ASRR

Tema 3
Independencia de v.a.

• **Definición.** Sea $\mathbb{X}=(X_1,\dots,X_n)$ vector aleatorio. Se dice que
$X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_{X_i})$ $i=1\dots n$
son independientes si la función de distribución conjunta cumple
$$F_{\mathbb{X}}(x_1,\dots,x_n) = F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

• **Caracterizaciones:** – Sea $\mathbb{X}$ discreto, entonces son independientes si, y solo si
$$P_{\mathbb{X}}(x_1,\dots,x_n) = P[X_1=x_1]\cdots P[X_n=x_n]$$
equivalente a
$$P_{\mathbb{X}}(x_1,\dots,x_n) = h_1(x_1)\cdots h_n(x_n) \quad \text{con } h_i : E_{X_i} \to \mathbb{R} \ i=1\dots n \text{ arbitrarias}$$

– Sea $\mathbb{X}$ continuo, entonces son independientes si, y solo si
$$f_{\mathbb{X}}(x_1,\dots,x_n) = f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n)$$
equivalente a
$$f_{\mathbb{X}}(x_1,\dots,x_n) = h_1(x_1)\cdots h_n(x_n) \quad \text{con } h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ i=1\dots n \text{ arbitrarias}$$

– En términos de la Distribución de Probabilidad, son independientes si, y solo si $\forall B_1,\dots,B_n \in \mathcal{B}$ se cumple
$$P_{\mathbb{X}}(B_1\times\dots\times B_n) = P_{X_1}(B_1)\cdots P_{X_n}(B_n)$$

• **Propiedades**

1.- Sea X v.a. degenerada $(P(X=c)=1)$ entonces X es indep de cualquier v.a.

2.- Si $X_1\dots X_n$ son independientes, cualquier subconjunto de ellas lo será

3.- Si $X_1\dots X_n$ son independientes, las distrib. condicionadas son = a las marginales

4.- Caracterización por FGM. $M_{X_1\dots X_n}(t_1\dots t_n) = M_{X_1}(t_1)\cdots M_{X_n}(t_n)$

5.- Esperanzas: i) Si $\exists E[X_i]$, $i=1\dots n \Rightarrow \exists E[X_1\cdots X_n] = E[X_1]\cdots E[X_n]$

ii) Si $g_i : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ medibles y $g_i(X_i)$ $i=1\dots n$ independientes, entonces
$$E[g_1(X_1)\cdots g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)]\cdots E[g_n(X_n)]$$

iii) Si X e Y indep $\Longrightarrow Cov(X,Y)=0$ $\quad Cov(X,Y) = E[XY]-E[X]E[Y]$

iv) $Var\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i)$ $\quad a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$

- Matriz de covarianzas

Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ vector aleatorio.

$$\Sigma_X = (cov(X_i, X_j))_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{X_1} & \cdots & cov(X_1, X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & \cdots & \sigma^2_{X_n} \end{pmatrix}$$ Simétrica $\Rightarrow$ Diagonalizable

- Reproductividad de distribuciones

A partir de aquí, $X_1, \dots, X_n$ v.a independientes

- Binomial:

$$X_i \sim B(k_i, p) \quad i=1\dots n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, p\right)$$

- Poisson:

$$X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i) \quad i=1\dots n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

- Binomial negativa

$$X_i \sim BN(k_i, p) \quad i=1\dots n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim BN\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, p\right)$$

- Geométrica

$$X_i \sim G(p) \quad i=1\dots n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim BN(n, p)$$

- Normal:

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2), \ i=1\dots n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

- Gamma:

$$X_i \sim \Gamma(p_i, a) \quad i=1\dots n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} p_i, a\right)$$

con $p_i = k_i \in \mathbb{N}$ $\equiv \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, a\right)$

- Exponencial

$$X_i \sim exp(\lambda), \ i=1\dots n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda) \equiv \mathcal{E}(n, \lambda)$$

La definición de independencia de variables aleatorias extiende análogamente a los vectores