ASRR

Lección 5

1- Sistemas lineales

· Notación: estudiamos $x' = A(t)x + b(t)$ con $x = x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ y

los coeficientes $A: I \to \mathbb{R}^{N\times N}$, $b: I \to \mathbb{R}^N$ continuas ≡ sus comp. son continuos

2- Teorema de existencia y unicidad

· Notación: $x' = A(t)x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ con $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ (*)

· Teorema: En las condiciones anteriores, el problema (*) tiene una única solución $x \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ (Definida en todo I)

3- Preliminares

· Normas matriciales

Sea $\|\cdot\|$ norma de $\mathbb{R}^N$, definimos norma matricial $\forall A \in \mathbb{R}^{N\times N}$

$$\|A\| = \max\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$$

· Integral vectorial

Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}^N$, $f = f(t)$ como $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$ definimos su integral

$$\int_a^b f(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1\,dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_N\,dt \end{pmatrix}$$

- Propiedades:
  - $A\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b A f(t)\,dt$, si $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$
  - $\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt$

· Convergencia uniforme

Dado I y $\varphi: I \to \mathbb{R}^N$, definimos:

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in I} \|\varphi(t)\| \quad (\|\varphi\|_\infty \in [0,+\infty])$$

Con norma euclídea: $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t^2 \end{pmatrix}$ $\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ e^t \end{pmatrix} \Rightarrow \|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in I} \sqrt{t^2+4t^4} = \sqrt{5}$ $\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in I} \sqrt{\frac{1}{t^2}+e^{2t}} = +\infty$

- Definición: Con $f_n: I \to \mathbb{R}^N$ $\forall n \in \mathbb{N}$, diremos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f: I \to \mathbb{R}^N$ si se cumple que

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

Dibujo tubo anchura ε alrededor de f, entonces las gráficas de f_n estarán dentro salvo por un número finito de ellas

- Propiedades: con $\{f_n\}$ c.u. a $f: I \to \mathbb{R}^N$
  - Integrales: $\int_a^b f_n\,dt \to \int_a^b f\,dt$
  - Continuidad: si f_n continua $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f$ continua