Probabilidad - 2º Curso (Grado en Matemáticas y Doble Grado en Física y Matemáticas)
Convocatoria extraordinaria y examen de incidencias ordinaria (14 de julio de 2021)

Apellidos, nombre:

---

[1]

1. Sea (X,Y) un vector aleatorio. Se pretenden predecir, por mínimos cuadrados, los valores de la variable Y a partir de una función lineal de la variable X, y viceversa.

   a) Obtener de forma razonada los coeficientes del modelo lineal de Y sobre X.

   b) Si $5y-x+1=0$ y $2x-5y+2=0$ son las rectas de regresión del vector (X,Y): identificar la recta de regresión de Y sobre X; obtener una medida de la proporción de varianza de cada variable que queda explicada por el modelo de regresión lineal y calcular la esperanza del vector (X,Y).

2. Sean $X_1,\dots,X_n$ v.a. continuas e independientes, tales que $\exists\, E[X_i]\ \forall i=1,\dots,n$, con momento no centrado de orden dos finito y $g_1,\dots,g_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones medibles. Justificar de forma razonada las siguientes afirmaciones:

   a) $\exists\, E[X_1\cdots X_n]=E[X_1]\cdots E[X_n]$.

   b) $\exists\, E[g_1(X_1)\cdots g_n(X_n)]=E[g_1(X_1)]\cdots E[g_n(X_n)]$.

   c) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n a_i^2\mathrm{Var}(X_i), \quad \forall\, a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$.

   d) $(X_1,\dots,X_n)$ es un vector aleatorio continuo.

   e) Si para cualquier $n\in\mathbb{N}$, se tienen las hipótesis anteriores, adicionalmente a que su distribución es idéntica, es decir, la misma para todas las componentes, determinar el límite en probabilidad y casi seguramente de la secuencia $(S_n-E[S_n])/n$, así como la variable aleatoria que define el límite en distribución o en ley de la secuencia $(S_n-E[S_n])/\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}$, siendo $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$.

3. Definimos el experimento de lanzar 10 veces una moneda, y se denota por X la variable aleatoria que indica el número de lanzamientos hasta que aparece cara. X vale cero si no aparece cara. La variable Y denota el número de lanzamientos hasta que aparece cruz. Dicha variable vale cero si no aparece cruz.

   a) Calcular la función masa de probabilidad conjunta

   b) Calcular la distribución condicionada X/Y, para los diferentes valores de $Y=0,\dots,10$.

4. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en el recinto

$$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}.$$

   a) Calcular la función de distribución de probabilidad conjunta.

   b) Calcular las funciones de densidad condicionadas.

5. Se considera (X,Y) la distribución uniforme en el cuadrado unidad.

   a) Calcular la función de densidad de probabilidad de $Z=(X+Y,X-Y)$

   b) La función de densidad de probabilidad conjunta del máximo y el mínimo.

[1]**Puntuación**: 2 puntos para Problema 1; 2 puntos para Problema 2; 2 puntos para Problema 3; 2 puntos para Problema 4; 2 puntos para Problema 5

ASRR. Extraordinaria.

1.- a) Estamos buscando la recta de regresión de Y sobre X, es decir, $\varphi^{L}_{opt}(X) = aX + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ tq se minimice el ECM, $E[(Y - aX - b)^2] = L$. Calculemos a, b tq se minimice L. Para ello derivaremos L sobre a y b, obteniendo las ecuaciones normales de las que obtendremos a y b

$$L = E[(Y - aX - b)^2] = E[Y^2 - 2aXY - 2bY + a^2X^2 + 2abX + b^2] =$$
$$= E[Y^2] - 2aE[XY] - 2bE[Y] + a^2E[X^2] + 2abE[X] + b^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = -2E[XY] + 2aE[X^2] + 2bE[X] \Rightarrow aE[X^2] + bE[X] = E[XY]$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = -2E[Y] + 2aE[X] + 2b \Rightarrow \boxed{b = E[Y] - aE[X]}$$

$$aE[X^2] + E[X]E[Y] - aE[X]^2 = E[XY]$$
$$a(E[X^2] - E[X]^2) = E[XY] - E[X]E[Y] \Rightarrow \boxed{a = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}}$$

b) Sabemos que las rectas se cruzan en el punto $(x, y) = (E[X], E[Y])$

$$\begin{cases} \cancel{5y} - x + 1 = 0 \\ 2x - \cancel{5y} + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{4}{5}} \Rightarrow (E[X], E[Y]) = (-3, -4/5)$$

Por otro lado, sabemos que $R_{Y/X}: y - E[Y] = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}(x - E[X])$

Probamos con la primera ecuación:

$R_{Y/X}$ $5y - x + 1 = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{5}x + 1/5 = 0 \Rightarrow y + \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x - \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow y + 4/5 = 1/5(x + 3)$ $\begin{cases} \rho_{Y/X} = 1/5 \\ \rho_{X/Y} = 5/2 \end{cases}$ $\{ \rho^2_{X,Y} = 1/5 \cdot 5/2 = 1/2 < 1 \Rightarrow \checkmark$

$R_{X/Y}$ $2x - 5y + 2 = 0 \Rightarrow x - \frac{5}{2}y + 1 = 0 \Rightarrow x + 3 = \frac{5}{2}(y + \frac{4}{5})$

Por lo tanto $\boxed{R_{Y/X}: 5y - x + 1 = 0}$ $\wedge$ la medida de proporción será el coeficiente de determinación $\boxed{\rho^2_{X,Y} = 1/2}$

2.- a) $E[X_1 \dots X_n] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \dots x_n f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n) \, dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_{X_1}(x_1) dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_n f_{X_n}(x_n) dx_n = E[X_1] \dots E[X_n]$

Esta igualdad se da porque $X_1, \dots X_n$ son independientes

b) Como $\forall B \in \beta$ $P[g_1(X_1) \in B \dots g_n(X_n) \in B] = P[X_1 \in g_1^{-1}(B) \dots X_n \in g_n^{-1}(B)] = P[X_1 \in g_1^{-1}(B)] \dots P[X_n \in g_n^{-1}(B)] =$
$= P[g_1(X_1) \in B] \dots P[g_n(X_n) \in B]$

De esto se deduce trivialmente lo buscado

c) $Var(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = E[(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i)^2] - E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i]^2$

- $E[(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i)^2] = E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j X_i X_j] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_i a_j E[X_i]E[X_j] + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E[X_i^2]$
- $E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i]^2 = (\sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i])^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E[X_i]^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_i a_j E[X_i]E[X_j]$

Al sustituir:

$$Var(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E[X_i^2] - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E[X_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$$

d) Sea $X = (X_1, \dots X_n)$, podemos definir $f_X(x) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$ ya que son independientes y esta cumplirá ser positiva y $\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_n}(x_n) dx_n = 1$. Además,

$\forall x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ $P[X \in]-\infty, x]] = P[X_1 \in]-\infty, x_1], \dots X_n \in]-\infty, x_n]] = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(t_1) dt_1 \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_n}(t_n) dt_n = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt$

e) Segunda ley fuerte de Kolmogorov: $\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{c.s} 0 \Rightarrow \frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0$

Teorema límite de Lévy: $\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{L} Z \sim N(0, 1)$

3.- $P[X=x] = \frac{1}{2}^{x-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^x} \quad \forall x \in \{1, \dots 10\}$

$P[X=0] = \frac{1}{2}^{10} = \frac{1}{2^{10}}$

x\Y	0	1	2	3	4	…	9	10
0	0	$1/2^{10}$	0	0	0	…	0	0
1	$1/2^{10}$	0	$1/2^2$	$1/2^3$	$1/2^4$	…	$1/2^9$	$1/2^{10}$
2	0	$1/2^2$	0	0	0	…	0	0
3	0	$1/2^3$	0					⋮
4	0	$1/2^4$	0					⋮
⋮	⋮	⋮	⋮					⋮
9	0	$1/2^9$	0					0
10	0	$1/2^{10}$	0	…		…	0	0

a) $p_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 1/2^x & y=1 \wedge x>1 \\ 1/2^y & x=1 \wedge y>1 \\ 1/2^{10} & (x,y)=(1,0) \vee (0,1) \\ 0 & x=y \vee x\neq 1 \neq y \end{cases}$

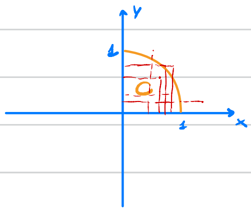
b) • Si $y_0 = 0$: $p_{X/Y=y_0}(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & x\neq 1 \end{cases}$

$y_0 = 1$: $p_{X/Y=y_0}(x) = \begin{cases} 0 & x=1 \\ 1/2^{x-1} & x>1 \\ 1/2^{10} & x=0 \end{cases}$

$y_0 > 1$: $p_{X/Y=y_0}(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & x\neq 1 \end{cases}$

4.- $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$

a) (X,Y) unif. $\Rightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = K>0$ tq $\int_C K = 1 \Rightarrow K\lambda(C)=1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{4}{\pi}}$



Función de distribución $F(x,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

• Si $x\leq 0 \vee y \leq 0$ $\quad F(x,y)=0$

• Si $(x,y) \in C$ $\quad F(x,y) = \int_0^x y \cdot K\,dt = \frac{4}{\pi} yx$

• Si $x \in]0,1[\wedge 1 > y \geq \sqrt{1-x^2} \Rightarrow F(x,y) = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} Ky\,dt + \int_{\sqrt{1-y^2}}^x K\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{4}{\pi}\left[y\sqrt{1-y^2} + \int_{\sqrt{1-y^2}}^x \sqrt{1-t^2}\,dt\right]$

• Si $x \in]0,1[\wedge y \geq 1 \Rightarrow F(x,y) = \int_0^x K\sqrt{1-t^2}\,dt$

• Si $x \geq 1 \wedge y \in]0,1[\Rightarrow F(x,y) = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} Ky\,dt + \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 K\sqrt{1-t^2}\,dt$

• Si $x\geq 1 \wedge y \geq 1 \Rightarrow F(x,y) = 1$

b) Primero marginales.

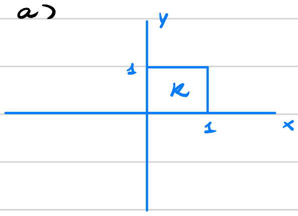
• $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} K\,dy = K\sqrt{1-x^2} = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in [0,1]$

• $f_Y(y) = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} K\,dx = K\sqrt{1-y^2} = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2} \quad \forall y \in [0,1]$

Así $\Rightarrow f_{X/Y=y_0}(x) = \frac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}} \quad \forall x \in [0, \sqrt{1-y_0^2}[\quad y_0 \in [0,1[$

$f_{Y/X=x_0}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \quad \forall y \in [0, \sqrt{1-x_0^2}[\quad x_0 \in [0,1[$

5- a)



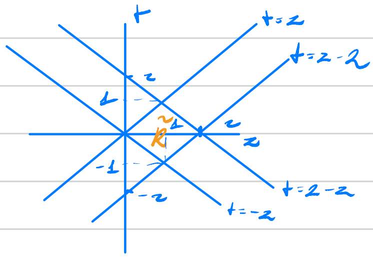
Como (X,Y) unif. en $R \Rightarrow f(x,y) = k > 0 \ \forall (x,y) \in R$ tq $\int_R k = 1 \Rightarrow \boxed{k=1}$

Cambio de variable $Z = (X+Y, X-Y)$, comprobamos

$g: (x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$ derivable

$g^{-1}(z,t) = \left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right) \Rightarrow$ inyectiva

$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ Es cambio válido



$f_Z(z,t) = |J| \cdot f_{(X,Y)}(x,y) = 1/2$

Sea $\tilde{R} = g(R) \Rightarrow \forall (x,y) \in R \ 0 \le x \le 1 \ 0 \le y \le 1 \iff \forall (z,t) \in \tilde{R} \ 0 \le z+t \le 2$

$0 \le z-t \le 2$

$-z \le t \le 2-z \ \wedge \ z \geq t \geq z-2$

Luego la función de distrib. $F_Z(z,t) \ \forall (z,t) \in \mathbb{R}^2$

· Si $z \le 0 \vee t \le -1 \Rightarrow F_Z(z,t) = 0$

Me da perezón

b) Vemos que, siendo $\tilde{Z} = (\min(X,Y), \max(X,Y))$ tenemos que

$$F_{\tilde{Z}}(x,y) = \begin{cases} F_{(X,Y)}(y,y) & y \le x \\ F_{(X,Y)}(y,y) - P[x \le X \le y, x \le Y \le y] & y > x \end{cases}$$

$F'_{(x,y)}(x,y) = y + x$

siendo $P[x \le X \le y, x \le Y \le y] = \int_x^y \int_x^y f_{(X,Y)}(t_1,t_2)\, dt_1 dt_2 = (y-x)^2 \ \wedge \ F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^y \int_0^x 1 \, dt_1 dt_2 = xy$

Como $F_{\tilde{Z}}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\tilde{Z}}(t_1,t_2)\, dt_2 dt_1 \Rightarrow f_{\tilde{Z}}(t_1,t_2) = \begin{cases} F'_{(X,Y)}(t_1,t_2) = 2t_2 & t_2 \le t_1 \\ F'_{(X,Y)}(t_1,t_2) - ((y-x)^2)' = 2t_2 - \cancel{2(y-x)} + \cancel{2(y-x)} & t_2 \geq t_1 \end{cases}$

Luego $f_{\tilde{Z}}(t_1,t_2) = 2t_2 \ \forall (t_1,t_2) \in R$