PROBABILIDAD (Curso 2023/2024)

Modelo de control intermedio

Es un ejemplo, no necesariamente del tipo de ejercicios, sino de lo que espera que el alumnado pueda desarrollar en 2 horas de duración de un control intermedio de la asignatura.

---

1. El vector aleatoio (X,Y) tiene función masa de probabilidad conjunta dada por:

$$P[X=x,Y=y]=k(x+1)(y+1)$$

donde $x,y=0,1,2$.

   (a) Calcular el valor de k.

   (b) Calcular las distribuciones marginales.

   (c) Calcular las distribuciones condicionadas de X a los valores de $Y=y$ para $y=0,1,2$.

2. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x,y)=\dfrac{k}{x^2}, k>0$, sobre la región delimitada por $1<x<2, 0<y<x^2$.

   (a) Calcular k y la función de distribución de probabilidad.

   (b) Calcular las densidades de probabilidad marginales.

   (c) Calcular las densidades de probabilidad condicionadas.

3. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x,y)=k$, sobre la región delimitada por $0<x<\dfrac{1}{2}, 0<y<\dfrac{1}{2}$.

   (a) Calcular k para que f sea función de densidad de probabilidad de un vector aleatorio continuo (X,Y).

   (b) Calcular la función de densidad de probabilidad conjunta de $(Z,T)=(X+Y,X-Y)$.

   (c) Determinar las funciones de densidad de probabilidad marginales del vector transformado (Z,T).

ASRR

1- a) Se debe cumplir que

$$\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} P[X=x, Y=y] = 1$$

Luego

$$\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} P[X=x, Y=y] = K\cdot\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2}(x+1)(y+1) = K\cdot(1+2+3+2+4+6+3+6+9) = 36K = 1$$

$$\boxed{K = 1/36}$$

b) $P_X(x) = \sum_{y=0}^{2} P[X=x, Y=y] = K(x+1)\sum_{y=0}^{2}(y+1) = 1/36\,(x+1)\cdot 6 = 1/6\,(x+1)$

$P_Y(y) = \sum_{x=0}^{2} P[X=x, Y=y] = 1/6\,(y+1)$

c) $P_{X/Y=y_0}(x) = \dfrac{P[X=x, Y=y_0]}{P_Y(y_0)} = \dfrac{1/36\,(x+1)\cancel{(y_0+1)}}{1/6\,\cancel{(y_0+1)}} = 1/6\,(x+1)$

$P_{X/Y=0}(x) = P_{X/Y=1}(x) = P_{X/Y=2}(x) = 1/6\,(x+1)$

2- a) Se debe cumplir que, siendo $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 1<x<2,\ 0<y<x^2\}$, $\int_R f(x,y) = 1$

Luego

$$\int_R f(x,y) = \int_1^2\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_1^2 \frac{K}{x^2}\int_0^{x^2} dy\,dx = \int_1^2 K\,dx = 1 \Rightarrow \boxed{K=1}$$

$F_{(X,Y)}(x,y)$:

- Si $x\le 1 \lor y\le 0$, $F_{(X,Y)}(x,y) = 0$
- Si $(x,y)\in R$:
  - Si $y\le 1 \Rightarrow F_{(X,Y)}(x,y) = \int_1^x\int_0^y \frac{1}{t^2}\,dw\,dt = \int_1^x y\frac{1}{t^2}\,dt = y\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = y\left(1-\frac{1}{x}\right)$
  - Si $y\ge 1 \Rightarrow F_{(X,Y)}(x,y) = \int_1^{\sqrt{y}}\int_0^{t^2}\frac{1}{t^2}\,dw\,dt + \int_{\sqrt{y}}^{x}\int_0^{y}\frac{1}{t^2}\,dw\,dt = (\sqrt{y}-1) + y\left[-\frac{1}{t}\right]_{\sqrt{y}}^{x}$
- Si $y\ge x^2$ con $x\ge 1$ $F_{(X,Y)}(x,y) = F_{(X,Y)}(x,x^2)$
- Si $x\ge 2$ con $y\ge 0$ $F_{(X,Y)}(x,y) = F_{(X,Y)}(2,y)$

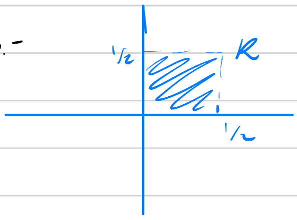
b) $f_X(x) = \int_0^{x^2}\frac{1}{x^2}\,dy = 1$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = 1/2 & 0\le y\le 1 \\ \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{x^2}\,dx = 1/\sqrt{y} - 1/2 & 1\le y\le 2 \end{cases}$$

c) $$f_{X/Y=y_0}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y_0)} = \begin{cases} \dfrac{1/x^2}{1/2} = \dfrac{2}{x^2} & 0\le y_0\le 1 \\ \dfrac{1/x^2}{1/\sqrt{y_0}-1/2} = \dfrac{1}{x^2(1/\sqrt{y_0}-1/2)} & 1\le y_0\le 2 \end{cases}$$

$$f_{Y/X=x_0}(y) = \frac{f(x_0,y)}{f_X(x)} = \frac{1/x^2}{1} = \frac{1}{x^2}$$

3.-



a) $\int_R K = 1 = K\lambda(R) = \frac{1}{4}K = 1 \Rightarrow \boxed{K=4}$

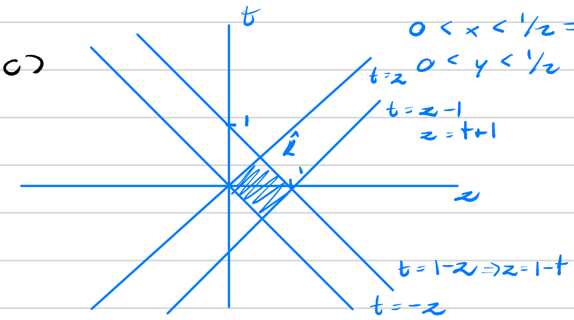
b) $g(x,y) = (z,t) = (x+y,\ x-y)$

- g deriv ✓
- g inyectiva $\Rightarrow x = \dfrac{z+t}{2} \quad y = \dfrac{z-t}{2}$ ✓
- $|J| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial X}{\partial T} \\ \frac{\partial Y}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \neq 0$$ ✓

$$f_{(Z,T)}(z,t) = \left|-\frac{1}{2}\right| f_{(X,Y)}(x,y) = 2$$

c)



$0 < x < 1/2 \Rightarrow 0 < z+t < 1$

$0 < y < 1/2 \Rightarrow 0 < z-t < 1$

$-t < z < 1-t \Rightarrow -t > z-1 \Rightarrow t < 1-z$

$t < z < 1+t \Rightarrow t > z-1$

$$f_Z(z) = \int_{-z}^{z} 2\,dt = 4z \quad \text{si } z \leq 1/2$$

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{1-z} 2\,dt = 4(1-z) \quad \text{si } z > 1/2$$

$$f_T(t) = \int_{-t}^{t+1} 2\,dz = 2(2t+1) \quad \text{si } t \leq 0$$

$$f_T(t) = \int_{t}^{1-t} 2\,dz = 2(1-2t) \quad \text{si } t \geq 0$$