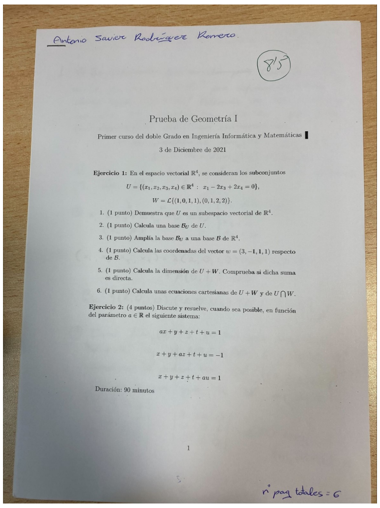
Parcial DGIIM 2021 T.1y2

domingo, 23 de enero de 2022 11:35



Antonio Savier Rodríguez Romero.

8'5

Prueba de Geometría I

Primer curso del doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

3 de Diciembre de 2021

Ejercicio 1: En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, se consideran los subconjuntos

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0\},$$

$$W = \mathcal{L}\{(1,0,1,1),(0,1,2,2)\}.$$

1. (1 punto) Demuestra que U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.
2. (1 punto) Calcula una base $\mathcal{B}_U$ de U.
3. (1 punto) Amplía la base $\mathcal{B}_U$ a una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.
4. (1 punto) Calcula las coordenadas del vector $w = (3,-1,1,1)$ respecto de $\mathcal{B}$.
5. (1 punto) Calcula la dimensión de $U+W$. Comprueba si dicha suma es directa.
6. (1 punto) Calcula unas ecuaciones cartesianas de $U+W$ y de $U \bigcap W$.

Ejercicio 2: (4 puntos) Discute y resuelve, cuando sea posible, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema:

$$ax + y + z + t + u = 1$$

$$x + y + az + t + u = -1$$

$$x + y + z + t + au = 1$$

Duración: 90 minutos

1

nº pag totales = 6

1.- $\mathbb{R}^4$ $\quad U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0\}$

$W = \mathcal{L}(\{(1,0,1,1),(0,1,2,2)\})$

1.1: Por definición, $\forall v \in U$ $v \in \mathbb{R}^4$, luego $U \subseteq \mathbb{R}^4$. Tendremos además que este está definida por una ec. cartesiana, luego como $\dim_{\mathbb{R}}(U) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) - $ nº ec. cartesianas se tratará de un subespacio vectorial de dimesión 3.

1.2: $x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0$. Para encontrar la sol. general a esta ecuación de 3 incógnitas necesitaremos 2 parámetros $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ más otro para x_2 $(\beta \in \mathbb{R}$

$$x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = \lambda \\ x_4 = \mu \\ x_1 = 2\lambda - 2\mu \\ x_2 = \beta \end{cases} \Longleftrightarrow \forall v \in U \quad v = \lambda(2,0,1,0) + \mu(-2,0,0,1) + \beta(0,1,0,0)$$

Una posible $B_U = \{(2,0,1,0),(-2,0,0,1),(0,1,0,0)\}$

1.3. Para ello necesitaremos encontrar $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tq sea L.I con los demás, por ejemplo $(0,0,1,0)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango} = 4 \Longrightarrow 4 \text{ vectores L.I.}$$

Una posible B de $\mathbb{R}^4$ será $\{(2,0,1,0),(-2,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$

1.4.- $w = \lambda(2,0,1,0) + \mu(-2,0,0,1) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(0,0,1,0)$

$$\left.\begin{cases} 3 = 2\lambda - 2\mu \Rightarrow 3 = 2\lambda - 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{5}{2}} \\ -1 = \beta \Longrightarrow \boxed{\beta = -1} \\ 1 = \lambda + \gamma \Longrightarrow \boxed{\gamma = -\frac{3}{2}} \\ 1 = \mu \Longrightarrow \boxed{\mu = 1} \end{cases}\right\} w = \left(\frac{5}{2}, 1, -1, -\frac{3}{2}\right)$$

1.5. $U+W$. Un sistema generador de $U+W$ será:

$$S = B_U \cup B_W = \{(2,0,1,0),(-2,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,1,1),(0,1,2,2)\}$$

Sin embargo, $(0,1,2,2) = 2\cdot(2,0,1,0) + 2\cdot(-2,0,0,1) + 1\cdot(0,1,0,0)$

Luego $(0,1,2,2)$ es L.D

Comprobamos si el resto son L.I.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 2 = 1 \neq 0$$

Luego los 4 restantes son L.I. $\dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 4$

La suma no es directa ya que $U \cap W \neq \{0\}$, porque por ejemplo, $(0,1,2,2) \in U \wedge (0,1,2,2) \in W \Rightarrow (0,1,2,2) \in U \cap W$

1.6.- $U+W$: como $\dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 4 \Longrightarrow$ nº ec. cartesianas $= \cancel{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)}^{4} - \cancel{\dim_{\mathbb{R}}(U+W)}^{4} = 0$

Luego $U+W$ no tiene ecuaciones cartesianas

$U \cap W$: primero obtendré las ec. cartesianas de W:

$$\forall v \in W \quad v = \lambda(1,0,1,1) + \mu(0,1,2,2) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = \lambda + 2\mu \\ x_4 = \lambda + 2\mu \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 + 2x_2 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Las ec. cartesianas de $U \cap W$ serán:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2-F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

2:

$$\begin{cases} ax + y + z + t + u = 1 \\ x + y + az + t + u = -1 \\ x + y + z + t + au = 1 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) = A|B$$

Si $a = 1 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Como $rg(A) \neq rg(A|B)$, por Rouché-F. se trata de un sistema incompatible, no tendrá solución

Si $a \neq 1$: $rg(A) = rg(A|B) = 3 <$ nº incógnitas $\Longleftrightarrow$ S.C.I por Rouché-F

nº parám. = $\underbrace{\text{nº incógnitas}}_{5} - \underbrace{\text{nº ecuaciones}}_{3} = 2 \Longrightarrow \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-aF_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 1-a & -2 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 1-a & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z + t + au = 1 \\ \cancel{(1-a)}(y + z + t - au) = \cancel{(1-a)}(1) \\ (a-1)z + (1-a)u = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z + t + au = 1 \\ y + z + t - au = 1 \\ (a-1)z + (1-a)u = -2 \end{cases}$$

$u = \mu \Longrightarrow z = \dfrac{-2 + (a-1)\mu}{(a-1)} = -\dfrac{2}{a-1} + \mu$

$y = \lambda \Longrightarrow t = 1 - z - y + au = 1 + \dfrac{2}{a-1} - \mu - \lambda + a\mu$

$t = \dfrac{a+1}{a-1} + (a-1)\mu - \lambda$

$x = 1 - y - z - t - au = \cancel{1} - \cancel{\lambda} + \dfrac{2}{\cancel{a}-1} - \mu - \dfrac{a+\cancel{1}}{\cancel{a}-1} - (a-1)\mu + \cancel{\lambda}$

$x = -(a-2)\mu = (2-a)\mu$

$(x, y, z, t, u) = \left((2-a)\mu, \lambda, -\dfrac{2}{a-1} + \mu, \dfrac{a+1}{a-1} + (a-1)\mu - \lambda, \mu\right) \ \forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$