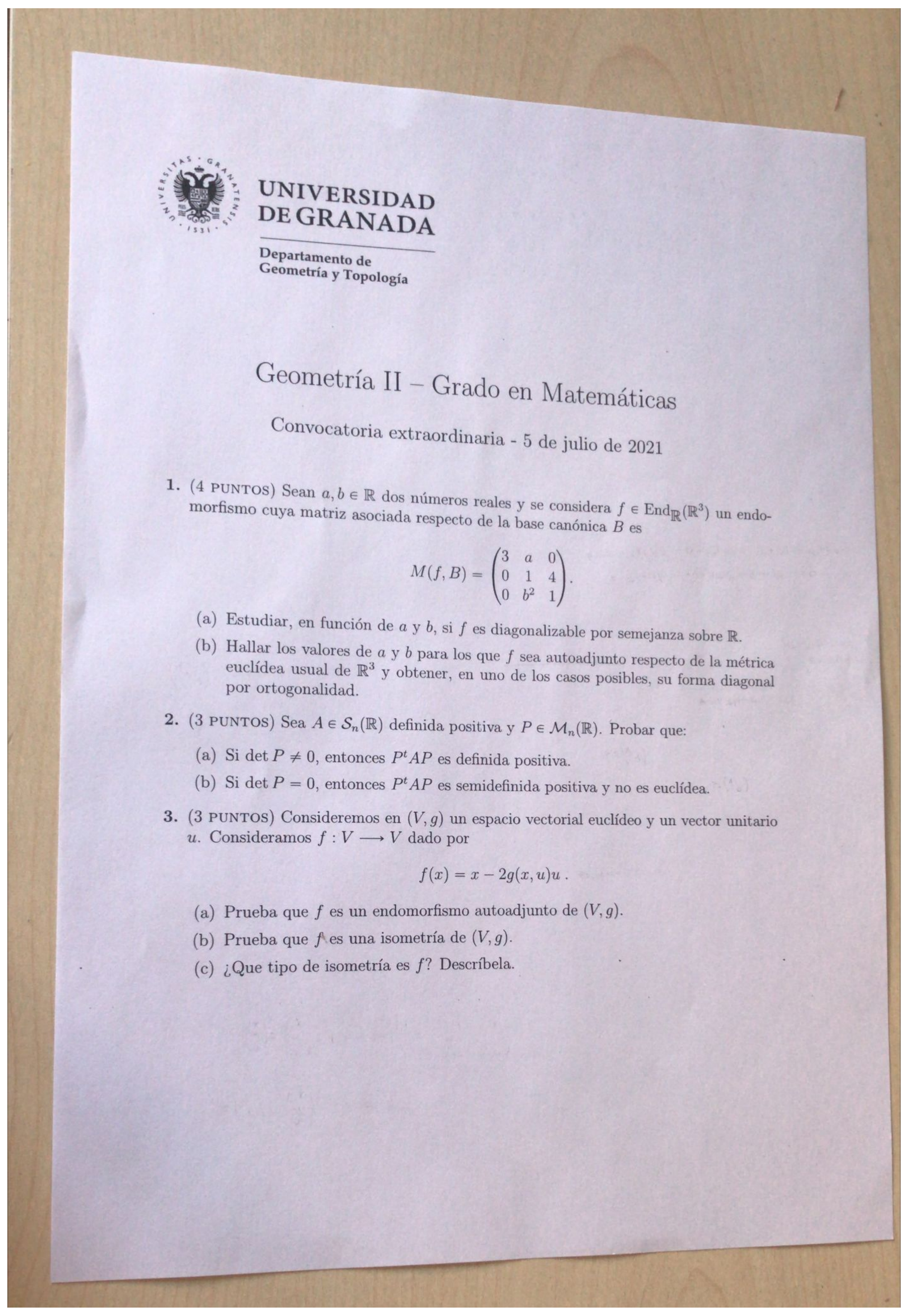
13/6/22 12:00



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Geometría y Topología

Geometría II – Grado en Matemáticas

Convocatoria extraordinaria - 5 de julio de 2021

1. (4 PUNTOS) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos números reales y se considera $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ un endomorfismo cuya matriz asociada respecto de la base canónica B es

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & b^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Estudiar, en función de a y b, si f es diagonalizable por semejanza sobre $\mathbb{R}$.

(b) Hallar los valores de a y b para los que f sea autoadjunto respecto de la métrica euclídea usual de $\mathbb{R}^3$ y obtener, en uno de los casos posibles, su forma diagonal por ortogonalidad.

2. (3 PUNTOS) Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ definida positiva y $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Probar que:

(a) Si $\det P \neq 0$, entonces $P^t A P$ es definida positiva.

(b) Si $\det P = 0$, entonces $P^t A P$ es semidefinida positiva y no es euclídea.

3. (3 PUNTOS) Consideremos en (V, g) un espacio vectorial euclídeo y un vector unitario u. Consideramos $f : V \longrightarrow V$ dado por

$$f(x) = x - 2g(x,u)u\,.$$

(a) Prueba que f es un endomorfismo autoadjunto de (V, g).

(b) Prueba que f es una isometría de (V, g).

(c) ¿Que tipo de isometría es f? Descríbela.

3.- $f(x) = x - 2g(x,u)u$ $\quad u$ unitario $(\|u\| = 1)$

a) f autoadjunto de (V, g)

$g(f(x), y) = g(x, f(y)) \quad \forall x, y \in V$

$\measuredangle(u,y) = \measuredangle(x,y)$

$-\measuredangle(y,u) = \measuredangle$

$g(f(x),y) = g(x - 2g(x,u)u, y) = g(x,y) - 2g(x,u)g(u,y) = g(x,y) - 2g(u, x \ast y)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

$g(x, f(y)) = g(x, y - 2g(y,u)u) = g(x,y) - 2g(y,u)g(x,u) = g(x,y) - 2g(u, x \ast y)$

Sea $B = \{v_1, v_2 \dots v_{n-1}, u\}$ base de V con $v_i \in V$ $i = 1, 2 \dots n-1$

(Siendo $\dim_{\mathbb{K}} V = n$)

$M(f,B) \equiv I_n - 2 \cdot (M(g,B)(0,0 \dots 1)^t) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

con lo que

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ulcorner g(u,y) - 2g(y,u)\cancel{g(u,u)}^{1}$

b) $g(f(x), f(y)) = g(x - 2g(x,u)u, y - 2g(y,u)u) = g(x, y - 2g(y,u)u) - 2g(x,u)g(u, y - 2g(y,u)u) =$

$\hookrightarrow g(x,y) - 2g(y,u)g(x,u) - 2g(x,u)(-g(y,u)) =$

$= g(x,y) - \cancel{2g(u, x \ast y)} + \cancel{2g(u, x \ast y)} = g(x,y)$ //

c) Sea $B = \{v_1, v_2 \dots v_{n-1}, u\}$ base de V, siendo $n = \dim_{\mathbb{K}} V$, ortonormal $(v_1, v_2 \dots v_{n-1}$ unitarios ortog.$)$

Para $f(x)$: $M(f,B) = I_n - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$ siendo $\alpha = 2(0,0 \dots 1)_B M(g,B) \cdot x$

Sabemos que, como B ortonormal $\Rightarrow M(f,B) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & R_\theta \end{array}\right)$ siendo $r = n-2$ y $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2\|x\|\cos\theta \end{pmatrix}$

Como $\forall v \in V$ tq $v = (a_1, a_2 \dots a_{n-1}, 0)_B$ $f(v) = v \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} V_1 = n-1 \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} V_1^{\perp} = 1$

Se tratará de una de simetría ortogonal sobre el plano vectorial $L(\{v_1, v_2 \dots v_{n-1}\})$