$$2y-6x+\left(3x-\frac{4x^2}{y}\right)y'=0$$ $D^+=\{(x,y): y>0\}$ para que sea conexo y forma est.

a) $\mu(x,y)=m(xy^2)$ f.i. $\Rightarrow \mu_x=y^2m'$, $\mu_y=2yxm'$

Sea

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y)=2y-6x \\ Q(x,y)=3x-\frac{4x^2}{y}\end{array}\right\} P(x,y)+Q(x,y)y'=0$$

Para que sea factor integrante:

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y}=\frac{\partial \mu Q}{\partial x}\Rightarrow \mu_y P+\mu P_y=\mu_x Q+\mu Q_x$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot P_y(x,y)=2 \\ \cdot Q_x(x,y)=3-\frac{8x}{y}\end{array}\right\} 2yxm'P+\cancel{2m}=y^2m'Q+\cancel{3}m-\frac{8x}{y}m$$

$$\frac{8xm}{y}-m=2yxm'P-y^2m'Q$$

$$\left(\frac{8x}{y}-1\right)m=m'(\cancel{4}xy^2-\cancel{12}x^2y-\cancel{3xy^2}+\cancel{4x^2y})$$

$$\frac{m'}{m}=\frac{\frac{8x}{y}-1}{xy^2-8x^2y}=\frac{\frac{8x}{y}-1}{xy^2\left(1-\frac{8x}{y}\right)}=-\frac{1}{xy^2}$$

Imponemos que $D=\{(x,y): x,y>0\}$ dominio de la función y vemos que, como de la condición de exactitud obtenemos que

$$\frac{m'}{m}=-\frac{1}{xy^2}$$

que es función de xy^2, tenemos que la ecuación admite un factor integrante esta forma

b) Resuelve

$$\frac{m'}{m}=\frac{-1}{xy^2}\Rightarrow m(xy^2)=e^{-\ln(xy^2)}=\frac{1}{xy^2}$$

Como μP y μQ cumplen la condición de exactitud en un dominio con forma de estrella, $\exists U\in C^2(D)$ tq $\frac{\partial U}{\partial x}=\mu P \wedge \frac{\partial U}{\partial y}=\mu Q$

Encontramos esta

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=\frac{2}{xy}-\frac{6}{y^2}\Rightarrow U(x,y)=\frac{2}{y}\ln(xy)-\frac{6x}{y^2}+\varphi(y)=$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=\frac{3}{y^2}-\frac{4x}{y^3}\Rightarrow \varphi'(y)=\frac{3}{y^2}\Rightarrow \varphi(y)=-\frac{3}{y}$$

Luego $U(x,y)=\frac{1}{y}\left[2\ln(xy)-3-\frac{6x}{y}\right]$ $\forall (x,y)\in D$

Por lo tanto, la ecuación quedaría, con notación $y=y(x)$

$$\frac{d}{dx}[U(x,y)]=0\Rightarrow U(x,y)=c \quad \text{con } c\in\mathbb{R}$$

$\frac{1}{y}\left[2\ln(xy)-3-\frac{6x}{y}\right]=c$ define de manera implícita una familia uniparamétrica de funciones $y:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ $y=y(x)$ soluciones de la ecuación

c) ¿ Solución $y(0)=1$?

Supongamos que existe.

Si tomamos en la ecuación original $y = y(0) = 1 \wedge x = 0$ obtenemos $2 = 0$, llegando a una contradicción, luego no existe esta solución.