Apuntes Tema 2

Vectores aleatorios

Def. $X=(X_1,\dots,X_n)$ como función $X:(\Omega,\mathcal{A},P)\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}^n)$ tq (σ-álgebra de Borel)

$$X^{-1}(B)=\{w\in\Omega : X(w)\in B\}\in\mathcal{A}\quad\forall B\in\mathcal{B}^n$$

Caracterización. X vector aleatorio $\iff \forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \quad X^{-1}((-\infty,x])\in\mathcal{A}$

$$\{X\le x\}=\{X_1\le x_1,\dots,X_n\le x_n\}\in\mathcal{A}$$

→ **Teorema de medibilidad**

$X=(X_1,\dots,X_n)$ vec aleatorio $\iff X_i$ v.a. sobre $(\Omega,\mathcal{A},P)$ $\forall i=1,\dots,n$

Distrib. de Probabilidad. $P_X:\mathcal{B}^n\to[0,1]$ como $P_X(B)=P\{w\in\Omega / X(w)\in B\}=P(X\in B)$

Función de Distribución. $F_X:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ como $F_X(x)=P_X((-\infty,x])=P(X_1\le x_1,\dots,X_n\le x_n)$

Teorema de correspondencia

Existe una correspondencia biunívoca entre P sobre $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}^n)$ y $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por

$$P((-\infty,x])=F(x)$$

Cálculo de probabilidades de vectores

intervalos

$$P_X(I_1\times I_2)=P(X\in I_1\times I_2)=P(X_1\in I_1, X_2\in I_2)$$

Vectores aleatorios:

si X discreto, X_i discreto $i=1,\dots,n$

Discretos: X discreto si $\exists E_X\subset\mathbb{R}^n$ numerable tq $P_X(E_X)=1$

- → **Func. Masa de Prob:** $p_X: E_X\to[0,1]$ $\quad p_X(x)=P(X=x)=P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)$
- → **Distrib. Prob** $P_X(B)=P(X\in B)=\sum_{x\in B\cap E_X}P(X=x)$
- → **Func. Distribución** $F_X(x)=F_X(x_1,\dots,x_n)=P(X_1\le x_1,\dots,X_n\le x_n)$

función de densidad de probabilidad

Continuos si $\exists f_X:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tq $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x_n}\cdots\int_{-\infty}^{x_1}f_X(t_1,\dots,t_n)\,dt_1\dots dt_n \quad \forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

↳ no negativa, integrable y $\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(t_1,\dots,t_n)\,dt_1\dots dt_n=1$

Distribuciones marginales

Sea $X=(X_1,\dots,X_n)$ vector aleatorio. $\forall\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{1,\dots,n\}$ se define la función de distribución marginal de $(X_{i_1},\dots,X_{i_k})$ como "no tener en cuenta los que no son i_k"

$$F_{X_{i_1}\dots X_{i_k}}(x_{i_1},\dots,x_{i_k})=\lim_{x_I\to+\infty,\ I\notin\{i_1,\dots,i_k\}}F_X(x_1,\dots,x_n)$$

Discreto: $p_{X_{i_1}\dots X_{i_k}}(x_{i_1},\dots,x_{i_k})=P(X_{i_1}=x_{i_1},\dots,X_{i_k}=x_{i_k})$

Continuo: $f_{X_{i_1}\dots X_{i_k}}(x_{i_1},\dots,x_{i_k})=\int_{\mathbb{R}^{n-k}}f_X(x_1,\dots,x_n)\prod_{I\in\{1,\dots,n\}, I\notin\{i_1,\dots,i_k\}}dx_I$

Distribuciones condicionadas

Notación: $\{j_1, \dots, j_p\}, \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ tq $i_m \neq j_l$ $m = 1, \dots, k$, $l = 1, \dots, p$, $p + k = n$

Reordenamos como $x = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow x_p = (x_{j_1}, \dots, x_{j_p})$, $x_k = (x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ $\Big\}$ $x_n = (x_p, x_k)$

Definición: Función masa de probabilidad de la variable aleatoria p-dimensional $X_p = \{X_{j_1}, \dots, X_{j_p}\}$ condicionada a $y_k = (y_{i_1}, \dots, y_{i_k})$ con $P(\dots) > 0$

Se define como

Discreto: $p_{X_{j_1} \dots X_{j_p}}(x_{j_1}, \dots, x_{j_p} / X_{i_1} = y_{i_1}, \dots, X_{i_k} = y_{i_k}) = \dfrac{p_X(x_p, y_k)}{p_{X_{i_1}, \dots X_{i_k}}(y_{i_1}, \dots, y_{i_k})}$

Continuo: $f_{X_{j_1} \dots X_{j_p}}(x_{j_1}, \dots, x_{j_p} / y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) = \dfrac{f_X(x_p, y_k)}{f_{X_{i_1}, \dots X_{i_k}}(y_{i_1}, \dots, y_{i_k})}$ > 0

Cambio de variable

Planteamiento

Sea X vector aleatorio discreto ($\mathcal{E}_X \subset \mathbb{R}^n$ numerable

Se considera $g: \mathcal{E}_X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ medible

Entonces $Y = g(X)$ var. aleatoria m-dimensional

$$P_Y(B) = P(X \in g^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}^m$$

$$F_Y(y) = P_X(g^{-1}((-\infty, y_1] \times \dots \times (-\infty, y_m])) \quad \forall (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

Discreto a Discreto

$P_Y(g(\mathcal{E}_X)) = P_X(\mathcal{E}_X) = 1 \Rightarrow Y$ discreta (numerable)

$$p_Y(y) = P_X(g^{-1}(y)) = P_X(\{x \in \mathcal{E}_X / g(x) = y\}) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} p_X(x)$$

Continuo a Discreto

Suponemos X continua, $g: \mathcal{E}_X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ medible tq $Y = g(X)$ discreta ($\int_{\mathcal{E}_X} f_X = 1$)

$$p_Y(y) = \int_{\{x \in \mathcal{E}_X / g(x) = y\}} f_X(v)\, dv$$

Continuo a Continuo

Suponemos X continua con func. densidad f_X. Suponemos $g: \mathcal{E}_X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ medible cumpliendo:

i) g derivable

ii) g inyectiva $\Rightarrow g^{-1}(y) = x(y) = (x_1(y), \dots, x_n(y))$

iii) Jacobiano de g^{-1} no nulo $\forall y \in g(\mathcal{E}_X)$

Entonces $Y = g(X)$ v.a. continua con

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\,|J(y)| \qquad J(y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(y_1 \dots y_n)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1(y_1 \dots y_n)}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial x_n(y_1 \dots y_n)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n(y_1 \dots y_n)}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Distribuciones del máximo y del mínimo

Sea $X = (X_1, \dots X_n)$ vector aleatorio

Se definen como variables aleatorias

$$\max(X_1, \dots X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$
$$\min(X_1, \dots X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

con func. de distribución

$$F_{\max(X)}(y) = P(\max(X_1, \dots X_n) \leq y) = P(X_1 \leq y, \dots X_n \leq y) = F_X(y, \dots y)$$
$$F_{\min(X)}(y) = P(\min(X_1, \dots X_n) \leq y) = 1 - P(\min(X_1, \dots X_n) > y) = 1 - P(X_1 > y, \dots X_n > y)$$

Función de distribución conjunta

$(Z, T) = (\min(X_1, \dots X_n), \max(X_1, \dots X_n))$ viene dado por:

$$F_{(Z,T)}(x,y) = \begin{cases} F_X(y, \dots y) & y \leq x \\ F_X(y, \dots y) - P(x < X_1 \leq y, \dots x < X_n \leq y) & y > x \end{cases}$$

Esperanza matemática

$E[X] = (E[X_1], \dots E[X_n]) = (\mu_1, \dots \mu_n) \in \mathbb{R}^n$

Propiedades

- Linealidad $(a_1, \dots a_n), (b_1, \dots b_n) \in \mathbb{R}^n$
  $\exists E[X_i] \Rightarrow \exists E[a_i X_i + b_i] \quad i = 1, \dots n$
- Monotonía $X_1 \leq X_2 \Rightarrow E[X_1] \leq E[X_2]$

Momentos (Caso bidimensional (X, Y))

Si $\exists m_{0,1}, m_{1,0}, m_{1,1}$ se define covarianza de X e Y como

$$\mu_{1,1} = Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Varianza de una combinación lineal

Si $\exists E[X_i^2] \quad i = 1, \dots n \Rightarrow \exists Var\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right]$

$$Var\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz : var. aleatorias centradas con mom. de orden 2 $< \infty$

Definimos en $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un producto escalar

$$\langle X, Y \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)} = E[XY] \quad \forall X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

y definimos la norma asociada

$$\|X\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)} = E[X^2] \quad \forall X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

Desigualdad: $[E[XY]]^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$

$\hookrightarrow$ Se da el $= \iff \exists a, b \neq 0$ tq $P(aX + bY = 0) = 1$

Si X e Y son no degeneradas

$$(Cov(X,Y))^2 \leq Var(X) Var(Y)$$

y se da la igualdad $\iff \exists a, b \neq 0$ y $c \in \mathbb{R}$ tq $P(aX + bY = c) = 1$

Función Generatriz de Momentos

Definimos como

$$M_X(t_1,\dots,t_n):(-a_1,b_1)\times\dots\times(-a_n,b_n)\longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad a_i,b_j\in\mathbb{R}^+ \ \forall i,j=1,\dots n$$

$$(t_1,\dots,t_n)\longrightarrow E\left[e^{\sum_{i=1}^{n} t_i X_i}\right]$$

Momentos no centrados

$$m_{k_1,\dots k_n}=\left[\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} M_X(t_1,\dots t_n)}{\partial t_1^{k_1}\dots\partial t_n^{k_n}}\right]_{t_1=\dots=t_n=0}$$

Gen. Momentos Marginales

Para cualquier subvectore de X, reordenamos y ponemos 0 al principio

$$M_{X_{i_1}\dots X_{i_k}}(t_{i_1},\dots t_{i_k})=M_X((0,t_k))$$