Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo B
17 de Marzo de 2016

NOMBRE:

1. Dadas las funciones $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x)$ se define $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = F(x, \varphi(x))$. Se supone que F y φ son de clase C^2. Expresa $\phi''(x)$ en términos de las derivadas sucesivas de F y φ.

$$\phi'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\phi''(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) + \varphi' \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, \varphi(x))\, \varphi'(x)\right] +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\, \varphi''(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Encuentra la solución de

$$x' = e^{t+x}, \quad x(0) = 0$$

y precisa el intervalo I donde está definida.

$x' = e^{t+x} = e^t e^x \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = e^t e^x \Longrightarrow \int e^{-x} dx = \int e^t dt$

$-e^{-x} = e^t + c$

$-x = \ln(-e^t - c)$

$x = -\ln(-e^t - c)$

Luego las soluciones serán de la forma $x(t) = -\ln(-e^t - c)$

$x(0) = -\ln(-e^0 - c) = 0 \Longrightarrow -e^0 - c = 1$

$\boxed{c = -1 - 1 = -2}$

$-e^t - c > 0$

$e^t + c < 0$

$e^t < -c$

$t < \ln(-c)$

Por lo que $x(t) = -\ln(-e^t + 2)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ tq $-e^t + 2 > 0$

$-e^t > -2$

$e^t < 2 \Longrightarrow t < \ln 2$

Luego $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $I =]-\infty, \ln(2)[$

3. Encuentra una ecuación diferencial para las funciones $y = y(x)$ cuyas gráficas tienen la siguiente propiedad: la distancia al origen desde cada punto $(x, y(x))$ coincide con la primera coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de abscisas.

- Dist. al origen $\equiv \sqrt{x^2+y^2}$
- $y - v = y'(x-u) \underset{v=0}{\Longrightarrow} y = y'(x-u)$

$$y = y'x - y'u$$

$$y'u = y'x - y$$

$$\boxed{u = x - \frac{y}{y'}}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = x - \frac{y}{y'}$$

$$y'\sqrt{x^2+y^2} = y'x - y$$

$$\boxed{y' = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2} - x} = \frac{y}{x - \sqrt{x^2+y^2}}}$$

4. Se considera el cambio de variables $\varphi: \ s = e^t, \ y = e^{-t}x$. Demuestra que φ define un difeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y un dominio Ω del plano. Determina Ω. Comprueba que se trata de un cambio admisible para la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = tx^2$$

y encuentra la nueva ecuación en las variables (s, y).

φ difeomorfismo si:

- Clase C^1, lo es por serlo sus componentes
- $t = \ln s \ \wedge \ x = ye^t = ys \Longrightarrow \exists \psi = \varphi^{-1}: \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1,

luego es biyectiva y, por lo tanto, difeomorfismo

Calculo Ω:

$$\varphi_1(t,x) = e^t \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \varphi_1(t,x) = +\infty, \ \lim_{t\to-\infty} \varphi_1(t,x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_2(t,x) \Longrightarrow \text{Con } t \in \mathbb{R} \text{ fijo}, \ \lim_{x\to-\infty} \varphi_2(t,x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi_2(t,x) = +\infty$$

Como son continuas, por Tª de Bolzano $\Omega = \varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

Será admisible si,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \cancelto{0}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)}\, x' = e^t \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

Luego es admisible

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy/dt}{ds/dt} = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x)\,x'}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\,x'} = \frac{-e^{-t}x + e^{-t}tx^2}{e^t} = e^{-t}x \cdot \frac{tx - 1}{e^t} =$$

$$= y \cdot \left(t \cdot y - \frac{1}{s}\right) =$$

$$\boxed{y' = y^2 \ln s - \frac{y}{s}}$$

5. Se considera la función *seno hiperbólico* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x = f(t) = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Demuestra que f tiene una inversa[1] $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t = g(x)$ y calcula $g'(x)$.

$f'(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = ch(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ inyectiva

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty \quad \lim_{t \to -\infty} f(t) = -\infty \Rightarrow$ Tª de Bolzano $\Rightarrow f$ sobreyectiva

Luego f biyectiva $\Rightarrow \exists g = f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $g(f(t)) = t$

Por la regla de la cadena sabemos que

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{ch(g(x))}$$

$sh(t)^2 - ch(t)^2 = -1 \Rightarrow ch(t) = \sqrt{sh(t)^2 + 1} = \sqrt{f(t)^2 + 1}$

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{\sqrt{f^2(g(x)) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}$$

[1]Es costumbre emplear la notación $g(x) = \operatorname{arg\,sh} x$, *argumento del seno hiperbólico*