Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo B
22 de Marzo de 2018

NOMBRE:

1. Se considera una solución cualquiera $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$x' = 2tx.$$

Se supone que dicha solución está definida en un intervalo abierto I. Demuestra que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$x(t) = ce^{t^2}$$

para cada $t \in I$.

$K \in \mathbb{R}$

$$x' = 2tx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2tx \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \int 2t\,dt = \ln|x| = t^2 + K \Rightarrow |x| = e^K e^{t^2}$$

Sol fija $x^* = 2tx^* \Rightarrow \boxed{x^* = 0} \Rightarrow$ con $c = 0$ $x(t) = ce^{t^2}$

$x = \pm e^K e^{t^2} = ce^{t^2}$

$x(t) = ce^{t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

y $c = \pm e^K$ o $c = 0$

$c \in \mathbb{R}$

2. Demuestra que la transformación $\varphi(t, x) = (s, y)$, $s = t$, $y = x + t$ define un difeomorfismo del plano que es compatible con la ecuación

$$x' = (x + t)^2.$$

Encuentra la solución de esta ecuación que cumple $x(0) = 0$ y especifica su intervalo de definición.

φ define difeomorfismo ya que

- $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ por serlo sus componentes
- $\begin{cases} s = t \\ y = x + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = s \\ x = y - s \end{cases} \Rightarrow \exists \psi(s, y) = \varphi^{-1}(s, y) = (s, y - s) \Rightarrow \psi \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Será compatible ya que

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)\, x' = 1 \neq 0$$

de forma que

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy/dt}{ds/dt} = \frac{1 + x'}{1} = 1 + y^2 \Rightarrow y' = 1 + y^2$$

$y^*: 0 = 1 + y^{*2} \Rightarrow \nexists\, y^* \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{1 + y^2}\, dy = \int ds$$

$$\operatorname{arctg} y = s + c$$

$$y = \operatorname{tg}(s + c)$$

$$x + t = \operatorname{tg}(t + c)$$

$$x(t) = \operatorname{tg}(t + c) - t \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Como $x(0) = 0 \Rightarrow x(0) = \operatorname{tg}(c) = 0 \Rightarrow c = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

De forma que $x(t) = \operatorname{tg}(t + k\pi) - t$ $\quad t + k\pi \neq \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

Al darnos la imagen de 0, tomemos $x(t) = \operatorname{tg}(t) - t \quad \forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$

3. Encuentra un cambio de variable que transforme la ecuación diferencial

$$x' = \frac{x+t+3}{t-x+2}$$

en una ecuación homogénea.

Tomaremos una traslación definida $\varphi : (t,x) \longmapsto (t+\eta, x+\mu) = (s,y)$, $\eta, \mu \in \mathbb{R}$

Sabemos que es difeomorfismo con

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dt} = \frac{y-\mu+s-\eta+3}{s-\eta-y+\mu+2} \Rightarrow \begin{cases} \mu+\eta = 3 \\ \eta-\mu = 2 \end{cases} \begin{cases} 2\eta = 5 \Rightarrow \boxed{\eta = 2'5} \\ \boxed{\mu = 0'5} \end{cases}$$

Luego $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como $\varphi(t,x) = (t+2'5, x+0'5) = (s,y)$ será el cambio que la reduce a homogénea

No lo pide pero resuelvo

$$y' = \frac{y+s}{s-y} = \frac{\frac{y}{s}+1}{1-\frac{y}{s}} \Rightarrow (s,y) \longmapsto (s,z) = \left(s, \frac{y}{s}\right)$$

$$\frac{dz}{ds} = -\frac{z}{s} + \frac{1}{s}\left[\frac{z+1}{1-z}\right] = \frac{1}{s}\left(\frac{\cancel{z}+1-\cancel{z}+z^2}{1-z}\right) \Rightarrow z' = \frac{1}{s}\,\frac{1+z^2}{1-z}$$

$$\int \frac{1-z}{1+z^2}\,dz = \int \frac{1}{s}\,ds \Rightarrow \boxed{\operatorname{arctg}(z) - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln|s|}$$

Deshacer cambios de variable

4. Dadas las ecuaciones

$$x = t + e^t, \;\; y = 1 + t^4$$

demuestra que la eliminación del parámetro t nos permite definir una función derivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$. Además la función $y(x)$ alcanza su mínimo en $x = 1$.

Si definimos $f(t) = x = t + e^t \;\; \forall t \in \mathbb{R}$, vemos que, siendo $f \in C^1(\mathbb{R})$

- $f'(t) = 1 + e^t > 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ inyectiva
- $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$, $\lim_{t \to -\infty} f(t) = -\infty \Rightarrow f$ sobreyectiva

Al ser biyectiva $\exists \, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como, si $f(t) = x$, $g(x) = t$ de forma que $g = f^{-1}$

De esta forma, $y = 1 + t^4 = 1 + g(f(t))^4 \Rightarrow y(x) = 1 + g(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

Vemos que

$$y' = g'(x) g(x)^3 \cdot 4$$

Para $y' = 0 \Rightarrow g'(x) = 0 \vee g(x) = 0 \Rightarrow f(0) = \boxed{x = 1}$

$\hookrightarrow g'(x) \neq 0$

5. Demuestra que la ecuación

$$x - \frac{1}{3} \operatorname{sen} x = t$$

define de forma implícita una única función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$. Además, prueba que se cumple la identidad $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi$ para cada $t \in \mathbb{R}$.