Geometría I. Curso 2015-2016
Grado en ingeniería informática y matemáticas
Prueba parcial de evaluación

1. (1'5p) (Teoría) Definir el concepto de sistema de generadores de un espacio vectorial. Probar que si $S = \{v_1, ..., v_m\}$ con $m \geq 2$ es un sistema de generadores de V y existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $v_i \in L(S - \{v_i\})$, entonces $S - \{v_i\}$ es un sistema de generadores de V.

2. (4p) Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$U_\alpha = L((1,1,1,1), (0,\alpha,0,1), (2, 2-\alpha, 2, 1)),$$

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x+y+z=0,\ x+z+t=0\}.$$

   (a) Obtener razonadamente unas ecuaciones cartesianas de U_α para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Para $\alpha = 1$ calcular bases de $U_\alpha \cap W$ y de $U_\alpha + W$.

   (c) ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple $\mathbb{R}^4 = U_\alpha \oplus W$?

3. (2'5p) En el espacio vectorial $\mathbb{R}_1[x]$ se considera la familia de vectores $\mathcal{B} = \{1+x, 1-x\}$. Demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}_1[x]$. Calcular las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ del vector $p(x) = -5 + 3x$ usando obligatoriamente un cambio de base conveniente.

4. (2p) Responder de forma razonada las siguientes cuestiones:

   (a) ¿Pueden existir en un espacio vectorial V finitamente generado dos planos vectoriales cuya intersección sea $\{0\}$? ¿Cuál es la dimensión mínima de V en estas condiciones?

   (b) Sea V un espacio vectorial con $\dim_K(V) = n \geq 2$. Dado $v \in V$ con $v \neq 0$ y escalares $a_1, ..., a_n \in K$ no todos nulos, probar que existe al menos una base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de V tal que $v = a_1 \cdot v_1 + ... + a_n \cdot v_n$.

Duración aproximada: 2 horas

Granada, 17 de diciembre de 2016

SOLUCIONES

① Mirar los apuntes de teoría.

② $\mathcal{U}_\alpha = L((1,1,1,1),(0,\alpha,0,1),(2,2-\alpha,2,1)),\ \alpha\in\mathbb{R}.$

$$W=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+z+t=0 \end{array}\right\}$$

(a) ¿Ec. cartesianas de $\mathcal{U}_\alpha$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$?

Primero calculamos una base de $\mathcal{U}_\alpha$. Manipulamos el s.d.g. original de $\mathcal{U}_\alpha$ hasta obtener otro s.d.g. donde sea fácil estudiar la indep. lineal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 2 & 2-\alpha & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{-2F_1+F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2+F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así $\mathcal{B}_\alpha=\{(1,1,1,1),(0,\alpha,0,1)\}$ es un s.d.g. de $\mathcal{U}_\alpha$.

Como $(1,1,1,1)$ y $(0,\alpha,0,1)$ son no nulos y no proporcionales, entonces son l.i. Así, $\mathcal{B}_\alpha$ es base de $\mathcal{U}_\alpha$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}_\alpha)=2 \Rightarrow$ nº ec. cartesianas $=4-2=2$.

Buscamos un par de ec. cartesianas para $\mathcal{U}_\alpha$.

Si $v=(x,y,z,t)$ está en $\mathcal{U}_\alpha$, entonces es combinación lineal de $(1,1,1,1)$ y $(0,\alpha,0,1)$. Esto equivale a:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & \alpha & y \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}=2,$$

por lo que todos los determin. de orden 3 de la matriz anterior deben anularse.

Elijo 2 de estos determinantes para que den lugar a 2 ec. cartesianas independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = 0, \text{ es decir, } x - z = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & y \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = 0, \text{ es decir, } \underbrace{y + \alpha z - z - \alpha t}_{y + (\alpha - 1)z - \alpha t} = 0$$

Así $\mathcal{U}_\alpha = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y + (\alpha-1)z - \alpha t = 0 \end{array} \right\}$

(b) $\alpha = 1$. ¿Bases de $\mathcal{U}_\alpha \cap W$ y $\mathcal{U}_\alpha + W$?

$\boxed{\mathcal{U}_1 \cap W}$ Por el apartado (a) sabemos que $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1,1), (0,1,0,1)\}$ es base de $\mathcal{U}_1$.

Sea $v \in \mathcal{U}_1 \cap W$.

Como $v \in \mathcal{U}_1 \Rightarrow v = a \cdot (1,1,1,1) + b \cdot (0,1,0,1)$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow v = (a, a+b, a, a+b)$.

Como $v \in W$, sus coordenadas deben cumplir las ec. cartesianas de W. Por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + (a+b) + a = 0 \to 3a + b = 0 \\ a + a + a + b = 0 \to 3a + b = 0 \end{array} \right\} \to b = -3a.$$

Sustituyendo esta igualdad en la expresión de v, tenemos:

$$v = (a, a - 3a, a, a - 3a) = (a, -2a, a, -2a) = a \cdot (1, -2, 1, -2).$$

Así $\mathcal{U}_1 \cap W = \mathcal{L}((1,-2,1,-2))$. Se sigue que $\mathcal{B}_{\mathcal{U}_1 \cap W} = \{(1,-2,1,-2)\}$ es una base de $\mathcal{U}_1 \cap W$.

Vamos ahora con U_1+W. Ya conocemos una base de U_1. Calculamos una base de W. Para ello, resolvemos el SEL homogéneo que define a W.

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+z+t = 0 \end{cases} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(A|b) \overset{-F_1+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x+y+z = 0 \\ -y+t=0. \end{cases}$$

I. Principales: x, y. I. Secundarias: z, t.

$z=\lambda$, $t=\mu$, $y=t=\mu$, $x=-y-z=-\lambda-\mu$.

Así, los vectores de W son de la forma:

$(-\lambda-\mu, \mu, \lambda, \mu) = \lambda\cdot(-1,0,1,0)+\mu\cdot(-1,1,0,1)$

Por tanto, $W = L((-1,0,1,0), (-1,1,0,1))$ y como los vectores $\{(-1,0,1,0), (-1,1,0,1)\}$ son no proporcionales, entonces $\mathcal{B}_W = \{(-1,0,1,0), (-1,1,0,1)\}$ es base de W.

Por la fórmula de Grassmann:

$\dim_{\mathbb{R}}(U_1+W) = \dim_{\mathbb{R}}(U_1)+\dim_{\mathbb{R}}(W)-\dim_{\mathbb{R}}(U_1\cap W)$
$= 2+2-1 = 4-1 = 3.$

Sabemos que un s.d.g. de U_1+W es $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_W$, es decir, $S=\{(1,1,1,1), (0,1,0,1), (-1,0,1,0), (-1,1,0,1)\}$ es un s.d.g. de U_1+W. Como $\dim_{\mathbb{R}}(U_1+W)=3$, una base de U_1+W se consigue eligiendo 3 vectores de S que sean l.i. Probamos con los 3 primeros.

Afirmamos que $\mathcal{B}_{U_1+W} = \{(1,1,1,1),(0,1,0,1),(-1,0,1,0)\}$ es una base de U_1+W. Basta ver que son l.i. Esto equivale a que:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Como la matriz es 4×3, su rango es a lo sumo 3. Y será 3 si tiene un deter. 3×3 no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

(c) ¿Para qué $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple $\mathbb{R}^4 = U_\alpha \oplus W$? Necesitamos dos cosas: $\mathbb{R}^4 = U_\alpha + W$ y $U_\alpha \cap W = \{0\}$.

Estudiamos para qué valores de α se tiene $U_\alpha \cap W = \{0\}$.

Para calcular $U_\alpha \cap W$ procedemos como en (b).

$\mathcal{B}_\alpha = \{(1,1,1,1),(0,\alpha,0,1)\}$ es base de U_α $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$v \in U_\alpha \cap W$. Como $v \in U_\alpha \Rightarrow v = a\cdot(1,1,1,1) + b\cdot(0,\alpha,0,1)$

$\Rightarrow v = (a, a+\alpha b, a, a+b)$.

Así, $v \in W$ si y sólo si $\begin{cases} 3a+\alpha b = 0 \\ 3a + b = 0. \end{cases}$

Ya sabemos que si $\alpha = 1$, entonces $U_1 \cap W \neq \{0\}$.

Teniendo en cuenta el SEL anterior es obvio que si $\alpha \neq 1$, entonces $a=b=0$, y $U_\alpha \cap W = \{0\}$.

Así $\mathbb{R}^4$ podrá ser $U_\alpha \oplus W$ sólo cuando $\alpha \neq 1$. Y como $\dim_{\mathbb{R}}(U_\alpha + W) \underbrace{=}_{\text{si } \alpha \neq 1} 2+2-0 = 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, Concluimos que $\mathbb{R}^4 = U_\alpha \oplus W$ si y sólo si $\alpha \neq 1$.

---

③ $\mathbb{R}_1[x] = \{a+bx \,/\, a,b \in \mathbb{R}\}$. Sabemos que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_1[x]) = 2$ y que $\mathcal{B}_u = \{1, x\}$ es una base en $\mathbb{R}_1[x]$. $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x)\}$, $\begin{matrix} p_1(x) = 1+x \\ p_2(x) = 1-x \end{matrix}$

Como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_1[x]) = 2$ y en $\mathcal{B}$ hay 2 vectores, para comprobar que forman base basta ver que son l.i.

$a \cdot (1+x) + b \cdot (1-x) = 0$;

$a + ax + b - bx = 0 \Longrightarrow (a+b) + (a-b)x = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a+b=0 \longrightarrow 2a = 0 \to a = 0 \to b = 0. \\ a-b=0 \to a=b \end{cases}$$

Concluimos que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}_1[x]$.

Sea $p(x) = -5+3x$. Queremos calcular $p(x)_{\mathcal{B}}$.

Conocemos las coordenadas de $p(x)$ en $\mathcal{B}_u$, pues es obvio que $p(x)_{\mathcal{B}_u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Por tanto, necesitamos el cambio de base de $\mathcal{B}_u$ a $\mathcal{B}$.

Por otro lado, tenemos que:

$$M(\mathcal{B}_u, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_u)^{-1} \overset{*}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \underset{**}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$*$ $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_u) = \left(p_1(x)_{\mathcal{B}_u} \,|\, p_2(x)_{\mathcal{B}_u} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$**$ Se ha usado que $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t$.

La expresión matricial del cambio de base de $\mathcal{B}_u$ a $\mathcal{B}$ nos dice que:

$$p(x)_{\mathcal{B}} = M(\mathcal{B}_u, \mathcal{B}) \cdot p(x)_{\mathcal{B}_u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Por último, es fácil comprobar que, efectivamente:

$$p(x) = (-1) \cdot p_1(x) + (-4) \cdot p_2(x)$$

---

(4) (a) Sí, pueden existir. Tenemos $V = \mathbb{R}^4$, que es f.g. como e.v. sobre $K = \mathbb{R}$.

Sean $\mathcal{U}_1 = L((1,0,0,0), (0,1,0,0))$
$\mathcal{U}_2 = L((0,0,1,0), (0,0,0,1))$

Es muy fácil ver que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}_1) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}_2) = 2$, por lo que $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son 2 planos vectoriales en $\mathbb{R}^4$.
Veamos que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{(0,0,0,0)\}$.

Sea $v \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.
Como $v \in \mathcal{U}_1 \Rightarrow v = (x, y, 0, 0)$, con $x, y \in \mathbb{R}$
Como $v \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow v = (0, 0, z, t)$, con $z, t \in \mathbb{R}$.
Igualando las 2 expresiones de v, se tiene $v = (0,0,0,0)$.

¿Cuál es la mínima dimensión de V si existen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ planos vectoriales en V con $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{0\}$?
Sea $n = \dim_K(V)$. Por la fórmula de las dimensiones:

$\dim_K (U_1+U_2) = 2+2-0 = 4.$

Por otro lado $\dim_K (U_1+U_2) \leq \dim_K (V) = n$

Se concluye que $n \geq 4$. Juntando este hecho con el ejemplo anterior se concluye que la dimensión mínima es 4.

(b) V = e.v. sobre K con $\dim_K (V) = n \geq 2$.

$v \in V$, $v \neq 0$. $a_1, \dots, a_n \in K$ con alguno no nulo.

¿$\exists\ \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V / $v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$,

es decir, $v = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n$?

Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_i \neq 0$. Como $v \neq 0$, entonces $\{v\}$ es una familia l.i. Por el teorema de ampliación de la base, puedo completar v hasta una base de V. Sea $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ una de estas bases. Nótese que $\mathcal{B}'$ no soluciona el problema, puesto que $v_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i)$ La idea es cambiar v por un vector v_i tal que $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ sea la base buscada. Necesitamos entonces que:

$$v = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{i-1} \cdot v_{i-1} + a_i \cdot v_i + a_{i+1} \cdot v_{i+1} + \dots + a_n \cdot v_n.$$

Despejando arriba $a_i \cdot v_i$, llegamos a:

$$(*) \quad a_i \cdot v_i = v - a_1 \cdot v_1 - \dots - a_{i-1} \cdot v_{i-1} - a_{i+1} \cdot v_{i+1} - \dots - a_n \cdot v_n.$$

Como $a_i \neq 0$ y K es un cuerpo, podemos multiplicar por a_i^{-1}:

$$v_i = a_i^{-1} \cdot v - (a_i^{-1} \cdot a_1) v_1 - \dots - (a_i^{-1} \cdot a_{i-1}) \cdot v_{i-1} - (a_i^{-1} \cdot a_{i+1}) \cdot v_{i+1} - \dots - (a_i^{-1} \cdot a_n) \cdot v_n.$$

Definimos v_i a partir de la expresión anterior. Si probamos que $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V habremos acabado, pues la ecuación (*) implica que $v = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n$, como se quería.

¿Es $\mathcal{B}$ una base de V? Como $\dim_K(V) = n$ y en $\mathcal{B}$ hay exactamente n vectores, basta comprobar que $\mathcal{B}$ es una familia l.i. Tomamos una combinación lineal, la igualamos al vector 0 y vemos que todos los escalares de la combinación son 0.

$$b_1 \cdot v_1 + \dots + b_{i-1} \cdot v_{i-1} + b_i \cdot v_i + b_{i+1} \cdot v_{i+1} + \dots + b_n \cdot v_n = 0$$

Sustituyendo la expresión de v_i y agrupando términos llegamos a:

$$(b_1 - b_i \cdot a_i^{-1} \cdot a_1) \cdot v_1 + \dots + (b_{i-1} - b_i \cdot a_i^{-1} \cdot a_{i-1}) \cdot v_{i-1} + b_i \cdot a_i^{-1} \cdot v + (b_{i+1} - b_i \cdot a_i^{-1} \cdot a_{i+1}) \cdot v_{i+1} + \dots + (b_n - b_i \cdot a_i^{-1} \cdot a_n) \cdot v_n = 0.$$

Como $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ es base, entonces es l.i.

Por tanto, los escalares de la combinación anterior se anulan:

$b_1 - b_i \cdot a_i^{-1} \cdot a_1 = 0, \dots, b_{i-1} - b_i \cdot a_i^{-1} \cdot a_{i-1} = 0$, $b_i \cdot a_i^{-1} = 0$,

$b_{i+1} - b_i \cdot a_i^{-1} \cdot a_{i+1} = 0, \dots, b_n - b_i \cdot a_i^{-1} \cdot a_n = 0.$

Como $b_i \cdot a_i^{-1} = 0$ y $a_i^{-1} \neq 0 \Longrightarrow b_i = 0$. Sustituyendo la igualdad $b_i = 0$ en las demás, se concluye que

$b_1 = 0, \dots, b_{i-1} = 0, b_{i+1} = 0, \dots, b_n = 0.$

GEOMETRÍA I
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
Primera prueba parcial (23/11/2016)

1. **[2 puntos]**. Sea $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de un espacio vectorial $V(K)$, y sea $w = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ un vector de V. Demostrar que el conjunto que se obtiene reemplazando en B el vector v_i (para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$) por w es una base si y sólo si $a_i \neq 0$.

2. **[2 puntos]**. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Sean U, U', U'' subespacios vectoriales de un mismo espacio vectorial $V(K)$ tales que $U \cap U' \cap U'' = \{0\}$. Si $v \in U + U' + U''$ entonces los vectores $u \in U, u' \in U', u'' \in U''$ tales que $v = u + u' + u''$ están unívocamente determinados.

   b) Si B es una base de un espacio vectorial complejo $V(\mathbb{C})$ entonces B también es un sistema de generadores del espacio vectorial racional subyacente $V(\mathbb{Q})$.

3. **[3 puntos]**. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x], n \geq 1$, de los polinomios con coeficientes reales de grado $\leq n$, se considera un polinomio $p(x)$ de grado n y el conjunto $B = \{p(x), p'(x), ..., p^{(n)}(x)\}$, formado por $p(x)$ y todas sus derivadas sucesivas hasta la de orden n-ésimo.

   a) Demostrar que B es una base de $\mathbb{R}_n[x]$.

   b) Para el caso particular $n = 3$ y $p(x) = x + x^3$, calcular las coordenadas en B de todos los polinomios de la base usual de $\mathbb{R}_3[x]$ y del polinomio $q(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

4. **[3 puntos]**. Se considera en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales definidos, para cada valor de los parámetros $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, por:

$$U_\lambda = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \, \lambda x + y + z + t = 0\} \qquad W_\mu = L(\{(1, \mu, 2, -1), (-1, -2, -\mu, 1)\}$$

   Calcular un subespacio suplementario de W_μ en el espacio vectorial U_λ para todos los valores de los parámetros λ, μ donde tenga sentido hacerlo.

Duración: 2:30 min.

SOLUCIONES

1. Sea $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de un espacio vectorial $V(K)$, y sea $w = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ un vector de V. Demostrar que el conjunto que se obtiene reemplazando en B el vector v_i (para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$) por w es una base si y sólo si $a_i \neq 0$.

Sea $B_i := (v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ el conjunto obtenido de B.

($\Rightarrow$) Supongamos por el contrarrecíproco que $a_i = 0$. Entonces w resulta ser $w = a_1v_1 + \ldots a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_nv_n$, esto es, una combinación lineal del resto de vectores de B_i. Por tanto, B_i no es linealmente independiente, y no puede ser una base.

($\Leftarrow$) Demostraremos que B_i es linealmente independiente y un sistema de generadores. Para lo primero, tomamos una combinación lineal arbitraria de sus elementos igualada a 0:

$$\lambda_1v_1 + \ldots \lambda_{i-1}v_{i-1} + \lambda_iw + \lambda_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \lambda_nv_n = 0, \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K.$$

Sustituyendo w por su expresión y, a continuación, agrupando los coeficientes de los vectores (operando y usando las propiedades de e.v. de $V(K)$) se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1v_1 + \ldots \lambda_{i-1}v_{i-1} + \lambda_i\left(a_1v_1 + \ldots a_{i-1}v_{i-1} + a_iv_i + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_nv_n\right) + \lambda_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \lambda_nv_n \\ &= (\lambda_1 + a_1\lambda_i)v_1 + \cdots + (\lambda_{i-1} + a_{i-1}\lambda_i)v_{i-1} + a_i\lambda_iv_i + (\lambda_{i+1} + a_{i+1}\lambda_i)v_{i-1} + \cdots + (\lambda_n + a_n\lambda_i)v_n. \end{aligned}$$

Como el último miembro es una combinación lineal de los elementos de B, que es linealmente independiente, todos los coeficientes de esta combinación deben ser nulos, esto es:

$$\lambda_1 + a_1\lambda_i = 0,\ \ldots,\ \lambda_{i-1} + a_{i-1}\lambda_i = 0, \quad a_i\lambda_i = 0, \quad \lambda_{i+1} + a_{i+1}\lambda_i = 0,\ \ldots,\ \lambda_n + a_n\lambda_i = 0.$$

Al ser $a_i \neq 0$ por hipótesis, de la igualdad $a_i\lambda_i = 0$ se deduce $\lambda_i = 0$ y, sustituyendo este valor en el resto de igualdades, se obtiene $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, por lo que B_i es linealmente independiente.

Para demostrar que B_i es un sistema de generadores, de la expresión de w y de la hipótesis $a_i \neq 0$ se tiene:

$$v_i = -a_i^{-1}\left(-w + a_1v_1 + \ldots a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_nv_n\right),$$

esto es, $v_i \in L(B_i)$. Como para $j \neq i$ trivialmente $v_j \in L(B_i)$, se tiene $B \subset L(B_i)$. Por tanto, $L(B) \subset L(B_i)$, y como $L(B) = V$, se sigue que B_i es un sistema de generadores.

2. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Sean U, U', U'' subespacios vectoriales de un mismo espacio vectorial $V(K)$ tales que $U \cap U' \cap U'' = \{0\}$. Si $v \in U + U' + U''$ entonces los vectores $u \in U, u' \in U', u'' \in U''$ tales que $v = u + u' + u''$ están unívocamente determinados.

(b) Si B es una base de un espacio vectorial complejo $V(\mathbb{C})$ entonces B también es un sistema de generadores del espacio vectorial racional subyacente $V(\mathbb{Q})$.

Afirmación (a): FALSA. Contraejemplo: en $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ se toman $U = L(1,0), U' = L(0,1), U'' = L(1,1)$. Claramente, $U \cap U' \cap U'' = \{0\}$ y $\mathbb{R}^2 = U + U' + U''$. Sin embargo, cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como suma de vectores $u \in U, u' \in U', u'' \in U''$ de más de una manera. Por ejemplo:

$$(1,1) = (1,0) + (0,1) + (0,0) = (0,0) + (0,0) + (1,1).$$

Nota. Es de señalar que $U \cap U' \cap U'' = \{0\}$ *no* implica que U, U', U'' sean suma directa: para que ello ocurriera se debe cumplir $U \cap U' = \{0\}$ y $(U + U') \cap U'' = \{0\}$ (esto es, $U \oplus U' \oplus U''$ equivale a $U \oplus U'$ y $(U + U') \oplus U''$).

Afirmación (b): FALSA. Contraejemplo: en $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ el escalar $1(= 1+0 \cdot i)$ es una base, esto es, podemos tomar $B = \{1\}$. Sin embargo, el subespacio que genera B en $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$ es sólo $\{r \cdot 1 : r \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{C}$, por lo que B no es un sistema de generadores de $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$.

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x], n \geq 1$, de los polinomios con coeficientes reales de grado $\leq n$, se considera un polinomio $p(x)$ de grado n y el conjunto $B = \{p(x), p'(x), ..., p^{(n)}(x)\}$, formado por $p(x)$ y todas sus derivadas sucesivas hasta la de orden n-ésimo.

(a) Demostrar que B es una base de $\mathbb{R}_n[x]$.

(a) Para el caso particular $n = 3$ y $p(x) = x + x^3$, calcular las coordenadas en B de todos los polinomios de la base usual de $\mathbb{R}_3[x]$ y del polinomio $q(x) = 1+x+x^2+x^3$.

(a) Puesto que se sabe que la dimensión de $\mathbb{R}_n[x]$ es $n+1$ y B contiene $n+1$ elementos, basta con demostrar que B es linealmente independiente. Para ello, observemos primero que si $p(x)$ tiene grado n, su monomio de mayor grado es $a_n x^n$ con $a_n \neq 0$. En consecuencia, $p'(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ y, en general, $p^{(k)}(x)$ es un polinomio de grado $n-k$, para todo[1] $k \in 1, \dots, n$. Así, si escribimos la matriz que tiene por fila k-ésima las coordenadas del k-ésimo elemento de B en la base usual $B_u = \{1, x, \dots, x.\}$ de $\mathbb{R}_n[x]$, se obtiene la matriz cuadrada $(n+1) \times (n+1)$:

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * & c_n \\ * & * & \cdots & * & c_{n-1} & 0 \\ * & * & \cdots & c_{n-2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & c_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde cada[2] $c_i \neq 0$. Claramente, el rango de esta matriz es el máximo, esto es, $n+1$, por lo que los vectores de B son linealmente independientes.

(b) Derivando $p(x)$, se tiene $B = (x + x^3, 1 + 3x^2, 6x, 6)$. Escribiendo las coordenadas de estos vectores en la base usual $B_u = \{1, x, x^2, x^3\}$ por columnas, se tiene la matriz de cambio de base:

$$M(I, B_u \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas de los elementos de B_u en la base B no son más que las columnas de la matriz $M(I, B \leftarrow B_u)$ inversa de la anterior. Podemos calcular esta inversa por el procedimiento de Gauss-Jordan, haciendo transformaciones elementales por filas como las siguientes:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & 0 & -1/18 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & 0 & -1/18 & 0 \end{array}\right)$$

[1]Si se quiere, esto se puede comprobar por inducción: para $n = 1$ es inmediato y, supuesto válido para n, si p tiene grado $n+1$ su monomio de mayor grado es $a_{n+1}x^{n+1}$ para algún $a_{n+1} \neq 0$; por tanto, el monomio de mayor grado para $p'(x)$ es $(n+1)a_{n+1}x^n$. Así, p' tiene grado n y basta con aplicarle la hipótesis de inducción.

[2]De hecho, se puede calcular explícitamente su valor $c_n = a_n$, $c_{n-1} = n \cdot a_n$, $c_{n-2} = n \cdot (n-1) \cdot a_n$, $\dots$, $c_1 = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot a_n$, $c_0 = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n$, pero no nos interesan estos valores explícitos, sino sólo que no se anulan (por ser los coeficientes del monomio de mayor grado para cada uno de los polinomios considerados).

Haciendo como una última transformación elemental multiplicar la tercera fila se obtiene la matriz inversa, esto es:

$$M(I,B\leftarrow B_u)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 1/6 & 0 & -1/6\\ 1/6 & 0 & -1/18 & 0\end{pmatrix}$$

Como se ha dicho, la k-ésima columna de esta matriz es igual a las coordenadas del $k-$ésimo vector de la base $B_u=(1,x,x^2,x^3)$ en la base B; explícitamente:

$$(1)_B=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1/6\end{pmatrix}\qquad (x)_B=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1/6\\ 0\end{pmatrix}\qquad (x^2)_B=\begin{pmatrix} 0\\ 1/3\\ 0\\ -1/18\end{pmatrix}\qquad (x^3)_B=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1/6\\ 0\end{pmatrix}$$

lo que resuelve la primera parte de este apartado.

Finalmente, para calcular las coordenadas $(q(x))_B$ basta con usar:

$$(q(x))_B=M(I,B\leftarrow B_u)\cdot(q(x))_{B_u}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 1/6 & 0 & -1/6\\ 1/6 & 0 & -1/18 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1/3\\0\\1/9\end{pmatrix},$$

esto es:

$$(q(x))_B=\begin{pmatrix}1\\1/3\\0\\1/9\end{pmatrix}.$$

4. Se considera en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales definidos, para cada valor de los parámetros $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, por:

$$U_\lambda = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\, \lambda x + y + z + t = 0\} \qquad W_\mu = L(\{(1, \mu, 2, -1), (-1, -2, -\mu, 1)\}$$

Calcular un subespacio suplementario de W_μ en el espacio vectorial U_λ para todos los valores de los parámetros λ, μ donde tenga sentido hacerlo.

Para que el cálculo del subespacio complementario tenga sentido, debe ocurrir $W_\mu \subset U_\lambda$. Esto equivale a decir que los dos generadores de W_μ satisfagan la ecuación implícita que define U_λ, esto es:

$$\lambda + \mu + 2 - 1 = 0, \qquad -\lambda + -2 - \mu + 1 = 0.$$

Claramente, ambas ecuaciones son dependientes y equivalen a:

$$\lambda = -\mu - 1$$

por lo que supondremos siempre que se satisface esta relación.

Para calcular el subespacio pedido, calcularemos una base de W_μ y la ampliaremos hasta una de U_λ, con $\lambda = -\mu - 1$. Estudiaremos previamente U_λ, puesto que es ahí donde se llevará a cabo la ampliación. Como está definido por una única ecuación implícita (trivialmente independiente) con cuatro incógnitas, tendrá siempre dimensión 3 ($= 4 - 1$). Para calcular una base suya, basta con despejar la coordenada t en esa ecuación implícita, obteniéndose para $\lambda = -\mu - 1$:

$$B_{U_{\lambda=-\mu-1}} = \{(1, 0, 0, \mu + 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}.$$

Para calcular una base de W_μ realizamos transformaciones elementales por filas en la matriz formada por los generadores de este espacio:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -\mu & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \mu & 2 & -1 \\ 0 & \mu - 2 & 2 - \mu & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente, esta matriz tiene rango 2 para $\mu \neq 2$ y rango 1 para $\mu = 2$. Estudiemos cada caso.

Caso $\mu \neq 2$. Una base de W_μ es[3]:

$$B_{W_\mu} = \{(1, \mu, 2, -1), (0, \mu - 2, 2 - \mu, 0)\}.$$

Para ampliarla a una base de $U_{\lambda=-\mu-1}$ escogemos entre los vectores de la base $B_{U_{\lambda=-\mu-1}}$. Resulta inmediato que, si escogemos el tercer vector de esta base, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu & 2 & -1 \\ 0 & \mu - 2 & 2 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es escalonada y tiene rango tres. Por tanto, este tercer vector sirve para ampliar una base de $W\mu$ hasta una base de $U_{\lambda=-\mu-1}$, y constituye una base de un subespacio suplementario como se requiere. En resumen: *para $\mu \neq 2$ el problema tiene sentido cuando $\lambda = -\mu - 1$ y el subespacio suplementario requerido puede tomarse como* $L\{(0, 0, 1, -1)\}$.

[3]Por supuesto, los dos vectores que generaban W_μ también forman una base en este caso, y podríamos usar esa base. Escogemos la obtenida tras las transformaciones elementales porque suele ser más simple a la hora de la práctica.

Caso $\mu = 2$. Una base de de W_μ para $\mu = 2$ es

$$B_{W_{\mu=2}} = \{(1, 2, 2, -1)\}$$

por lo que debemos ampliarla con dos vectores de la base de U_λ para $\lambda = -\mu - 1 = -3$. Resulta inmediato que podemos ampliarla con los dos últimos vectores, pues se obtiene una matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene rango tres. Se tiene así: *para* $\mu = 2$ *el problema tiene sentido cuando* $\lambda = -3$ *y el subespacio suplementario requerido puede tomarse como* $L\{(0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$.

GEOMETRÍA I
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
Primera prueba parcial (24/11/2017)

1. **[2 puntos]**. Sea $V(K)$ un e.v. y $H = \{w_1, \ldots, w_m\}$ un subconjunto de V. Demuéstrese:
   - H es linealmente independiente si y solo si para todo $v \in L(H)$ los escalares $a_1, \ldots, a_m \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^{m} a_i w_i$ están determinados de forma única.
   - H es un sistema de generadores si y sólo si para todo $v \in V$ el conjunto $H \cup \{v\}$ es un sistema de generadores.

2. **[2 puntos]**. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
   a) Sea V un espacio vectorial y U_1, U_2, U_3 tres subespacios suyos tales que $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = 0$. Entonces la suma de U_1 y $U_2 + U_3$ es una suma directa.
   b) Sea $V(K)$ un espacio vectorial, sea U un subespacio vectorial del que se conoce un sistema de generadores H_U y sea W otro subespacio vectorial del que se conocen las ecuaciones implícitas en una base B. Si las coordenadas en B de ninguno de los vectores de H_U satisfacen las ecuaciones implícitas de W entonces $U \cap W = \{0\}$.

3. **[3 puntos]**. En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{C})$, se considera el subespacio de sus matrices simétricas $S_2(\mathbb{C})$ y los conjuntos ordenados:
$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right), \quad B' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$
   Se pide:
   - Justificar que B y B' son bases de $S_2(\mathbb{C})$.
   - Calcular la matriz $M(I, B' \leftarrow B)$ de cambio de base de B a B'.
   - Dada una matriz simétrica cualquiera $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{C})$, calcular sus coordenadas en B'.

4. **[3 puntos]**. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales dependientes de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} Z &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \\ U_\lambda &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \ \ -2x_1 - x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 0\} \\ W_\mu &= L\{(-\mu, 1 + \mu, -2 - \mu, 1 + \mu), (-\mu, 2\mu, -3\mu, 2\mu)\} \end{aligned}$$
   Determinar para qué valores de λ y μ se verifica: $Z = U_\lambda \oplus W_\mu$.
   Determinar, para los valores de λ, μ en los que tenga sentido, una base B_{U_λ} de U_λ y una B_{W_μ} de W_μ de modo que $B_{U_\lambda} \cup B_{W_\mu}$ sea una base de Z.

Duración: 2:30 min.

1. Sea $V(K)$ un e.v. y $H = \{w_1, \dots, w_m\}$ un subconjunto de V. Demuéstrese:

   - H es linealmente independiente si y solo si para todo $v \in L(H)$ los escalares $a_1, \dots, a_m \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^m a_i w_i$ están determinados de forma única.
   - H es un sistema de generadores si y sólo si para todo $v \in V$ el conjunto $H \cup \{v\}$ es un sistema de generadores.

Primer apartado. Para demostrar la condición necesaria (implicación a la derecha) supongamos que un mismo vector $v \in L(H)$ se expresa de dos maneras como combinación lineal de H, esto es,

$$v = \sum_{i=1}^m a_i w_i = \sum_{i=1}^m b_i w_i$$

para ciertos escalares $a_i, b_i \in K, i = 1, \dots, m$. Restando la última expresión y operando en el espacio vectorial se obtiene:

$$0 = \sum_{i=1}^m a_i w_i - \sum_{i=1}^m b_i w_i = \sum_{i=1}^m (a_i - b_i) w_i = (a_1 - b_1) w_1 + \cdots + (a_n - b_n) w_m.$$

Como el conjunto $H = \{w_1, \dots, w_n\}$ es linealmente independiente por hipótesis, todos los coeficientes de esta combinación deben ser nulos. Así se tiene $a_i - b_i = 0$, esto es, $a_i = b_i$ para todo $i = 1, \dots, m$. En consecuencia, las dos expresiones de v como combinación lineal de H coinciden.

Para la condición suficiente, supongamos por el contrarrecíproco que H es linealmente dependiente. Entonces existen escalares $a_1, \dots, a_m \in K$, no todos nulos tales que:

$$a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m = 0.$$

Como el vector 0 también se puede expresar como la combinación lineal

$$0\, w_1 + \cdots + 0\, w_m = 0,$$

se ha obtenido un vector $v \in V$ (el vector 0) que se expresa de dos formas distintas como combinación lineal de[1] H.

Segundo apartado. Para la condición necesaria, como $H \subset H \cup \{v\}$ se sabe que $L(H) \subset L(H \cup \{v\})$ (de hecho, cualquier combinación lineal $\sum_{i=1}^m a_i w_i \in L(H)$ puede verse como la combinación lineal $(\sum_{i=1}^m a_i w_i) + 0\, v$ de elementos de $H \cup \{v\}$), por lo que el resultado se sigue de que, por hipótesis, $L(H) = V$.

Para la condición suficiente, obsérvese que se parte de que $H \cup \{v\}$ es un sistema de generadores para cualquier vector $v \in V$, en particular, para $v = 0$. Por tanto, $H \cup \{0\}$ es un sistema de generadores y, como $0 \in L(H)$, se le puede suprimir de $H \cup \{0\}$ manteniéndose la propiedad de ser un sistema de generadores para H.[2]

[1] De hecho, no sólo el vector $v = 0$ verifica esta propiedad, sino también cualquier otro $v \in V$ (compruébese como ejercicio).

[2] De hecho, se podría haber tomado como v cualquier otro vector de $L(H)$ y el razonamiento se mantendría.

2. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   1. Sea V un espacio vectorial y U_1, U_2, U_3 tres subespacios suyos tales que $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = 0$. Entonces la suma de U_1 y $U_2 + U_3$ es una suma directa.
   2. Sea $V(K)$ un espacio vectorial, sea U un subespacio vectorial del que se conoce un sistema de generadores H_U y sea W otro subespacio vectorial del que se conocen las ecuaciones implícitas en una base B. Si las coordenadas en B de ninguno de los vectores de H_U satisfacen las ecuaciones implícitas de W entonces $U \cap W = \{0\}$.

1. FALSA. Contraejemplo:

Tómese en $\mathbb{R}^2$ los subespacios $U_1 := L\{(1,0)\}, U_2 := L\{(0,1)\}, U_3 := L\{(1,1)\}$. Claramente sus intersecciones dos a dos son todas iguales a $\{0\}$ pero $U_2 + U_3 = L\{(0,1),(1,1)\} = \mathbb{R}^2$, por lo que $U_1 \subset U_2 + U_3$ y la suma requerida no es directa.

2. FALSA. Contraejemplo:

Tómese en $V = \mathbb{R}^2$ como B la base usual B_u, y como subespacios:

- $U = \mathbb{R}^2$, con $H_U = B_u$.
- $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$.

Claramente, ninguno de los dos vectores de B_u satisface la ecuación implícita que define a W, pero $W \subset U$, por lo que $U \cap W = W \neq \{0\}$.

3. En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{C})$, se considera el subespacio de sus matrices simétricas $S_2(\mathbb{C})$ y los conjuntos ordenados:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right), \quad B' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Se pide:

- Justificar que B y B' son bases de $S_2(\mathbb{C})$.
- Calcular la matriz $M(I, B' \leftarrow B)$ de cambio de base de B a B'.
- Dada una matriz simétrica cualquiera $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{C})$, calcular sus coordenadas en B'.

Es conocido (y fácil de demostrar directamente) que $S_2(\mathbb{C})$ es un espacio vectorial de dimensión 3, siendo una base suya $B_u^s = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. En el caso de que B y B' sean bases, se tendría directamente:

$$M(I, B_u^s \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \qquad M(I, B_u^s \leftarrow B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El hecho de que B y B' son bases se justifica en el momento en que comprobemos que estas matrices tienen rango 3. Esto es inmediato para la primera (es escalonada sin ninguna fila idénticamente nula), mientras que para la segunda quedará demostrado si se puede calcular su matriz inversa[3]. Usando ya el procedimiento de Gauss-Jordan, ya el cálculo mediante determinantes y adjuntos, se obtiene explícitamente esta inversa, que es entonces igual a $M(I, B' \leftarrow B_u^s)$. Concretamente:

$$M(I, B' \leftarrow B_u^s) = M(I, B_u^s \leftarrow B')^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resulta inmediato entonces calcular $M(I, B' \leftarrow B) = M(I, B' \leftarrow B_u^s) \cdot M(I, B_u^s \leftarrow B)$, esto es:

$$\mathbf{M(I, B' \leftarrow B)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & -1/2 & i/2 \\ -1/2 & 1/2 & i/2 \end{pmatrix}$$

Para el último apartado, obsérvese que $A_{B_u^s} = (a, b, c)^t$ por lo que:

$$\mathbf{A_{B'}} = M(I, B' \leftarrow B_u^s) \cdot A_{B_u^s} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b-c)/2 \\ (a-b+c)/2 \\ (-a+b+c)/2 \end{pmatrix}.$$

[3] No obstante, se puede justificar directamente que B' es una base. P. ej., como $S_2(\mathbb{R})$ tiene dimensión 3 y es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{C})$, basta con demostrar que B' forma un conjunto linealmente independiente en $M_2(\mathbb{C})$. Para ello, es suficiente demostrar que tiene rango 3 la matriz cuyas filas son las coordenadas de los elementos de B' en la base usual de $M_2(\mathbb{C})$, esto es, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Esto es fácil haciendo transformaciones elementales para llegar a una matriz escalonada en la que ninguna fila es nula (permútense las filas para que la primera fila pase a ser la tercera, y réstensele las otras dos).

4. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales dependientes de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Z &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 |\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \\ U_\lambda &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 |\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \quad -2x_1 - x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 0\} \\ W_\mu &= L\{(-\mu, 1 + \mu, -2 - \mu, 1 + \mu), (-\mu, 2\mu, -3\mu, 2\mu)\} \end{aligned}$$

Determinar para qué valores de λ y μ se verifica: $Z = U_\lambda \oplus W_\mu$.

Determinar, para los valores de λ, μ en los que tenga sentido, una base B_{U_λ} de U_λ y una B_{W_μ} de W_μ de modo que $B_{U_\lambda} \cup B_{W_\mu}$ sea una base de Z.

La dimensión de Z es 3 (al ser solución de un SEL homogéneo de 4 incógnitas y una ecuación linealmente independiente), por lo que son condiciones *necesarias* para que se verifique la suma directa:
(a) $U_\lambda \subset Z$, $W_\mu \subset Z$
(b) $\dim U_\lambda + \dim W_\mu = 3$.[4]
Determinemos los valores de los parámetros para los que se verifica (a). La primera inclusión se verifica si toda solución de las ecuaciones de U_λ es también una solución de las ecuaciones de Z, esto es, si la ecuación que define Z es combinación lineal de las de U_λ. Claramente, las dos ecuaciones lineales que definen U_λ son independientes para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. De hecho,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6+\lambda & 9 \end{pmatrix} \tag{1}$$

que es escalonada con ninguna de sus filas idénticamente nulas. Por tanto, $U_\lambda \subset Z$ si y sólo si al añadir a la matriz anterior como última fila los coeficientes de la ecuación Z, se obtiene una matriz de rango 2. Como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6+\lambda & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6+\lambda & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 6+\lambda & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

el rango es 2 si y sólo si $\lambda = 0$. Es decir: $\mathbf{U_\lambda \subset Z \Leftrightarrow \lambda = 0}$.

Por otra parte, es inmediato comprobar que los dos generadores de W_μ satisfacen la ecuación que define Z (esto es: $-\mu + (1+\mu) + (-2-\mu) + (1+\mu) = 0$; $-\mu + 2\mu - 3\mu + 2\mu = 0$). En consecuencia, esos dos generadores y, por tanto, todo el subespacio W_u generado por ellos están incluidos en Z. Es decir $\mathbf{W_\mu \subset Z}, \forall \mu \in \mathbb{R}$.

En resumen: **(a) se verifica si y sólo si $\lambda = 0$, sin ninguna restricción para μ.**

Determinemos los valores de λ, μ para los que se verifica (b). Como las dos ecuaciones que definen U_λ eran siempre independientes, $\mathbf{dim\ U_\lambda = 2}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$**.** Parea determinar la dimensión de W_μ veamos hasta cuántos vectores de su sistema de generadores pueden formar un conjunto linealmente independiente:

$$\begin{pmatrix} -\mu & 1+\mu & -2-\mu & 1+\mu \\ -\mu & 2\mu & -3\mu & 2\mu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\mu & 1+\mu & -2-\mu & 1+\mu \\ 0 & \mu-1 & 2-2\mu & \mu-1 \end{pmatrix}$$

Se distinguen entonces los siguientes casos. Para $\mu = 0$, el rango es 1 (la segunda fila es menos la primera). Para $\mu \neq 0$, el rango será 2 si algún elemento de la segunda fila es distinto de 0, y el rango será 1 en caso contrario. Como la segunda fila es nula si y sólo si $\mu = 1$, se tiene: **dim $\mathbf{W_\mu = 1}$, si $\mu \in \{\mathbf{0, 1}\}$ y dim $\mathbf{W_\mu = 2}$ en caso contrario.**

En resumen: **(b) se verifica si y sólo si $\mu \in \{0, 1\}$, sin ninguna restricción para λ.**

[4] Esta porque por la fórmula de Grassmann dim U_λ + dim $W_\mu = \dim(U_\lambda + W_\mu) +$ dim $(U_\lambda \cap W_\mu) = \dim Z + 0 = 3$.

Como basta con considerar el problema cuando (a) y (b) se verifican, se tomarán $\lambda = 0$ y $\mu = 0, 1$. Por la fórmula de Grassmann, basta con comprobar $U_\lambda \cap W_\mu = \{0\}$. En el caso $\mu = 0$ el vector $(0, 1, -2, 1)$, el cual genera $W_{\mu=0}$, satisface las dos ecuaciones implícitas que definen $U_{\lambda=0}$, por lo que la intersección no es nula. Sin embargo, para $\mu = 1$ el generador $(-1, 2, -3, 2)$ no genera esas ecuaciones, por lo que la intersección sólo puede ser $\{0\}$. Esto es:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U}_\lambda \oplus \mathbf{W}_\mu \Longleftrightarrow \lambda = \mathbf{0} \ \ \mathbf{y} \ \ \mu = 1.$$

Respecto al último punto, se obtendrá una base de Z como la unión de una de U_λ y una de W_μ si y sólo si $Z = U_\lambda \oplus W_\mu$, esto es, cuando $\lambda = 0, \mu = 1$. Para la base de $U_{\lambda=0}$, resolvemos el SEL que lo define. Tomando las matrices (1) con $\lambda = 0$ y realizando transformaciones elementales por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Así, podemos considerar las variables x_3, x_4 como parámetros, y se obtienen las soluciones

$$x_1 = x_3 + 2x_4, \qquad x_2 = -2x_3 - 3x_4 \qquad (x_3 = x_3, x_4 = x_4).$$

Las elecciones canónicas de los parámetros proporcionan entonces la base

$$\mathbf{B}_{\mathbf{U}_{\lambda=0}} = \{(\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}), (\mathbf{2}, -\mathbf{3}, \mathbf{0}, \mathbf{1})\}.$$

Para calcular la base de $W_{\mu=1}$, el sistema de generadores que se obtuvo $\{(-1, 2, -3, 2)\}$ es trivialmente linealmente independiente, esto es:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{W}_{\mu=1}} = \{(-\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{3}, \mathbf{2})\}.$$