Apuntes Tema 1

• Espacio de probabilidad: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ → σ-álgebra $\subset \mathcal{P}(\Omega)$; → func. de probabilidad; → Conj. Arbitrario

P cumple:
- A_1 $P(A) \geq 0$ $\forall A \in \mathcal{A}$
- A_2 $P(\Omega) = 1$
- A_3 $\forall \{A_n\}_{n\geq 1}$ disjuntos $P(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$

• Probabilidad Condicionada: con $A \in \mathcal{A}$ tq $P(A) > 0$, $P(\cdot/A): \mathcal{A} \to [0,1]$ como $P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$

→ Teoremas:
- $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_2\cap A_1)\dots P(A_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$
- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ define partición de $\Omega \Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B/A_i)P(A_i)$
- " " " " " $\Rightarrow P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B/A_i)P(A_i)}$ $\forall i \in \mathbb{N}$

- Independencia de A y B $\iff P(A\cap B) = P(A)P(B)$

Variable aleatoria

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ con $B \in \mathcal{B} \iff X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (σ-álgebra de Borel)

→ Distribución de probabilidad sobre var. al. X

$P_X: \mathcal{B} \to [0,1]$

$P_X(B) = P(\{w \in \Omega;\ X(w) \in B\}) = P(X \in B)$ $\forall B \in \mathcal{B}$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ esp. de prob

→ Función de distribución

$F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$

$F_X(x) = P(X \leq x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \in (-\infty, x])$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Propiedades:
- Monótona no decrecientes
- Continua a la derecha
- $\exists \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ y $\exists \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Variables aleatorias DISCRETAS

$X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ discreta si $\exists E_X \subset \mathbb{R}$ numerable tq $P_X(x \in E_X) = 1$ (nº de resultados posibles numerable)

→ Func. Masa de probabilidad $\quad p_X: E_X \to [0,1]$ $\quad p_X(x) = P(X = x)$ $\quad \forall x \in E_X$

$\sum_{x\in E_X} p_X(x) = 1$

Var. Al. es discreta $\iff$ func. distrib. crece a saltos

Variables aleatorias CONTINUAS

v.a. $X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ continua si $\exists f_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

f_X es función de densidad:
- no negativa
- $\int_{\mathbb{R}} f_X = 1$

Esperanza matemática

aquí puede haber func. medible $\mathbb{E}[g(x)] = \sum_{x\in E_X} g(x)\, p_X(x)$

- v.a. discreta $\mathbb{E}[x] = \sum_{x\in E_X} x\, p_X(x)$ si $\exists \sum_{x\in E_X} |x|\, p_X(x) < \infty$

- v.a. continua $\mathbb{E}[x] = \int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\, dx$ si $\exists \int_{\mathbb{R}} |x|\, f_X(x)\, dx < \infty$

Momentos con $K \geq 1$

de orden K

- No centrados o centrados en el origen m_K $m_K = \mathbb{E}[X^K]$ si existe $\mathbb{E}[X^K]$
- Centrados μ_K $\mu_K = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^K]$ si existe $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^K]$

Función generatriz de momentos

Si $\exists\, \mathbb{E}[e^{tX}]$ $\forall t\in(-t_0, t_1)$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+\cup\{0\}$ se define fgm de X como

$$M_X : (-t_0, t_1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] \quad \forall t\in(-t_0,t_1)$$

↳ si existe, $\exists\, \mathbb{E}[X^K]$ $\forall K\in\mathbb{N}$

Relación con la esperanza: $\mathbb{E}[X^K] = \left.\dfrac{d^K M_X(t)}{dt^K}\right|_{t=0}$

Distribuciones de probabilidad discretas

• Degenerada

- Cuándo: $\exists c\in\mathbb{R} \,/\, P(X=c)=1$
- Denotamos: $X \sim D(c)$
- Func. Distrib.: $F_X(c^-)=0$ y $F_X(c)=F_X(x)=1$ $\forall x>c$
- Gen. de Momentos: $M_X(t)=e^{tc}$, $t\in\mathbb{R}$
- Momentos: $m_K=c^K$, $\mu_K=0$ $\forall K\in\mathbb{N}$
- Caracterización: $Var(X)=0$

• Uniforme Discreta

- Cuándo: $P(X=x_i)=\frac{1}{n}$, $i=1,\dots n$
- Denotamos: $X \sim U(x_1,\dots x_n)$ $x_i\in\mathbb{R}$
- Func. Distrib.: $F_X(x)=0$, $x<x_1$, $F_X(x)=\frac{i-1}{n}$ $x_{i-1}\leq x<x_i$, $F_X(x)=1$ $x\geq x_n$
- Gen. de Momentos: $M_X(t)=\frac{\sum_{i=1}^n e^{tx_i}}{n}$, $t\in\mathbb{R}$
- Momentos: $m_K=\frac{\sum_{i=1}^n x_i^K}{n}$, $\mu_K=\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-m_1)^K}{n}$ $\forall K\in\mathbb{N}$ $m_1=\mathbb{E}[X]$
- Caracterización: $\mathbb{E}[X]=\overline{X}$, $Var(X)=S^2$ varianza muestral

• Benouilli

- Cuándo: toma valores 0 o 1 con prob. $1-p$ y p respectivamente ($p\in\,]0,1[$
- Denotamos: $X\sim B(1,p)$
- Func. Masa de Prob $P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$, $x=0,1$
- Func. Distrib.: $F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-p & 0\leq x<1 \\ 1 & x\geq 1\end{cases}$
- Gen. de Momentos: $M_X(t)=pe^t+(1-p)$, $t\in\mathbb{R}$
- Momentos: $m_K=p$, $\mu_K=(1-p)^K p+(-p)^K(1-p)$ $K\in\mathbb{N}$
- Caracterización: $\mathbb{E}[X]=p$, $Var(X)=p(1-p)$

- **Binomial**
  - Cuándo: nº éxitos en un número finito de veces (n), prob. de éxito p CTE
  - Denotamos: $X \sim B(n,p)$ $\quad n \in \mathbb{N}$ $\quad \binom{n}{x}$
  - Func. Masa de Prob.: $P(X=x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$; $x = 0, 1, 2 \ldots n$
  - Gen. de Momentos: $M_X(t) = (pe^t + (1-p))^n$, $t \in \mathbb{R}$
  - Caracterización: $E[X] = np$ $\quad Var(X) = np(1-p)$

- **Poisson**
  - Cuándo: ocurrencia de un núm. de eventos en un cierto tiempo
  - Denotamos: $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$ (λ = nº veces de media que ocurre el evento durante el periodo)
  - Func. Masa de Prob.: $P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ $\quad x = 0, 1, 2 \ldots$
  - Gen. de Momentos: $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$, $t \in \mathbb{R}$
  - Caracterización: $E[X] = Var(X) = \lambda$

- **Geométrica**
  - Cuándo: nº de fracasos hasta el primer éxito
  - Denotamos: $X \sim G(p)$ $(0 < p < 1)$
  - Func. Distrib.: $F_X(x) = 0 \quad x < 0$, $\quad F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1} \quad x \geq 0$
  - Gen. de Momentos: $M_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t}$ $\quad t < -\ln(1-p)$
  - Caracterización: $E[X] = \frac{1-p}{p}$ $\quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$
  - Prop. de falta de memoria: $P(X \leq h+k / X \leq h) = P(X \leq k)$ $\quad \forall h, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

- **Binomial negativa**
  - Cuándo: nº de fracasos hasta el k-ésimo éxito
  - Denotamos: $X \sim BN(k,p)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$ $\quad \binom{x+k-1}{x}$
  - Func. Masa de Prob.: $P(X=x) = \frac{(x+k-1)!}{x!(k-1)!} (1-p)^x p^k$ $\quad x \in \mathbb{N}$
  - Gen. de Momentos: $M_X(t) = \left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^k$, $\quad t < -\ln(1-p)$
  - Caracterización: $E[X] = \frac{k(1-p)}{p}$ $\quad Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$

- **Hipergeométrica**
  - Cuándo: nº de individuos (x) de una muestra (n) que pertenecen a una subpoblación (N_1) (N = población)
  - Denotamos: $X \sim H(N, N_1, n)$ $\quad \binom{N_1}{x}$
  - Func. Masa de Prob.: $P(X=x) = \frac{N_1!}{x!(N_1-x)!} \cdot \frac{(N-N_1)!}{(n-x)!} \frac{(N-N_1-n+x)!}{N!} \cdot (n!(N-n)!)$
  - Caracterización: $E[X] = n\frac{N_1}{N}$ $\quad Var(X) = n\frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$

Variables aleatorias continuas

X se dice continua si $\exists f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

↳ func. de densidad de X → no negativa, → $\int_{\mathbb{R}} f_X = 1$

Distribuciones continuas

- **Uniforme**
  - Cuándo: valores en un intervalo (a,b) y densidad de prob. cte
  - Denotamos: $X \sim U(a,b)$
  - Func. Distrib: $F_X(x) = \int_a^x f_X(y)\,dy = \frac{x-a}{b-a}$
  - Gen. Momentos: $M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$ $t \neq 0$, $M_X(0) = 1$

- **Normal**
  - Cuándo: sigue una normal de parámetros μ y σ^2
  - Denotamos: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$
  - Func. Densidad: $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
  - Tipificación: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
  - Gen. Momentos: $M_X(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$

- **Exponencial**
  - Cuándo: tiempo aleatorio entre 2 sucesos, λ = razón de ocurrencia
  - Denotamos: $X \sim \exp(\lambda) \iff f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $\forall x \geq 0$
  - Func. Distrib: $F_X(x) = \int_0^x f_X(y)\,dy = 1 - e^{-\lambda x}$
  - Gen. Momentos: $M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$
  - Caracterización: $E[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

- **Erlang**
  - Cuándo: tiempo hasta n-ésimo suceso
  - Denotamos: si $X_i \sim \exp(\lambda)$ $i = 1 \dots n$, $\sum_{i=1}^{n} X_i = E \sim E(n, \lambda)$
  - Func. Densidad: $f_E(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ $x \in \mathbb{R}^+$
  - Gen. Momentos: $M_E(t) = \left[\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)\right]^{-n}$, $t < \lambda$

- **Gamma**
  - Función Gamma: $\Gamma(u) = \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-x}\,dx$ $u > 0 \Rightarrow \Gamma(k) = (k-1)!$ $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
  - Cuándo: extensión de Erlang cuando $n \notin \mathbb{N}$
  - Denotamos: $X \sim \Gamma(\overset{\text{forma}}{u}, \overset{\text{escala}}{\lambda})$ $u, \lambda \in \mathbb{R}^+$
  - Func. Densidad: $f_X(x) = \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-\lambda x}$
  - Gen. Momentos: $M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-u}$

- Beta
  - Función Beta: $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ → simétrica → $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
  - Cuándo: variables físicas con valores en un intervalo
  - Denotamos: $X \sim \beta(p,q)$ $p,q > 0$
  - Func. Densidad: $f_X(x) = \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ $x \in (0,1)$
  - Propiedades: $p = q = 1 \Rightarrow X \sim U(0,1)$ / $X \sim \beta(p,q) \Leftrightarrow 1-X \sim \beta(q,p)$
  - Caracterización: $E[X] = \frac{p}{p+q}$ $Var(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$