2020-06-01 Ex tema 3 Ros

13/6/22 16:55

2020-06-01 Ex tema 3 Ros

Prueba 3, Geometría II, Grupo A, 1 de Junio de 2020

1. Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar y la base usual

i) Clasificar y encontrar los elementos notables de la isometría f dada por

$$f(1,0,0) = (0,0,-1) \qquad f(0,1,0) = (1,0,0) \qquad f(0,0,1) = (0,1,0)$$

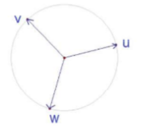
ii) Encontrar la matriz de la simetría respecto del plano vectorial

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, 2x + z = 0\}.$$

2. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar consideramos tres vectores u, v, w tales que

$$u + v + w = 0 \qquad \|u\| = \|v\| = \|w\| = 1$$



Entonces el ángulo (no orientado) entre u y v es $\angle\{u,v\} = \frac{2\pi}{3}$.

ii) Sobre un espacio vectorial Euclídeo (V^n, g) no existe ninguna isometría $f : V \longrightarrow V$ verificando

$$g(f(u), v) = -g(u, f(v)) \quad \forall u, v \in V$$

iii) En el espacio vectorial Euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$ consideramos dos rectas vectoriales ortogonales $L \perp L'$ y las isometrías $f, s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que f es un giro de eje L y ángulo $\theta \neq 0$ y s es una simetría axial de eje L'. Entonces $s \circ f$ es otra simetría axial.

Instrucciones.

La prueba cuenta 2 puntos en la nota final del curso (1 punto cada ejercicio).

Horario de la prueba. De 11:00 a 12:00

Después, hay que escanear todos los folios con el nombre y las soluciones y enviarlos desde vuestro correo de la ugr a *aros@ugr.es* antes de las 12 : 15.

1.- $(\mathbb{R}^3, g_0)$

i) $f(1,0,0) = (0,0,-1)$ $\quad f(0,1,0) = (1,0,0)$ $\quad f(0,0,1) = (0,1,0)$

$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det f = -1$

$\hookrightarrow p_f(\lambda) = -\lambda^3 - 1 \Rightarrow$ $\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & & +1 & -1 & +1 \\ \hline & -1 & +1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$ $(\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda-1)$

Sea $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (x,y,z)\}$

$\begin{cases} -z = x \\ x = y \\ y = z \end{cases} \begin{cases} x = y \\ x = z \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow (0,0,0) \Rightarrow V_1 = \{\vec{0}\}$

$V_{-1} = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = -(x,y,z)\}$

$\begin{cases} -z = -x \\ x = -y \\ y = z \end{cases} \begin{cases} x = z \\ x = -y \\ \cancel{y = z} \end{cases} \Rightarrow V_{-1} = L(\{(1,-1,1)\})$

Sea $B_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,-1,1)\}$

Busquemos con el algoritmo de Gram-Schmidt B_2 ortonormal $= \{v_1, v_2, v_3\}$

Empezaré desde v_3 para mantener el vector $(1,1,1)$

$\|(1,1,1)\| = \sqrt{3} \Rightarrow v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$v_2^* = (0,1,0) - \frac{g_0((0,1,0),(1,1,1))}{3}(1,1,1) = (-1/3, 2/3, -1/3)$ $\qquad \|v_2^*\| = 1/3 \cdot 2 = 2/3$

$v_2 = \frac{\cancel{3}}{2}(-1/\cancel{3}, 2/\cancel{3}, -1/\cancel{3}) = (-1/2, 1, -1/2)$

$v_3^* = (1,0,0) - 1/3(1,1,1) + \frac{1/2}{1}(-1/2, 1, -1/2) = ($

...

$\cancel{\text{Traza}}(f) = 1 + 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -1/2 \Rightarrow \theta = 2/3\pi$

Siendo $U = L\{(1,-1,1)\}$

f será una composición de giro de ángulo $2/3\pi$ en la orientación de $[B_u]$ con eje en U y una simetría ortogonal con respecto al plano $U^\perp$

ii) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + z = 0\} = L(\{(1,0,-2), (0,1,0)\})$

Buscamos $M(\sigma_U^\perp, B)$.

Sea B ortonormal $\quad B = \{v_1, v_2, v_3\}$

con el algoritmo de Gram-Schmidt, $(B^* = \{(0,1,0), (1,0,-2), (1,0,0)\})$

$v_1^* = (0,1,0) \Rightarrow v_1 = (0,1,0)$

$\|v_1^*\| = 1$

$v_2^* = (1,0,-2) - \frac{0}{1}(0,1,0) = (1,0,-2) \Rightarrow v_2 = 1/\sqrt{5}(1,0,-2)$

$\|(1,0,-2)\| = \sqrt{5}$

$v_3^* = (1,0,0) - \frac{\sqrt{5}}{5}(1,0,-2) = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = 1/5(5-\sqrt{5}, 0, 2\sqrt{5})$

$\|v_3^*\| = 1/5 \cdot (30 - 10\sqrt{5} + 20) = 10 - 2\sqrt{5} \Rightarrow v_3 = \frac{1}{50-10\sqrt{5}} v_3^* = \frac{1}{10}\left(1, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)$

Luego con $B = \{(0,1,0), 1/\sqrt{5}(1,0,-2), 1/10\left(1,0,\frac{2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)\}$

$M(\sigma_U^\perp, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.- i) $(\mathbb{R}^2, g_0)$ $\quad u, v, w \in \mathbb{R}$ $\quad u + v + w = 0$ $\quad \|u\| = \|v\| = \|w\| = 1$

Sea $\sigma_U^\perp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $U = L\{w\}$

$\sigma_U^\perp(x) = w - y$ $\quad$ donde $x = w + y$ $\quad w \in U$ $\quad y \in U^\perp$

$(u = -w - v)$

$\sigma_U^\perp(u) = -w + v$

Sea $B = \{w, v_1\}$ ortonormal

Gram-Schmidt: $v_1 = v - \frac{g_0(v,w)}{1}(w) = v - \cos\measuredangle(v,w)$

Con esta base $\Rightarrow M(\sigma_U^\perp, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$u = -w - v = (-1 - \cos\measuredangle(v,w), -1)_B$

$v = (\cos\measuredangle(v,w), 1)_B$

Podemos ver que $\sigma_U^\perp(v) = u \Rightarrow (\cos\measuredangle(v,w), 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (\cos\measuredangle(v,w), -1) = (-1 - \cos\measuredangle(v,w), -1)$

$-1 - \cos\measuredangle(v,w) = \cos\measuredangle(v,w)$

$-1/2 = \cos\measuredangle(v,w) \Rightarrow \measuredangle(v,w) = \measuredangle(v,u) = 2/3\pi$

ii) Supongamos que $\exists f : V^n \to V^n$ isometría tq $g(f(u), v) = -g(u, f(v))$ $\quad v, u \in V \quad v \neq 0 \neq u$

$g(f(u), v) + g(f(v), u) = 0$

Por ser isometría: $g(f(v), f(u)) = g(v, u)$

$g(f(f(u)), v) = -g(f(u), f(v)) = -g(u, v)$

$g(f(f(u)), u) = -g(f(u), f(u)) = -g(u, u)$

Falso. Ejemplo $f(u) = iu \Rightarrow$

iii) Sea $L = L\{w\}$ y $L' = L\{w'\}$ tq $\|w\| = \|w'\| = 1$

(No es restrictivo ya que si $\|w\| \neq 1 \Rightarrow w^* = \frac{1}{\|w\|} w$)

$w \perp w'$ luego una base ortonormal será $B = \{w \times w', w', w\}$

$M(f, B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M(s, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$M(s \circ f, B) = M(f, B) M(s, B) = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\det s \circ f = \cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta^2$

$V_1 : \begin{cases} -\cos\theta x + \operatorname{sen}\theta y = x \\ \operatorname{sen}\theta x + \cos\theta y = y \\ -z = z \Rightarrow z = 0 \end{cases} \begin{cases} -\alpha x + \beta y = x \\ \beta x + \alpha y = y \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} (-\alpha - 1)x + \beta y = 0 \\ \beta x + (\alpha - 1) y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} -\beta(\cancel{\alpha + 1})x + \beta^2 y = 0 \\ \beta(\alpha + 1)x + (\alpha^2 - 1) y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} \operatorname{sen}^2\theta \, y = 0 \\ \cancel{1 - \cos^2\theta y = 0} \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} \operatorname{sen}^2\theta y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Luego $\forall \theta \neq 0 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_1 = 1 \Rightarrow$ Se trata de un giro, luego falso