Resumen 1er Parcial

Soluciones "rápidas":

- $x' = t \overset{\int}{\Longrightarrow} x(t) = \frac{t^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- $x' = x \Longrightarrow x(t) = ae^t$
- $x' = 1/x \Longrightarrow x(t) = \sqrt{2t + b}$

Observación: $x = x(t)$ solución de $x' = kx \Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ tq $x(t) = ce^{kt} \quad \forall t \in I$

Forma normal: $x' = \overset{\text{continua, definida en } D}{f(t,x)}$

Derivación implícita:

$x = x(t)$ puede venir explícitamente $x = t + \text{sen}(t)$ o implícitamente $x^5 + x = t \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Para cada t $\exists!\, x(t)$ solución

Ejemplo $e^x + x + t = 0 \rightsquigarrow x = x(t)$

¿$\forall t \in \mathbb{R}$ $\exists!\, x \in \mathbb{R}$? $\Longleftrightarrow$ ¿Define una función?

$\varphi(x) = e^x + x \qquad \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Longrightarrow \varphi(x) = -t$

$\varphi \nearrow (\varphi'(x) = e^x + 1 > 0) \Longrightarrow$ inyectiva / $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty \Longrightarrow \varphi$ sobreyectiva

Derivamos $e^x + x + t = 0 \Longrightarrow e^{x(t)} x'(t) + x'(t) + 1 = 0 \Longrightarrow x' = \frac{-1}{1 + e^x}$

Teorema función implícita

$D \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $g \in C^1(D)$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $g(t_0, x_0) = 0 \wedge \frac{\partial g}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$. Entonces la ecuación $g(t,x) = 0$ define $x = x(t)$ en un entorno de $t = t_0$ tq $x(t_0) = x_0$

Ejemplo $e^x + x + t = 0 \Longrightarrow F(t,x) = e^x + x + t$, $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ Tomo $t_0 \in \mathbb{R}$, despuesto F deriv.

$(t_0, x(t_0)) = (t_0, x_0) \Longrightarrow F(t_0, x_0) = 0$ Como $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = e^x + 1 \neq 0 \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$

Ejemplo $t^2 + 2x^2 + 7 = 0 \Longrightarrow$ No define porque NO se anula nunca

Construcción de ec. diferenciales a partir de las soluciones

Tengo familia uniparamétrica de sol. $x = x(t)$, $\Phi(t, x, \overset{\text{cte. de integración}}{c}) = 0$

$\Phi(t, x(t), c) = 0$

Si derivamos:

$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x(t), c) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x(t), c) \cdot x'(t) = 0$ } Juntamos y eliminamos c

Obtenemos $\varphi(t, x(t), x'(t)) = 0$ //

Ejemplo:

$1 - cte^x = \Phi(t,x,c) \Longrightarrow cte^x = 1 \Longrightarrow e^x = 1/ct \Longrightarrow x(t) = \ln(1/ct) \Longrightarrow$ $t \in]0, +\infty[$ si $c > 0$; $t \in]-\infty, 0[$ si $c < 0$

↳ Derivamos: $ce^x + cte^x x' = 0 \Longrightarrow$ Como $c \neq 0$, $e^x + te^x x' = 0$

Ejemplo 2: $cx^2 + e^t + xt = 0 \Longrightarrow c = -\frac{e^t + xt}{x^2}$

Deriv. $2cx \cdot x' + e^t + x't + x = 0 \Longrightarrow -2\frac{e^t + xt}{x} x' + e^t + x't + x = 0$

Métodos para resolver ec. dif

- Variables separadas ($x' = p(t)q(x)$)

$x' = p(t)q(x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = p(t)q(x) \Rightarrow \frac{1}{q(x)}dx = p(t)dt \Rightarrow \int \frac{1}{q(x)}dx = \int p(t)dt$

OJO. Sol. CTE $x_* \in S$ tq $q(x_*) = 0$

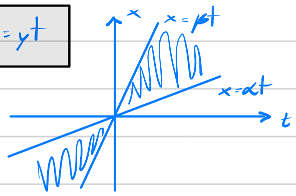
- Homogéneas ($x' = h(\frac{x}{t})$) $h: S =]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ con $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$ y $f(t,x) = h(\frac{t}{x})$

↳ $t \neq 0$, $\alpha < \frac{x}{t} < \beta$

Con cambio de variable $\boxed{s = t,\ y = \frac{x}{t} \Rightarrow x = yt}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{t\frac{dx}{dt} - x}{t^2} = \frac{1}{t}[h(y) - y]$

↳ Ec. de var. sep.



Caso especial: $x' = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ pol. homogéneos (= grado en los componentes)

- Reducibles a homogéneas ($x' = h\left(\frac{ax+bt+c}{Ax+Bt+C}\right)$)

Cambio de variable $\boxed{\begin{cases} s = t+\varepsilon \\ y = x+\eta \end{cases}}$

$\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dt} = h\left(\frac{ay - a\eta + bs - b\varepsilon + c}{Ay - A\eta + Bs - B\varepsilon + C}\right) \Rightarrow \begin{cases} c - a\eta - b\varepsilon = 0 \\ C - A\eta - B\varepsilon = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Para encontrar (η, ε)

$\boxed{\frac{dy}{ds} = h\left(\frac{ay + bs}{Ay + Bs}\right)}$ ⇒ Homogénea

- Lineal ($x' = a(t)x + b(t)$)
  - Homogénea ($b(t) = 0$)

    Var. separadas y $x_* = 0$

  - Completa ($b(t) \neq 0$, $t \in I$)

    Cambio de variable $\boxed{\begin{cases} s = t \\ y = \ell(t)x \end{cases}}$ ⇒ $y' = \ell'(t)x + \ell(t)x'$

$y' = \ell'(t)x + \ell(t)(a(t)x + b(t))$

$y' = \ell(t)b(t) + x(\ell'(t) + \ell(t)a(t))$

$\boxed{\ell'(t) + \ell(t)a(t) = 0}$

↳ $\ell' = -\ell a(t)$

↳ buscamos sol. $\neq 0$

- Riccati ($x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$)

Conociendo una solución $f(t)$

Cambio de variable $\boxed{\begin{cases} s = t \\ y = \frac{1}{x - f(t)} \end{cases}}$ ⇒ $x = f(t) + \frac{1}{y}$

$x' = f'(t) - \frac{y'}{y^2} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) = a(t)\left[f(t) + \frac{1}{y}\right]^2 + b(t)\left[f(t) + \frac{1}{y}\right] + c(t)$

$f'(t) - \frac{y'}{y^2} = af^2 + \frac{2af}{y} + \frac{a}{y^2} + bf + \frac{b}{y} + c$

Como f solución ⇒ $f' = af^2 + bf + c$ ⇒ $\boxed{y' = -(2a(t)f(t) + b(t))y - a(t)}$ ⇒ lineal