Objetivos

1.- Matriz Jacobiana

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, $f = (f_1, f_2 \dots f_M) : \Omega \to \mathbb{R}^M$

Cuando f diferenciable en $a \in \Omega$, la matriz jacobiana de f en a, es la matriz $Jf(a) \in M_{M \times N}$ de la aplicación lineal $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$

De manera que $Df(a)(x) = Jf(a) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_M}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}$$

2.- Plano tangente a una superf. paramétrica

Consideramos la superficie $\Sigma = T(\Omega)$ donde $T : \Omega \to \mathbb{R}^3$ en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con componentes (x, y, z)

Supongamos T diferenciable en $(t_0, s_0) \in \Omega$, sea $P_0 = T(t_0, s_0) = (x_0, y_0, z_0)$

De forma que

$$JT(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(t_0, s_0) & \frac{\partial x}{\partial s}(t_0, s_0) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(t_0, s_0) & \frac{\partial y}{\partial s}(t_0, s_0) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(t_0, s_0) & \frac{\partial z}{\partial s}(t_0, s_0) \end{pmatrix}$$

Suponiendo que esta es de rango 2, en concreto, ninguna de sus columnas nulas y con las curvas $\gamma_1(t) = T(t, s_0)$ y $\gamma_2(s) = T(t_0, s)$ teniendo tangentes en P_0 distintas. De esta forma, deducimos el plano π tangente por P_0 a la superficie como el que contiene a dichas rectas. Sus ecuaciones serán

$$x = x_0 + (t - t_0)\frac{\partial x}{\partial t}(t_0, s_0) + (s - s_0)\frac{\partial x}{\partial s}(t_0, s_0)$$

$$y = y_0 + (t - t_0)\frac{\partial y}{\partial t}(t_0, s_0) + (s - s_0)\frac{\partial y}{\partial s}(t_0, s_0)$$

$$z = z_0 + (t - t_0)\frac{\partial z}{\partial t}(t_0, s_0) + (s - s_0)\frac{\partial z}{\partial s}(t_0, s_0)$$

Se resume en $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + JT(t_0, s_0)\begin{pmatrix} t - t_0 \\ s - s_0 \end{pmatrix}$ //

3.- Regla de la cadena para las derivadas parciales

Sea $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$ y $U = U^\circ \subset \mathbb{R}^M$, $f: \Omega \to U$, $g: U \to \mathbb{R}^P$, y $h = g \circ f: \Omega \to \mathbb{R}^P$.

Si f diferenciable en $a \in \Omega$ y g diferenciable en $b = f(a) \in U$

$$Jh(a) = Jg(b) \cdot Jf(a)$$

Demostración

Por la regla de la cadena sabemos que

$$Dh(a) = Dg(b) \circ Df(a)$$

Aplicando la definición de la matriz jacobiana y tomando $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $y = Df(a)(x) \in \mathbb{R}^M$, $z = Dh(a)(x) \in \mathbb{R}^P$ $(z = Dg(b)(x))$

$$Jh(a) \cdot x = z = Jg(b) \cdot y = Jg(b) \cdot Jf(a) \cdot x$$

De forma que

$$Jh(a) = Jg(b) \cdot Jf(a)$$

Obtenemos así una nueva forma de definir las parciales

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(b) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \qquad \forall k \in \Delta_N,\ i \in \Delta_P$$