GEOMETRÍA I

Ejercicios resueltos 1

1. Demostrar, a partir de propiedades elementales de sistemas de generadores y conjuntos linealmente independientes, el siguiente caso particular del Teorema de Steinitz:

   Si un e.v. $V(K)$ admite un sistema de generadores con tres vectores $S = \{w_1, w_2, w_3\}$, entonces no puede contener un conjunto con cuatro vectores $L = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subset V$ que sea linealmente independiente.

2. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Sea $V(K)$ un e.v. de dimensión $n \in \mathbb{N}$, finitamente generado, B una base ordenada suya y U_1, U_2 dos subespacios vectoriales cada uno de ellos determinado por un sistema de m ecuaciones implícitas (el mismo número m para U_1 y U_2). Si $m > n/2$ entonces la suma de los subespacios U_1 y U_2 no puede ser una suma directa.

   b) Todo sistema de generadores de $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

3. En el espacio vectorial real $S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ obtenido como producto de las matrices simétricas 2x2 por los polinomios de grado ≤ 1, se considera el subconjunto:

$$U = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, p(x) \right) : a_{11} + p(1) = 0 \right\}$$

   Demostrar que U es un subespacio vectorial de $S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$, calcular una base ordenada B_U de U y hallar, en el caso de que sea posible, las coordenadas en B_U de

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, 1 + x \right).$$

4. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales dependientes del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} U_\lambda = & \ \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \ \ 3x_1 - \lambda x_2 + 3x_4 = 0\} \\ W_\lambda = & \ L(\{(1, 1, \lambda, 1), (-1, 1, -2, 1)\}) \end{aligned}$$

   Calcular, para cada valor de λ, una base de $U_\lambda \cap W_\lambda$ y una base de $U_\lambda + W_\lambda$.

1.- Demostrar, a partir de propiedades elementales de sistemas de generadores y conjuntos linealmente independientes, el siguiente caso particular del Teorema de Steinitz:

Si un e.v. $V(K)$ admite un sistema de generadores con tres vectores $S = \{w_1, w_2, w_3\}$, entonces no puede contener un conjunto con cuatro vectores $L = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subset V$ que sea linealmente independiente.

Solución. En teoría está demostrado con detalle el teorema de Steinitz en general, por lo que basta con particularizar al caso pedido (simplificándose el procedimiento inductivo). No obstante, se detalla este caso a continuación.

Se va a realizar una demostración por reducción al absurdo. Concretamente, veremos que, en el caso de que tales S y L existieran, se pueden ir sustituyendo uno a uno (en tres pasos) los vectores de S por los tres primeros vectores de L, de modo que el nuevo conjunto obtenido en cada paso siga siendo un sistema de generadores. Esto es un absurdo porque entonces el conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$, obtenido en el último paso, sería un s.d.g. y u_4 se escribiría como combinación lineal de él (por lo que L no sería linealmente independiente).

Paso 1. Como S es un s.d.g., existen escalares $a_1, a_2, a_3 \in K$ tales que $u_1 = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3$. *Como L es l.i., $u_1 \neq 0$ y, por tanto, alguno de los escalares a_1, a_2, a_3 es distinto de 0. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $a_1 \neq 0$* (en caso contrario, bastaría con reordenar los elementos w_1, w_2, w_3 para que se verificara esa condición). El conjunto $S_1 := \{u_1, w_2, w_3\}$ es entonces un s.d.g., ya que

$$w_1 = a_1^{-1}(u_1 - a_2 w_2 - a_3 w_3) \in L(S_1)$$

(y, por tanto, $S \subset L(S_1)$, luego $L(S) \subset L(S_1)$ y $V = L(S_1)$).

Paso 2. Como S_1 es un s.d.g., existen escalares $b_1, b_2, b_3 \in K$ tales que $u_2 = b_1 u_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3$. *Como L es l.i., $u_2 \neq b_1 u_1$ y, por tanto, alguno de los escalares b_2, b_3 es distinto de 0. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $b_2 \neq 0$* (en caso contrario, bastaría con reordenar los elementos w_2, w_3 para que se verificara esa condición). El conjunto $S_2 := \{u_1, u_2, w_3\}$ es entonces un s.d.g., ya que

$$w_2 = b_2^{-1}(u_2 - b_1 u_1 - b_3 w_3) \in L(S_2)$$

(y, por tanto, $S_1 \subset L(S_2)$, luego $L(S_1) \subset L(S_2)$ y $V = L(S_2)$).

Paso 3. Como S_2 es un s.d.g., existen escalares $c_1, c_2, c_3 \in K$ tales que $u_3 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 w_3$. *Como L es l.i., $u_3 \neq c_1 u_1 + c_2 u_2$ y, por tanto, $c_3 \neq 0$.* El conjunto $S_3 := \{u_1, u_2, u_3\}$ es entonces un s.d.g., ya que

$$w_3 = c_3^{-1}(u_3 - c_1 u_1 - c_2 u_2) \in L(S_3)$$

(y, por tanto, $S_2 \subset L(S_3)$, luego $L(S_2) \subset L(S_3)$ y $V = L(S_3)$), obteniéndose así la contradicción requerida.

2. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. **Sea $V(K)$ un e.v. de dimensión $n \in \mathbb{N}$, finitamente generado, B una base ordenada suya y U_1, U_2 dos subespacios vectoriales cada uno de ellos determinado por un sistema de m ecuaciones implícitas (el mismo número m para U_1 y U_2). Si $m > n/2$ entonces la suma de los subespacios U_1 y U_2 no puede ser una suma directa.**

2. **Todo sistema de generadores de $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.**

Solución.

1. FALSA.

La dimensión de cada subspacio es $n-m$, por lo que esta dimensión es $< n/2$. En consecuencia, no hay ninguna obstrucción en las dimensiones de U_1 y U_2 para que la interseción de estos subespacios sea $\{0\}$, esto es, para que su suma sea directa.

De hecho, un contraejemplo válido es $U_1 = U_2 = 0$, pues este subespacio puede verse como la solución de de cualquier sistema de n ecuaciones lineales independientes (y, por tanto, de un sistema de $m = n > n/2$ ecuaciones implíticas), y trivialmente la suma de ambos es directa.

Un contraejemplo menos trivial es $V(K) = \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, tomando como subespacios dos rectas que sólo se intersequen en el origen, por ejemplo:

$$\begin{array}{lll} U_1 = L\{(1,0,0)\} & \text{(solución del sistema} & y=0, z=0), \\ U_2 = L\{(0,1,0)\} & \text{(solución del sistema} & x=0, z=0), \end{array}$$

pues, claramente, $U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0)\}$ y, por tanto, se sigue $U_1 \oplus U_2$.

Observación. Aun cuando la suma de U_1 y U_2 sea directa, se tendrá $\dim_k(U_1 \oplus U_2) = 2(n-m) = 2n - 2m < 2n - n = n$ por lo que nuestro e.v. V nunca puede ser igual a la suma de U_1 y U_2.

2. VERDADERA.

Sea S un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$. Esto quiere decir que cualquier $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ se escribe como una combinación lineal de elementos de S con coeficientes en $\mathbb{Q}$, esto es, existen vectores $w_1, \ldots, w_m \in S$ y escalares $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Q}$ tales que

$$v = a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m.$$

Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, la combinación lineal anterior también es una combinación lineal con coeficientes en $\mathbb{R}$. Por tanto, v también es una combinación lineal de elementos de S con coeficientes en $\mathbb{R}$, como se quería.

Observación. Es digno de mencionar que, mientras que $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ tiene dimensión 2, el e.v. $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$ no es finitamente generado (la demostración es completemente análoga a la ya conocida de que, aunque $\mathbb{R}(\mathbb{R})$ tiene dimensión 1, el e.v. $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ no es finitamente generado).

Por tanto, todo sistema de generadores S de $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$ tendrá infinitos elementos (y, desde luego, si se tomara un s.d.g de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, éste no tendría por qué serlo de $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$).

No obstante, esta propiedad de S no tiene relevancia en el argumento expuesto para la solución del ejercicio, el cual resulta general cuando se usan subcuerpos. Así, dado un espacio vectorial complejo $V(\mathbb{C})$, podemos considerar su e.v. real subyacente $V(\mathbb{R})$ (que verificará $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V$) y, dado $V(\mathbb{R})$, podemos considerar su e.v. racional subyacente $V(\mathbb{Q})$ (el cual, siempre que $V \neq \{0\}$, tendrá dimensión infinita). Por las mismas razones expuestas, todo s.d.g. de $V(\mathbb{Q})$ es un s.d.g. de $V(\mathbb{R})$, y todo s.d.g de $V(\mathbb{R})$ es un s.d.g. de $V(\mathbb{C})$.

3. En el espacio vectorial real $S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ obtenido como producto de las matrices simétricas 2x2 por los polinomios de grado ≤ 1, se considera el subconjunto:

$$U = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, p(x) \right) : a_{11} + p(1) = 0 \right\}$$

Demostrar que U es un subespacio vectorial de $S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$, calcular una base ordenada B_U de U y hallar, en el caso de que sea posible, las coordenadas en B_U de

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, 1 + x \right).$$

Solución. Como en todo e.v. producto, el elemento neutro de $S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ es el par formado por el neutro de cada uno de los espacios, esto es:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, p_0(x) := 0 + 0x \right).$$

Claramente, este vector pertenece a U (pues en este caso $a_{11} + p(1)$ es $0 + 0 = 0$) por lo que, en particular $U \neq \emptyset$. Usando la caracterización conocida de los subespacios vectoriales, sean $a, b \in K$ y sean

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, p(x) \right), \quad \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}, q(x) \right),$$

dos elementos de U, esto es, con

$$a_{11} + p(1) = 0, \qquad b_{11} + q(1) = 0.$$

Debemos comprobar que pertenece a U la combinación lineal:

$$\begin{aligned} & a \cdot \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, p(x) \right) + b \cdot \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}, q(x) \right) \\ = & \left(a \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, ap(x) \right) + \left(b \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}, bq(x) \right) \\ = & \left(\begin{pmatrix} aa_{11} + bb_{11} & aa_{12} + bb_{12} \\ aa_{12} + ab_{12} & aa_{12} + bb_{22} \end{pmatrix}, ap(x) + bq(x) \right), \end{aligned}$$

por lo que basta con tener en cuenta:

$$(aa_{11} + bb_{11}) + (ap(1) + bq(1)) = a\,(a_{11} + p(1)) + b\,(b_{11} + q(1)) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0.$$

Recordemos a continuación que una base ordenada de $S_2(\mathbb{R})$ es $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, y una de $\mathbb{R}_1[x]$ es $(1, x)$. Como en todo e.v. producto $V_1 \times V_2$, podemos construir una base suya sin más que considerar cada elemento v de la base del primer factor como el elemento $(v, 0)$ del producto, y cada elemento w de la base del segundo factor como el elemento $(0, w)$ del producto. Esto es, una base ordenada de $S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ será:

$$B = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x \right) \right)$$

(en particular, $\dim_{\mathbb{R}}(S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]) = \dim_{\mathbb{R}}(S_2(\mathbb{R})) +$ dim $\mathbb{R}_1[x] = 3 + 2 = 5$). Además, las coordenadas en B de cada $\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, p(x) = a_0 + a_1 x \right) \in S_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_1[x]$ son precisamente $(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_0, a_1)^t$ y U es el subespacio vectorial determinado por la única ecuación implícita:

$$a_{11} + a_0 + a_1 = 0$$

(esto serviría como demostración alternativa de que U es un subespacio vectorial). Solucionando esta ecuación tomando como parámetros a_{12}, a_{22}, a_0, a_1, se obtiene la base de U:

$$B_U = \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \right), \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x \right) \right).$$

Por último, el elemento del producto que se considera en el enunciado,

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, 1 + x \right)$$

verifica

$$a_{11} + p(1) = -2 + 1 + 1 = 0.$$

Por tanto, este vector pertenece a U, y tiene sentido calcular sus coordenadas en B_U. Una computación inmediata muestra:

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, 1 + x \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) + 3 \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \right) + \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 1 \right) + \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x \right).$$

Esto es, las coordenadas pedidas son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.- Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales dependientes del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rl} U_\lambda = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1+x_2+x_3=0, \ \ 3x_1-\lambda x_2+3x_4=0\} \\ W_\lambda = & L(\{(1,1,\lambda,1),(-1,1,-2,1)\}) \end{array}$$

Calcular, para cada valor de λ, una base de $U_\lambda \cap W_\lambda$ y una base de $U_\lambda + W_\lambda$.

Solución. Resulta inmediato comprobar que las dos ecuaciones que determinan U_λ son independientes. En efecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2 (cambiando el orden de las dos primeras columnas por el de las dos segundas, se tiene ya una forma escalonada), independientemente del valor de $\lambda \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\dim_{\mathbb{R}} U_\lambda = 4-2=2$. De hecho, es inmediato calcular una base suya tomando como incógnitas principales x_3 y x_4 (y, por tanto, x_1, x_2 como parámetros): $B_{U_\lambda} = \{(1,0,-1,-1),(0,3,-3,\lambda)\}$.

También es inmediato que el conjunto formado por los dos vectores que generan W_λ es linealmente independiente y, por tanto, una base de W_λ, que denotaremos B_{W_λ}, pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 2 & -2+\lambda & 2 \end{pmatrix}$$

que también tiene rango 2, independientemente del valor de $\lambda \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\dim_{\mathbb{R}} W_\lambda = 2$.

Usando la fórmula de Grassmann de las dimensiones, se sigue entonces:

$$\dim_R(U_\lambda + W_\lambda) = 4 - \dim_R(U_\lambda \cap W_\lambda) \qquad \text{y, por tanto:} \qquad U_\lambda \cap W_\lambda = \{0\} \Longleftrightarrow U_\lambda + W_\lambda = \mathbb{R}^4.$$

Para calcular $U_\lambda \cap W_\lambda$ basta con imponer que un vector genérico de W_λ, esto es, que se escribe

$$a(1,1,\lambda,1) + b(-1,1,-2,1)) = (a-b, a+b, \lambda a - 2b, a+b) \qquad \text{para} \qquad a,b \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

satisface las ecuaciones del sistema que define U_λ, esto es:

$$\left.\begin{array}{rll} 0 = & (a-b)+(a+b)+(\lambda a - 2b) & = (2+\lambda)a - 2b \\ 0 = & 3(a-b) - \lambda(a+b) + 3(a+b) & = (6-\lambda)a - \lambda b \end{array}\right\}$$

Se tienen así dos ecuaciones lineales en las incógnitas a, b (dependientes del parámetro λ), cuya independencia lineal queda determinada por el rango de la matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2+\lambda & -2 \\ 6-\lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Claramente, el rango de esta matriz es al menos 1 (pues su elemento $(1,2)$ es distinto de 0) y será 1 si y sólo si su determinante se anula, esto es,

$$0 = -\begin{vmatrix} 2+\lambda & -2 \\ 6-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 12,$$

lo cual equivale a decir que (tras hacer la transformación elemental $F_2 \leftrightarrow \lambda F_1 - 2F_2$ en la matriz original) se anula la segunda fila de la matriz $\begin{pmatrix} 2+\lambda & -2 \\ \lambda^2+4\lambda-12 & 0 \end{pmatrix}$. Puesto que las soluciones de la ecuación son $\lambda = 2, -6$ distinguimos los siguientes casos.

<u>*Caso* $\lambda \neq 2, \lambda \neq -6$.</u> Como el rango de la matriz del sistema es 2, su única solución es la trivial, esto es, $U_\lambda \cap W_\lambda = \{0\}$. Por tanto, la base de $U_\lambda \cap W_\lambda$ sería el conjunto vacío. Puesto que en este

caso $U_\lambda + W_\lambda = \mathbb{R}^4$, una base de la suma sería cualquier base de $\mathbb{R}^4$. Así, por ejemplo, la base usual B_u de $\mathbb{R}^4$ es una base de $U_\lambda + W_\lambda$.

Observación. Como en este caso se tiene la suma directa $U_\lambda \oplus W_\lambda$, la unión B de las bases ya obtenidas de U_λ y W_λ,

$$B = B_{U_\lambda} \cup B_{W_\lambda} = \{(1,0,-1,-1),(0,3,-3,\lambda),(1,1,\lambda,1),(-1,1,-2,1)\}$$

será una base de $U_\lambda + W_\lambda$ (y, por tanto, de $\mathbb{R}^4$).

Casos $\lambda = 2$ y $\lambda = -6$. Como el rango de la matriz del sistema es 1, para calcular $U_\lambda \cap W_\lambda$ basta con solucionar la primera de las dos ecuaciones, esto es, $b = (2+\lambda)a/2$. Tomando $a = 2$ y sustituyendo este valor (y, consistentemente, $b = 2+\lambda$) en (1) se obtiene la base

$$B_{U_\lambda \cap W_\lambda} = \{(-\lambda, 4+\lambda, -4, 4+\lambda)\}.$$

Para hallar una base de $U_\lambda + W_\lambda$ basta con ampliar $B_{U_\lambda \cap W_\lambda}$ por una parte a una base de U_λ (cualquiera de los dos vectores de B_{U_λ} es independiente de $(-\lambda, 4+\lambda, -4, 4+\lambda)$ y, por tanto, válido para este fin; escogeremos el primero, $(1,0,-1,-1)$) y, por otra, a una base de W_λ (cualquiera de los dos vectores de B_{W_λ} es independiente de $(-\lambda, 4+\lambda, -4, 4+\lambda)$ y, por tanto, válido para este fin; escogeremos el segundo, $(-1,1,-2,1)$) por lo que la base requerida es:

$$B_{U_\lambda + W_\lambda} = \{(-\lambda, 4+\lambda, -4, 4+\lambda),(1,0,-1,-1),(-1,1,-2,1)\}.$$

Explícitamente, para $\lambda = 2$:

$$B_{U_2 \cap W_2} = \{(-2,6,-4,6)\} \qquad B_{U_2 + W_2} = \{(-2,6,-4,6),(1,0,-1,-1),(-1,1,-2,1)\},$$

y para $\lambda = -6$:

$$B_{U_{-6} \cap W_{-6}} = \{(6,-2,-4,-2)\} \qquad B_{U_{-6} + W_{-6}} = \{(6,-2,-4,-2),(1,0,-1,-1),(-1,1,-2,1)\}.$$

(por supuesto, en ambos casos se podria simplificar la elección de $B_{U_\lambda \cap W_\lambda}$ dividiendo por 2, pero esto no es necesario.)

Observación. Otras formas de resolver el problema son:

(1) Para calcular $U_\lambda \cap W_\lambda$: hallar unas ecuaciones implícitas para W_λ (necesariamente, dos ecuaciones) y solucionar el SEL de 4 ecuaciones y 4 incógnitas obtenido uniendo las ecuaciones implícitas de U_λ y las de W_λ (discutiendo casos según los valores del parámetro λ).

(2) Calcular primero $U_\lambda + W_\lambda$, teniendo en cuenta que $B_{U_\lambda} \cup B_{W_\lambda}$, es un sistema de generadores de la suma con cuatro vectores, del cual se puede extraer una base (discutiendo el rango de la correspondiente matriz dependiente de λ). Una vez hecho esto, estudiar la intersección considerando sólo los valores de λ para los que se sabe que no es nula.

Estos procedimientos son válidos aunque más largos. No obstante, será aconsejable hacerlo también de estos modos más adelante, como ejercicio sobre el uso de los determinantes.

GEOMETRÍA I

Ejercicios resueltos 2

1. Sea $V(K)$ un e.v. y $H = \{w_1, \ldots, w_m\}$ un subconjunto de V. Demuéstrese:
   - H es linealmente independiente si y solo si para todo $v \in L(H)$ los escalares $a_1, \ldots, a_m \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^{m} a_i w_i$ están determinados de forma única.
   - H es un sistema de generadores si y sólo si para todo $v \in V$ el conjunto $H \cup \{v\}$ es un sistema de generadores.

2. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
   a) Sea V un espacio vectorial y U_1, U_2, U_3 tres subespacios suyos tales que $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = 0$. Entonces la suma de U_1 y $U_2 + U_3$ es una suma directa.
   b) Sea $V(K)$ un espacio vectorial, sea U un subespacio vectorial del que se conoce un sistema de generadores H_U y sea W otro subespacio vectorial del que se conocen las ecuaciones implícitas en una base B. Si las coordenadas en B de ninguno de los vectores de H_U satisfacen las ecuaciones implícitas de W entonces $U \cap W = \{0\}$.

3. En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{C})$, se considera el subespacio de sus matrices simétricas $S_2(\mathbb{C})$ y los conjuntos ordenados:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right), \quad B' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

   Se pide:
   - Justificar que B y B' son bases de $S_2(\mathbb{C})$.
   - Calcular la matriz $M(I, B' \leftarrow B)$ de cambio de base de B a B'.
   - Dada una matriz simétrica cualquiera $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{C})$, calcular sus coordenadas en B'.

4. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales dependientes de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Z = & \ \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 |\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \\ U_\lambda = & \ \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 |\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \ \ -2x_1 - x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 0\} \\ W_\mu = & \ L\{(-\mu, 1 + \mu, -2 - \mu, 1 + \mu), (-\mu, 2\mu, -3\mu, 2\mu)\} \end{aligned}$$

   Determinar para qué valores de λ y μ se verifica: $Z = U_\lambda \oplus W_\mu$.

   Determinar, para los valores de λ, μ en los que tenga sentido, una base B_{U_λ} de U_λ y una B_{W_μ} de W_μ de modo que $B_{U_\lambda} \cup B_{W_\mu}$ sea una base de Z.

1. Sea $V(K)$ un e.v. y $H = \{w_1, \ldots, w_m\}$ un subconjunto de V. Demuéstrese:

   - H es linealmente independiente si y solo si para todo $v \in L(H)$ los escalares $a_1, \ldots, a_m \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^m a_i w_i$ están determinados de forma única.
   - H es un sistema de generadores si y sólo si para todo $v \in V$ el conjunto $H \cup \{v\}$ es un sistema de generadores.

Primer apartado. Para demostrar la condición necesaria (implicación a la derecha) supongamos que un mismo vector $v \in L(H)$ se expresa de dos maneras como combinación lineal de H, esto es,

$$v = \sum_{i=1}^m a_i w_i = \sum_{i=1}^m b_i w_i$$

para ciertos escalares $a_i, b_i \in K, i = 1, \ldots, m$. Restando la última expresión y operando en el espacio vectorial se obtiene:

$$0 = \sum_{i=1}^m a_i w_i - \sum_{i=1}^m b_i w_i = \sum_{i=1}^m (a_i - b_i) w_i = (a_1 - b_1) w_1 + \cdots + (a_n - b_n) w_m.$$

Como el conjunto $H = \{w_1, \ldots, w_n\}$ es linealmente independiente por hipótesis, todos los coeficientes de esta combinación deben ser nulos. Así se tiene $a_i - b_i = 0$, esto es, $a_i = b_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$. En consecuencia, las dos expresiones de v como combinación lineal de H coinciden.

Para la condición suficiente, supongamos por el contrarrecíproco que H es linealmente dependiente. Entonces existen escalares $a_1, \ldots, a_m \in K$, no todos nulos tales que:

$$a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m = 0.$$

Como el vector 0 también se puede expresar como la combinación lineal

$$0\, w_1 + \cdots + 0\, w_m = 0,$$

se ha obtenido un vector $v \in V$ (el vector 0) que se expresa de dos formas distintas como combinación lineal de[1] H.

Segundo apartado. Para la condición necesaria, como $H \subset H \cup \{v\}$ se sabe que $L(H) \subset L(H \cup \{v\})$ (de hecho, cualquier combinación lineal $\sum_{i=1}^m a_i w_i \in L(H)$ puede verse como la combinación lineal $(\sum_{i=1}^m a_i w_i) + 0\, v$ de elementos de $H \cup \{v\}$), por lo que el resultado se sigue de que, por hipótesis, $L(H) = V$.

Para la condición suficiente, obsérvese que se parte de que $H \cup \{v\}$ es un sistema de generadores para cualquier vector $v \in V$, en particular, para $v = 0$. Por tanto, $H \cup \{0\}$ es un sistema de generadores y, como $0 \in L(H)$, se le puede suprimir de $H \cup \{0\}$ manteniéndose la propiedad de ser un sistema de generadores para H.[2]

[1] De hecho, no sólo el vector $v = 0$ verifica esta propiedad, sino también cualquier otro $v \in V$ (compruébese como ejercicio).

[2] De hecho, se podría haber tomado como v cualquier otro vector de $L(H)$ y el razonamiento se mantendría.

2. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   1. Sea V un espacio vectorial y U_1, U_2, U_3 tres subespacios suyos tales que $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = 0$. Entonces la suma de U_1 y $U_2 + U_3$ es una suma directa.
   2. Sea $V(K)$ un espacio vectorial, sea U un subespacio vectorial del que se conoce un sistema de generadores H_U y sea W otro subespacio vectorial del que se conocen las ecuaciones implícitas en una base B. Si las coordenadas en B de ninguno de los vectores de H_U satisfacen las ecuaciones implícitas de W entonces $U \cap W = \{0\}$.

1. FALSA. Contraejemplo:

Tómese en $\mathbb{R}^2$ los subespacios $U_1 := L\{(1,0)\}, U_2 := L\{(0,1)\}, U_3 := L\{(1,1)\}$. Claramente sus intersecciones dos a dos son todas iguales a $\{0\}$ pero $U_2 + U_3 = L\{(0,1),(1,1)\} = \mathbb{R}^2$, por lo que $U_1 \subset U_2 + U_3$ y la suma requerida no es directa.

2. FALSA. Contraejemplo:

Tómese en $V = \mathbb{R}^2$ como B la base usual B_u, y como subespacios:

- $U = \mathbb{R}^2$, con $H_U = B_u$.
- $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$.

Claramente, ninguno de los dos vectores de B_u satisface la ecuación implícita que define a W, pero $W \subset U$, por lo que $U \cap W = W \neq \{0\}$.

3. En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{C})$, se considera el subespacio de sus matrices simétricas $S_2(\mathbb{C})$ y los conjuntos ordenados:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right), \quad B' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Se pide:

- Justificar que B y B' son bases de $S_2(\mathbb{C})$.
- Calcular la matriz $M(I, B' \leftarrow B)$ de cambio de base de B a B'.
- Dada una matriz simétrica cualquiera $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{C})$, calcular sus coordenadas en B'.

Es conocido (y fácil de demostrar directamente) que $S_2(\mathbb{C})$ es un espacio vectorial de dimensión 3, siendo una base suya $B_u^s = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. En el caso de que B y B' sean bases, se tendría directamente:

$$M(I, B_u^s \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \qquad M(I, B_u^s \leftarrow B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El hecho de que B y B' son bases se justifica en el momento en que comprobemos que estas matrices tienen rango 3. Esto es inmediato para la primera (es escalonada sin ninguna fila idénticamente nula), mientras que para la segunda quedará demostrado si se puede calcular su matriz inversa[3]. Usando ya el procedimiento de Gauss-Jordan, ya el cálculo mediante determinantes y adjuntos, se obtiene explícitamente esta inversa, que es entonces igual a $M(I, B' \leftarrow B_u^s)$. Concretamente:

$$M(I, B' \leftarrow B_u^s) = M(I, B_u^s \leftarrow B')^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resulta inmediato entonces calcular $M(I, B' \leftarrow B) = M(I, B' \leftarrow B_u^s) \cdot M(I, B_u^s \leftarrow B)$, esto es:

$$\mathbf{M(I, B' \leftarrow B)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & -1/2 & i/2 \\ -1/2 & 1/2 & i/2 \end{pmatrix}$$

Para el último apartado, obsérvese que $A_{B_u^s} = (a, b, c)^t$ por lo que:

$$\mathbf{A_{B'}} = M(I, B' \leftarrow B_u^s) \cdot A_{B_u^s} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b-c)/2 \\ (a-b+c)/2 \\ (-a+b+c)/2 \end{pmatrix}.$$

---

[3]No obstante, se puede justificar directamente que B' es una base. P. ej., como $S_2(\mathbb{R})$ tiene dimensión 3 y es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{C})$, basta con demostrar que B' forma un conjunto linealmente independiente en $M_2(\mathbb{C})$. Para ello, es suficiente demostrar que tiene rango 3 la matriz cuyas filas son las coordenadas de los elementos de B' en la base usual de $M_2(\mathbb{C})$, esto es, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Esto es fácil haciendo transformaciones elementales para llegar a una matriz escalonada en la que ninguna fila es nula (permútense las filas para que la primera fila pase a ser la tercera, y réstensele las otras dos).

4. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales dependientes de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Z = & \ \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 |\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \\ U_\lambda = & \ \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 |\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \ \ -2x_1 - x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 0\} \\ W_\mu = & \ L\{(-\mu, 1+\mu, -2-\mu, 1+\mu), (-\mu, 2\mu, -3\mu, 2\mu)\} \end{aligned}$$

Determinar para qué valores de λ y μ se verifica: $Z = U_\lambda \oplus W_\mu$.

Determinar, para los valores de λ, μ en los que tenga sentido, una base B_{U_λ} de U_λ y una B_{W_μ} de W_μ de modo que $B_{U_\lambda} \cup B_{W_\mu}$ sea una base de Z.

La dimensión de Z es 3 (al ser solución de un SEL homogéneo de 4 incógnitas y una ecuación linealmente independiente), por lo que son condiciones *necesarias* para que se verifique la suma directa:
(a) $U_\lambda \subset Z$, $W_\mu \subset Z$
(b) $\dim U_\lambda + \dim W_\mu = 3$.[4]
Determinemos los valores de los parámetros para los que se verifica (a). La primera inclusión se verifica si toda solución de las ecuaciones de U_λ es también una solución de las ecuaciones de Z, esto es, si la ecuación que define Z es combinación lineal de las de U_λ. Claramente, las dos ecuaciones lineales que definen U_λ son independientes para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. De hecho,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6+\lambda & 9 \end{pmatrix} \tag{2}$$

que es escalonada con ninguna de sus filas idénticamente nulas. Por tanto, $U_\lambda \subset Z$ si y sólo si al añadir a la matriz anterior como última fila los coeficientes de la ecuación Z, se obtiene una matriz de rango 2. Como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6+\lambda & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6+\lambda & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 6+\lambda & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

el rango es 2 si y sólo si $\lambda = 0$. Es decir: $\mathbf{U_\lambda \subset Z \Leftrightarrow \lambda = 0}$.

Por otra parte, es inmediato comprobar que los dos generadores de W_μ satisfacen la ecuación que define Z (esto es: $-\mu+(1+\mu)+(-2-\mu)+(1+\mu) = 0$; $-\mu+2\mu-3\mu+2\mu = 0$). En consecuencia, esos dos generadores y, por tanto, todo el subespacio W_u generado por ellos están incluidos en Z. Es decir $\mathbf{W_\mu \subset Z}, \forall \mu \in \mathbb{R}$.

En resumen: **(a) se verifica si y sólo si $\lambda = 0$, sin ninguna restricción para μ.**

Determinemos los valores de λ, μ para los que se verifica (b). Como las dos ecuaciones que definen U_λ eran siempre independientes, $\mathbf{dim\ U_\lambda = 2}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$**.** Parea determinar la dimensión de W_μ veamos hasta cuántos vectores de su sistema de generadores pueden formar un conjunto linealmente independiente:

$$\begin{pmatrix} -\mu & 1+\mu & -2-\mu & 1+\mu \\ -\mu & 2\mu & -3\mu & 2\mu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\mu & 1+\mu & -2-\mu & 1+\mu \\ 0 & \mu-1 & 2-2\mu & \mu-1 \end{pmatrix}$$

Se distinguen entonces los siguientes casos. Para $\mu = 0$, el rango es 1 (la segunda fila es menos la primera). Para $\mu \neq 0$, el rango será 2 si algún elemento de la segunda fila es distinto de 0, y el rango será 1 en caso contrario. Como la segunda fila es nula si y sólo si $\mu = 1$, se tiene: **dim $\mathbf{W_\mu = 1}$, si $\mu \in \{\mathbf{0, 1}\}$ y dim $\mathbf{W_\mu = 2}$ en caso contrario.**

En resumen: **(b) se verifica si y sólo si $\mu \in \{0, 1\}$, sin ninguna restricción para λ.**

[4]Esta porque por la fórmula de Grassmann $\dim U_\lambda + \dim W_\mu = \dim(U_\lambda + W_\mu) + \dim (U_\lambda \cap W_\mu) = \dim Z + 0 = 3$.

Como basta con considerar el problema cuando (a) y (b) se verifican, se tomarán $\lambda = 0$ y $\mu = 0, 1$. Por la fórmula de Grassmann, basta con comprobar $U_\lambda \cap W_\mu = \{0\}$. En el caso $\mu = 0$ el vector $(0, 1, -2, 1)$, el cual genera $W_{\mu=0}$, satisface las dos ecuaciones implícitas que definen $U_{\lambda=0}$, por lo que la intersección no es nula. Sin embargo, para $\mu = 1$ el generador $(-1, 2, -3, 2)$ no genera esas ecuaciones, por lo que la intersección sólo puede ser $\{0\}$. Esto es:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U}_\lambda \oplus \mathbf{W}_\mu \Longleftrightarrow \lambda = \mathbf{0} \ \ \mathbf{y} \ \ \mu = 1.$$

Respecto al último punto, se obtendrá una base de Z como la unión de una de U_λ y una de W_μ si y sólo si $Z = U_\lambda \oplus W_\mu$, esto es, cuando $\lambda = 0, \mu = 1$. Para la base de $U_{\lambda=0}$, resolvemos el SEL que lo define. Tomando las matrices (2) con $\lambda = 0$ y realizando transformaciones elementales por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Así, podemos considerar las variables x_3, x_4 como parámetros, y se obtienen las soluciones

$$x_1 = x_3 + 2x_4, \qquad x_2 = -2x_3 - 3x_4 \qquad (x_3 = x_3, x_4 = x_4).$$

Las elecciones canónicas de los parámetros proporcionan entonces la base

$$\mathbf{B}_{\mathbf{U}_{\lambda=\mathbf{0}}} = \{(\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}), (\mathbf{2}, -\mathbf{3}, \mathbf{0}, \mathbf{1})\}.$$

Para calcular la base de $W_{\mu=1}$, el sistema de generadores que se obtuvo $\{(-1, 2, -3, 2)\}$ es trivialmente linealmente independiente, esto es:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{W}_{\mu=\mathbf{1}}} = \{(-\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{3}, \mathbf{2})\}.$$

GEOMETRÍA I

Ejercicios resueltos 3

1. Sea $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de un espacio vectorial $V(K)$, y sea $w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ un vector de V. Demostrar que el conjunto que se obtiene reemplazando en B el vector v_i (para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$) por w es una base si y sólo si $a_i \neq 0$.

2. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Sean U, U', U'' subespacios vectoriales de un mismo espacio vectorial $V(K)$ tales que $U \cap U' \cap U'' = \{0\}$. Si $v \in U + U' + U''$ entonces los vectores $u \in U, u' \in U', u'' \in U''$ tales que $v = u + u' + u''$ están unívocamente determinados.

   b) Si B es una base de un espacio vectorial complejo $V(\mathbb{C})$ entonces B también es un sistema de generadores del espacio vectorial racional subyacente $V(\mathbb{Q})$.

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x], n \geq 1$, de los polinomios con coeficientes reales de grado $\leq n$, se considera un polinomio $p(x)$ de grado n y el conjunto $B = \{p(x), p'(x), ..., p^{(n)}(x)\}$, formado por $p(x)$ y todas sus derivadas sucesivas hasta la de orden n-ésimo.

   a) Demostrar que B es una base de $\mathbb{R}_n[x]$.

   b) Para el caso particular $n = 3$ y $p(x) = x + x^3$, calcular las coordenadas en B de todos los polinomios de la base usual de $\mathbb{R}_3[x]$ y del polinomio $q(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

4. Se considera en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales definidos, para cada valor de los parámetros $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, por:

$$U_\lambda = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\, \lambda x + y + z + t = 0\} \qquad W_\mu = L(\{(1, \mu, 2, -1), (-1, -2, -\mu, 1)\}$$

   Calcular un subespacio suplementario de W_μ en el espacio vectorial U_λ para todos los valores de los parámetros λ, μ donde tenga sentido hacerlo.

SOLUCIONES

1. Sea $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de un espacio vectorial $V(K)$, y sea $w = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ un vector de V. Demostrar que el conjunto que se obtiene reemplazando en B el vector v_i (para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$) por w es una base si y sólo si $a_i \neq 0$.

Sea $B_i := (v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ el conjunto obtenido de B.

($\Rightarrow$) Supongamos por el contrarrecíproco que $a_i = 0$. Entonces w resulta ser $w = a_1v_1 + \ldots a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_nv_n$, esto es, una combinación lineal del resto de vectores de B_i. Por tanto, B_i no es linealmente independiente, y no puede ser una base.

($\Leftarrow$) Demostraremos que B_i es linealmente independiente y un sistema de generadores. Para lo primero, tomamos una combinación lineal arbitraria de sus elementos igualada a 0:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_{i-1}v_{i-1} + \lambda_i w + \lambda_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \lambda_n v_n = 0, \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K.$$

Sustituyendo w por su expresión y, a continuación, agrupando los coeficientes de los vectores (operando y usando las propiedades de e.v. de $V(K)$) se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_{i-1}v_{i-1} + \lambda_i\left(a_1v_1 + \ldots a_{i-1}v_{i-1} + a_iv_i + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_nv_n\right) + \lambda_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \lambda_n v_n \\ &= (\lambda_1 + a_1\lambda_i)v_1 + \cdots + (\lambda_{i-1} + a_{i-1}\lambda_i)v_{i-1} + a_i\lambda_i v_i + (\lambda_{i+1} + a_{i+1}\lambda_i)v_{i+1} + \cdots + (\lambda_n + a_n\lambda_i)v_n. \end{aligned}$$

Como el último miembro es una combinación lineal de los elementos de B, que es linealmente independiente, todos los coeficientes de esta combinación deben ser nulos, esto es:

$$\lambda_1 + a_1\lambda_i = 0,\ \ldots,\ \lambda_{i-1} + a_{i-1}\lambda_i = 0, \quad a_i\lambda_i = 0, \quad \lambda_{i+1} + a_{i+1}\lambda_i = 0,\ \ldots,\ \lambda_n + a_n\lambda_i = 0.$$

Al ser $a_i \neq 0$ por hipótesis, de la igualdad $a_i\lambda_i = 0$ se deduce $\lambda_i = 0$ y, sustituyendo este valor en el resto de igualdades, se obtiene $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, por lo que B_i es linealmente independiente.

Para demostrar que B_i es un sistema de generadores, de la expresión de w y de la hipótesis $a_i \neq 0$ se tiene:

$$v_i = -a_i^{-1}\left(-w + a_1v_1 + \ldots a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_nv_n\right),$$

esto es, $v_i \in L(B_i)$. Como para $j \neq i$ trivialmente $v_j \in L(B_i)$, se tiene $B \subset L(B_i)$. Por tanto, $L(B) \subset L(B_i)$, y como $L(B) = V$, se sigue que B_i es un sistema de generadores.

2. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Sean U, U', U'' subespacios vectoriales de un mismo espacio vectorial $V(K)$ tales que $U \cap U' \cap U'' = \{0\}$. Si $v \in U + U' + U''$ entonces los vectores $u \in U, u' \in U', u'' \in U''$ tales que $v = u + u' + u''$ están unívocamente determinados.

(b) Si B es una base de un espacio vectorial complejo $V(\mathbb{C})$ entonces B también es un sistema de generadores del espacio vectorial racional subyacente $V(\mathbb{Q})$.

Afirmación (a): FALSA. Contraejemplo: en $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ se toman $U = L(1,0), U' = L(0,1), U'' = L(1,1)$. Claramente, $U \cap U' \cap U'' = \{0\}$ y $\mathbb{R}^2 = U + U' + U''$. Sin embargo, cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como suma de vectores $u \in U, u' \in U', u'' \in U''$ de más de una manera. Por ejemplo:

$$(1,1) = (1,0) + (0,1) + (0,0) = (0,0) + (0,0) + (1,1).$$

Nota. Es de señalar que $U \cap U' \cap U'' = \{0\}$ *no* implica que U, U', U'' sean suma directa: para que ello ocurriera se debe cumplir $U \cap U' = \{0\}$ y $(U + U') \cap U'' = \{0\}$ (esto es, $U \oplus U' \oplus U''$ equivale a $U \oplus U'$ y $(U + U') \oplus U''$).

Afirmación (b): FALSA. Contraejemplo: en $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ el escalar $1 (= 1 + 0 \cdot i)$ es una base, esto es, podemos tomar $B = \{1\}$. Sin embargo, el subespacio que genera B en $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$ es sólo $\{r \cdot 1 : r \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{C}$, por lo que B no es un sistema de generadores de $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$.

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x], n \geq 1$, de los polinomios con coeficientes reales de grado $\leq n$, se considera un polinomio $p(x)$ de grado n y el conjunto $B = \{p(x), p'(x), ..., p^{(n)}(x)\}$, formado por $p(x)$ y todas sus derivadas sucesivas hasta la de orden n-ésimo.

(a) Demostrar que B es una base de $\mathbb{R}_n[x]$.

(a) Para el caso particular $n = 3$ y $p(x) = x + x^3$, calcular las coordenadas en B de todos los polinomios de la base usual de $\mathbb{R}_3[x]$ y del polinomio $q(x) = 1+x+x^2+x^3$.

(a) Puesto que se sabe que la dimensión de $\mathbb{R}_n[x]$ es $n+1$ y B contiene $n+1$ elementos, basta con demostrar que B es linealmente independiente. Para ello, observemos primero que si $p(x)$ tiene grado n, su monomio de mayor grado es $a_n x^n$ con $a_n \neq 0$. En consecuencia, $p'(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ y, en general, $p^{(k)}(x)$ es un polinomio de grado $n-k$, para todo[5] $k \in 1, \ldots, n$. Así, si escribimos la matriz que tiene por fila k-ésima las coordenadas del k-ésimo elemento de B en la base usual $B_u = \{1, x, \ldots, x.\}$ de $\mathbb{R}_n[x]$, se obtiene la matriz cuadrada $(n+1) \times (n+1)$:

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * & c_n \\ * & * & \cdots & * & c_{n-1} & 0 \\ * & * & \cdots & c_{n-2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & c_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde cada[6] $c_i \neq 0$. Claramente, el rango de esta matriz es el máximo, esto es, $n+1$, por lo que los vectores de B son linealmente independientes.

(b) Derivando $p(x)$, se tiene $B = (x + x^3, 1 + 3x^2, 6x, 6)$. Escribiendo las coordenadas de estos vectores en la base usual $B_u = \{1, x, x^2, x^3\}$ por columnas, se tiene la matriz de cambio de base:

$$M(I, B_u \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas de los elementos de B_u en la base B no son más que las columnas de la matriz $M(I, B \leftarrow B_u)$ inversa de la anterior. Podemos calcular esta inversa por el procedimiento de Gauss-Jordan, haciendo transformaciones elementales por filas como las siguientes:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & 0 & -1/18 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & 0 & -1/18 & 0 \end{array}\right)$$

[5] Si se quiere, esto se puede comprobar por inducción: para $n = 1$ es inmediato y, supuesto válido para n, si p tiene grado $n+1$ su monomio de mayor grado es $a_{n+1}x^{n+1}$ para algún $a_{n+1} \neq 0$; por tanto, el monomio de mayor grado para $p'(x)$ es $(n+1)a_{n+1}x^n$. Así, p' tiene grado n y basta con aplicarle la hipótesis de inducción.

[6] De hecho, se puede calcular explícitamente su valor $c_n = a_n$, $c_{n-1} = n \cdot a_n$, $c_{n-2} = n \cdot (n-1) \cdot a_n$, $\ldots$, $c_1 = n \cdot (n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot a_n$, $c_0 = n \cdot (n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n$, pero no nos interesan estos valores explícitos, sino sólo que no se anulan (por ser los coeficientes del monomio de mayor grado para cada uno de los polinomios considerados).

Haciendo como una última transformación elemental multiplicar la tercera fila se obtiene la matriz inversa, esto es:

$$M(I, B \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & -1/6 \\ 1/6 & 0 & -1/18 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se ha dicho, la k-ésima columna de esta matriz es igual a las coordenadas del $k-$ésimo vector de la base $B_u = (1, x, x^2, x^3)$ en la base B; explícitamente:

$$(1)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/6 \end{pmatrix} \qquad (x)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (x^2)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ -1/18 \end{pmatrix} \qquad (x^3)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que resuelve la primera parte de este apartado.

Finalmente, para calcular las coordenadas $(q(x))_B$ basta con usar:

$$(q(x))_B = M(I, B \leftarrow B_u) \cdot (q(x))_{B_u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & -1/6 \\ 1/6 & 0 & -1/18 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/9 \end{pmatrix},$$

esto es:

$$(q(x))_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/9 \end{pmatrix}.$$

4. Se considera en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales definidos, para cada valor de los parámetros $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, por:

$$U_\lambda = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\, \lambda x + y + z + t = 0\} \qquad W_\mu = L(\{(1, \mu, 2, -1), (-1, -2, -\mu, 1)\}$$

Calcular un subespacio suplementario de W_μ en el espacio vectorial U_λ para todos los valores de los parámetros λ, μ donde tenga sentido hacerlo.

Para que el cálculo del subespacio complementario tenga sentido, debe ocurrir $W_\mu \subset U_\lambda$. Esto equivale a decir que los dos generadores de W_μ satisfagan la ecuación implícita que define U_λ, esto es:

$$\lambda + \mu + 2 - 1 = 0, \qquad -\lambda + -2 - \mu + 1 = 0.$$

Claramente, ambas ecuaciones son dependientes y equivalen a:

$$\lambda = -\mu - 1$$

por lo que supondremos siempre que se satisface esta relación.

Para calcular el subespacio pedido, calcularemos una base de W_μ y la ampliaremos hasta una de U_λ, con $\lambda = -\mu - 1$. Estudiaremos previamente U_λ, puesto que es ahí donde se llevará a cabo la ampliación. Como está definido por una única ecuación implícita (trivialmente independiente) con cuatro incógnitas, tendrá siempre dimensión 3 $(= 4 - 1)$. Para calcular una base suya, basta con despejar la coordenada t en esa ecuación implícita, obteniéndose para $\lambda = -\mu - 1$:

$$B_{U_{\lambda=-\mu-1}} = \{(1, 0, 0, \mu + 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}.$$

Para calcular una base de W_μ realizamos transformaciones elementales por filas en la matriz formada por los generadores de este espacio:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -\mu & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \mu & 2 & -1 \\ 0 & \mu - 2 & 2 - \mu & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente, esta matriz tiene rango 2 para $\mu \neq 2$ y rango 1 para $\mu = 2$. Estudiemos cada caso.

Caso $\mu \neq 2$. Una base de W_μ es[7]:

$$B_{W_\mu} = \{(1, \mu, 2, -1), (0, \mu - 2, 2 - \mu, 0)\}.$$

Para ampliarla a una base de $U_{\lambda=-\mu-1}$ escogemos entre los vectores de la base $B_{U_{\lambda=-\mu-1}}$. Resulta inmediato que, si escogemos el tercer vector de esta base, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu & 2 & -1 \\ 0 & \mu - 2 & 2 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es escalonada y tiene rango tres. Por tanto, este tercer vector sirve para ampliar una base de $W\mu$ hasta una base de $U_{\lambda=-\mu-1}$, y constituye una base de un subespacio suplementario como se requiere. En resumen: *para $\mu \neq 2$ el problema tiene sentido cuando $\lambda = -\mu - 1$ y el subespacio suplementario requerido puede tomarse como $L\{(0, 0, 1, -1)\}$.*

[7] Por supuesto, los dos vectores que generaban W_μ también forman una base en este caso, y podríamos usar esa base. Escogemos la obtenida tras las transformaciones elementales porque suele ser más simple a la hora de la práctica.

Caso $\mu = 2$. Una base de de W_μ para $\mu = 2$ es

$$B_{W_{\mu=2}} = \{(1, 2, 2, -1)\}$$

por lo que debemos ampliarla con dos vectores de la base de U_λ para $\lambda = -\mu - 1 = -3$. Resulta inmediato que podemos ampliarla con los dos últimos vectores, pues se obtiene una matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene rango tres. Se tiene así: *para* $\mu = 2$ *el problema tiene sentido cuando* $\lambda = -3$ *y el subespacio suplementario requerido puede tomarse como* $L\{(0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$.

GEOMETRÍA I

Ejercicios resueltos 4

1. Demostrar, a partir de propiedades elementales de sistemas de generadores y conjuntos linealmente independientes, el siguiente resultado:

   Sean $V(K)$ un espacio vectorial, U, W dos subespacios vectoriales de V y
   $B_U = \{u_1, \dots u_k\}$, $B_W = \{w_1, \dots w_m\}$
   bases de U y W, respectivamente. Se verifica:
   $B_U \cup B_W$ es una base de $U + W$ si y sólo si $U \cap W = \{0\}$.

2. En $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios

$$W_1 = L\{(1,1,1,1,1)\}, \qquad W_2 = L\{(1,0,1,0,1),(1,0,-1,3,1)\}.$$

   y U_λ definido por las ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{array}{rrrl} 2x_1 & -x_2 & +\lambda x_5 & = 0 \\ & x_3 & -\lambda x_5 & = 0 \\ -3x_1 & +x_4 & -x_5 & = 0 \end{array}\right\}$$

   para cada valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Determinar todos los valores de λ para los que la suma de los tres subespacios es directa, esto es, para los que se puede escribir $W_1 \oplus W_2 \oplus U_\lambda$.

3. Se considera el conjunto $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ y se definen las operaciones:

$$(x_1,y_1) \star (x_2,y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2), \quad \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in V,$$
$$a \bullet (x,y) = (x^a, a \cdot y), \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in V.$$

   a) Demostrar que $(V, \star, \bullet\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real con las operaciones definidas.
   b) Comprobar que $B = ((1,1),(e,1))$ es una base ordenada de este espacio y calcular las coordenadas en B de cualquier $(x,y) \in V$.

1 **Demostrar, a partir de propiedades elementales de sistemas de generadores y conjuntos linealmente independientes, el siguiente resultado:**

> **Sean $V(K)$ un espacio vectorial, U, W dos subespacios vectoriales de V y**
> $B_U = \{u_1, \dots u_k\}$, $B_W = \{w_1, \dots w_m\}$
> **bases de U y W, respectivamente. Se verifica:**
> $B_U \cup B_W$ **es una base de $U + W$ si y sólo si $U \cap W = \{0\}$.**

Solución. Puesto que B_U y B_W son, en particular, sistemas de generadores de U y W, su unión es siempre un sistema de generadores de[8] $U + W$. En consecuencia, el problema se reduce a demostrar que $B_U \cup B_W$ es linealmente independiente si y sólo si $U \cap W = \{0\}$.

($\Rightarrow$) Suponiendo por el contrarrecíproco que existe un vector no nulo $v \in U \cap W$, se tendrá, por ser B_U y B_W bases da cada subespacio:

$$v = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k, \qquad v = b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m,$$

para ciertos escalares $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m \in K$ no todos nulos, ya que[9] $v \neq 0$. Restando ambas igualdades se tiene:

$$0 = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k - b_1 w_1 + \cdots - b_m w_m.$$

Esta expresión es una combinación lineal de los elementos de $B_U \cup B_W$ igualada a 0 con no todos los coeficientes nulos, por lo que $B_U \cup B_W$ es linealmente dependiente, como se quería.

($\Leftarrow$). Para demostrar que $B_U \cup B_W$ es linealmente independiente, sean ahora $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m \in K$ tales que:

$$0 = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k + b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m$$

o, equivalentemente:

$$a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k = -b_1 w_1 + \cdots - b_m w_m.$$

El miembro izquierdo es un vector v de U y el miembro derecho pertenece a W por lo que $v \in U \cap W$. Como, por hipótesis, esta intersección sólo contiene el vector 0, se sigue $v = 0$ y:

$$0 = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k, \qquad 0 = -b_1 w_1 + \cdots - b_m w_m.$$

Usando en la primera expresión que B_U es linealmente independiente, y en la segunda que B_W lo es, se sigue:

$$a_1 = \cdots = a_k = 0, \qquad b_1 = \cdots = b_m = 0,$$

por lo que $B_U \cup B_W$ es linealmente independiente, como se quería.

Nota. Como $B_U \cup B_W$ es un sistema de generadores de $U + W$ con $m + k$ elementos, será linealmente independiente si y sólo si $\dim(U + W) = m + k$. Usando la fórmula de Grassmann se obtiene directamente $\dim(U + W) = \dim U +$ dim W $(= m + k)$ si y sólo si $U \cap W = \{0\}$. Por tanto, de las dos equivalencias anteriores se sigue el resultado buscado. Sin embargo, en este razonamiento se usan propiedades no elementales de los sistemas de generadores y conjuntos linealmente independientes.

---

[8] Por propiedades elementales estudiadas $L(B_U) + L(B_W) = L(B_U \cup B_W)$ y, por tanto, $U + W = L(B_U) + L(B_W) = L(B_U \cup B_W)$.

[9] Realmente tanto alguno de los a_i como alguno de los b_j será $\neq 0$ (aunque nos bastará con que uno de todos los coeficientes cumpla la desigualdad).

2 **En $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios**

$$W_1 = L\{(1,1,1,1,1)\}, \qquad W_2 = L\{(1,0,1,0,1),(1,0,-1,3,1)\}.$$

y U_λ definido por las ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{array}{rrrl} 2x_1 & -x_2 & +\lambda x_5 & = 0 \\ & x_3 & -\lambda x_5 & = 0 \\ -3x_1 & +x_4 & -x_5 & = 0 \end{array}\right\}$$

para cada valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

Determinar todos los valores de λ para los que la suma de los tres subespacios es directa, esto es, para los que se puede escribir $W_1 \oplus W_2 \oplus U_\lambda$.

Solución. Recordemos en primer lugar que $W_1 \oplus W_2 \oplus U_\lambda$ equivale a[10]

$$W_1 \cap W_2 = \{0\} \text{ (esto es, } W_1 \oplus W_2) \quad \text{y} \quad (W_1 + W_2) \cap U_\lambda = \{0\} \text{ (esto es, } (W_1 + W_2) \oplus U_\lambda). \quad (3)$$

Esto equivale a que, uniendo una base de cada uno de los tres subespacios se obtenga una base de la suma de los tres (úsese dos veces el Ejercicio 1) y (a consecuencia de lo anterior o bien usando directamente la fórmula de Grassmann en (3)):

$$\dim(W_1 + W_2 + U_\lambda) = \dim W_1 + \dim W_2 + \dim U_\lambda. \quad (4)$$

Por simple inspección se comprueba $\dim W_1 = 1$, dim $W_2 = 2$ (al estar generado por dos vectores no proporcionales y, por tanto, independientes) y dim $U_\lambda \geq 5 - 3 = 2$ (al estar determinado U_λ por un SEL de 3 ecuaciones y cinco incógnitas) dándose la igualdad si y sólo si las ecuaciones son linealmente independientes. Para comprobar esta propiedad, hallamos el rango de la matriz del SEL:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ -3 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} 3F_2 + 2F_1 \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 3\lambda - 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad (5)$$

donde en el primer paso se han reordenado las filas $F_1 \to F_2 \to F_3 \to F_1$. De la última matriz se deduce que las tres ecuaciones con independientes, por lo que dim $U_\lambda = 2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, esto es:

$$\dim W_1 + \dim W_2 + \dim U_\lambda = 1 + 2 + 2 = 5, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

A partir de aquí, describimos dos procedimientos distintos, cada uno de interés propio.

[10] Desde luego, **no** equivale a $W_1 \cap W_2 \cap U_\lambda = \{0\}$. De hecho, en nuestro caso ocurre $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ y, por tanto, $W_1 \cap W_2 \cap U_\lambda = \{0\}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Sin embargo, la suma no siempre es directa.

Procedimiento 1: demostrar directamente si se verifican las dos condiciones en (3)**.**

Comprobar $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ se reduce por la fórmula de Grassmann a probar $\dim(W_1 + W_2) = 3$. Esto se demuestra tomando la matriz M cuyas filas son los dos generadores de W_2 y el generador de W_1, y comprobando que esa matriz tiene rango 3:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Para demostrar $(W_1 + W_2) \cap U_\lambda = \{0\}$, calculamos la intersección tomando un vector genérico $v \in W_1 + W_2$ e imponemos que verifique las ecuaciones que definen U_λ. Como las filas de cualquiera de las matrices en (7) son un sistema de generdores de $W_1 + W_2$, escogemos la última matriz (por ser más sencilla) y tomamos v como una combinación lineal arbitraria de sus filas:

$$v = x \cdot (1,0,1,0,1) + y \cdot (0,1,0,1,0) + z \cdot (0,0,-2,3,0) = (x, y, x - 2z, y + 3z, x), \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

A continuación, sustituimos v en las ecuaciones del enunciado del ejercicio[11] que definen U_λ

$$\left.\begin{array}{rrrl} 2x & -y & +\lambda x & = 0 \\ & (x-2z) & -\lambda x & = 0 \\ -3x & +(y+3z) & -x & = 0 \end{array}\right\}, \quad \text{esto es,} \quad \left.\begin{array}{rrrl} (2+\lambda)x & -y & & = 0 \\ (1-\lambda)x & & -2z & = 0 \\ -4x & +y & +3z & = 0 \end{array}\right\}$$

Así, la suma será directa si y sólo si este SEL admite como única solución $x = y = z = 0$, esto es, si y sólo si es compatible y determinado, lo que equivale a que tenga rango 3 la matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2+\lambda & -1 & 0 \\ 1-\lambda & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2+\lambda & -1 & 0 \\ 1-\lambda & 0 & -2 \\ -2+\lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como la primera fila no puede ser combinación lineal de las otras dos, podemos suprimirla y estudiar cuándo la matriz resultante (de la que suprimimos la columna de ceros) tiene rango 2:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2+\lambda & 3 \end{pmatrix}.$$

Tomando el determinante (o escalonando de nuevo) el rango es máximo si y sólo si $-\lambda - 1 = 0$. Por tanto, **la suma es directa si y sólo si $\lambda \neq -1$.**

[11] Para las ecuaciones de U_λ podríamos escoger cualquiera de los SEL equivalentes con matrices en la fórmula (5). Eventualmente esto podría resultar útil, puesto que el último SEL de (5) es es escalonado y más simple que el original.

Procedimiento 2: demostrar si dim$(W_1 + W_2 + U_\lambda) = 5$ (y, por tanto, (4), véase (6)).

Tomando una base $B_{W_1}, B_{W_2}, B_{U\lambda}$ de cada subespacio, basta con comprobar que $B_{W_1} \cup B_{W_2} \cup B_{U\lambda}$ es linealmente independiente. Las bases B_{W_1}, B_{W_2} se obtienen directamente de la definición de W_1, W_2. Para $B_{U\lambda}$, resolvemos el SEL (5) tomando como incógnitas principales x_1, x_2, x_3 y como parámetros $x_4 = \mu_1, x_5 = \mu_2$. De hecho, tomando la última matriz de (5) (que es la de un SEL equivalente al original) y multiplicando por -1 las dos primeras filas se obtiene directamente:

$$\left.\begin{array}{rll} 3x_1 = & \mu_1 & -\mu_2 \\ 3x_2 = & 2\mu_1 & +(3\lambda-2)\mu_2 \\ x_3 = & & \lambda\mu_2 \end{array}\right\} \qquad B_{U_\lambda} = \{(1,2,0,3,0), (-1, 3\lambda-2, 3\lambda, 0, 3)\},$$

donde para construir B_{U_λ} se han hecho las elecciones independientes de parámetros: $(\mu_1 = 3, \mu_2 = 0)$ y $(\mu_1 = 0, \mu_2 = 3)$. Escribiendo entonces los elementos de B_{W_2}, B_{W_1} y $B_{U\lambda}$ por filas en una matriz, A, el problema se reduce a determinar los valores de λ para los que el rango de A es 5:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3\lambda-2 & 3\lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3\lambda-2 & 3\lambda+1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Como la primera fila no se puede escribir como combinación lineal de las otras, el problema se reduce a determinar cuándo es 4 el rango de:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3\lambda-2 & 3\lambda+1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3\lambda+6 & 3\lambda-3 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como la tercera fila no se puede escribir como combinación de las otras, basta con estudiar:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3\lambda+6 & 3\lambda-3 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3\lambda-6 & 3\lambda-3 & 12 \end{pmatrix}, \quad \text{esto es,} \quad \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3\lambda-6 & 3\lambda-3 \end{pmatrix}.$$

Realizando otra transformación elemental o bien calculando el determinante, el rango es 5 si y sólo si $3\lambda + 3 \neq 0$. Por tanto, **la suma es directa si y sólo si** $\lambda \neq -1$.

3 **Se considera el conjunto $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ y se definen las operaciones:**

$$(x_1, y_1) \star (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2), \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V,$$
$$a \bullet (x, y) = (x^a, a \cdot y), \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in V.$$

1. **Demostrar que $(V, \star, \bullet\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real con las operaciones definidas.**
2. **Comprobar que $B = ((1,1), (e,1))$ es una base ordenada de este espacio y calcular las coordenadas en B de cualquier $(x, y) \in V$.**

1. Merece comentarse en primer lugar que ambas operaciones están bien definidas sobre V, en el sentido de que V es cerrado para $\star$ (esto es, $(x_1, y_1)\star(x_2, y_2)$ pertenece a V para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$ ya que, al ser $x_1, x_2 > 0$, se tiene $x_1 \cdot x_2 > 0$) y para la ley de composición externa $\bullet$ (pues $a \bullet (x, y) \in V$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in V$ ya que, al ser $x > 0$, se tiene que x^a está bien definido y es positivo independientemente del valor de a). Comprobamos a continuación que se satisfacen todas las propiedades de la definición de espacio vectorial.

$(V, \star)$ es un grupo conmutativo, al verificar las propiedades:

- Conmutativa[12]: $(x_1, y_1) \star (x_2, y_2) = (x_2, y_2) \star (x_1, y_1)$, ya que:

  $(x_2, y_2) \star (x_1, y_1) = (x_2 \cdot x_1, y_2 + y_1) = (x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) \star (x_2, y_2,)$

  la segunda igualdad por la conmutatividad en $\mathbb{R}$ de la suma $+$ y el producto $\cdot$ usuales.

- Asociativa: $((x_1, y_1) \star (x_2, y_2)) \star (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \star ((x_2, y_2) \star (x_3, y_3))$, ya que:

  $((x_1, y_1) \star (x_2, y_2)) \star (x_3, y_3) = (x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2) \star (x_3, y_3) = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3, (y_1 + y_2) + y_3)$,

  $(x_1, y_1) \star ((x_2, y_2) \star (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \star (x_2 \cdot x_3, y_2 + y_3) = (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), y_1 + (y_2 + y_3))$,

  y los dos miembros derechos coinciden por la asociatividad de $+, \cdot$ en $\mathbb{R}$.

- $(1, 0)$ es el elemento neutro, esto es, $(1, 0) \star (x, y) = (x, y)$, $(x, y) \star (1, 0) = (x, y)$, ya que:

  $(1, 0) \star (x, y) = (x^1, 1 \cdot y) = (x, y)$,

  y la operación $\star$ verifica la propiedad conmutativa.

- Cada $(x, y) \in V$ admite $(1/x, -y)$ como simétrico, esto es, $(x, y) \star (1/x, -y) = (1/x, -y) \star (x, y) = (1, 0)$, ya que la división por x está bien definida (al ser $x > 0$), se cumple

  $(x, y) \star (1/x, -y) = (x/x, y - y) = (1, 0)$,

  y la operación $\star$ verifica la propiedad conmutativa.

La ley de composición externa $(V, \bullet\mathbb{R})$ verifica las propiedades:

- Modular: $1 \bullet (x, y) = (x, y)$, ya que:

  $1 \bullet (x, y) = (x^1, 1 \cdot y) = (x, y)$,

  por ser 1 el elemento neutro del producto $\cdot$ en $\mathbb{R}$.

[12] Demostramos esta propiedad en primer lugar para simplificar la demostración de las de elemento neutro y simétrico.

- Pseudoasociativa: $a \bullet (b \bullet (x,y)) = (a \cdot b) \bullet (x,y)$ ya que:

  $a \bullet (b \bullet (x,y)) = a \bullet (x^b, b \cdot y) = ((x^b)^a, a \cdot (b \cdot y))$,

  $(a \cdot b) \bullet (x,y) = (x^{a \cdot b}, (a \cdot b) \cdot y)$,

  y los miembros derechos coinciden por la asociatividad de $\cdot$ en $\mathbb{R}$ y la propiedad elemental $(x^b)^a = x^{a \cdot b}$.

- Distributiva respecto a la suma de vectores: $a \bullet ((x_1,y_1) \star (x_2,y_2)) = (a \bullet (x_1,y_1)) \star (a \bullet (x_2,y_2))$, ya que:

  $a \bullet ((x_1,y_1) \star (x_2,y_2)) = a \bullet (x_1 \cdot x_2,\ y_1 + y_2) = ((x_1 \cdot x_2)^a,\ a \cdot (y_1 + y_2))$,

  $(a \bullet (x_1,y_1)) \star (a \bullet (x_2,y_2)) = (x_1^a, a \cdot y_1) \star (x_2^a, a \cdot y_2) = (x_1^a \cdot x_2^a,\ a \cdot y_1 + a \cdot y_2)$,

  y los miembros derechos coinciden por la propiedad distributiva de $\cdot$ respecto a $+$ en $\mathbb{R}$ y la propiedad elemental $(x_1 \cdot x_2)^a = x_1^a \cdot x_2^a$.

- Distributiva respecto a la suma de escalares $(a+b) \bullet (x,y) = (a \bullet (x,y)) \star (b \bullet (x,y))$, ya que:

  $(a+b) \bullet (x,y) = (x^{a+b}, (a+b) \cdot y)$,

  $(a \bullet (x,y)) \star (b \bullet (x,y)) = (x^a, a \cdot y) \star (x^b, b \cdot y) = (x^a \cdot x^b, a \cdot x + b \cdot y)$,

  y los miembros derechos coinciden por la propiedad distributiva de $\cdot$ respecto a $+$ en $\mathbb{R}$ y la propiedad elemental $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$.

(Se entiende en todas las propiedades, para todo $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x,y) \in V$, $a,b \in \mathbb{R}$.)

2. Una combinación lineal de B con cualesquiera coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$ se expresa:

$$(a \bullet (1,1)) \star (b \bullet (e,1)) = (1^a, a \cdot 1) \star (e^b, b \cdot 1) = (1 \cdot e^b, a+b) = (e^b, a+b). \tag{8}$$

Para demostrar que B es linealmente independiente, igualamos esta combinación al elemento neutro de la operación $\star$, esto es:

$$(e^b, a+b) = (1,0) \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad e^b = 1, \quad a+b = 0.$$

De aquí se obtiene directamente $b = ln(1) = 0$ y, entonces, $a = 0$. Esto es, los coeficientes de la combinación deben ser nulos, lo que prueba la independencia lineal.

Para demostrar que B es un sistema de generadores, tomamos un vector $(x,y) \in V$ cualquiera y lo igualamos a la combinación lineal arbitraria (8):

$$(e^b, a+b) = (x,y) \qquad \text{esto es,} \qquad e^b = x, \quad a+b = y.$$

El último par de igualdades se verifica si y sólo si $b = ln(x)$, $a = y - b = y - ln(x)$, por tanto:

$$(x,y) = ((y - ln(x)) \bullet (1,1)) \star (ln(x) \bullet (e,1)).$$

Así, $(x,y) \in L(B)$, como se quería.

Finalmente, la última igualdad muestra que las coordenadas pedidas son:

$$(x,y)_B = \begin{pmatrix} y - ln(x) \\ ln(x) \end{pmatrix}.$$

Nota. El hecho de que el conjunto V sea igual a $(0,\infty) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ no dice por sí mismo nada sobre la dimensión del espacio vectorial, al no ser sus operaciones las usuales de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.