Resumen-Tema-5.pdf

ferluque

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA E INTROD A LA PROBABILIDAD

1º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Tema 5

Variable aleatoria

Una **variable aleatoria** es una función medible sobre un espacio de probabilidad, es decir, una función:

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

tal que la imagen inversa de cualquier conjunto de Borel es medible (un suceso del σ-álgebra $\mathcal{A}$)

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

En resumen:

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

es una variable aleatoria si
$X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Probabilidad inducida

Una variable aleatoria X induce una medida de probabilidad P_X sobre el espacio de Borel, dando lugar a un espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ de la forma:

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

es decir, como la probabilidad, en el espacio de partida, de la imagen inversa del conjunto de Borel.

Función de distribución

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

por simplicidad se puede escribir como:

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$

Propiedades

- No decreciente
- Continua por la derecha
- $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$

Otras propiedades

- El conjunto de puntos de discontinuidad de una función de distribución es numerable.
- $F_X(x^-) = P[X < x]$
- Sólo puede tener discontinuidades de salto y la longitud del salto es la probabilidad que la variable toma en ese valor:

  $$P[X = x] = P[X \leq x] - P[X < x] = F_X(x) - F_X(x^-)$$
- Es continua en un punto $x \in \mathbb{R} \iff P(X = x) = 0$

Clasificación de variables aleatorias

Según la forma de la función de distribución, pueden ser:

- **Variables aleatorias discretas**: La función de distribución crece sólo a saltos
- **Variables aleatorias continuas**: SI la función es absolutamente continua, es decir, $\exists f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

  $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **Variables aleatorias mixtas**: en otro caso

Variables aleatorias discretas. Función masa de probabilidad

Se dice que una variable aleatoria es discreta si existe un conjunto numerable $E \subset \mathbb{R}$ tal que $P[X \in E] = 1$; es decir, si toma a lo sumo una cantidad numerable de valores posibles

Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $E = \{x_i, i = 1, 2, \dots\}$. A la función $P : E \to [0, 1]$, que a cada valor de E le asigna la probabilidad con que la variable toma ese valor, se denomina **función masa de probabilidad o función de probabilidad**

$x_i \to P[X = x_i] = p_i,\ i = 1, 2, \dots$

y verifica $0 \leq P[X = x_i] \leq 1$, $i = 1, 2, \dots$ y $\sum_i P[X = x_i] = 1$

La función de distribución a partir de la función masa de probabilidad viene dada por:

$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{i|x_i \leq x} p_i$

Variables aleatorias continuas. Función de densidad

Una variable aleatoria es continua si su función es absolutamente continua, es decir, si existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

A dicha función se la llama **función de densidad** y verifica:

1. $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2. f es integrable Riemann, ya que F tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades sobre cada intervalo finito de $\mathbb{R}$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Cambio de variable

Teorema general de cambio de variable

Sea X una variable aleatoria definida como:

$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$

con distribución de probabilidad P_X conocida. Sea $Y = h(X)$ otra variable aleatoria (basta exigir que $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ sea medible), entonces la distribución de probabilidad de Y, P_Y se puede obtener a partir de P_X como

$P_Y(B) = P_X(h^{-1}(B)) \ \forall B \in \mathcal{B}$


12
MARVEL STUDIOS
MS MARVEL
Serie Original
8 de junio solo en
Disney+
© 2022 MARVEL. Requiere suscripción. Se aplican términos y condiciones.

De aquí se deduce que la función de distribución de la variable aleatoria Y se puede obtener como

$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P_Y((-\infty, y]) = P_X(h^{-1}(-\infty, y])$

Discreta $\rightarrow$ Discreta

Continua $\rightarrow$ Discreta, continua o mixta

Función de una variable aleatoria discreta

Si X es una variable aleatoria discreta con valores en $E = \{x_i, i = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$, con función masa de probabilidad y h una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ medible, entonces $Y = h(X)$ es una variable aleatoria discreta con función masa de probabilidad:

$$P[Y = y] = \begin{cases} \sum_{x/h(x)=y} P(X = x),\ y \in h(E) \\ 0,\ y \notin h(E) \end{cases}$$

Función de una variable aleatoria continua

En este caso, una variable aleatoria continua puede dar lugar a una variable discreta, continua o mixta.

Continua $\rightarrow$ Discreta

X variable aleatoria con función de densidad f y valores en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Si h es una función medible tal que $Y = h(X)$ es una variable aleatoria discreta ($h(A)$ es numerable) entonces

$$P[Y = y] = \begin{cases} \int_{x \in \mathbb{R}/h(x)=y} f(x)dx,\ y \in h(A) \\ 0,\ y \notin h(A) \end{cases}$$

Continua$\rightarrow$Continua

X variable aleatoria continua con función de densidad $f > 0\ \forall x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Si h es una función medible estrictamente monótona y derivable en dicho intervalo, entonces $Y = h(X)$ es una variable aleatoria continua con función de densidad

$$g(y) = \begin{cases} f(h^{-1}(y))|(h^{-1})'(y)|,\ y \in h([a, b]) \\ 0,\ y \notin h([a, b]) \end{cases}$$

Generalización

Si h no tiene una única inversa y cada valor de $Y = h(X)$ proceda de un número finito o infinito numerable de valores de X, la función de densidad de Y será:

$$h(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f(h_k^{-1}(y)) \left| \frac{dh_k^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Esperanza matemática

Discretas
$E[X] = \sum_i x_i P[X = x_i]$, se define como valor esperado de X

Siempre que la serie sea absolutamente convergente

Continuas

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

Siempre que la integral sea absolutamente convergente

En caso de que o la serie o la integral no converjan absolutamente, se dice que no existe la esperanza de dicha variable aleatoria

Propiedades

- Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $E = \{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ e $Y = h(X)$ otra variable aleatoria función de X, entonces $\exists E[Y]$ si:

  $\sum_i |h(x_i)|P[X = x_i] < \infty$

  y en caso de que exista:

  $E[Y] = \sum_i h(x_i)P[X = x_i]$
- Sea X una variable aleatoria con función de densidad f e $Y = h(X)$ otra variable aleatoria con h en las condiciones del Teorema del cambio de variable de continua a continua, $\exists E[Y]$ si

  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|f(x)dx < \infty$

  y en caso de que exista

  $E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$
- **Linealidad**: Si $\exists E[X_i], i = 1, 2, \dots, n$, entonces

  $\exists E[\sum_i a_i X_i] = \sum_i a_i E[X_i]$
- X V.A. y $g(X)$ y $h(X)$ dos funciones de X, variables aleatorias cuyas esperanzas existen, entonces:

  $\exists E[ag(X) + bh(X)] = aE[g(X)] + bE[h(X)]$, $a, b \in \mathbb{R}$
- X V.A y $g(X)$ y $h(X)$ dos funciones de X, variables aleatorias cuyas esperanzas existen; si $g(X) \leq h(X)$, entonces

  $E[g(X)] \leq E[h(X)]$
- La esperanza minimiza el error cuadrático medio (como la media)

  $min_d \; E[(X - d)^2] = E[(X - E[X])^2]$

Momentos de una variable aleatoria

Momento no centrado (o centrado en el origen) de orden k

$m_k = E[X^k] \quad k = 1, 2, \dots$

Momento centrado de orden k

Se define si $\exists E[X]$, de la siguiente forma:

$\mu_k = E[(X - E[X])^k], \quad k = 1, 2, \dots$

Varianza

$\sigma_X^2 = Var[X] = \mu_2 = E[(X - E[X])^2]$

Propiedades

- $\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2$
- Si $\exists E[X]$, entonces:

  $Var[aX + b] = a^2 Var[X], \quad a, b \in \mathbb{R}$
- X e Y variables aleatorias independientes cuyas varianzas existen

  $\exists Var[X \pm Y] = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$

- Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias cuyas varianzas existen
  $\exists Var\left[\sum_i a_i X_i\right] = \sum_i a^2 Var[X_i]$
- La varianza de X es $0 \iff$ la variable aleatoria es degenerada o constante
- Desviación típica: $\sigma_X = +\sqrt{Var[X]}$

Función generatriz de momentos

Dada una variable aleatoria X, si $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\forall t \in (-t_0, t_0)$ existe la esperanza $E[e^{tX}]$, se dice que existe la **función generatriz de momentos de X** y se define como:

$M_X(t) = E[e^{tX}], \quad \forall t \in (-t_0, t_0)$

No tiene por qué existir, pero si la variable está acotada, siempre existe

Variable aleatoria discreta

$M_X(t) = \sum_i^\infty e^{tx_i} P[X = x_i]$

Variable aleatoria continua

$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$

Teorema de unicidad

La función generatriz de momentos de una variable aleatoria, si existe, es única y determina de forma única la distribución de la variable

Teorema (Relación con los momentos)

Si existe la función generatriz:

$\Rightarrow$ existen todos los momentos para todo t en el entorno de definición:

$M_X(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n E[X^n]}{n!}$

$\Rightarrow$ existe la derivada de todos los órdenes de $M_X(t)$ y se verifica

$M_X^{k)}(t)|_{t=0} = E[X^k], \; k = 1, 2, \ldots$

Otras propiedades

- $M_X(0) = 1$
- Sea X una variable aleatoria con función generatriz de momentos $M_X(t), \forall t \in (-t_0, t_0)$. Sea $Y = aX + b, \; a, b \in \mathbb{R}$, entonces la función generatriz de momentos para t, tal que $at \in (-t_0, t_0)$, verifica:
  $M_Y(t) = e^{tx} M_X(at)$