Interpolación polinomial

4/6/22 9:59

Sean $n+1$ datos experimentales $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)\}$

Buscamos $g(x)$ que interpole estos datos

Tipos:

- Polinomial: $g(x) \in \mathbb{P}_n$
- Func. Spline: $g(x) \in S_n(x_0, x_1 \dots x_n)$
- Trigonométrica $g(x) \in \langle \operatorname{sen}(jw), \cos(jx), j = 0, 1, \dots \rangle$
- Racional $g(x) \in R_{m,n} = \{ \frac{p(x)}{q(x)} : p(x) \in \mathbb{P}_m, q(x) \in \mathbb{P}_n \}$

Teorema: con $n+1$ puntos (x_i, y_i)
$\exists!$ $p(x)$ tq $gr(p(x)) \in n$ $\wedge$ $p(x)$ interpola estos datos

Método 1. Coef. Indet.

Sea $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

Se tiene que cumplir $\forall i = 0, 1 \dots n$ $\quad p(x_i) = y_i$

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n &= y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n &= y_1 \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n &= y_n
\end{aligned}
$$

Determ. Vandermonde $:= V(x_0, x_1 \dots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$

$$V(x_0, x_1 \dots x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0 \iff x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$$

Método 2. Fórmula de Lagrange

$\forall\, 0 \leq k \leq n$, definimos

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \qquad (\forall i \neq k \quad \ell_k(x_i) = 0 \ \wedge \ \ell_k(x_k) = 1) //$$

$\{\ell_k(x) ; k = 0, 1, \dots n\}$ = base de $\mathbb{P}_n$

Fórmula de Lagrange: $\quad p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, \ell_k(x)$

Método 3. Fórmula de Newton

Sea $p_{n-1}(x)$ que interpola (x_i, y_i) $\quad i = 0, 1 \dots n-1$

Entonces:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + D_n (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

donde:

$$D_n = \frac{y_n - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

Como consecuencia:

$$p_n(x) = D_0 + D_1(x - x_0) + \dots + D_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Def.- $D_k := f[x_0 \dots x_k]$ = dif. dividida de orden k

Tabla de diferencias dividiadas

x_0	$f(x_0) = D_0$			
		$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = D_1$		
x_1	$f(x_1)$		$\frac{f[x_1, x_2] - D_1}{x_2 - x_0} = D_2$	
		$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f[x_1, x_2]$		$\frac{f[x_1, x_2, x_3] - D_2}{x_3 - x_0} = D_3$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

$$p_3(x) = f(x_0) + D_1(x - x_0) + D_2(x - x_0)(x - x_1) + D_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) //$$

Método 3.1. Hermite

"Newton pero con derivadas"

Sean los datos: $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)) \dots (x_n, f(x_n))$
$(x_0, f'(x_0)), (x_1, f'(x_1)) \dots (x_n, f'(x_n))$
$\vdots$
$(x_0, f^{(k_0-1)}(x_0)), (x_1, f^{(k_1-1)}(x_1)) \dots (x_n, f^{(k_n-1)}(x_n))$

Entonces tendremos $m = k_0 + k_1 \dots + k_n$ datos de interpolación

$p(x)$ de grado menor o igual que $m-1$

Tabla dif. divididas:

Ejemplo:

x_i:	-1	0	2
$f(x_i)$:	2	1	59
$f'(x_i)$:	1	-1	—
$f''(x_i)$:	-12	—	—

Tabla:

-1	2					
		$\frac{1}{1!} = 1$				
-1	2		$\frac{-12}{2!} = -6$			
		$\frac{1}{1!} = 1$		4		
-1	2		-2		-2	
		$\frac{1-2}{0+1} = -1$		2		1
0	1		0		1	
		-1		5		
0	1		15			
		$\frac{58}{2} = 29$				
2	59					

Luego $p_5(x) = 2 + (x+1) - 6(x+1)^2 + 4(x+1)^3 - 2(x+1)^3 x + (x+1)^3 x^2 //$