Espacios Vectoriales

lunes, 25 de octubre de 2021 17:27

K : cuerpo conmutativo $\Longrightarrow$ Espacio vectorial sobre el cuerpo K
$V \neq \emptyset$

Definimos:

1) Ley de composición interna $+ : V \times V \to V$ $\forall u, v \in V$ $+(u,v) = u+v$
   $\hookrightarrow (V, +)$ = cuerpo abeliano
   - Elem. neutro = 0
   - $\forall u \in V \;\; \exists (-u)$

2) Ley de composición externa (prod. por escalares)
   - $K \times V \longrightarrow V$
   - $(\alpha, v) = \alpha \cdot v$

   $\hookrightarrow$ Verifica:
   i) Distributiva $\forall \alpha, \beta \in K \;\; \forall u \in V \;\; (\alpha+\beta)\cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
   $\forall \alpha \in K \;\; \forall u, v \in V \;\; \alpha \cdot (u+v) = \alpha u + \alpha v$
   ii) Pseudoasociativa
   iii) Modular: $\forall u \in V \;\; 1 \cdot u = u$

Lo notaremos $V(K)$. A los elementos de K los llamaremos escalares y a los de V vectores

Ejemplos.

① $V = \{0\}$

② $M_{m\times n}(K)$ espacio vectorial sobre K

③ $M_{1\times n}(K) \equiv K^n$
$\forall n \geq 1$

④ $K[x] = \{p(x)\}$ Polinomio

⑤ $\mathbb{C}$ espacio vectorial complejo y real también
$\mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$(r, z) \longrightarrow r \cdot z$

Propiedades Sea $V(K)$ un espacio vectorial

1) $0 \cdot u = 0 \;\; \forall u \in V$

$0 \cdot u = (0+0)u = 0 \cdot u + 0 \cdot u$. Sea $-(0\cdot u)$ el op$(0 \cdot u)$

$0 \cdot u + (-(0\cdot u)) = \underline{0} = 0 \cdot u + 0 \cdot u + (-(0 \cdot u)) = \underline{0 \cdot u}$

$0 = 0 \cdot u$

2) $\forall \alpha \in K \;\; \alpha \cdot 0 = 0$

Demos. análoga

3) Si $\alpha \cdot u = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ ó $u = 0$

Demostración. Si $\alpha = 0$, se cumple, sino $\exists \alpha^{-1} \in K \Longrightarrow$ $\alpha^{-1}(\alpha \cdot u) = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0$
$(\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot u = 1 \cdot u = 0 \Longrightarrow \boxed{u = 0}$

4) $(-\alpha)\cdot u = \alpha\cdot(-u) = -(\alpha\cdot u)$

$(\alpha + (-\alpha))\cdot u = 0\cdot u = 0$

$\parallel$

$\alpha u + (-\alpha\cdot u)$