Resumen-Tema-6.pdf

ferluque

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA E INTROD A LA PROBABILIDAD

1º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Tema 6

Distribución degenerada

Asociada a un experimento que siempre da el mismo resultado c.

Función masa de probabilidad

$$P[X=x]=\begin{cases}1,\ x=c\\0,\ x\neq c\end{cases}$$

Función de distribución

$$F(x)=P[X\leq x]=\begin{cases}0,\ x<c\\1,\ x\geq c\end{cases}$$

Momentos no centrados

$$m_k=E[X^k]=c^kP[X=c]=c^k,\quad k=1,2,\dots$$

Media: $E[X]=c$

Momentos centrados

$$\mu_k=E[(X-c)^k]=0,\quad k=1,2,\dots$$

Varianza: $Var[X]=0$

> Esta propiedad caracteriza a las distribuciones degeneradas. *Una distribución tiene varianza 0 $\iff$ es degenerada en un punto*

Función generatriz de momentos

$$M(t)=E[e^{tX}]=e^{tc},\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Distribución uniforme discreta

Toma un número finito de valores equiprobables. Es decir, la variable aleatoria X se distribuye uniformemente sobre los puntos $x_1,x_2,\dots,x_n$, lo cual se nota como $X\sim U(x_1,x_2,\dots,x_n)$

Función masa de probabilidad

$$P[X=x_i]=\begin{cases}\frac{1}{n},\ i=1,2,\dots,n\\0,\ en\ el\ resto\end{cases}$$

Función de distribución

$$F(x)=\frac{1}{n}(Número\ de\ valores\ x_i\leq x)=\begin{cases}0,\ x<x_1\\\frac{1}{n},\ x_1\leq x<x_2\\\dots\\\frac{n-1}{n},\ x_{n-1}\leq x<n_n\\1,\ x\geq x_n\end{cases}$$

Momentos no centrados

$$m_k=E[X^k]=\frac{1}{n}\sum_i x_i^k,\quad k=1,2,\dots$$

Momentos centrados

$\mu_k = E[(X - E[X])^k] = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - E[X])^k, \quad k = 1, 2, \ldots$

Función generatriz de momentos

$M(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{n}\sum_i e^{tx_i}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Distribución de Bernoulli

Se aplica en un experimento que da lugar, únicamente, a dos posibles resultados que son mutuamente excluyente y exhaustivos, que denotaremos por **éxito** (E) y **fracaso** ($F = \bar{E}$)

A este tipo de experimentos se les llama experimentos o **pruebas de Bernoulli** ($\Omega = \{E, F\}$). se define la variable aleatoria con distribución de Bernoulli como:

$$X = \begin{cases} 1, \ si\ ocurre\ E \\ 0, \ si\ no\ ocurre\ E \end{cases}$$

Se denota por p la probabilidad del suceso éxito

Función masa de probabilidad

$P[X = 1] = p$

$P[X = 0] = 1 - p$

o bien, $P[X = x] = p^x(1-p)^{1-x}; \ x = 0, 1; \ 0 < p < 1$ y se denotará

$X \sim B(1, p)$.

$E[x] = p, \ E[X^2] = p, \ Var[X] = p(1-p)$

Distribución binomial

Una variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros n y p ($n \in \mathbb{N}, \ p \in (0,1)$) si modela el número de éxitos en n repeticiones independientes de un ensayo de Bernoulli con probabilidad p de éxito, manteniéndose esta constante en las n repeticiones. se notará como $X \sim B(n, p)$

Función masa de probabilidad

$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$

Propiedad de simetría

Si $X \sim B(n, p)$, entonces la variable aleatoria que contabiliza el número de fracasos, $Y = n - X \sim B(n, 1-p)$, y, además:

$P[X = x] = P[Y = n - x]$

$E[X] = np$

$Var[X] = np(1-p)$

yo elijo cerveza SIN

Sea cual sea el vehículo que conduces, elige cerveza SIN.

WWW.CONDUCCIONRESPONSABLECERVEZASIN.COM

Cerveceros de España
100 años más

UNA GRAN CERVEZA.
UNA GRAN RESPONSABILIDAD.

DGT Dirección General de Tráfico

Distribución binomial negativa

Consideremos un experimento aleatorio consistente en repeticiones independientes de ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito constante, hasta que aparezca el éxito r-ésimo. Es decir, en lugar de fijar el número de ensaos, fijamos el número de éxitos y contamos los fracasos hasta alcanzar tantos éxitos.

Definimos la variable aleatoria con distribución binomial negativa como aquella que modela el número de fracasos antes de que aparezca el éxito r-ésimo.

La variable aleatoria X puede tomar los valores $x = 0, 1, 2, \ldots$ y r será un entero positivo, es decir $r = 1, 2, ..$

Función masa de probabilidad

$$P[X = x] = \binom{x+r-1}{x}(1-p)^x p^r, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \ (r = 1, 2, \ldots; \ 0 < p < 1)$$

y se notará como $X \sim BN(r, p)$

$E[X] = \frac{r(1-p)}{p}; \ Var[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$

Distribución Hipergeométrica

Una población de N individuos divididos en dos categorías de N_1 y $N_2 = N - N_1$ individuos cada uno. Se elige una muestra de n individuos de la población (sin reemplazamiento o simultáneamente). La variable aleatoria X que contabiliza el número de individuos de la 1ª categoría en la muestra se dice que tiene distribución **hipergeométrica** de parámetros N, N_1, n y se nota:

$$X \sim H(N, N_1, n), \qquad n, N_1, N \in \mathbb{N} - \{0\}, \ n, N_1 \leq N$$

Función masa de probabilidad

$$P[X = x] = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \max(0, n - (N - N_1)) \leq x \leq \min(n, N_1)$$

$E[X] = np, \ Var[X] = \frac{n(N-n)N_1(N-N_1)}{N^2(N-1)}$

Distribución de Poisson

Número de ocurrencias de un determinado suceso durante un periodo de tiempo fijo o en una región fija del espacio, cuando el número de ocurrencias sigue unas determinadas pautas:

- El número de ocurrencias en un intervalo o región especificada debe ser independiente del número de ocurrencias en cualquier otro intervalo o región
- Si se considera un intervalo de tiempo muy pequeño (o una región muy pequeña), la probabilidad de una ocurrencia es proporcional a la longitud del intervalo (al volumen de la región) y la probabilidad de dos o más ocurrencias es prácticamente nula (despreciable).

Con estas consideraciones, si por X_t denotamos el número de ocurrencias del suceso en un intervalo de longitud t (región de volumen t), puede probarse que:

$$P\{X_t = k\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \ \lambda > 0$$

La colección de variables aleatorias $\{X_t; t \geq 0\}$ constituyen lo que se denomina un **proceso de Poisson** y cada variable X_t se dice que tiene una distribución de Poisson de parámetro λt.

En particular, la variable aleatoria que especifica el número de ocurrencias en un intervalo de longitud unidad (o región de volumen unidad), se dice que tiene una distribución de Poisson de parámetro λ y se nota $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Función masa de probabilidad

$$P[X = x] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots, \; \lambda > 0$$

$E[X] = \lambda; \; Var[X] = \lambda$