Antonio Javier Rodríguez Romero

10	0	10	10	8

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
Primera prueba de clase, 31 de Octubre de 2023

1. Prueba que la ecuación

$$e^x + x^3 + t = 0$$

define una única función implícita $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$. Además la función $x(t)$ es decreciente.

Definimos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $F(t,x) = e^x + x^3 + t$ $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$

Fijado un $t \in \mathbb{R}$, definimos $F_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $F_t(x) = F(t,x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y vemos que

- $F_t'(x) = e^x + 3x^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F_t$ inyectiva
- $\lim_{x \to +\infty} F_t(x) = +\infty$ y $\lim_{t \to -\infty} F_t(x) = -\infty$, luego, al ser F_t continua será sobreyectiva

Como F_t es biyectiva $\forall t \in \mathbb{R}$, tenemos que para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ tq $F(t,x) = 0$, luego queda definida $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $F(t, x(t)) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, cumpliendo así la igualdad

Además, como $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = e^x + 3x^2 \neq 0$ $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita demostrando que $x(t)$ es derivable.

Tomando por notación $x = x(t)$, como

$$F(t,x) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}[F(t,x)] = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)x' = 0$$

$$0 = 1 + x'[e^x + 3x^2]$$

$$x' = \frac{-1}{e^x + 3x^2} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego $x(t)$ será decreciente

2. Se considera la función

$$F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_0^{\sqrt{t}} e^{s^2}\, ds.$$

¿Es F de clase C^1? En caso afirmativo calcula la derivada.

Como la función $s \longmapsto e^{s^2}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por el T^a Fundamental del Cálculo sabemos que su integral será continua y derivable, luego $F \in C^1(]0,+\infty[)$ con derivada

$$F'(t) = \left[e^{s^2} \right]_{s=0}^{s=\sqrt{t}} = e^t - 1 \quad \forall t \in]0,+\infty[$$

NO

Confusión entre TFC y Barrow

3. Encuentra la solución del problema de valores iniciales

$$\dot{x} = \left(\frac{x}{t}\right)^3 + \frac{x}{t} - 1, \; x(1) = 1.$$

¿En qué intervalo está definida?

Vemos que su dominio natural sería $\mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}$, pero como debe ser conexo y nos dan que $x(1) = 1$, tomaremos $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = \hat{D}$

Utilizaremos como cambio de variable $\varphi : D \longrightarrow \hat{D}$ definido como

$$\varphi(t,x) = (s,y) \text{ con } s = t \text{ e } y = \frac{x}{t}$$

tratandose de un difeomorfismo admisible con inversa

$$\psi(s,y) = \cancel{\varphi(t)} (t,x) \text{ con } t = s \text{ e } x = ys$$

Realizamos la transformación

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy/dt}{ds/dt} = -\frac{x}{t^2} + \frac{1}{t}\left[y^3 + y - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{s}\left[y^3 + \cancel{y} - \cancel{y} + 1\right]$$

$$\dot{y} = \frac{1}{s}(y^3 - 1)$$

de forma que, buscando las soluciones fijas, encontramos $y_* = 1$, luego $y(s) = 1 \;\; \forall s \in \mathbb{R}^+$ es solución

Deshaciendo el cambio

$$\frac{x}{t} = 1 \implies x(t) = t \;\; \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Esta solución estará definida en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ y cumple que $x(1) = 1$ //

tiene su gráfica

4. Demuestra que las fórmulas

$$s = -e^t, \quad y = (t^2+1)x$$

definen un difeomorfismo que va de $D = \mathbb{R}^2$ a un dominio $\hat{D}$ que se especificará. Prueba que se trata de un cambio admisible para la ecuación $x' = x + t$ y encuentra la ecuación transformada.

~~(Definimos $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow$)~~

~~(Calculamos primero $\hat{D}$)~~

~~$(t \mapsto)$~~

~~Como~~

Definimos $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $\varphi(t,x) = (s,y)$ $\forall (t,x) \in D$ de forma que $\varphi \in C^1(D)$ por serlo sus componentes y

$$\begin{cases} s = -e^t \\ y = (t^2+1)x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = \ln(-s) \\ x = \dfrac{y}{\ln^2(-s)+1} \end{cases}$$

luego, como $s = -e^t < 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, ψ tendrá ~~$(\psi = \varphi^{-1} \in C^1)$~~ inversa ~~def~~ de clase C^1 en la imagen de φ, siendo esta $\hat{D} = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$, luego $\psi = \varphi^{-1} \in C^1(\hat{D})$

Así, considerando $\varphi : D \longrightarrow \hat{D}$, se tratará de un difeomorfismo

Comprobamos que es admisible para la ecuación

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\, x' = -e^t \neq 0 \quad \forall (t,x) \in D$$

luego es admisible

Obtenemos la ecuación transformada:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy/dt}{ds/dt} = \frac{2tx + (t^2+1)(x+t)}{-e^t}$$

$$y' = \frac{2\ln(-s)\frac{y}{\ln^2(-s)+1} + y + \ln^3(-s) + \ln(-s)}{s}$$

5. Se considera la transformación en el plano

$$\psi(\theta, r) = (t, x), \quad t = r\cos\theta, \ x = r\operatorname{sen}\theta, \quad (\theta, r) \in \hat{\Omega} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, +\infty[.$$

Determina $\Omega = \psi(\hat{\Omega})$ y prueba que ψ es un difeomorfismo de $\hat{\Omega}$ a Ω. Dada una ecuación $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ con $f : \Omega \to \mathbb{R}$, ¿bajo qué condiciones se puede asegurar que el difeomorfismo $\varphi = \psi^{-1}$ es admisible?

Como $\cos(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]0, 1[$, y $r \in]0, +\infty[$, tenemos que $t \in \mathbb{R}^+$

2 Por otro lado $\operatorname{sen}(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-1, 1[$, luego $x \in \mathbb{R}$.

Sí $\subseteq$ pero $\supseteq$?

Así, tenemos que $\psi(\hat{\Omega}) = \Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

Como sus componentes son de clase C^1 en $\hat{\Omega}$, tenemos que ψ también lo será

¿por qué?

1 $\begin{cases} t = r\cos\theta \\ x = r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{t}\right) \\ r = \sqrt{x^2 + t^2} \end{cases}$

Luego $\varphi = \psi^{-1}$ será también de clase C^1 en Ω. Así, se verifica que ψ es difeomorfismo

Para asegurar que sea admisible,

5 $$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) \neq 0$$

$$\frac{-\frac{x}{t^2}}{1 + \frac{x^2}{t^2}} + \frac{\frac{1}{t}}{1 + \frac{x^2}{t^2}} f(t,x) \neq 0$$

$$-x + t \cdot f(t,x) \neq 0 \Rightarrow f(t,x) \neq \frac{x}{t} \quad \forall (t,x) \in \Omega$$

Debe darse la condición de que

$$f(t,x) \neq \frac{x}{t} \quad \forall (t,x) \in \Omega$$