Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo A
21 de Marzo de 2019

NOMBRE:

1. En el plano con coordenadas (x, y) se considera la familia de curvas dada por la ecuación

$$\frac{y^2}{2} + x = c$$

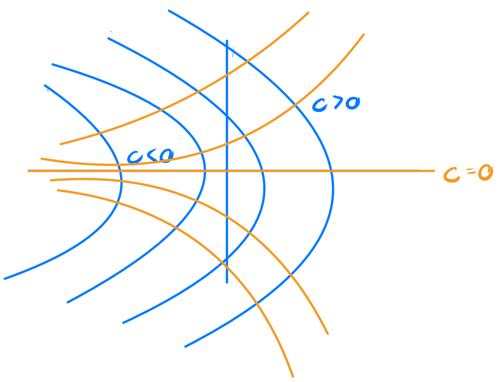
donde $c \in \mathbb{R}$ actúa como parámetro. Encuentra la familia de trayectorias ortogonales. Dibuja ambas familias.

$\gamma \equiv \phi(x,y,c) = \frac{y^2}{2} + x - c = 0 \Rightarrow \phi'(x,y,c) = 1 + yy' = 0$

$y' = -\frac{1}{y}$

Luego para $\gamma^{\perp}$: $y' = y \Rightarrow \ln|y| = x + c$

$y = ce^x$ con $c \in \mathbb{R}$



2. Escribe la ecuación diferencial que modela la desintegración del Radio 226 sabiendo que la masa se reduce a la mitad (periodo de semi-desintegración) en 1600 años.

$m' = -\lambda m \Rightarrow \ln|m| = -\lambda t + c \Rightarrow m(t) = ce^{-\lambda t}$ con $c \in \mathbb{R}$

Suponemos $c \neq 0$ y sabemos que

$m(t+1600) = \frac{1}{2} m(t) \Rightarrow \cancel{c} e^{-\lambda(t+1600)} = \frac{1}{2} \cancel{c} e^{-\lambda t}$

$e^{\cancel{-\lambda t} - \lambda 1600 + \cancel{\lambda t}} = 1/2$

$-\lambda 1600 = -\ln(2)$

$\boxed{\lambda = \frac{\ln(2)}{1600}}$

3. Encuentra las órbitas del sistema autónomo

$$x' = (x^2 + 3y^2 + 1)y, \quad y' = -(x^2 + 3y^2 + 1)x.$$

¿Qué tipo de curvas son?

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y^2 + x^2 = 2c \Rightarrow$ Circunf con centro $(0,0)$

y radio $\sqrt{2c}$

4. Se considera la transformación $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t, x) = (s, y)$ con

$$s = e^t, \quad y = e^t x.$$

Determina la imagen $\varphi(\mathbb{R}^2) = \hat{\Omega}$ y prueba que φ es un C^1-difeomorfismo entre $\Omega = \mathbb{R}^2$ y $\hat{\Omega}$. ¿Es este cambio de variable admisible para la ecuación $x' = t^2 \cos x$?

Vemos que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y

- Para cada $x \in \mathbb{R}$ $\varphi_1'(t,x) = e^t > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Inyectiva

  $\lim_{t \to +\infty} \varphi_1(t,x) = +\infty \quad \lim_{t \to -\infty} \varphi_1(t,x) = 0 \Rightarrow \varphi_1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^+$

- Para cada $t \in \mathbb{R}$,

  $\lim_{x \to +\infty} \varphi_2(t,x) = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} \varphi_2(t,x) = -\infty \Rightarrow \varphi_2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$

Luego $\hat{\Omega} = \varphi(\Omega) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} s = e^t \\ y = e^t x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \ln(s) \quad s \in \mathbb{R}^+ \\ x = \frac{y}{e^t} = \frac{y}{s} \end{cases} \Rightarrow \exists\, \psi = \varphi^{-1} \in C^1(\hat{\Omega})$$

Es C^1-difeomorfismo, comprobamos que es admisible

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\, x' = e^t \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{Es admisible}$$

5. Por un argumento visto en clase sabemos que la ecuación

$$x^{55} + x + t = 0$$

define una función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x = x(t)$, de clase C^1. Demuestra que esta función también es de clase C^2 y encuentra una ecuación diferencial de segundo orden que la admita como solución.