Resumen

18/6/22 23:15

Tipos de distribuciones

- Degenerada:

  $\forall x \neq c \quad P[X=x]=0$

  $x=c \Rightarrow P[X=c]=1$

  $Var[X]=0 \qquad E[X]=c$

  $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<c\\ 1 & x\geq c\end{cases}$

- Uniforme $\Rightarrow$ Todos los casos la misma posibilidad

  $X \sim U(x_1,\dots,x_n)$

  $P[X=x]=\frac{1}{n} \quad \forall x \in E_X$

  $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<x_1\\ \frac{i-1}{n} & x_{i-1}<x<x_i \quad i=2\dots n\\ 1 & x_n \leq x\end{cases}$

  $E[x]=\frac{1}{n}\sum x_i=\bar{x}$

  $Var[x]=\frac{1}{n}\sum (x_i-\bar{x})^2=\sigma^2$

- Bernoulli: $\Rightarrow$ Solo acierto o fallo

  $X \sim B(1,p) \qquad E_X=\{0,1\}$

  $P[X=x]=p^x(1-p)^{1-x}$

  $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-p & x\in[0,1)\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$

  $E[x]=\sum x_i P[X=x_i]=p$

  $Var[x]=E[x^2]-E[x]^2=p-p^2=p(1-p)$

  $M_X(t)=E[e^{tX}]=1(1-p)+pe^t$

- Binomial $\Rightarrow$ Cuenta cuantos aciertos en n repeticiones (Prob. acierto $=p$)

  $X \sim B(n,p)$

  $P[X=x]=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \quad \forall x=0,1\dots n$

  $F(x)=$ deducible

  $E[x]=np \qquad Var[x]=np(1-p)$

  $M_X(t)=E[e^{xt}]=\sum e^{xt}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\sum\binom{n}{x}(e^tp)^x(1-p)^{n-x}=(e^tp+(1-p))^n$

  Demostración: $(Y=n-X\ ;\ Y\sim B(n,1-p))$ con $M_Y(t)$

- Poisson $\Rightarrow$ Suceso muy raro en un esp. de tiempo o físico

  $X \sim P(\lambda) \quad$ ($\lambda=$ frec. de ocurrencia del suceso)

  $P[X=k]=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k=0,1,2\dots$

  $F(x)=$ deducible

  $E[x]=\lambda \qquad Var[x]=\lambda$

  $M_X(t)=E[e^{tX}]=e^{\lambda(e^t-1)}$

- Binomial negativa $\Rightarrow$ Cuantos fallos hasta acertar r veces

  $X \sim BN(r,p) \quad r\in\mathbb{N} \quad p\in]0,1[$

  $P[X=x]=\binom{x+r-1}{x}(1-p)^x p^r$

  $F_X(x)=$ deducible

  $E[x]=\frac{r(1-p)}{p} \qquad Var[x]=\frac{r(1-p)}{p^2}$

  $M_X(t)=p^r(1-(1-p)e^t)^{-r} \qquad t<-\ln(1-p)$

- Geométrica $\Rightarrow$ Número de fallos hasta el primer acierto

  $X \sim G(p)$ $(=BN(1,p))$

  $P[X=x]=(1-p)^x p \quad \forall x=0,1\dots$

  $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-(1-p)^{[x]+1} & x\geq 0\end{cases}$ $\to$ parte entera de x

  $=\sum_{k=0}^{[x]}(1-p)^k p=p\sum_{k=0}^{[x]}(1-p)^k=p\frac{1-(1-p)^{[x]+1}}{\cancel{1-(1-p)}}=1-(1-p)^{[x]+1}$

  $\sum_{k=0}^{x} r^k=\frac{1-r^{x+1}}{1-r}$

  $E[x]=\frac{(1-p)}{p} \qquad Var[x]=\frac{(1-p)}{p^2}$

  $M_x(t)=p(1-(1-p)e^t)^{-1} \qquad t<-\ln(1-p)$

  Prop.: Falta de memoria

  $\forall h,k\in\mathbb{N}\cup\{0\} \quad P[X\geq k+h/X\geq h]=P[X\geq k]$ si $X\sim G(p)$

  Demostración

  $P[X\geq h+k/X\geq h]=\frac{P[X\geq h+k, X\geq h]}{P[X\geq h]}=\frac{P[X\geq h+k]}{P[X\geq h]}=\frac{(1-p)^{h+k}}{\cancel{(1-p)^h}}=(1-p)^k=P[X\geq k]$

- Hipergeométrica $\Rightarrow$ Poblaciones (N) y subpoblaciones (N_1), con n casos estudiados

  $X \sim H(N,N_1,n)$

  $P[X=x]=\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \max(0,n-(N-N_1))\leq x\leq \min(n,N_1)$

  $E[x]=\frac{nN_1}{N}$