ASRR

Tema 6

Leyes de los Grandes Números
Teorema Central del Límite

• Recordatorio convergencia $\{f_n\}$ en f sobre Ω — dep. de w $n_0 = n_0(w, \varepsilon)$

- Puntual $\forall w \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $|f_n(w) - f(w)| \leq \varepsilon$ $\quad \{f_n(w)\} \longrightarrow f(w)$
- Uniforme $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $|f_n(w) - f(w)| \leq \varepsilon$ $\forall w \in \Omega$
  no depende de w, $n_0 = n_0(\varepsilon)$

Uniforme $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Puntual

• Convergencia de v.a.

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suc de v.a. y X v.a. sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con func. de distribución $\{F_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y F_X.

- Tipos de convergencia:
  - Casi segura: $X_n \xrightarrow{c.s.} X$, $n \to \infty \iff P[w : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)] = 1$ — "la prob de todos los w que cumplen eso es 1"
    ↳ ≡ en casi todo punto

  $\Downarrow$
  - En probabilidad: $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty \iff \forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P[w : |X_n(w) - X(w)| \leq \varepsilon] = 1$
    ↳ ≡ de la medida

  $\Downarrow$
  - En ley o en distrib: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, $n \to \infty \iff \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ $\forall x \in C(F_X)$ — puntos de continuidad

  Si $X = c \in \mathbb{R}$ cte $\quad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c$

• Teorema de continuidad para func. gen. de momentos

Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y X v.a. con M_{X_n} $\forall n \in \mathbb{N}$ y M_X func. gen. de momentos sobre $(-a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$
Entonces:

$$M_{X_n}(t) \longrightarrow M_X(t),\ n \to \infty\ \ \forall t \in (-a, b) \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

• Leyes de los grandes números

Sea X_n, $n \in \mathbb{N}$ v.a. independientes. Sea S_n v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $\quad n \geq 1$.
Consideramos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ suc. de reales tq $\{b_n\} \nearrow +\infty$

- Ley débil $\{X_n\}$ la satisface respecto a $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ si:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0$$

$\Uparrow$

- Ley fuerte $\{X_n\}$ la satisface respecto a $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ si:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{c.s.} 0$$

Condiciones necesarias y/o suficientes

• T1. Ley débil de Bernoulli — teorema 1

Si $\{X_n\}$ son v.a. tq $\boxed{X_n \sim B(1, p) \quad \forall n \in \mathbb{N}}$ Entonces — Bernoulli con prob p de éxito

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0 \Longrightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

• Lema 0. Desig. de Chebychev

$\forall \varepsilon > 0 \quad P[|X| \geq \varepsilon] = P[w : |X(w)| \geq \varepsilon] \leq \frac{E[X^2]}{\varepsilon^2}$

↳ $P[|X - E[X]| \geq \varepsilon] \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

↳ $P[|X - E[X]| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

• T2. Ley débil de Khintchine

Si X_n idént. distrib. y $\boxed{E[X_n] = \mu \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$ Entonces:

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

• Lema 1. Primera ley fuerte de Kolmogorov

Suponemos que $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty}$, entonces

$$\frac{S_n - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{n} \xrightarrow{c.s} 0 \qquad \mu_i = E[X_i] \quad i = 1 \dots n$$

idént. distribuidas

• T3. Segunda ley fuerte de Kolmogorov

Si $\{X_n\}$ v.a. $\boxed{\text{i.i.d con } E[|X_n|] < \infty}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{c.s} 0$$

En realidad, con $\{X_n\}$ i.i.d. $\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{c.s} 0 \iff E[|X_n|] < \infty$

• Corolario 1. Ley fuerte de Borel

Si $\{X_n\}$ i.i.d. según Bernoulli, $\boxed{X_n \sim B(1,p) \quad \forall n \in \mathbb{N}}$, entonces

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{c.s} 0 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s} p$$

• Problema central del límite clásico

Primer teorema límite (Bernoulli)

Sea $\{X_n\}$ i.i.d. según Bernoulli, $X_n \sim B(1,p)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{d} 0$$

Segundo teorema límite (De Moivre y Laplace)

Sea $\{X_n\}$ tq $X_n \sim B(1,p)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces dis normal

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

Teorema

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $X_{n1}, \dots, X_{nn}$ v.a. tq $X_{ni} \sim B(1, p_n)$ $\forall i \in \Delta_n$ y $S_{nn} = \sum_{i=1}^{n} X_{ni}$

Entonces

Poisson

$$\text{si } \lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda (> 0) \Rightarrow S_{nn} \xrightarrow{d} Y \sim P(\lambda)$$

Lema. Sea $\{c_n\}$ suc. de complejos tq $c_n \to c$, $n \to \infty$. Entonces

$$\left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n \longrightarrow e^c, \quad n \to \infty$$

Teorema Límite de Lévy (Tª del Límite Central) ya que buena aproximación en el centro pero mala en las colas.

Sea $\{X_n\}$ i.i.d. Entonces se tiene:

i) Si $\exists E[X_1] \Rightarrow \exists E[X_n],\ \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene $\dfrac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{d} 0$

ii) Si $\exists E[X_1^2] \Rightarrow \exists E[X_n^2]\ \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene $\dfrac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$