

Apellidos, nombre:

1. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias continuas e independientes, tales que $\exists E[X_i] \forall i = 1, \dots, n$, con momento no centrado de orden dos finito. Justificar que:

a) **(0.5 puntos)** $\exists \text{Var}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i), \quad \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$

b) **(0.5 puntos)** (X_1, \dots, X_n) es un vector aleatorio continuo.

2. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en el recinto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

a) **(1.25 puntos)** Calcular la función de distribución de probabilidad conjunta.

b) **(1.25 puntos)** Calcular las funciones de densidad condicionadas.

3. Se considera (X, Y) la distribución uniforme en el cuadrado unidad.

a) **(1.25 puntos)** Calcular la función de densidad de probabilidad de $Z = (X + Y, X - Y)$

b) **(1.25 puntos)** La función de densidad de probabilidad conjunta del máximo y el mínimo.

4. **(1.5 puntos)** Dado un vector aleatorio con función generatriz de momentos

$$M_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = \left(\frac{e^{t_1}}{2} + \frac{e^{t_2}}{4} + \frac{1}{4} \right)^5, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Calcular la razón de correlación y el coeficiente de correlación lineal de las variables X_1 y X_2 .

5. Dado el vector bidimensional (X, Y) con la siguiente función masa de probabilidad conjunta:

$X Y$	0	1	2
1	1/4	0	0
2	0	1/4	0
3	1/4	0	1/4

a) **(1.25 puntos)** Obtener la mejor aproximación mínimo-cuadrática a la variable Y conocidos valores de la variable X , así como calcular una medida de la bondad del ajuste.

b) **(1.25 puntos)** Obtener las ecuaciones de la rectas de regresión de Y/X y X/Y y el error cuadrático medio.

Observaciones e indicaciones:

- En el **apartado 2.a** se obtiene **hasta 1 punto** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.25 puntos** si se obtienen sus primitivas de forma explícita.
- Si necesitara obtener la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, realizar el cambio de variable unidimensional $x = \sin(t)$.