Probabilidad - 3er Curso (Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
Convocatoria ordinaria (11 de enero de 2023)

Apellidos, nombre:

---

1. **(1.5 puntos)** Justificar las siguientes relaciones:

   a) **(0.25 puntos)** Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas según una ley Binomial, $B(3, \frac{1}{2})$. Justificar que $P[X_1 + X_2 = 8] = 0$.

   b) **(0.25 puntos)** Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas según una ley de Poisson, $P(3)$. Justificar que $P[X_1 + X_2 + X_3 > 0] = \frac{e^9 - 1}{e^9}$.

   c) **(1 punto)** Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas según una ley de Bernoulli de parámetro p. Se considera $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, la variable aleatoria que define las sumas parciales de la sucesión. Justificar que $\dfrac{S_n}{n} \to^{P} p$.

2. **(1.5 puntos)** Sean $X_1, \ldots, X_n$ n variables aleatorias continuas, independientes e identicamente distribuidas con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$. Deducir la expresión analítica de la función de densidad de la variable aleatoria $Z = max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

3. **(5 puntos)** Dado el vector aleatorio (X,Y) con distribución uniforme en el recinto acotado limitado por el exterior de la parábola $y = x^2$, la recta de ecuación $2y + x = 1$ y la recta de ecuación $y = 0$:

   a) **(0.25 puntos)** Obtener la función de densidad conjunta.

   b) **(1.50 puntos)** Obtener la función de distribución de probabilidad conjunta.

   c) **(0.75 puntos)** Obtener las funciones de densidad condicionadas.

   d) **(0.50 puntos)** Obtener la probabilidad de que $X \geq \dfrac{1}{2}$.

   e) **(1.25 puntos)** Obtener la mejor aproximación mínimo cuadrática a la variable X conocidos los valores de la variable Y.

   f) **(0.50 puntos)** Obtener la mejor aproximación de la variable aleatoria Y sin observar la variable X y dar una medida del error cuadrático medio cometido en esta aproximación.

   g) **(0.25 puntos)** ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justificar de forma muy breve la respuesta.

4. **(2 puntos)** Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución normal bidimensional. La moda de Y vale 4 y la $Var[Y/X = x_0] = \dfrac{Var(Y)}{2} \neq 0$. La curva de regresión de Y/X es $y = x + 5$ y el error cuadrático medio asociado a esta aproximación es 3.

   a) **(1.25 puntos)** Determinar los parámetros de la distribución de (X,Y).

   b) **(0.75 puntos)** Especificar la función generatriz de momentos de (X,Y).

<u>Observaciones e indicaciones</u>:

- En el **apartado 1.c** hay que demostrar el/los resultados empleados para justificar la relación pedida, salvo la Desigualdad de Chebychev.
- En el **apartado 3.b** se obtienen **hasta 1.25 puntos** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.50 puntos** si se obtienen sus valores de forma explícita.

ASRR.

Ordinaria 2023

1.- a) Sabemos que si $X_1, X_2 \sim B(3, 1/2)$, $\mathcal{X}_{X_1} = \mathcal{X}_{X_2} = \{0,1,2,3\}$. Como $\forall x_1 \in \mathcal{X}_{X_1}$ $\forall x_2 \in \mathcal{X}_{X_2}$ $x_1 + x_2 \le 6$, tenemos que $\nexists x_1 \in \mathcal{X}_{X_1}, x_2 \in \mathcal{X}_{X_2}$ tq $x_1 + x_2 = 8 \Rightarrow P[X_1 + X_2 = 8] = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2 / x_1 + x_2 = 8] = 0$

b) $P[X_1 + X_2 + X_3 > 0] = 1 - P[X_1 + X_2 + X_3 \overset{=0}{\le} 0] = 1 - P[X_1 = 0]\,P[X_2 = 0]\,P[X_3 = 0] = 1 - \left[e^{-3}\frac{3^0}{0!}\right]^3 = 1 - \frac{1}{e^9} = \frac{e^9 - 1}{e^9}$

c) Se justifica por la ley débil de Bernoulli ya que como

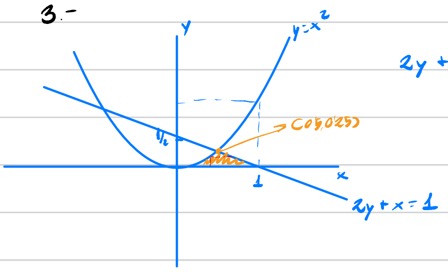
$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} = \frac{S_n - np}{n} \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

2.- Como $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d. uniformemente en $[0,1] \Rightarrow f_{X_1}(t) = f_{X_2}(t) = \dots = f_{X_n}(t) = k$ tq $\int_0^1 k\,dt = 1$ luego $k = 1$. Por lo tanto,

$$F_Z(z) = F_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}(z, z, \dots, z) \overset{\text{son indep}}{=} F_{X_1}(z)\,F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ z^n & 0 < z \le 1 \\ 1 & 1 < z \end{cases}$$

Como $F_Z(z) = \int_0^z f_Z(t)\,dt$ $\forall z \in [0,1] \Rightarrow z^n = \int_0^z f_Z(t)\,dt \Rightarrow \boxed{f_Z(t) = nz^{(n-1)}}$

3.-



$2y + x = 1 \Rightarrow y = \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$

$x = 1 - 2y$

a) Como (X,Y) unif. $\Rightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = k$ $\forall (x,y) \in R$ tq $\int_R k = 1$

$$\int_R k = \int_0^{1/2} kx^2\,dx + \int_{1/2}^1 k\left(\frac{1-x}{2}\right)dx = k\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2\right]_{1/2}^1\right) =$$

$$= k\left(\frac{1}{24} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{16}\right) = k\frac{5}{48} = 1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{48}{5}}$$

$$\boxed{f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{48}{5} \quad \forall (x,y) \in R}$$

b) Distinguimos casos, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- Si $x \le 0 \lor y \le 0 \Rightarrow F(x,y) = 0$
- Si $x \in]0, 1/2] \land y \in]0, 1/4] \Rightarrow F(x,y) = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{48}{5}t^2\,dt + \int_{\sqrt{y}}^x \frac{48}{5}y\,dt = \frac{48}{5}\left[\frac{y\sqrt{y}}{3} + x - \sqrt{y}\right] = \frac{48}{5}\left(\frac{(y-3)\sqrt{y}}{3} + x\right)$
- Si $x \in]1/2, 1] \land y \le 1 - 2y \Rightarrow F(x,y) = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{48}{5}t^2\,dt + \int_{\sqrt{y}}^{1-2y} \frac{48}{5}y\,dt + \int_{1-2y}^x \frac{48}{5}\,\frac{1-t}{2}\,dt$
- Si $x \ge 1 \Rightarrow F(x,y) = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{48}{5}t^2\,dt + \int_{\sqrt{y}}^{1-2y} 48/5\, y\,dt + \int_{1-2y}^1 48/5\, \frac{1-t}{2}\,dt$
- Si $y \ge 1/4 \land x \in]0, 1/2] \Rightarrow F(x,y) = \int_0^x 48/5\, t^2\,dt$

  $x \in]1/2, 1] \Rightarrow F(x,y) = \int_0^{1/2} 48/5\, t^2\,dt + \int_{1/2}^x 48/5\, \frac{1-x}{2}\,dt$
- Si $x \ge 1 \land x \ge 1/4 \Rightarrow F(x,y) = 1$

c) Primero marginales:

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{x^2} \frac{48}{5}\,dt = \frac{48}{5}x^2 & x \in [0, 1/2] \\ \int_0^{\frac{1-x}{2}} \frac{48}{5}\,dt = \frac{48}{5}\cdot\frac{1-x}{2} = \frac{24}{5}(1-x) & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{\sqrt{y}}^{1-2y} \frac{48}{5}\,dt = \frac{48}{5}(1 - 2y - \sqrt{y})$$

$$f_{X/Y=y_0}(x) = \frac{f_{XY}(x, y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{1}{1 - 2y_0 - \sqrt{y_0}} \quad \forall x \in [0,1],\ y_0 \in [0, 0'25[$$

d) $P[X \geq 1/2] = 1 - P[X \leq 1/2] = 1 - \int_0^{1/2} \frac{48}{5} t^2 \, dt = 1 - \frac{48}{5} \frac{(1/2)^3}{3} = 3/5$

e) La mejor aproximación a X conocido Y será $x = E[X/Y=y]$

$$E[X/Y=y] = \int_{\sqrt{y}}^{1-2y} x f_{X/Y=y}(x)\, dx = \int_{\sqrt{y}}^{1-2y} x \frac{1}{1-2y-\sqrt{y}} dx = \frac{1}{1-2y-\sqrt{y}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\sqrt{y}}^{1-2y} = \frac{1}{1-2y-\sqrt{y}} \left(\frac{1-4y+4y^2}{2} - \frac{y}{2} \right)$$

$$\boxed{E[X/Y/y] = \frac{1-3y+4y^2}{2(1-2y-\sqrt{y})} = x}$$

f) Esta será $E[Y] = \int_0^{0'25} y f(y)\, dy = \int_0^{0'25} y(1-2y-\sqrt{y}) \frac{48}{5} dy = \frac{48}{5} \int_0^{0'25} y - 2y^2 - y^{3/2} dy$

$$E[Y] = \frac{48}{5} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} y^{5/2} \right]_0^{0'25} = \boxed{0'08 = y}$$

El error cometido será $Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = 0'0096 - 0'0064 = 0'0032$

$$E[Y^2] = \int_0^{0'25} y^2 (1-2y-\sqrt{y}) \frac{48}{5} dy = \frac{48}{5} \int_0^{0'25} y^2 - 2y^3 - y^{5/2} dy =$$

$$= \frac{48}{5} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{2} - \frac{2}{7} y^{7/2} \right]_0^{0'25} \simeq 0'0096$$

$$\boxed{ECM = 0'0032}$$

g) Si fueran independientes el mejor ajuste de X sobre Y hubiera resultado $x = E[X]$. Como este no es el caso tenemos que no son independientes

* Ley de Khintchine: $Var(S_n - E[S_n]) = Var(S_n) = Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) = n Var(X_i)$

Por Chebychev:

$$P\left(\left| \frac{S_n - E[S_n]}{n} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{Var(S_n - E[S_n])}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{n Var(X_i)}{\varepsilon^2 n^2} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

Con lo cual $P\left(\left| \frac{S_n - E[S_n]}{n} \right| > \varepsilon \right) \longrightarrow 1 \Rightarrow \frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \longrightarrow p$