Funciones Spline

4/6/22 11:58

Def. Sea $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ partición de $[a,b]$

Spline de grado m relat a esa partición

es una función $s(x)$ que verifica:

i) $s(x) = p_i(x) \in P_m$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, \ldots n-1$

ii) $s(x) \in C^{m-1}[a,b] \Longleftrightarrow s^{(j)}(x_i^-) = s^{(j)}(x_i^+)$ $i = 1, \ldots n-1$ $j = 0, \ldots m-1$

Teorema: Si $S_m(x_0, \ldots x_n)$ conjunto de los splines de grado m con nodos $x_0, \ldots x_n$, será un e.v de dimensión $n+m$

Necesitaremos $n+m$ datos de interpolación

- Spline lineal $(m=1)$
  - $s(x_i) = f(x_i)$ $i = 0, 1 \ldots n$

- Spline cuadrático $(m=2)$
  - $s(x_i) = f(x_i)$ $i = 0, 1, \ldots n$
  - Dato adicional (Normalmente $f'(x_k)$ $k \in \{0, 1 \ldots n\}$)

- Spline cúbicos $(m=3)$
  - $s(x_i) = f(x_i) = f_i$ $i = 0, \ldots n$
  - 2 datos adicionales:
    - Ligado o extremo sujeto: $s'(a) = \alpha$ $s'(b) = \beta$
    - Natural: $s''(a) = s''(b) = 0$
    - Periódico: $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$

Para obtener las derivadas $(d_i$ $i = 0, 1 \ldots n)$

$$\begin{pmatrix} & & ec_1 & & & \\ 1/h_0 & 2\left(\frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_1}\right) & 1/h_1 & & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1/h_{n-2} & 2\left(\frac{1}{h_{n-2}}+\frac{1}{h_{n-1}}\right) & 1/h_{n-1} \\ & & ec_2 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = 3\left(ec_1, \left(\frac{\Delta_0}{h_0} + \frac{\Delta_1}{h_1}\right) \cdots \left(\frac{\Delta_{n-2}}{h_{n-2}} + \frac{\Delta_{n-1}}{h_{n-1}}\right), ec_2\right)^t$$

ec_1 y ec_2 dependen de las condiciones adicionales previstas

- Natural: $2/h_0 \, d_0 + 1/h_0 \, d_1 = \frac{\Delta_0}{h_0}$ $\wedge$ $1/h_{n-1} \, d_{n-1} + 2/h_{n-1} \, d_n = \frac{\Delta_{n-1}}{h_{n-1}}$

- Extrem. suj. $d_0 = s'(a)$ $\wedge$ $d_n = s'(b)$ (previstos)

- Periódicos: $d_0 - d_n = 0$ $\wedge$ $1/h_0 \, d_1 + 2\left(\frac{d_0}{h_0} + \frac{d_n}{h_{n-1}}\right) + \frac{1}{h_{n-1}} d_{n-1} = 3\left(\frac{\Delta_0}{h_0} + \frac{\Delta_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$