Probabilidad - 3er Curso (Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
Convocatoria extraordinaria (13 de febrero de 2023)

Apellidos, nombre:

---

1. **(1.5 puntos)** Cierta enfermedad afecta al 0.5% de una población. Existe una prueba para la detección de la enfermedad, que da positiva en los individuos enfermos con probabilidad 0.99 y da negativa en los individuos sanos con probabilidad 0.99.

   a) **(0.75 puntos)** Calcular la probabilidad de que un individuo elegido al azar esté realmente enfermo si la prueba da resultado positivo.

   b) **(0.75 puntos)** Calcular, aproximadamente, el número mínimo de personas con resultado positivo en la prueba que deben ser elegidas, de forma aleatoria e independiente, para asegurar una proporción de personas realmente enfermas en la muestra inferior a un $1/2$, con probabilidad mayor o igual que 0.95.

2. **(1.5 puntos)** Sean $X_1,\ldots,X_n$ n variables aleatorias continuas, independientes e identicamente distribuidas con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$. Dedudir la expresión analítica de la función de densidad de la variable aleatoria $T = min\{X_1,\ldots,X_n\}$.

3. **(5 puntos)** Dado el vector aleatorio (X,Y) con distribución uniforme en el recinto acotado, dentro el primer cuadrante, que está limitado por el interior de la parábola $y = x^2$ y la recta de ecuación $2y + x = 1$:

   a) **(0.25 puntos)** Obtener la función de densidad conjunta.

   b) **(1.50 puntos)** Obtener la función de distribución de probabilidad conjunta.

   c) **(0.75 puntos)** Obtener las funciones de densidad condicionadas.

   d) **(0.75 puntos)** Obtener la probabilidad de que $X \geq Y$.

   e) **(1.00 puntos)** Justificar que la mejor aproximación mínimo cuadrática a la variable Y conocidos los valores de la variable X viene dada por la variable aleatoria $\dfrac{1 - X + 2X^2}{4}$.

   f) **(0.75 puntos)** Obtener el error cuadrático medio cometido al obtener la mejor aproximación de la variable aleatoria Y observando el valor $x = \dfrac{1}{3}$.

4. **(2 puntos)** Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución multinomial de modo que la variable aleatoria X sigue una distribucion $B\left(6, \dfrac{1}{4}\right)$ y la variable aleatoria Y una $B\left(6, \dfrac{1}{2}\right)$.

   a) **(0.5 puntos)** Indique los parámetros de la distribución de probabilidad que sigue el vector (X,Y) y escriba su función masa de probabilidad.

   b) **(0.5 puntos)** Indique qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria $X/Y = 2$ y escriba su función masa de probabilidad.

   c) **(0.5 puntos)** Escriba la expresión analítica de las funciones generatrices de momentos del vector (X,Y), de las variables aleatorias X e Y, y la de la variable aleatoria $X/Y = 2$.

   d) **(0.5 puntos)** Escriba la mejor aproximación mínimo cuadrática de la variable Y conocidos los valores de la variable X, y dar una medida de la bondad de este ajuste.

Observaciones e indicaciones:

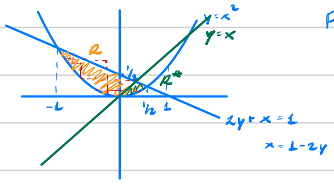
- En el **apartado 1.b** hay que utilizar probabilidades de una distribución $N(0,1)$. Como el alumno no dispone de esta tabla en el examen se le facilita la siguiente información:

  1. Las probabilidades inmediatamente inferior y superior a 0.95 que aparecen en la tabla de esta distribución son 0.94950 y 0.95053, respectivamente.
  2. $P[Z \leq 1.64] = 0.94950$ y $P[Z \leq 1.65] = 0.95053$ con Z una variable aleatoria que sigue una distribucion $N(0,1)$.

- En el **apartado 3.b** se obtienen **hasta 1.25 puntos** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.50 puntos** si se obtienen sus valores de forma explícita.

ASRR

3.- a) Como (X,Y) unif. distrib. $f(x,y)=k>0 \ \forall (x,y)\in R$ tq $\int_R k = 1$



Ptos. Corte: $x^2=(1-x)\frac{1}{2} \Rightarrow x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \wedge x=-1$

$$\int_R k = \int_{-1}^{1/2} k\left[(1-x)\frac{1}{2}-x^2\right]dx = k\int_{-1}^{1/2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x-x^2\,dx = k\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1/2} = k\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{24}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=$$

$$= k\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{48}\right)=\frac{59}{48}k=1 \Rightarrow \boxed{k=\frac{48}{59}}$$

b) Casos: $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$

- Si $x\le -1 \ \vee \ x^2 \ge y \Rightarrow F(x,y)=0$
- Si $x\in[-1,\frac{1}{2}] \wedge x^2\le y\le (1-x)\frac{1}{2} \Rightarrow F(x,y)=k\int_{-\sqrt{y}}^{x} y-t^2\,dt = k\left[yt-\frac{t^3}{3}\right]_{\sqrt{y}}^{x} = k\left(yx-\frac{x^3}{3}-y\sqrt{y}+\frac{y\sqrt{y}}{3}\right)$

Error

$$F(x,y)=\frac{48}{59}\left(yx-\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}y\sqrt{y}\right)$$

- Si $x\in[-1,\frac{1}{2}] \wedge (1-x)\frac{1}{2}\le y$

$$F(x,y)=k\int_{-\sqrt{y}}^{1-2y} y-t^2\,dt + k\int_{1-2y}^{x}(1-t)\frac{1}{2}-t^2\,dt = k\left[-2y^2-\frac{2}{3}y\sqrt{y}+\cancel{y}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1-2y}{2}+\frac{(1-2y)^2}{4}\right]$$

Error

$$\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_{1-2y}^{x} = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1-2y}{2}+\frac{(1-2y)^2}{4}+\cancel{\frac{(1-2y)^3}{3}}$$

$$\left[yt-\frac{t^3}{3}\right]_{\sqrt{y}}^{1-2y} = y-2y^2-\frac{(1-2y)^3}{3}-y\sqrt{y}+\frac{y\sqrt{y}}{3} = -\cancel{\frac{(1-2y)^3}{3}}-2y^2-\frac{2}{3}y\sqrt{y}+y$$

- Si $x\ge \frac{1}{2}$: $F(x,y)=k\int_{-\sqrt{y}}^{1-2y} y-t^2\,dt + k\int_{1-2y}^{1/2}(1-t)\frac{1}{2}-t^2\,dt = k\left[-2y^2-\frac{2}{3}y\sqrt{y}+y+\frac{3}{48}-\frac{1}{2}(1-2y)+\frac{1}{4}(1-2y)^2+\frac{1}{3}(1-2y)^3\right]$

Error

$$\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_{1-2y}^{1/2} = \frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{24}-\frac{1}{2}(1-2y)+\frac{1}{4}(1-2y)^2+\frac{1}{3}(1-2y)^3$$

- Si $x\ge \frac{1}{2} \wedge y\ge 1 \Rightarrow F(x,y)=1$

c) Primero marginales.

$$f_X(x)=\int_{x^2}^{(1-x)\frac{1}{2}} k\,dy = -k\left[x^2-(1-x)\frac{1}{2}\right] = -k\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)=\frac{48}{59}\left(-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$$

$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{1-2y} k\,dx = k\left[1-2y+\sqrt{y}\right]=\frac{48}{59}\left(1-2y+\sqrt{y}\right) \quad \text{si } y\ge \frac{1}{4}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} k\,dx = k\left(\sqrt{y}+\sqrt{y}\right)=\frac{48}{59}\cdot 2\sqrt{y} \quad \text{si } y<\frac{1}{4}$$

Condicionadas: $f_{X/Y=y_0}(x)=\frac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)}=\frac{1}{1-2y_0+\sqrt{y_0}} \quad \forall x\in\,]\sqrt{y_0}, 1-2y_0[$ si $y_0\ge \frac{1}{4}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y_0}} \quad \forall x\in\,]\sqrt{y_0}, +\sqrt{y_0}[\text{ si } y\le \frac{1}{4}$$

$$f_{Y/X=x_0}(y)=\frac{1}{-x_0^2-\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}} \quad \forall y\in\,]x_0^2, \tfrac{1}{2}(1-x_0)[\ \ x_0\in\,]-1,\tfrac{1}{2}[$$

d) $P[X\ge Y]=\int_{R^*} k = \int_0^{1/3} k(x-x^2)\,dx + \int_{1/3}^{1/2} k\left(\frac{1}{2}(1-x)-x^2\right) = k\left(\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{1/3}+\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{1/3}^{1/2}\right)$

e) Mejor aprox. $Y=E[Y/X] \Rightarrow y=E[Y/X=x]=\int_{x^2}^{1/2(1-x)}\frac{y}{-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(1-x)^2-x^4\right)$

$$=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2-x^4}{2\left(-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$\begin{array}{l|l} -4x^4+x^2-2x+1 & -2x^2-x+1 \\ \hline 4x^4+2x^3-2x^2 & 2x^2-x+1 \\ 2x^3-x^2-2x & \\ -2x^3-x^2+x & \\ -2x^2-x+1 & \end{array}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1-2x+x^2-4x^4}{-2x^2-x+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2x^2-x+1\right)=\frac{2x^2-x+1}{4}$$

luego $Y=\frac{1-X+2X^2}{4}$ es el mejor ajuste

f) Mejor aprox: $\hat{Y} = E[Y/X=1/3] = \frac{1-1/3+2/9}{4} = \frac{2}{9}$

$ECM = Var(Y/X=1/3) = E[Y^2/X=1/3] - E[Y/X=1/3]^2 = 0'05350 - 0'04938 = 0'004117$

$E[Y^2/X=1/3] = \int_{1/9}^{1/3} y^2 \frac{1}{2/9} dy = \frac{9}{2}[y^3 \frac{1}{3}]_{1/9}^{1/3} = \frac{3}{2} 0'03566 = 0'05350$

1.- a) Sea A = "Estar enfermo" y B = "Dar positivo".

Entonces nos pregunta: $P[A/B] = \frac{P[A\cap B]}{P[B]} = \frac{0'00495}{0'0149} = 0'3322$

$P[B] = P[B/A]P[A] + P[B/\bar{A}]P[\bar{A}] = 0'0149$

$P[A\cap B] = P[B/A]P[A] = 0'99 \cdot 0'005 = 0'00495$

b) Sea X la v.a. que cuenta las personas realmente enfermas de una muestra de n personas que han dado positivo $\Rightarrow X \sim B(n, 0'3322)$

Queremos $P[X \le \frac{n}{2}] \geq 0'95$

$P[X=x] = \binom{n}{x} 0'3322^x (1-0'3322)^{n-x}$

$P[X \geq \frac{n}{2}] \leq \frac{Var(X)}{(n/2)^2} = \frac{\cancel{n}0'3322(1-0'3322)}{n^{\cancel{2}}/4} = \frac{0'887322}{n}$

$P[X < \frac{n}{2}] = 1 - P[X \geq \frac{n}{2}] \geq 1 - \frac{0'887322}{n} = 0'95$

$0'05n = 0'887322$

$\boxed{n \geq 18}$

Con 18 individuos se cumple

2.- Como $X_1, \dots X_n$ i.i.d. unif en $(0,1] \Rightarrow f_{X_1}(x_1) = \dots f_{X_n}(x_1) = 1$

Sabemos que:

$F_T(t) = P[\min(X_1, \dots X_n) \le t] = 1 - P[t \le X_1, \dots, t \le X_n] =$

$= 1 - P[t \le X_1] \dots P[t \le X_n] =$

$= 1 - P[t \le X_1]^n$

$P[t \le X_1] = \int_t^1 f_{X_1}(x) dx = 1 - t \Rightarrow F_T(t) = 1 - (1-t)^n$

$\boxed{f_T(t) = F_T'(t) = n(1-t)^n}$