Antonio Javier Rodríguez Romero

Actividad Obligatoria 3.

1. Para cualesquiera $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, calcular detalladamente, indicando las fórmulas aplicadas, la expresión de la varianza:

$$\exists E[X_i^2],\ i=1,\dots,n,\Rightarrow \exists \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n a_iX_i\right]$$

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n a_iX_i\right]=\sum_{i=1}^n a_i^2\mathrm{Var}(X_i)+\sum_{i\neq j}^n a_ia_j\mathrm{Cov}(X_i,X_j).$$

Partiremos de la expresión de la izquierda hasta llegar por las igualdades aprendidas a la de la derecha. Primero, aplicaremos que:

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-E[X]^2$$

y vemos que

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n a_iX_i\right]=E\left[\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)^2\right]-E\left[\sum_{i=1}^n a_iX_i\right]^2 \quad (1)$$

Fijándonos en el segundo término, aplicamos la propiedad de linealidad de la esperanza, de modo que

$$E\left[\sum_{i=1}^n a_iX_i\right]^2=\left(\sum_{i=1}^n a_iE[X_i]\right)^2$$

Desarrollamos este cuadrado

$$\left(\sum_{i=1}^n a_iE[X_i]\right)^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_jE[X_i]E[X_j] \quad (2)$$

Por otro lado, desarrollamos el cuadrado del primer término:

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)^2\right]=E\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_jX_iX_j\right]$$

Aplicamos linealidad

$$E\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_jX_iX_j\right]=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_jE[X_iX_j] \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n a_iX_i\right]=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_jE[X_iX_j]-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_jE[X_i]E[X_j]$$

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n a_iX_i\right]=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j(E[X_iX_j]-E[X_i]E[X_j])$$

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n a_iX_i\right]=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

Para terminar vemos que en los sumatorios, cuando $i=j$:

$$a_ia_j\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=a_i^2\mathrm{Cov}(X_i,X_i)=a_i^2\mathrm{Var}(X_i)$$

luego podemos separarlos como

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n a_iX_i\right]=\sum_{i=1}^n a_i^2\mathrm{Var}(X_i)+\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n a_ia_j\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

Requerimos de la primera condición ($\exists E[X_i^2],\ i=1\dots n$) ya que utilizamos las varianzas de cada v.a. con la expresión $\mathrm{Var}(X_i)=E[X_i^2]-E[X_i]^2$