Espacio dual

viernes, 21 de enero de 2022 9:48

Un cuerpo conmutativo K es un esp. vectorial

Siendo V un esp. vectorial sobre K:

$$f : V \longrightarrow K = \text{forma lineal}$$

Al conjunto $\{f : V \longrightarrow K \,/\, f \text{ lineal}\} = V^*$ espacio vectorial dual de V

$$V^* = Hom_K(V, K) \qquad dim_K(V) = n \Longrightarrow dim_K(V^*) = n$$

Podemos suponer que $B_K = \{1\}$. Si B es base de V

$$M(f; \{1\} \leftarrow B) := M(f; B)$$

Bases duales

$B = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$ de V

$B^* = \{\ell_1, \ell_2 \dots \ell_n\}$ de V^*

B^* base dual de B si $\forall i \in \{1, 2 \dots n\}$ se verifica que $\ell_i(v_i) = 1$

$\ell_i(v_j) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2 \dots n\} \; j \neq i$

1ª propiedad de las bases duales

B^* base dual de B.

$\forall \ell \in V^*$ los elem. de su matriz asociada en la base B coinciden con sus coordenadas en la base B^*

Proposición: $\forall B$ de V $\exists B^*$ de V^* tq B^* dual de B

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$ $B = \{(1, -1, 1), (1, 2, -1), (-1, 1, 0)\}$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$ $B = \{(1,-1,1), (1,2,-1), (-1,1,0)\}$

¿B^*?

Consideremos $B_u = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

$$B_u^* = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\} \quad tq:$$

$$\ell_1(x_1, x_2, x_3) = x_1$$

$$\ell_2(x_1, x_2, x_3) = x_2$$

$$\ell_3(x_1, x_2, x_3) = x_3$$

Consideremos también $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ base dual de B:

- $\varphi_1 = a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2 + a_3 \ell_3$

① $\varphi_1(1,-1,1) = 1 = (a_1\ell_1 + a_2\ell_2 + a_3\ell_3)(1,-1,1)$

$$1 = a_1 - a_2 + a_3$$

② $\varphi_1(1,2,-1) = 0 = a_1 + 2a_2 - a_3$

③ $\varphi_1(-1,1,0) = 0 = -a_1 + a_2$

Con estas ecuaciones podremos obtener a_1, a_2 y a_3:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = 1 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_2 = \frac{1}{3} \\ a_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \varphi_1 = \tfrac{1}{3}\ell_1 + \tfrac{1}{3}\ell_2 + \ell_3$$

$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi_1(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + x_3$

Repetimos para obtener φ_2 y φ_3

Resumen: $$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ formas lineales sobre $\mathbb{R}^3$ dadas por:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 \end{cases}$$

$\to \overline{B}$ de $(\mathbb{R}^3)^*$ $\qquad$ ¿B tq $\overline{B} = B^*$?

$\quad \psi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1$

$\hookrightarrow \overline{B}$ de $(\mathbb{R}^3)^*$ $\qquad$ ¿B tq $\overline{B} = B^*$?

$\overline{B}$ como coordenadas de B_u^*

- $\psi_1 = (1, 2, 2)$
- $\psi_2 = (1, -1, 0)$ $\Longrightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ L.I.
- $\psi_3 = (1, 0, 0)$

Como son L.I $\Longrightarrow rg(A) = 3 \Longrightarrow$ Base de $(\mathbb{R}^3)^*$

$B = \{(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = I^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{cases} x = (0, 0, \frac{1}{2}) \\ y = (0, -1, 1) \\ z = (1, 1, -3/2) \end{cases}\right\} B = \{x, y, z\}$$

2ª propiedad de las bases duales

$B^* = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ base dual de B

$x \in V \quad x = (x_1, x_2, x_3 \dots x_n)_B \quad x_i = e_i(x) \ \forall i \in \{1, 2 \dots n\}$

Teorema de Reflexividad

V es un e.v. sobre K $\dim_K(V) = n \Longrightarrow \dim_K(V^*) = n$

Espacio bidual de V $((V^*)^*)$ tendrá $\dim_K = n$

isomorfos

isomorfismo

$\Phi : V \longrightarrow (V^*)^*$ tq $\Phi(v) = \Phi_v : V^* \longrightarrow K$ tq $\forall e \in V^*$

$\Phi_v(e) = e(v)$

Esto permite considerar $V \equiv (V^*)^*$ mismo esp. vectorial

Esto permite considerar $V \equiv (V^*)^*$ mismo esp. vectorial

$$v \equiv \Phi_v$$

Anulador de un subespacio

Def. $V(K)$ es e.v y $S \subseteq V$. Anulador de S:

$$an(S) = \{ e \in V^* / e(v) = 0 \ \forall v \in S \}$$

Propiedades

- $an(S)$ subespacio vectorial de V^*
- $an(S) = an(\mathcal{L}(S))$

Nos permite calcular el anulador de todo un e.v. solo calculando el de su base

Ejemplo:

En $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_3 = 0,\ x_2 + 2x_4 = 0\}$

¿ $an(\mathcal{U})$?

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 = \lambda \Longrightarrow x_3 = -\lambda \\ x_2 + 2x_4 = 0 \Longrightarrow x_4 = \mu \Longrightarrow x_2 = -2\mu \end{cases} \Longrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda(1,0,-1,0) + \mu(0,-2,0,1)$$

$\mathcal{U} = \mathcal{L}(\{(1,0,-1,0),(0,-2,0,1)\})$

$\psi \in an(\mathcal{U}) \quad \psi(1,0,-1,0) = \psi(0,-2,0,1) = 0$

$\psi = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 - a_3 = 0 & -2a_2 + a_4 = 0 \\ a_1 = \lambda \Rightarrow a_3 = \lambda & a_2 = \mu \quad a_4 = 2\mu \end{array}\right\} \psi = \lambda e_1 + \mu e_2 + \lambda e_3 + \mu 2 e_4$$

$\forall \psi \in an(S) \quad \psi = \lambda(1,0,1,0)_{B_{\mathcal{U}}^*} + \mu(0,1,0,2)_{B_{\mathcal{U}}^*}$

Luego $an(S) = \mathcal{L}(\{(e_1 + e_3), (e_2 + 2e_4)\})$

Aplicación lineal traspuesta

V y V' e.v. $\quad f: V \longrightarrow V'$

$\left.\begin{array}{l} B \text{ de } V \\ B' \text{ de } V' \end{array}\right\} M(f; B' \leftarrow B) = A$

Si $e' \in (V')^* \Longrightarrow V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{e'} \mathbb{K}$

Definimos $f^t: (V')^* \longrightarrow V^*$

$f^t(e') = e' \circ f \;\; \forall e' \in (V')^*$

- f^t aplicación lineal
- $M(f^t; B^* \leftarrow (B')^*) = A^t$