Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo A
16 de Marzo de 2017

NOMBRE:

1. Se considera la familia de curvas

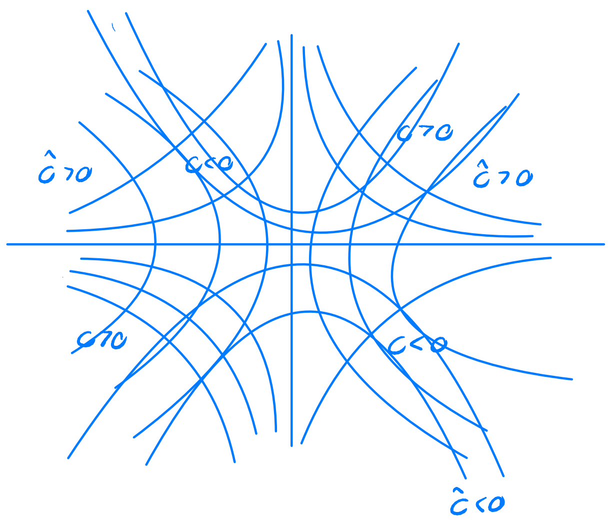
$$xy = c$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Calcula la familia de trayectorias ortogonales y dibuja las dos familias de curvas sobre el plano (x, y).

$xy = c \Longrightarrow \Upsilon \equiv \phi(x, y, c) = xy - c = 0$

$y = c/x \qquad \phi'(x, y, c) = y + xy' = 0 \Longrightarrow y' = -\dfrac{y}{x}$

Luego buscamos $y' = \dfrac{x}{y} \Longrightarrow y'y = x \Longrightarrow \boxed{\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} = \hat{c}}$



2. Demuestra que la ecuación

$$e^{x+t} + x = 0$$

define de forma implícita una función $x = x(t)$ que es derivable y está definida en todo $\mathbb{R}$. Encuentra una ecuación diferencial que admita a esta función como solución.

Sea $F(t,x) = e^{t+x} + x$, fijo $t \in \mathbb{R}$ y defino $F_t(x) = F(t,x)$ y vemos que

$\lim_{x \to +\infty} F_t(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} F_t(x) = -\infty$ } Sobreyectiva

$F_t'(x) = e^{x+t} + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Estric. Creciente

Luego $\exists! \, x \in \mathbb{R}$ tq $F_t(x) = F(t,x) = 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$

Podemos definir entonces $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $F(t, x(t)) = 0$

Para aplicar el Tª de la Función Implícita vemos que

$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = e^{x+t} + 1 \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Se puede aplicar demostrando que $x(t)$ es derivable

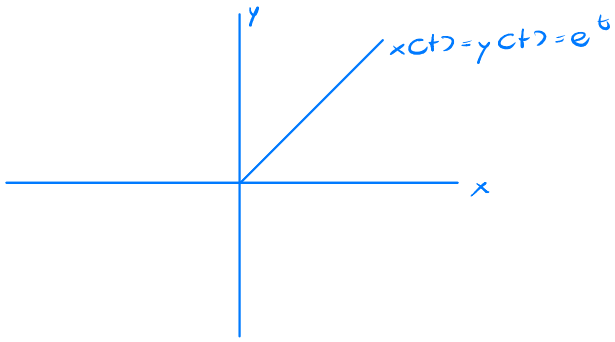
Como $F(t, x(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}\left[F(t, x(t))\right] = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)x' = 0$

$e^{x+t} + x'(e^{x+t} + 1) = 0 \Rightarrow \boxed{x' = \frac{-e^{x+t}}{e^{x+t}+1}}$

3. El sistema

$$x' = y, \;\; y' = x$$

admite la solución $(x(t), y(t))$ con $x(t) = y(t) = e^t$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Dibuja la órbita asociada en el plano (x, y). Encuentra la ecuación diferencial de las órbitas de este sistema.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{x}{y}$$

$$\boxed{y' = \frac{x}{y}}$$

4. Se considera el cambio de variables

$$\varphi: \ s = x, \ y = t.$$

¿En qué circunstancias se puede asegurar que es un cambio admisible para la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ con $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua?

Se considera la nueva ecuación $\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s,y)$, ¿Qué relación hay entre f y $\hat{f}$?

Vemos que es de clase C^1, con inversa de clase C^1.

Para que sea admisible

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)x' = x' = f(t,x) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

$$dy/ds = \frac{dy/dt}{ds/dt} = \frac{1}{f(t,x)} = \hat{f}(s,y) \Rightarrow \boxed{\hat{f}(s,y) = \frac{1}{f(y,s)}}$$

5. Dada una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y)$ de clase C^1 y un punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0,y_0) = 0$ se considera el problema de funciones implícitas

$$F(x,y(x)) = 0, \;\; y(x_0) = y_0.$$

Encuentra (si es que existen) una función F y un punto (x_0,y_0) en las condiciones anteriores y para los que el problema de funciones implícitas no admita solución.

Nota: se considera el problema local, la posible solución $y(x)$ está definida en algún entorno de x_0