Resumen-Tema-3.pdf

ferluque

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA E INTROD A LA PROBABILIDAD

1º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Tema 3

Experimentos aleatorios:

- Mismas condiciones $\nRightarrow$ mismos resultados.
- Se puede repetir indefinidamente bajo las mismas condiciones ideales
- Si se modifican las condiciones se puede modificar por completo el resultado
- Se pueden determinar el conjunto de posibles resultados pero no se puede predecir un resultado particular
- Si el experimento se repite muchas veces, aparece un modelo de regularidad estadística en los resultados

Álgebra de sucesos

Espacio muestral (Ω):

- Conjunto de **sucesos elementales**: sucesos indescomponibles en otros más simples
- *Ej*: Lanzar un dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- El espacio muestral asociado a un experimento puede ser: **finito, infinito numerable** o **continuo**

Suceso:

- Característica, hecho o proposición lógica cuya ocurrencia o no pueda observarse tras la realización del experimento
- Todo suceso se identifica con un subconjunto de Ω, es por eso que se hace posible el uso de la *Teoría de Conjuntos* para explicar relaciones y operaciones entre sucesos
- Existen cuatro tipos:
  - **Suceso elemental**: Un sólo elemento de Ω
  - **Suceso compuesto**: Dos o más elementos de Ω
  - **Suceso seguro**: Aquel que ocurre siempre. Consta de todos los sucesos elementales de Ω
  - **Suceso imposible**: No ocurre nunca. Se identifica con ϕ

Operaciones y relaciones

Contenido, igualdad, complementario, unión, intersección, diferencia (simétrica)

- **Diferencia simétrica**: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Los sucesos de A que no están en B, y los sucesos de B que no están en A. Es decir, ocurre cuando ocurre **uno y sólo uno** de los dos
- **Sucesos incompatibles**: $A_1, A_2, \dots, A_n$ sucesos son incompatibles **dos a dos** si $A_i \cap A_j = \phi \ \ \forall i \neq j \ (i, j = 1, 2, \dots, n)$
- **Sistema exhaustivo de sucesos**: $A_1, A_2, \dots, A_n$ verifican que $A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n = \Omega$
- **Sistema completo de sucesos (o partición de Ω)**: Si son un sistema exhaustivo y además, son incompatibles.

Estructuras de álgebra y σ-álgebra

- **Álgebra de Boole (Campo)**: Una clase no vacía A de conjuntos de Ω tiene estructura de Álgebra de Boole si:
  1. $\forall B \in A$ se verifica que $\bar{B} \in A$
  2. $\forall B_1, B_2 \in A$ se verifica que $B_1 \cup B_2 \in A$

Se deducen:

a) $\Omega \in A$. Dado $B \in A$, por 1 $\bar{B} \in A$, y por 2 $B \cup \bar{B} = \Omega \in A$

b) $\phi \in A$, de a) y 1 $\bar{\Omega} = \phi \in A$

- σ**- álgebra**: Una clase no vacía de sucesos $A \subseteq P(\Omega)$ tiene estructura de σ-álgebra si:
  1. $\forall B \in A$ se verifica que $\bar{B} \in A$
  2. $\forall B_1, B_2, \ldots \in A$ se verifica que $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \in A$

También se deducen los a) y b) anteriores

Concepciones de probabilidad

Concepción clásica: A es un suceso arbitrario que se puede presentar en m de los n posibles resultados **igualmente factibles** del experimento. Entonces la **probabilidad de** A:

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{número\ de\ resultados\ favorables}{número\ de\ casos\ posibles}$ (Regla de Laplace)

Concepción frecuentista: Si se realizan N repeticiones de un experimento y un suceso A se ha presentado en N_A ocasiones, la **frecuencia relativa de** A **en las** N **pruebas**:

$f_N(A) = \frac{N_A}{N}$

y la **probabilidad de** A como:

$P(A) = \lim_{N \to \infty} f_n(A)$

Definición axiomática de Kolmogorov: Sea (Ω, A) (A un σ-álgebra) un espacio medible asociado a un experimento aleatorio, se define una **probabilidad** como una función de conjunto:

$P : A \longrightarrow [0, 1]$

que verifica:

1. *Axioma de no negatividad*: $P(B) \geq 0,\ \forall B \in A$
2. *Axioma del suceso seguro*: $P(\Omega) = 1$
3. *Axioma de σ-aditividad*: $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sucesos incompatibles, entonces:
   $P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \left(\cup_{i=1}^{\infty} P(A_i)\right)$

Consecuencias:

1. $P(\phi) = 0$
2. $\forall B \in A,\ P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3. La probabilidad P es monótona y no decreciente:
   $\forall C, D \in A$, con $B \subset C \Rightarrow P(B) \leq P(C)$ y además $P(C - D) = P(C) - P(D)$
4. $\forall B \in A,\ P(A) \leq 1$
5. $\forall B, C \in A\ P(B - C) = P(B) - P(B \cap C)$
6. $\forall B, C \in A\ P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$
7. *Subatividad finita*: $P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
8. *Subatividad numerable*: $P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
9. *Principio de inclusión-exclusión*:
   $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\cap_{i=1}^{n} A_i)$

10. *Desigualdad de Bonferroni*:
11. *Desigualdad de Boole*: $P(A \cap B) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B})$