Álgebra I

Tema 1

1.2.- $\neg A = A \uparrow A$

$(A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B) = A \wedge B$

$(\cancel{(B \uparrow B)} \uparrow A)$

$\underbrace{((B \uparrow B) \uparrow (A \uparrow A))} \uparrow ((B \uparrow B) \uparrow (A \uparrow A)) = \overline{B} \wedge \overline{A} =$

$\neg(\neg A \wedge \neg B) \cancel{\Rightarrow} = C$

$\cancel{a \in C}$ $\quad a \notin$ $\quad a \in C$ $\quad a \in A \vee a \in B$ $\quad a \in A \cup B$

Relación de equivalencia: $\eqsim \subseteq S \times S$

$(a,b) \in \eqsim \Longleftrightarrow a \eqsim b$

3 $\begin{cases} \text{- Reflexiva: } \forall a \in S \quad a \eqsim a \\ \text{- Simétrica: } \forall a,b \in S \quad a \eqsim b \Longleftrightarrow b \eqsim a \\ \text{- Transitiva } \forall a,b,c \in S \quad \left.\begin{matrix} a \eqsim b \\ b \eqsim c \end{matrix}\right\} a \eqsim c \end{cases}$

$f: S \longrightarrow T \qquad \exists b: S/\sim_f \xrightarrow{\cong} Im(f)$

$(a,b) \in \sim_f \Rightarrow f(a) = f(b)$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & T \\ S/\sim_f \arrow[r, "\cong", "b"'] & Im(f) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Relación de orden $\qquad \boxed{R = \leq}$

3 $\begin{cases} \text{- Reflexiva } xRx \\ \text{- Antisimetrica } \left\{\begin{matrix} xRy \\ yRx \end{matrix}\right. \Longrightarrow x = y \\ \text{- Transitiva } \left\{\begin{matrix} xRy \\ yRz \end{matrix}\right. \Longrightarrow xRz \end{cases}$

1.31.- i) $x \sim y \iff E(+\sqrt{x}) = E(+\sqrt{y})$

Deberá verificar:

- Prop. ~~Simétrica~~ Reflexiva: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \sim x \Rightarrow E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{x})$.
- Prop. Simétrica: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y \iff y \sim x$

$$E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{y}) \iff E(\sqrt{y}) = E(\sqrt{x})$$

- Prop. Transitiva $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad \left.\begin{matrix} x \sim y \\ y \sim z \end{matrix}\right\} x \sim z$

ii) $[1] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{1}) = 1\}$

$E(\sqrt{2}) = 1 \qquad E(\sqrt{3}) = 1 \quad E(\sqrt{4}) = 2$

Hasta $x = 4$, $\forall x \in \mathbb{R} \quad x < 4 \quad E(\sqrt{x}) = 1$

$\bar{1} = [1] = [1, 4) = [1, 4[$

$2 \in [1] \Longrightarrow [2] = \bar{2} = \bar{1}$

$[5] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{5}) = 2\}$

El primero será el 4 como hemos comprobado antes, 5 por supuesto pertenece. ~~El últim~~ ~~mayor real que~~ e

$3^2 = 9$ luego $E(\sqrt{9}) = 3 \Longrightarrow 9$ es el primer número el cual cumple que $f(9) = 3$

$\bar{5} = [4, 9[$ //

Hasta aquí hecho en $\mathbb{R}$

En $\mathbb{Z}$: $\bar{1} = \{1, 2, 3\}$ $\bar{2} = \bar{1}$ $\bar{5} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

Álgebra I

•) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$f(z) = (z, 0)$ si $z \geq 0$ (falta el 0, añado $\geq$ en $z \geq 0$)

$f(z) = (0, -z)$ si $z < 0$

$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$g(a,b) = 2^a 3^b$

1.) $\mathrm{Im}(g \circ f)$

$g(f(x))$ $\forall x \in \mathbb{Z}$

Si $x \geq 0 \Longrightarrow f(x) = (x, 0) \Longrightarrow g(f(x)) = 2^x \cancel{3^0}^{1} = 2^x$

$\forall x \in \mathbb{Z}_{x \geq 0}$ $\cancel{g \circ f(x)}$ $\mathrm{Im}(g \circ f) = \{2^x \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} \cdot \{0\}\}$

Si $x < 0 \Longrightarrow f(x) = (0, -x) \Longrightarrow g(f(x)) = 2^0 3^{-x} = 3^{-x}$

$-x \in \mathbb{N}$

$\forall x \in \mathbb{Z}_{x<0}$ $\mathrm{Im}(g \circ f) = \{3^x \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N}\}$

Luego, $\cancel{g \circ f}$ $\mathrm{Im}(g \circ f) = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n = 3^x \vee n = 2^x \;(\forall x \in \mathbb{N})\}$ //

2) $g \circ f$ inyectiva?

$\forall x, y \in \cancel{\mathbb{N}}\ \mathbb{Z}$ $x \neq y$

Supongamos $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ $\cancel{\Longrightarrow}$

- Si $x \geq 0$ $y \geq 0 \Longrightarrow g(x, 0) = g(y, 0)$

$2^x = 2^y \Longrightarrow x = y$

Contradicción

$- Si \quad x < 0 \quad y < 0 \Longrightarrow g(0,-x) = g(0,-y)$

$$3^{-x} = 3^{-y}$$

$$-x = -y \Longrightarrow x = y$$

$- Si \quad x \geq 0 \quad y < 0 \Longrightarrow g(x,0) = g(0,-y)$

$$2^{x} = 3^{-y}$$

$$\log_2(2^x) = \log_2(3^{-y})$$

$$x = -y \log_2(3) \notin \mathbb{N}$$

Por lo que si $g \circ f(x) = g \circ f(y) \Longrightarrow x = y$

Es inyectiva

- $f_*(\{4,6,9,10\}) = \{(4,0),(6,0),(9,0),(10,0)\}$

- $f^*(\{(0,0),(2,2),(3,1)\})$

  Solo tendrá sentido calcular $f^{-1}(0,0)$ ya que $(2,2),(3,1) \notin Im(f)$

Álgebra I

1- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Por recursividad:

- Para $n=0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0(1)}{2} = 0$ ☑
- ~~Suponemos en~~ En $n=1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ ☑
- Suponemos que es valido para n ¿n+1?

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} ??$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$ ☑

Luego esto se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Por recursividad:

- $n=0$ $\sum_{i=1}^{n=0} i^3 = 0 = \left(\frac{0(1)}{2}\right)^2 = 0$ ☑
- $n=1$ $\sum i^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$ ☑
- Suponiendo que es verdadero en n ¿n+1?

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

$$(n+1)^3 + \sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^3 + \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \cancel{(n+1)[\ ]}$$

$$(n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{2^2} = \frac{n^2(n+1)^5}{2^2}$$

$$(n+1)^3+\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=(n+1)^3+\frac{n^2(n+1)^2}{2^2}=\frac{n^2(n+1)^2+2^2(n+1)^3}{2^2}=$$

$$=\frac{(n+1)^2(n^2+2^2(n+1))}{2^2}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{2^2}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2}=$$

$$=\left[\frac{(n+1)^{\cancel{2}}(n+2)^{\cancel{2}}}{2}\right]^2 //$$