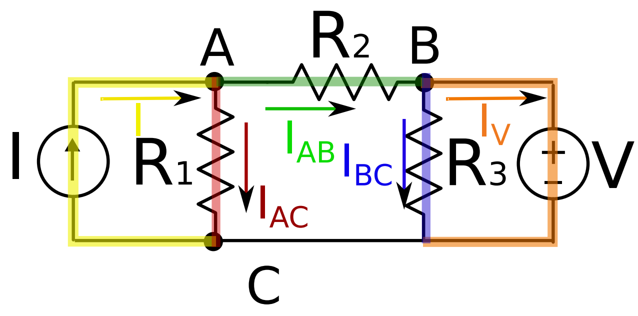

Figura 4: Ramas esenciales e intensidades de rama en el circuito.

Una vez localizadas las ramas esenciales, hay que dibujar la intensidad que circula por ellas. Por tanto, habrá tantas intensidades distintas como ramas esenciales haya en el circuito. ¿Cómo se dibujan las intensidades, qué sentido tienen? El sentido de la intensidad de rama es totalmente arbitrario. Esto es, como no conocemos las intensidades de rama las dibujamos suponiendo un sentido para ellas (el que queramos). En la figura 4 se han dibujado estas intensidades (I, I_V, I_{AC}, I_{BC} e I_{AB}). Esta es sólo una posibilidad para realizar este dibujo, cualquier suposición sobre el sentido de estas intensidades es igualmente válida. Una vez resuelto el ejercicio, se calcularán los valores numéricos de estas intensidades y el signo de estos valores numéricos dirán si la suposición que se ha hecho es correcta.

2.4. Relacionar las intensidades de rama con los potenciales de los nudos esenciales.

Para relacionar las intensidades de cada una de las ramas con los potenciales de los nudos esenciales hay que usar las herramientas que hemos aprendido en este tema (concepto de fuente, ley de Ohm, asociación de resistencias, etc.). En este ejemplo concreto, sólo hay que usar la ley de Ohm en cada una de las resistencias. Esto es:

$$\begin{aligned}
\text{Ley de Ohm en } R_1 \rightarrow I_{AC} &= \frac{V_A - V_C}{1k\Omega} = \frac{V_A - 0V}{1k\Omega} \\
\text{Ley de Ohm en } R_3 \rightarrow I_{BC} &= \frac{V_B - V_C}{1k\Omega} = \frac{V_B - 0V}{1k\Omega} \\
\text{Ley de Ohm en } R_2 \rightarrow I_{AB} &= \frac{V_A - V_B}{1k\Omega}
\end{aligned}$$

en las fórmulas anteriores no aparecen ni I ni I_V porque el valor de la primera es un dato $I = 1A$ y la segunda es una incógnita. Otro dato del problema es el valor de $V_B - V_C = V_B$ ya que se corresponde con la fuerza electromotriz de la fuente de tensión. Teniendo en cuenta este dato las ecuaciones anteriores quedan:

$$\text{Ley de Ohm en } R_1 \rightarrow I_{AC} = \frac{V_A - V_C}{1k\Omega} = \frac{V_A - 0V}{1k\Omega} \tag{11}$$

$$\text{Ley de Ohm en } R_3 \rightarrow I_{BC} = \frac{V_B - V_C}{1k\Omega} = \frac{2V - 0V}{1k\Omega} = 2mA \tag{12}$$

$$\text{Ley de Ohm en } R_2 \rightarrow I_{AB} = \frac{V_A - V_B}{1k\Omega} = \frac{V_A - 2V}{1k\Omega} \tag{13}$$

2.5. Aplicar a cada nudo esencial la ley de Kirchhoff de nudos.

La ley de Kirchhoff de nudos dice que para cada nudo se cumple que:

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen} \tag{14}$$

2.5.1. Nudo A

Si nos fijamos en la figura 4, vemos que al nudo A entra sólo I mientras que salen I_{AC} e I_{AB}. Esto es:

$$\begin{aligned}
\sum I_{entran} &= I = 1A \\
\sum I_{salen} = I_{AC} + I_{AB} &= \frac{V_A}{1k\Omega} + \frac{V_A - 2V}{1k\Omega}
\end{aligned} \tag{15}$$

donde se han usado las ecuaciones 11 y 13 para sustituir los valores de I_{AC} y de I_{AB}.

Por tanto, si sustituimos las ecuaciones 15 en la ecuación 14 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\
1mA &= \frac{V_A}{1k\Omega} + \frac{V_A - 2V}{1k\Omega}
\end{aligned} \tag{16}$$

2.5.2. Nudo B

Si nos fijamos en la figura 4, vemos que al nudo B entra I_{AB} mientras que salen I_V e I_{BC}. Esto es:

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= I_{AB} = \frac{V_A - 2V}{1k\Omega} \\ \sum I_{salen} &= I_V + I_{BC} = I_V + 2mA \end{aligned} \tag{17}$$

donde se han usado las ecuaciones 11 y 12 para sustituir los valores de I_{BC} y de I_{AB}.

Por tanto, si sustituimos las ecuaciones 17 en la ecuación 14 obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum I_{entran} &= \sum I_{salen} \\ \frac{V_A - 2V}{1k\Omega} &= I_V + 2mA \end{aligned} \tag{18}$$

2.6. Calcular V_A e I_V.

Finalmente, para calcular las incógnitas de este problemas que son V_A e I_V, sólo hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1mA &= \frac{V_A}{1k\Omega} + \frac{V_A - 2V}{1k\Omega} \\ \frac{V_A - 2V}{1k\Omega} &= I_V + 2mA \end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} V_A &= 1{,}5V \\ I_V &= -2{,}5mA \end{aligned}$$

Con los potenciales anteriores, y haciendo uso de las ecuaciones 11 y 13 podemos calcular las intensidades de rama que faltan por conocer:

$$\begin{aligned} \text{Ley de Ohm en } R_1 \rightarrow I_{AC} &= \frac{V_A - V_C}{1k\Omega} = \frac{1{,}5V}{1k\Omega} = 1{,}5mA \\ \text{Ley de Ohm en } R_3 \rightarrow I_{AB} &= \frac{V_A - V_B}{1k\Omega} = \frac{1{,}5V - 2V}{1k\Omega} = -0{,}5mA \end{aligned}$$

De los signos de las intensidades anteriores puede verse que nuestra suposición sobre el sentido de la intensidad I_{AC} es correcta puesto que su signo es positivo. En el caso de I_{AB}, su signo negativo nos indica que el sentido que hemos supuesto es incorrecto y que en realidad la intensidad en esa rama va desde el nudo B hasta el nudo A (nosotros la habíamos dibujado desde el A hasta el B).

3. Método de simplificación

A continuación resolveremos el circuito de la figura 1 utilizando un método de simplificación.

3.0.1. Reducción

Para aplicar un método de reducción tenemos que buscar asociaciones de resistencias que puedan simplificar el circuito. En el circuito de la figura 1 hay tres resistencias que no están ni en serie ni en paralelo. Por tanto, no podemos usar las equivalencias serie ni paralelo para reducir el circuito. Sin embargo, si nos fijamos, vemos que las tres resistencias se encuentran asociadas formando un triángulo, de manera que podemos usar las equivalencias $\Delta - Y$ para solucionarlo. En la figura 5 podemos ver los dos circuitos equivalentes usando la transformación anterior.

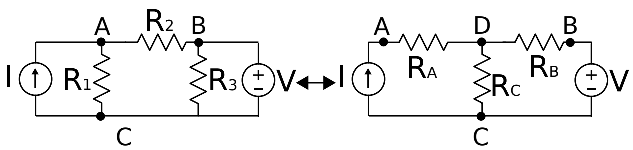

Figura 5: Equivalencia entre circuitos usando la transformación $\Delta - Y$.

Aplicando las reglas de la transformación, podemos relacionar los valores de las resistencias de la derecha con los de las que aparecen en el circuito de la izquierda de la figura 5:

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{3} k\Omega$$
$$R_B = \frac{R_3 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{3} k\Omega$$
$$R_C = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{3} k\Omega$$

Una vez conocidos los valores de las resistencias del circuito, podemos usar cualquier técnica para resolverlo. Si usamos el método de mallas sólo tendremos que seguir los pasos explicados en la sección 1 de este documento:

1. *Buscar el número de nudos esenciales (n) y el número de ramas esenciales (r) en el circuito.* En el circuito de la derecha de la figura 5 hay dos nudos esenciales (C y D) y tres caminos diferentes para ir de uno al otro. Por tanto, $n = 2$ y $r = 3$. A y B dejan de ser nudos esenciales en el circuito de la derecha ya que sólo conectan dos elementos.

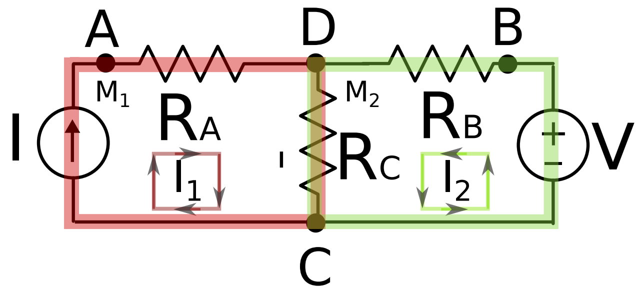

Figura 6: Solución por mallas. Las mallas independientes del circuito escogidas para solucionar el problema se han señalado en rojo (malla 1) y verde (malla 2). Notar que la resistencia R_C se comparte entre las dos mallas.

2. *Usar el n y r para calcular el número de mallas independientes.* Escoger las mallas independientes. El número de mallas independientes es dos. Y se han escogido como se muestra en la figura 6.

3. *Dibujar las intensidades en cada una de las mallas independiente escogidas.* En la figura 6 pueden verse dibujadas las intensidades de cada una de las mallas independientes.

4. *Aplicar a cada malla la ley de Kirchhoff de mallas.* Tomando las intensidades como aparecen dibujadas en este circuito, vemos que $I_1 = I = 1mA$.

   La ecuación para la malla 2 es:

$$\begin{aligned} V &= R_B I_2 + R_C I_2 + R_C I_1 \\ 2V &= \frac{2}{3} k\Omega I_2 + \frac{1}{3} V \\ I_2 &= 2{,}5mA \end{aligned}$$

   La ecuación para la malla 1 es:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= R_A I_1 + R_C I_1 + R_C I_2 \\ \varepsilon &= \frac{2}{3} k\Omega 1mA + \frac{1}{3} k\Omega 2{,}5mA \\ \varepsilon &= 1{,}5V \\ V_A - V_C &= 1{,}5V \end{aligned}$$

5. *Calcular las intensidades de cada una de las mallas.* Como hemos visto, al operar con las ecuaciones del apartado anterior: $I_1 = 1mA$ e $I_2 = 2{,}5mA$.

Con los resultados anteriores ya tenemos todos los datos necesarios para calcular cualquier característica del circuito.

NOTA IMPORTANTE. Es importante hacer notar aquí que, al ser los circuitos de la figura 5 equivalentes, las diferencias de potencial entre los nudos A, B y C se mantienen y son independientes del circuito de la figura en el que se calculen. Da igual calcularlos en el de la derecha o en el de la izquierda. Lo mismo pasa con la intensidad que circula por la fuente de tensión. En cuanto a las resistencias, las intensidades y las diferencias de potencial entre los extremos de R_1, R_2 y R_3 son diferentes de las intensidades y las diferencias de potencial entre los extremos de R_A, R_B y R_C.

3.0.2. Transformación entre fuentes

Otra posibilidad para simplificar el circuito es utilizar la transformación entre fuentes. Tal y como están dispuestos los elementos en el circuito de la figura 1, la única fuente que podemos transformar es la de corriente. Esta transformación aparece representada en la figura 7 donde $V_2 = 1mA \cdot 1k\Omega = 1V$.

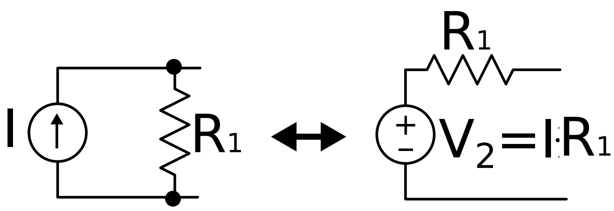

Figura 7: Transformación de la fuente de corriente.

En la figura 8 puede verse cómo queda el circuito de la figura 1 simplificado al utilizar la transformación de la figura 7.

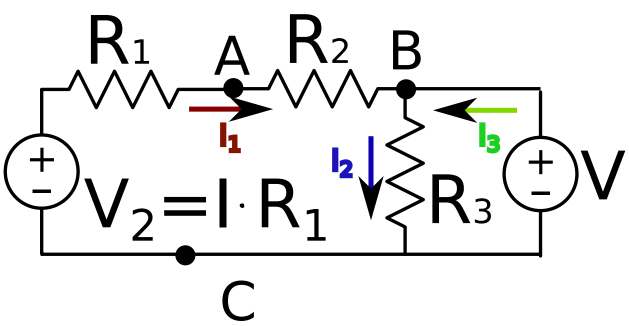

Figura 8: Circuito con la transformación de fuentes.

Si resolvemos el circuito de la figura 8 usando el método de nudos, tendremos que seguir los pasos detallados en la sección 2:

1. *Buscar el número de nudos esenciales (n) en el circuito.* En el circuito de la figura 8 hay sólo dos nudos esenciales (B y C). A no es un nudo

esencial porque al usar la transformación entre fuentes, pasa a unir sólo dos elementos.

2. *Escoger el nudo de referencia (0V, masa o tierra).* Escogemos C como nudo de referencia.

3. *Dibujar las intensidades en cada una de las ramas.* En la figura 8 pueden verse dibujadas cada una de las intensidades de las ramas que unen los nudos esenciales.

4. *Relacionar las intensidades de rama con los potenciales de los nudos esenciales.* Para relacionar las intensidades de rama con los potenciales de los nudos esenciales utilizaremos la ley de Ohm. Si aplicamos la ley de Ohm a la asociación en serie de R_1 y R_2:

$$I_1 = \frac{V_2 - V}{R_1 + R_2} = -0{,}5mA$$

Si aplicamos la ley de Ohm a R_3:

$$I_3 = \frac{V}{R_3} = 2mA$$

5. *Aplicar a cada nudo esencial la ley de Kirchhoff de nudos.* Como C se ha elegido como nudo referencia, sólo hay que aplicar la ley de Kirchhoff de nudos al nudo B:

$$I_1 + I_3 = I_2 \tag{19}$$

Despejando de la ecuación anterior, $I_3 = 2{,}5mA$.

6. *Calcular los potenciales de cada uno de los nudos.* Comenzaremos por la diferencia de potencial más sencilla: $V_B - V_C$. Esta diferencia de potencial es un dato del problema ya que entre los nudos B y C está sólo la fuente de tensión, de manera que la $V_B - V_C$ se corresponde con la fuerza electromotriz de dicha fuente, esto es, 2V.

Para calcular $V_A - V_B$ aplicamos la ley de Ohm a R_2 de manera que: $V_A - V_B = 0{,}5mA1k\Omega = 0{,}5V$.

¿Y cómo calculo la diferencia de potencial entre los extremos de la fuente de corriente? Teniendo en cuenta que esa fuente estaba colocada entre los puntos A y C en el circuito original, así que sólo tendré que calcular $V_A - V_C$ en el circuito simplificado. Para ir de A hasta C tengo varias posibilidades, algunas de ellas aparecen representadas en la figura 9 con los colores naranja, violeta y amarillo. Las diferencias de potencial calculadas por cada camino son:

$$\begin{aligned}
\text{Naranja} \rightarrow V_A - V_C &= 0{,}5mAR_1 + V_2 = 1{,}5V \\
\text{Morado} \rightarrow V_A - V_C &= -0{,}5mAR_2 + 2mAR_3 = 1{,}5V \\
\text{Amarillo} \rightarrow V_A - V_C &= -0{,}5mAR_2 + V = 1{,}5V
\end{aligned}$$

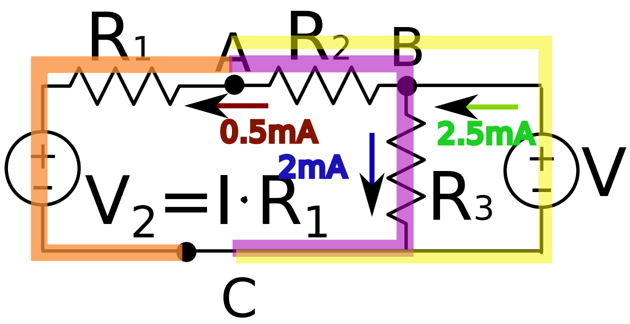

Figura 9: Cálculo de la diferencia de potencial entre los puntos A y C.

¿Y cómo sé si tengo que poner signo más o menos en los cálculos de la diferencias de potencial? Tendré que poner signo más o menos dependiendo del elemento en el que esté calculando la diferencia de potencial Por ejemplo, para el camino amarillo, he calculado $V_A - V_C$ como $V_A - V_B + V_B - V_C$.

- $V_A - V_B$ se ha calculado aplicando la ley de Ohm a R_2, como la intensidad que pasa por esta resistencia lo hace de B hasta A, V_B es mayor que V_A porque las cargas que forman la corriente siempre pierden potencial al pasar por una resistencia. Entonces, $V_A - V_B$ es negativa.
- $V_B - V_C$ se ha calculado usando que entre los puntos B y C hay una fuente de tensión. Como el polo positivo de esa fuente está en el punto B, V_B es mayor que V_C y por eso $V_B - V_C$ es positiva.

4. Método de superposición

A continuación resolveremos el mismo circuito utilizando el método de superposición. Como hemos visto en clase, a la hora de resolver circuitos utilizando superposición tendremos que resolver tantos circuitos como fuentes haya. En cada uno de estos circuitos sólo habrá una fuente funcionando. Para simular en un circuito que una fuente no está funcionando la sustituimos por:

1. un cable si la fuente es de tensión.
2. un circuito abierto si la fuente es de corriente.

Por tanto, como en el circuito de la figura 1 hay dos fuentes, tendremos que resolver dos circuitos. Estos circuitos aparecen representados en la figuras 10 y 11.

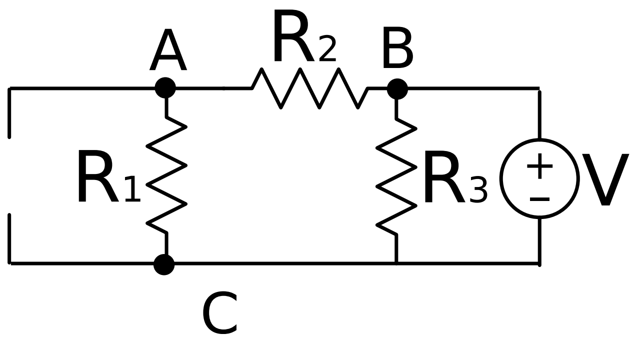

Figura 10: Circuito donde la fuente de corriente ha sido anulada.

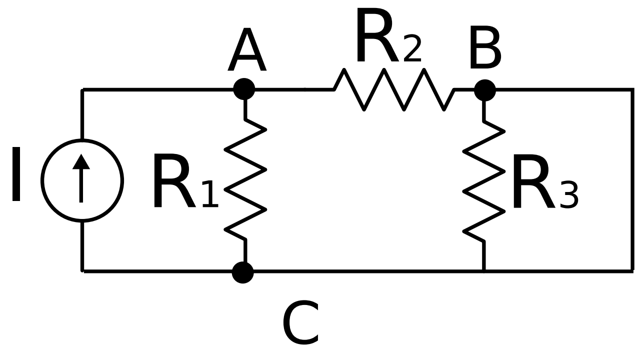

Figura 11: Circuito donde la fuente de tensión ha sido anulada.

4.1. Solución del subcircuito con la fuente de tensión.

Para solucionar el circuito de la figura 10 vamos a utilizar el método de nudos. Por tanto, seguiremos los pasos explicados en la sección dedicada a dicho método.

1. *Buscar el número de nudos esenciales (n) en el circuito.* En el circuito de la figura 10 hay dos nudos esenciales: B y C. A no es un nudo esencial porque al quitar la fuente de corriente, la rama donde se encontraba queda como un circuito abierto donde no va a pasar la corriente. Por tanto, A pasa a conectar sólo dos elementos.

2. *Escoger el nudo de referencia (0V, masa o tierra).* Escogemos C como nudo de referencia.

3. *Dibujar las intensidades en cada una de las ramas.* En la figura 12 pueden verse dibujadas cada una de las intensidades de las ramas.

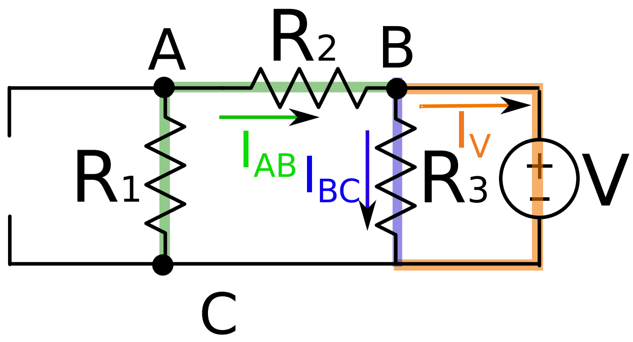

Figura 12: Circuito donde la fuente de corriente ha sido anulada. Las intensidades de rama aparecen representadas en distintos colores

4. *Relacionar las intensidades de rama con los potenciales de los nudos esenciales.* Para relacionar intensidades de rama y diferencia de potencial entre los nudos esenciales aplicamos la Ley de Ohm a las resistencias que hay entre los nudos esenciales. Hay dos caminos entre B y C, dos ramas cada una con su intensidad. En primer camino (pintado en verde) en la figura 12), la ley de Ohm se aplica a la asociación en serie de R_1 y R_2. En el segundo camino (pintado en azul en la figura 12), la ley de Ohm se aplica a la resistencia R_3:

$$V_C^1 - V_B^1 = I_{AB}^1(R_1 + R_2) \rightarrow I_{AB} = \frac{V_C^1 - V_B^1}{R_1^1 + R_2^1} = \frac{-V_B^1}{2k\Omega} \quad (20)$$

$$V_B^1 - V_C^1 = I_{BC}(R_3) \rightarrow I_{BC} = \frac{V_B^1}{R_3} = \frac{V_B^1}{1k\Omega} \quad (21)$$

I_V^1 no puede relacionarse con los potenciales de nudos aplicando la Ley de Ohm porque por la rama por la que circula no hay ninguna resistencia. Por tanto, se queda como incógnita del problema.

5. *Aplicar a cada nudo esencial la ley de Kirchhoff de nudos.* La aplicación de la ley de nudos al nudo B queda:

$$I_{AB} = I_{BC} + I_V^1 \rightarrow \frac{-V_B^1}{2k\Omega} = \frac{V_B^1}{1k\Omega} + I_V^1 \quad (22)$$

6. *Calcular los potenciales de cada uno de los nudos.* En este problema el potencial del nudo B es conocido ya que está fijado por la fuente de

tensión: $V_B^1 - V_C^1 = V_B^1 = 2V$. Por tanto, si sustituimos este valor en la ecuación resultante de la ley de nudos podemos despejar $I_V^1 = -3mA$. El resto de las magnitudes de interés son:

$$I_{AB} = \frac{-V_B^1}{(R_1 + R_2)} = -1mA \quad (23)$$

$$I_{BC} = \frac{V_B^1}{R_3} = 2mA \quad (24)$$

$$V_A^1 = I_{AB}R_1 = 1V \quad (25)$$

Por tanto, las soluciones para el primer subcircuito son:

$$I_{R_1}^1 = I_{AB} = -1mA \quad (26)$$

$$I_{R_2}^2 = I_{AB} = -1mA \quad (27)$$

$$I_{R_3}^1 = I_{BC} = 2mA \quad (28)$$

$$I_V^1 = -3mA \quad (29)$$

$$V_A^1 = I_{AB}R_1 = 1V \quad (30)$$

$$V_B^1 = 2V \quad (31)$$

$$V_C^1 = 0V \quad (32)$$

$$V_A^1 - V_B^1 = -1V \quad (33)$$

$$V_A^1 - V_C^1 = 1V \quad (34)$$

$$V_B^1 - V_C^1 = 2V \quad (35)$$

donde se ha usado el superíndice 1 en todas las magnitudes para indicar que son las soluciones correspondientes al primer subcircuito.

4.2. Solución del subcircuito con la fuente de corriente.

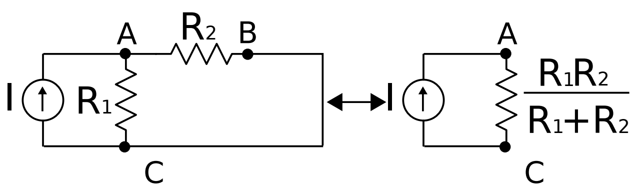

Figura 13: Circuito donde la fuente de tensión ha sido anulada. Izquierda: circuito original. Derecha: circuito simplificado asociando resistencias.

Para solucionar el circuito de la figura 11 vamos a utilizar el método de simplificación. En la figura 13 aparece a la izquierda el circuito original y a la derecha el circuito simplificado donde se han asociado R_1 y R_2 en paralelo. Si comparamos el circuito de la figura 11 con el de la izquierda de la figura 13, podemos ver que R_3 ha desaparecido.

¿Por qué ha desaparecido R_3? Porque por ella no pasa intensidad de corriente ya que está en paralelo con un cable. La corriente eléctrica al llegar al nudo B se irá completamente por dicho cable ya que a través de él no encuentra resistencia, oposición a su paso.

Empezamos trabajando con el circuito simplificado (derecha figura 13). Este circuito tiene una fuente de corriente y una resistencia en serie con la misma, de manera que la diferencia de potencial entre los extremos de la fuente (o entre los extremos de la resistencia equivalente $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$) se puede calcular aplicando la ley de Ohm a la asociación de resistencias:

$$V_A^2 - V_C^2 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}I = 0{,}5V \tag{36}$$

Una vez calculada esa diferencia de potencial, ya pueden calcularse las intensidades que circulan por las resistencias R_1 y R_2 aplicando la ley de Ohm a cada una de ellas:

$$I_{R_1}^2 = \frac{V_A^2 - V_C^2}{R_1} = 0{,}5mA \tag{37}$$

$$I_{R_2}^2 = \frac{V_A^2 - V_C^2}{R_2} = 0{,}5mA \tag{38}$$

Por tanto, las soluciones para el segundo subcircuito son:

$$I_{R_1}^2 = I_{AB} = 0{,}5mA \tag{39}$$

$$I_{R_2}^2 = I_{AB} = 0{,}5mA \tag{40}$$

$$I_{R_3}^2 = I_{BC} = 0mA \tag{41}$$

$$I_V^2 = I_{AB} = 0{,}5mA \tag{42}$$

$$V_A^2 - V_B^2 = 0{,}5V \tag{43}$$

$$V_A^2 - V_C^2 = 0{,}5V \tag{44}$$

$$V_B^2 - V_C^2 = 0V \tag{45}$$

donde se ha usado el superíndice 2 para indicar que son las soluciones correspondientes al segundo subcircuito.

4.3. Solución del circuito aplicando el Principio de Superposición.

Para calcular la solución al circuito total aplicamos el Principio de Superposición que dice que cualquier magnitud se calcula como la suma de las magnitudes obtenidas como soluciones de cada subcircuito:

$$\begin{aligned}
I_{R_1} &= I_{R1}^2 - I_{R1}^1 = 1{,}5mA && (46)\\
I_{R_2} &= I_{R2}^2 - I_{R2}^1 = 0{,}5mA && (47)\\
I_{R_3} &= I_{R3}^2 - I_{R3}^1 = 2mA && (48)\\
I_V &= I_V^2 - I_V^1 = 2{,}5mA && (49)\\
V_A - V_B &= V_A^1 - V_B^1 + V_A^2 - V_B^2 = -1V + 0{,}5V = -0{,}5V && (50)\\
V_A - V_C &= V_A^1 - V_C^1 + V_A^2 - V_C^2 = 1V + 0{,}5V = 1{,}5V && (51)\\
V_B - V_C &= V_B^1 - V_C^1 + V_B^2 - V_C^2 = 2V + 0V = 2V && (52)
\end{aligned}$$

Si el Principio de Superposición dice que hay que sumar las magnitudes, ¿por qué las intensidades se restan? Las intensidades se restan porque tienen sentidos contrarios. Por ejemplo, si nos fijamos en la figura 12, I_{R1}^1 va desde C hasta A mientras que si nos fijamos en la figura 13, la intensidad va desde A hasta C. Es por esto que para calcular la intensidad total (que se ha supuesto de A hasta C), I_{R1}^2 se ha puesto positiva y I_{R1}^1 negativa. Para no equivocarse y resolver correctamente, se recomienda pintar siempre los resultados. En la figura 14 se muestran las intensidades calculadas en el subcircuito 1 (en azul) y en el 2 (en rojo). Esta figura los valores de las intensidades se han puesto positivos, por tanto, aquellas intensidades con valores numéricos negativos se han cambiado de sentido.

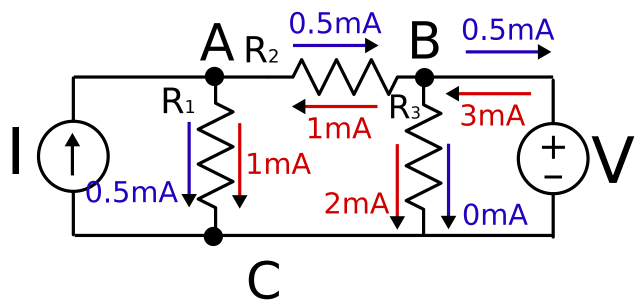

Figura 14: Circuito total. En rojo se representan los resultados del primer subcircuito y en azul los del segundo. Aquellas intensidades con valores numéricos negativos se han cambiado de sentido y se han puestos positivos.