Error de interpolación

4/6/22 10:44

Teorema: Sean $x_0, x_1, \dots x_n \in [a,b]$ y $f \in C^{n+1}[a,b]$

$p_n(x)$ polin. de interpolación de estos.

Entonces $\exists \xi \in [a,b]$ tq

$$\text{error}(x) = e(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Ejemplo: Error $f(8'4)$

Interpolado con $f(8'3) = 17'56492$

$f(8'6) = 18'50515$

$f(8'7) = 18'82091$

$f(t) = t\ln t$

Tenemos $x_0 = 8'3$, $x_1 = 8'6$, $x_2 = 8'7 \Longrightarrow n = 2$

$f(t) = t\ln t \Longrightarrow f'(t) = \ln t + \frac{t}{t} = \ln t + 1$

$f''(t) = \frac{1}{t}$

$f'''(t) = -\frac{1}{t^2}$

Luego $\exists \xi \in [8'3, 8'7]$ tq $e(8'4) = f(8'4) - p_2(8'4) = \frac{-1/\xi^2}{3!} (8'4 - 8'3)(8'4 - 8'6)(8'4 - 8'7)$

$$e(8'4) = \frac{-1}{\xi^2 \cdot 6} (0'1)(-0'2)(-0'3) = \frac{-0'001}{\xi^2}$$

Como $\xi \in [8'3, 8'7]$ $|e(8'4)| < \frac{0'001}{8'3^2} = 1'452 \cdot 10^{-5}$ //

Polinomios de Chebyshev:

Con la relación de recurrencia:

$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$ para $n \geq 1$

y $T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

obtenemos los polinomios Chebyshev de primera especie

$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$ $|T_n(x)| \leq 1$ $\forall x \in [-1,1]$

Proposición: $T_n(x)$ tendrá n ceros reales y distintos en $[-1,1]$

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \quad k = 0, 1, \dots n-1$$

Con $T_{n+1}(x) \Longrightarrow (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$

Si $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ $\forall x \in [-1,1]$

$\frac{1}{2^n}|T_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$

$$|e_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!\, 2^n} \leq \frac{M}{(n+1)!\, 2^n} \longrightarrow 0$$

Con lo que el error tenderá a 0 conforme aumente n.