Tema 1: Espacio Euclídeo

ASRR

Análisis I

Tema 1

· Prod. Escalar de dos vectores

Sea $x, y \in \mathbb{R}^N$

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$$

Propiedades

- $(\lambda u + \mu v | y) = \lambda (u|y) + \mu (v|y)$
- $(x|y) = (y|x)$
- $(x|x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

En un espacio arbitrario X

Sea φ prod. escalar en X:

$$\varphi : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

↳ forma bilineal simétrica con su forma cuadrática asociada definida positiva

Un espacio pre-hilbertiano es un espacio vectorial dotado de producto escalar

· Norma:

(Asociada a un producto escalar)

La norma de $x \quad \forall x \in X$

$$\|x\| = (x|x)^{1/2}$$

Propiedades

- Desig. Triang $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in X$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $x \in X \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

Desig. de Cauchy-Schwarz

En todo espacio pre-hilbertiano X,

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x,y \in X$$

La igualdad se da para x, y L.D

Demostración:

Para la igualdad, supongamos $x, y \in X$ L.D. Si alguno fuera igual a 0, sería trivial. Supongamos $x, y \neq 0$. Como son L.D. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $y = \lambda x$

$$(x|\lambda x)^2 = \lambda^2 (x|x)^2 = (\lambda x|\lambda x) \cdot (x|x) =$$
$$= (y|y)(x|x) = \|y\|^2 \cdot \|x\|^2$$

Haciendo las raíces obtenemos la igualdad.

Supongamos ahora x, y L.I.

Luego $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad x - \lambda y \neq 0 \Longrightarrow (x-\lambda y | x - \lambda y) > 0$

$$0 < (x - \lambda y | x - \lambda y) = \|x\|^2 - 2\lambda (x|y) + \lambda^2 \|y\|^2$$

Si tomamos $\lambda = \dfrac{(x|y)}{\|y\|^2}$

$$0 < \|x\|^2 - \frac{2(x|y)^2}{\|y\|^2} + \frac{(x|y)^2}{\|y\|^2}$$

$$(x|y)^2 < \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \quad //$$

Análisis I

- Espacios normados

Def. Espacio vectorial X con una norma fijada $\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ con las propiedades descritas antes

Puede estar asociado a un prod. escalar o no

Por ejemplo, $\|\cdot\|_1$ o $\|\cdot\|_\infty$ no tienen producto escalar asociado

- Espacios métricos

Def. Conjunto $E \neq \emptyset$ con una distancia asociada d siendo $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo

- Desig. Triang $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
- Simetría $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

Si E es un espacio normado, la distancia asociada a su norma se definirá como:

$$d(x,y) = \|\cancel{x} - x\| = \|x - y\|$$

Existen distancias no asociadas a una norma como la discreta

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$