Topología I. Primera prueba de evaluación continua
Doble grado en ingeniería informática y matemáticas
7 de noviembre de 2022

1.– Sea X un conjunto y $A \subset X$ tal que $\#A \geqslant 2$ y $A \neq X$. Se define la familia S de subconjuntos de X como:

$$S = \{U \subset X \,:\, U \cap A \neq \varnothing\} \cup \{\varnothing\}.$$

1. ¿Es S una topología o base de una topología en X?
2. ¿Cuál es la menor topología $T(S)$ que contiene a S?
3. ¿Cuándo es $(X, T(S))$ separable?

La familia S no es una topología porque la intersección de dos subconjuntos de S no es, en general, un subconjunto de S. Por ejemplo, sean $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$, y sea $x \notin A$. Entonces $U_1 = \{x, a_1\}$, $U_2 = \{x, a_2\}$ pertenecen a S puesto que $U_i \cap A = \{a_i\} \neq \varnothing$ para $i = 1, 2$. Pero $U_1 \cap U_2 = \{x\} \notin S$.

La familia S tampoco es base de una topología en X. Tomando los mismos conjuntos U_1, U_2, tenemos que no existe ningún elemento B de S tal que $x \in B \subset U_1 \cap U_2$.

Puesto que $X = \bigcup_{B \in S} B$ podemos calcular una base $\mathcal{B}(S)$ de la menor topología $T(S)$ que contiene a S como

Intersección

$$\mathcal{B}(S) = \{\cancel{\bigcup_{i \in I}} S_i \,:\, S_i \in S, I \text{ finito}\}$$

Si $x \notin A$ entonces, con la notación anterior, $\{x\} = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{B}(S)$. Si $a \in A$ entonces $\{a\} \in S \subset \mathcal{B}(S)$. Por tanto $T(S) = T_D$, la topología discreta en X.

Un espacio topológico es separable si contiene un subconjunto denso y numerable. Al ser $T(S) = T_D$, sabemos que $(X, T(S))$ es separable si y sólo si X es numerable.

Duración de la prueba: 45 minutos

1.- Comprobamos si es topología:

1.- $\emptyset \in S$ por definición. $X \cap A = A \neq \emptyset \Longrightarrow X \in S$

2.- Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subset S$. Si $\forall i \in I$ $U_i = \emptyset \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset \in S$

Si $\exists i_0 \in I$ tq $U_{i_0} \neq \emptyset$ $U_{i_0} \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in S$

3.- Tomamos $z_1, z_2 \in A$ y $x \in X \setminus A$. Entonces $U_1 = \{z_1, x\}$, $U_2 = \{z_2, x\}$ serán abiertos ya que $U_1 \cap A = \{z_1\} \neq \emptyset$ $U_2 \cap A = \{z_2\} \neq \emptyset$. Sin embargo $U_1 \cap U_2 = \{x\} \notin S$

Por lo tanto no es topología.

Comprobamos si es base de una topología. Para ello, vemos si cumple las propiedades

1.- $\forall x \in X$ $\exists \{x, z\} \in S$ $(z \in A)$ tq $x \in \{x, z\}$

2.- Tomando $x \in X \setminus A$ y $z_1, z_2 \in A$, $B_1 = \{x, z_1\}$, $B_2 = \{x, z_2\} \in S$

Pero para $x \in B_1 \cap B_2 = \{x\}$, $\nexists B_3 \in S$ tq $x \in B_3 \subset \{x\}$ ya que B_3 sería igual a $\{x\}$, pero $\{x\} \cap A = \emptyset$.

Con lo que tampoco es base.

2.- La menor topología $T(S)$ que contiene a S será la que toma este conjunto como subbase, es decir, como S cumple que $\bigcup_{U\in S} U = X$, podemos generar una base $B(S)$ tomando esta como subbase. Esta será de la forma:

$$B(S) = \{U_1 \cap \ldots \cap U_k : U_i \in S \ \forall i \in \Delta_k\}$$

Como hemos demostrado antes que $\forall x \in X$, si $x \notin A$, tomando $\{x, z_1\}, \{x, z_2\} \in S$ ya que $\underset{(z_1 \neq z_2)}{z_1, z_2} \in A$,

$\{x\} = \{x, z_1\} \cap \{x, z_2\} \in B(S)$, y si $x \in A$ $\{x\} \in S \subset B(S)$

La topología $T(S)$ generada por $B(S)$ será la topología discreta $T_D = T(S)$

3.- Como $\tau(S)$ es la top. discreta, para que $(X, \tau(S))$ sea separable, es decir, exista un conjunto numerable y denso, este solo puede ser X ya que $\forall U \subset X$ $X \setminus U \in \tau_D = \tau(S) \Rightarrow U$ cerrado $\Rightarrow U = \overline{U}$. Por lo tanto, X debe ser numerable