Probabilidad - 3er Curso (Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
Convocatoria ordinaria (21 de enero de 2022)

Apellidos, nombre:

PARTE 1 (2.5 puntos)

1. **(0.25 puntos)** Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley Binomial, $B(3, \frac{1}{2})$. Justificar que $P[X_1 + X_2 + X_3 = 8] = \frac{9}{2^9}$.

2. **(0.25 puntos)** Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas según una ley de Poisson, $P(3)$. Justificar que $P[X_1 + X_2 > 0] = \frac{e^6-1}{e^6}$.

3. Para predecir los valores de una variable aleatoria X a partir de los de otra variable aleatoria Y se considera un modelo lineal:

   a) **(0.50 puntos)** Obtener de forma razonada los coeficientes del modelo lineal considerado.
   b) **(0.75 puntos)** Si $x - y = 1$ y $2y - 3x = -1$ son las dos rectas de regresión para el vector (X,Y), se pide: identificar la recta de regresión del apartado anterior; obtener una medida de la bondad del ajuste y calcular la esperanza del vector (X,Y).

4. **(0.75 puntos)** Las componentes de un vector aleatorio continuo son variables aleatorias continuas. Sin embargo, en general, un conjunto de variables aleatorias continuas no da lugar a un vector aleatorio continuo. Justificar que este recíproco sí es cierto si consideramos un conjunto $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de variables aleatorias continuas independientes.

PARTE 2 (7.5 puntos)

1. **(5 puntos)** Dado el vector aleatorio continuo (X,Y) distribuido uniformemente en el recinto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x < 0, y < 0\}$$

   a) **(0.25 puntos)** Obtener la función de densidad conjunta.
   b) **(1.50 puntos)** Obtener la función de distribución de probabilidad conjunta.
   c) **(0.75 puntos)** Obtener las funciones de densidad condicionadas.
   d) **(0.50 puntos)** Obtener la probabilidad de que $X - Y > 0$.
   e) **(1.50 puntos)** Obtener la mejor aproximación minimo cuadrática a la variable aleatoria Y conocidos los valores de la variable X y el error cuadrático medio de esta aproximación.
   f) **(0.50 puntos)** Obtener una medida de la bondad del ajuste del apartado anterior.

2. **(2.5 puntos)** Dado un vector aleatorio (X,Y) con función generatriz de momentos

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = exp\left(\frac{2t_1 + 4t_1^2 + 9t_2^2 + 6t_1t_2}{2}\right)$$

   (a) **(0.75 puntos)** Obtener la razón de correlación y el coeficiente de correlación lineal de las variables (X,Y).
   (b) **(0.75 puntos)** Indicar las distribuciones de las variables aleatorias $Y/X = 1$ y $X/Y = 0$.
   (c) **(1 punto)** Obtener la distribución de probabilidad del vector aleatorio $(2X, Y - X)$. Justificar que las variables aleatorias $2X$ y $Y - X$ tienen cierta asociación lineal en sentido negativo.

Observaciones e indicaciones:

- En el **apartado 1.b** se obtiene **hasta 1 punto** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.5 puntos** si se obtienen sus primitivas de forma explícita.
- Si necesitara obtener la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, realizar el cambio de variable unidimensional $x = \sin(t)$.
- $\arcsin(0) = 0$; $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$; $\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\pi}{4}$.
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$; $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

ASRR

1.- Sabemos que como $X_1, X_2, X_3 \sim B(3, 1/2) \Rightarrow X_1+X_2+X_3 \sim B(9, 1/2)$
luego

$$P[X_1+X_2+X_3=8] = \binom{9}{8} 1/2^8 \cdot 1/2 = \frac{9!}{8!\,1!} \frac{1}{2^9} = \frac{9}{2^9}$$

2.- Como $X_1, X_2 \sim P(3) \Rightarrow X_1, X_2 \geq 0 \Rightarrow P[X_1+X_2>0] = 1-P[X_1+X_2=0] = 1-P_{X_1}(0)P_{X_2}(0) =$

$$= 1-\left(e^{-3}\frac{3^0}{0!}\right)^2 = 1-\frac{1}{e^6} = \frac{e^6-1}{e^6}$$

3.- a) Considerando un modelo lineal estamos buscando $a, b \in \mathbb{R}$ tq se minimice $d = E[(X-aY-b)^2]$ de forma que el ajuste sea $X = aY+b$ ya que su error será d

Derivamos sobre a y b:

$$d = E[X^2 - 2aYX - 2bX + a^2Y^2 + 2abY + b^2] = E[X^2] - 2aE[YX] - 2bE[X] + a^2E[Y^2] + 2abE[Y] + b^2$$

- $\frac{\partial d}{\partial a} = -2E[YX] + 2aE[Y^2] + 2bE[Y]$
- $\frac{\partial d}{\partial b} = 2aE[Y] - 2E[X] + 2b$

e igualamos a 0:

$$\begin{cases} aE[Y^2] + bE[Y] = E[XY] \\ aE[Y] + b = E[X] \Rightarrow \boxed{b = E[X] - aE[Y]} \end{cases}$$

$$aE[Y^2] + E[X]E[Y] - aE[Y]^2 = E[XY]$$

$$a(E[Y^2] - E[Y]^2) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$a\,Var(Y) = Cov(X,Y)$$

$$\boxed{a = \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}}$$

b) Si fuera $x-y=1 \Rightarrow x = -y+1 \Rightarrow \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)} = -1 \ \wedge\ 1 = E[X] + E[Y]$

Entonces

$$2y-3x=-1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} = \frac{3}{2} \ \wedge\ -\frac{1}{2} = E[Y] - \frac{3}{2}E[X]$$

$$\begin{cases} E[X] + E[Y] = 1 \\ E[Y] - \frac{3}{2}E[X] = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Mal, jóven inexperimentado.

$$-\frac{5}{2}E[X] = -3/2 \Rightarrow E[X] = \frac{3}{5} \Rightarrow E[Y] = \frac{2}{5}$$

Sabemos que las rectas se cruzan en $(x,y) = (E[X], E[Y])$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2y-3x=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-\cancel{2y}=2 \\ \cancel{2y}-3x=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} -x=1 \Rightarrow x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$(E[X], E[Y]) = (-1,-2)$, luego nuestra suposición inicial era incorrecta

La recta buscada es $2y-3x=1$

Bondad del ajuste: $\rho^2_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)^2}{Var(X)Var(Y)} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ No es muy buen ajuste ya que no se aproxima de gran manera a 1.

$$x-y=1 \Rightarrow y = x-1 \Rightarrow a=1$$

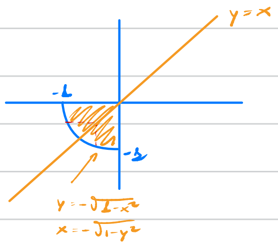
$$2y-3x=-1 \Rightarrow x = \frac{2y+1}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

4.- $X_1, X_2 \ldots X_n$ v.a. cont. indep $\Rightarrow (X_1, X_2 \ldots X_n)$ vector aleatorio

Sea $X = (X_1, \ldots X_n)\ (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ y sabemos que está bien def. ya que, como $X_1, \ldots X_n$ son indep. $\forall B = (B_1, B_2 \ldots B_n) \in \mathcal{B}^n$

$$X^{-1}(B) = (X_1^{-1}(B_1), X_2^{-1}(B_2) \ldots X_n^{-1}(B_n)) \in \mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \ldots \mathcal{A}_n) \text{ como son indep.}$$

5.- a) (X,Y) unif. distrib $\iff f(x,y)=k>0 \ \forall (x,y)\in C$ tq $\int_C k = 1$



$$\int_C k = k\lambda(C) = \pi 1^2 \frac{1}{4}k = \frac{\pi}{4}k \Rightarrow \boxed{k=\frac{4}{\pi}} \qquad \boxed{f(x,y)=\frac{4}{\pi}\ \forall (x,y)\in C}$$

b) Distinguimos casos: $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$

- $x\le -1 \ \vee \ y \le -1 \Rightarrow F(x,y)=0$
- $0\ge y \ge -\sqrt{1-x^2} \ \wedge \ x\in[-1,0] \Rightarrow$

$$F(x,y) = \frac{4}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{x} y+\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{4}{\pi}y(x+\sqrt{1-y^2}) + \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} t + \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} t)}{4}\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{x}$$

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du = \int \cos u \cdot \cos u\,du = \int \frac{1+\cos(2u)}{2}du = \frac{1}{2}u + \frac{\operatorname{sen}(2u)}{4} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(t) + \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} t)}{4}$$

$t=\sin(u)$

$dt=\cos(u)\,du$

- Si $(y<-\sqrt{1-x^2} \ \wedge \ x\in]-1,0]) \vee (x<-\sqrt{1-y^2} \ \wedge \ y\in]-1,0])$ $F(x,y)=0$
- Si $x>0$, $F(x,y) = \frac{4}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} y+\sqrt{1-t^2}\,dt =$

$$= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(-\sqrt{1-y^2}) + \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}(-\sqrt{1-y^2}))}{4}\right)$$

- Si $y>0$, $F(x,y) = \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} x)}{4} - \frac{3}{4}\pi\right]$

- Si $x>0 \ \wedge \ y>0$ $F(x,y)=1$

c) Primero marginales $f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}\frac{4}{\pi}dt = +\frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \boxed{f_{Y/X=x_0}(y) = \frac{f(x_0,y)}{f_X(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}}$

$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0}\frac{4}{\pi}dt = +\frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \boxed{f_{X/Y=y_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}}$

d) $X-Y>0 \iff X>Y$. Vemos que $y=x$ divide a C en dos mitades. Como $C^- = \{(x,y): y<x\}$ es la mitad de C, $\lambda(C^-)=\lambda(C)\frac{1}{2}$ y como (X,Y) distrib. uniformemente $P[X-Y>0]=\frac{1}{2}$

e) Esta será $y = E[Y/X=x] = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} y f_{Y/X=x}(y)\,dt = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} y\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}(1-x^2) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

$$ECM = E[Var(Y/X)] = E[E[Y^2/X] - E[Y/X]^2]$$

- $E[Y/X]^2 = \frac{1}{4}(1-x^2)$
- $E[Y^2/X]^2 = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} y^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dy = \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^{\cancel{3}\,2} = \frac{1}{3}(1-x^2)$

Luego $ECM = E[\frac{1}{3}(1-x^2) - \frac{1}{4}(1-x^2)] = \frac{1}{12}E[1-x^2] = \frac{1}{12}(1-E[X^2])$

$$ECM = \frac{1}{12}\left(1-\int_{-1}^{0}\frac{4x^2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx\right)$$

f) $\eta^2_{Y/X} = 1 - \frac{ECM}{Var(X)} = 1 - \frac{1/12(1-E[X^2])}{E[X^2]-E[X]^2}$

$$\int_{-1}^{0}\frac{4}{\pi}x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{0}-2x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{2}{\pi}\left[(1-x^2)^{3/2}\frac{3}{2}\right]_{-1}^{0} = \boxed{-\frac{2}{\pi}\frac{3}{2}}$$