ASRR

Tema 5
Modelos multivariantes

• Modelo multinomial

Def. Distrib. discreta multivariante, extiende la binomial cuando el experimento tiene más de 2 resultados posibles

Distrib. Multinomial

Sea X_i v.a. que cuenta el nº de veces que ocurre A_i

Sea n el nº de repeticiones totales y p_i la prob de A_i. Entonces

$$(X_1, \dots, X_k) \sim M_k(n; p_1, \dots, p_k) \quad y \quad p_{k+1} = 1 - \sum_{i=1}^{k} p_i$$

Func. Masa de Prob: (sea $x_{k+1} = n - \sum_{i=1}^{k} x_i$ para abreviar)

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k! \, x_{k+1}!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k} p_{k+1}^{x_{k+1}}$$

Func. Gen. Momentos:

$$M_{X_1 \dots X_k}(t_1, \dots, t_k) = E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{k} t_i X_i\right)\right] = (p_1 e^{t_1} + \dots + p_k e^{t_k} + p_{k+1})^n$$

Marginales: con $i_1, i_2, \dots, i_\ell \in \{1, \dots, k\}$

$$(X_{i_1}, \dots, X_{i_\ell}) \sim M_\ell(n; p_{i_1} \dots p_{i_\ell})$$

En concreto, las unidimensionales $X_i \sim B(n, p_i)$

Condicionadas: $(X_1, \dots, X_\ell / X_{\ell+1} = x_{\ell+1} \dots X_k = x_k) \sim M_\ell\left(n - \sum_{i=\ell+1}^{k} x_i; \frac{p_1}{1 - \sum_{i=\ell+1}^{k} p_i}, \dots, \frac{p_\ell}{1 - \sum_{i=\ell+1}^{k} p_i}\right)$

Reproductividad: si $X_i \sim M_k(n_i; p_1 \dots p_k) \ \forall i = 1 \dots p$

Entonces $\sum_{i=1}^{p} X_i \sim M_k\left(\sum_{i=1}^{p} n_i; p_1 \dots p_k\right)$

Media: con $X = (X_1 \dots X_k) \Rightarrow E[X] = (np_1, \dots, np_k)$

Covarianza: $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$

Recta de regresión de X_i / X_j: $x_i = \frac{p_i}{1 - p_j}(n - x_j)$

Razones de correlación: $\eta^2_{X_i/X_j} = \eta^2_{X_j/X_i} = \rho^2_{X_i X_j} = \frac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}$

Coeficiente de correlación lineal: $\rho_{X_i X_j} = -\sqrt{\rho^2_{X_i X_j}}$

• Distribución Normal Bidimensional

Se dice que (X_1, X_2) se distrib. según una normal bidimensional con media $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ y matriz de varianzas-covarianzas $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ si su función de densidad viene dada por

coef. de correl. lineal

$$f_{(X_1 X_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left[-\tfrac{1}{2}(x-\mu)^t \Sigma^{-1} (x-\mu)\right] \quad \text{con} \quad x = (x_1, x_2)$$

Marginales: $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1) \ \wedge \ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$

Condicionadas: $X_1 / X_2 = x_2 \sim N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$

Curva (Recta) de regresión de X_i / X_j $\quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j$

$$R_{X_i/X_j}: \ x_i = \mu_i + \rho \frac{\sigma_i}{\sigma_j}(x_j - \mu_j) \Rightarrow \eta^2_{X_i/X_j} = \eta^2_{X_j/X_i} = \rho^2$$

ECM asoc a R_{X_i/X_j}: $\quad ECM = \sigma_i^2 (1 - \rho^2)$ para R_{X_i/X_j}

incorrelación $\quad f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

$$\boxed{\text{Indep.} \Leftrightarrow \text{Incorr} \Leftrightarrow \Sigma \text{ diagonal}}$$

$\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2$

Func. Gen. de Momentos $M_{X_1 X_2}(t_1, t_2) = \exp\left(\langle \mu, t \rangle + \frac{t \Sigma t^t}{2} \right)$ con $t = (t_1, t_2)$