PROBABILIDAD (Curso 2023/2024)
Modelo de control intermedio
Es un ejemplo, no necesariamente del tipo de ejercicios, sino de lo que espera que el alumnado pueda desarrollar en 2 horas de duración de un control intermedio de la asignatura.

---

1. El vector aleatoio (X,Y) tiene función masa de probabilidad conjunta dada por:

$$P[X=x,Y=y]=k(x+1)(y+1)$$

donde $x,y=0,1,2$.

   (a) Calcular el valor de k.
   (b) Calcular las distribuciones marginales.
   (c) Calcular las distribuciones condicionadas de X a los valores de $Y=y$ para $y=0,1,2$.

2. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x,y)=\dfrac{k}{x^2}, k>0$, sobre la región delimitada por $1<x<2, 0<y<x^2$.

   (a) Calcular k y la función de distribución de probabilidad.
   (b) Calcular las densidades de probabilidad marginales.
   (c) Calcular las densidades de probabilidad condicionadas.

3. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x,y)=k$, sobre la región delimitada por $0<x<\dfrac{1}{2}, 0<y<\dfrac{1}{2}$.

   (a) Calcular k para que f sea función de densidad de probabilidad de un vector aleatorio continuo (X,Y).
   (b) Calcular la función de densidad de probabilidad conjunta de $(Z,T)=(X+Y,X-Y)$.
   (c) Determinar las funciones de densidad de probabilidad marginales del vector transformado (Z,T).

1.- a) Se tiene que cumplir que

$$\sum_{y=0}^{2}\sum_{x=0}^{2} P[X=x, Y=y]=1$$

Luego

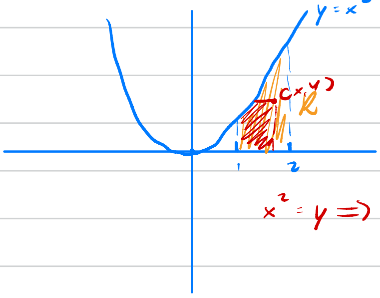
$$1 = K\cdot[1+2+3+2+4+6+3+6+9] = K\cdot 36 \Longrightarrow \boxed{K=\frac{1}{36}}$$

b) $p_X(x) = K(x+1)\cdot\sum_{y=0}^{2} (y+1) = \frac{1}{36}(x+1)\cdot 6 = \frac{1}{6}(x+1)$ //

$p_Y(y) = \frac{1}{6}(y+1)$

c) $p_X(x/y) = \frac{P[X=x,Y=y]}{p_Y(y)} = \frac{\cancel{\frac{1}{36}}^{1/6}(x+1)\cancel{(y+1)}}{\cancel{\frac{1}{6}}\cancel{(y+1)}} = \frac{1}{6}(x+1)$

2.- a) Sabemos que $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = \int_R f(x,y) = 1$ siendo R la región delimitada



$x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y}$

$$\int_R f = \int_1^2 \frac{K}{x^2}(x^2)\,dx = \int_1^2 K\,dx = K = 1 \Longrightarrow \boxed{K=1}$$

Func. Distrib. de prob.:

· Si $x \le 1 \vee y \le 0 \Rightarrow F(x,y) = 0$

· Si $(x,y) \in R$

$$F(x,y) = \int_1^{\sqrt{y}} dt + \int_{\sqrt{y}}^{x} y\frac{1}{t^2}\,dt = \sqrt{y} - 1 + y\left[-\frac{1}{t}\right]_{\sqrt{y}}^{x} = \sqrt{y} - 1 - \frac{y}{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{y} - \frac{y}{x} - 1$$

$$\boxed{F(x,y) = 2\sqrt{y} - \frac{y}{x} - 1}$$

Si $x \ge 2$, $F(x,y) = F(2,y)$

Si $y \ge x^2$, $F(x,y) = F(x,x^2)$

b) $f_X(x) = \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy = \int_0^{x^2} \frac{1}{x^2}\,dy = \frac{1}{x^2}\cdot x^2 = 1$ //

$f_Y(y) = \int_1^2 f(x,y)\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = 1/2 \quad \forall y \le 1$

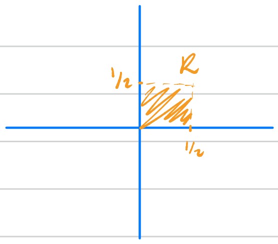
$f_Y(y) = \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\sqrt{y}}^2 = \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2} \quad \forall y > 1$

c) $f_X(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1/x^2}{1/2} = \frac{2}{x^2}$ si $y \le 1$

$f_X(x/y) = \frac{1/x^2}{\frac{1}{\sqrt{y}} - 1/2}$ si $y > 1$

$f_Y(y/x) = \frac{1/x^2}{1} = \frac{1}{x^2}$

3.- a) $\int_R f(x,y) = \int_R K = 1$



$$\int_0^{1/2}\int_0^{1/2} K\,dx\,dy = K\cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{K=4}$$

b) Cambio de variable $(Z,T) = (X+Y, X-Y)$

- $g:(x,y)\longrightarrow(x+y,\ x-y)$ derivable
- g inyectiva $\Rightarrow \begin{cases} z = x+y \\ t = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z+t}{2} \\ y = \dfrac{z-t}{2} \end{cases} \Rightarrow \exists\, g^{-1}$
- $|J| \neq 0$?

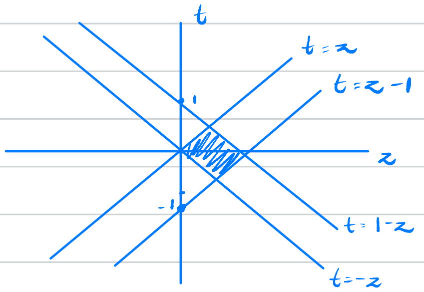
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial z} & \dfrac{\partial X}{\partial T} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial z} & \dfrac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/4 - 1/4 = -1/2 \neq 0$$

$$|J| = 4\cdot\left|-1/2\right| = 2 = f_{(Z,T)}(z,t) \Rightarrow \boxed{f_{(Z,T)}(z,t) = 2}$$

c) $0 < x < \frac{1}{2}$, $0 < y < \frac{1}{2}$

$0 < z+t < 1$, $0 < z-t < 1$

$-z < t < 1-z$, $z > t > z-1$



$$f_Z(z) = \int_{-z}^{z} 2\,dt = 4z \quad \text{si} \quad z \leq 1/2$$

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{1-z} 2\,dt = 2(1-z-z+1) = 4-4z \quad \text{si} \quad z > 1/2$$

$$f_T(t) = \int_{-t}^{t+1} 2\,dz = 2t+2+2t = 2+4t \quad \text{si} \quad t \leq 0$$

$$f_T(t) = \int_{t}^{1-t} 2\,dz = 2-2t-2t = 2-4t \quad \text{si} \quad t > 0$$

$$\boxed{f_T(t) = 2-|4t|} \quad \forall\, t \in \left]-1/2, 1/2\right[$$