Extraordinaria 15-16

lunes, 17 de enero de 2022 17:48

1) Teoría

2) a) $\sup(A) = \max(A)$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

Falso. Por ejemplo, si $A = [0, 1[$

$\sup(A) = 1$ pero $1 \notin A$, con lo que este no puede ser su máximo

b) $\sum b_n$ convergente $b_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ acotada $a_n \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \sum a_n b_n$ converge

$\{b_n\} \searrow 0$ $\quad \{a_n\}$ acotada $\quad \{a_n b_n\}$ convergente en 0

$\sum a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 \dots + a_n b_n$

Si usamos el criterio de comparación con $\sum b_n$. Por hipótesis: $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $a_n \leq k \ \forall n \in \mathbb{N}$

luego $\{k b_n\} \geq \{a_n b_n\} \Rightarrow \sum k b_n$ converge por hipótesis

luego $\sum a_n b_n$ también

c) $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ continua $\quad$ f acotada

Falso. Por ejemplo, si $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \operatorname{Im}(f) = \underbrace{]1, +\infty[}$

↪ No acotada superiormente

d) $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e inyectiva. f. estrictamente monótona

Falso. Por ejemplo $f : [0,1] \cup [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ -x+5 & x \in [2,3] \end{cases}$$

3.- i) $$\left\{ \frac{x_1 + \frac{x_2}{2} \dots + \frac{x_n}{n}}{\ln(n+1)^2} \right\} \longrightarrow \frac{x}{\underset{n \to +\infty}{\longleftarrow} \ln(n+1)^2} = \frac{x}{+\infty} = 0$$

4.- a) $$\sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$$

$$\left\{ \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2} \right\}$$

$$\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2}\right\}$$

Por comparación con $\sum \frac{e}{n^2}$

$$\left\{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{\cancel{n^2}}}{\frac{e}{\cancel{n^2}}}\right\} = \left\{\frac{\cancel{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}^{\,e}}{e}\right\} \longrightarrow 1 \Longrightarrow \text{Convergente}$$

b) $\sum (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1} = \sum a_n$

Estudiaré primero $\sum |a_n|$

$$\left\{\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right\}$$

$a_1 + a_2 \dots + a_n$

$a_1 + 4a_2 \dots + 2^n a_{2^n}$

Por comparación con $\sum \frac{1}{n+1}$

$$\left\{\frac{\ln(n+1)\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}}\right\} = \{\ln(n+1)\} \longrightarrow +\infty \Longrightarrow \text{Divergente}$$

Con lo que $\sum a_n$ tampoco convergerá absolutamente

por el criterio de Leibnitz

Pero podrá ser convergente aunque

no absolutamente