**Probabilidad - 3er Curso (Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)**
Convocatoria ordinaria (15 de febrero de 2022)

Apellidos, nombre:

---

1. Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias continuas e independientes, tales que $\exists\, E[X_i]\ \forall i=1,\ldots,n$, con momento no centrado de orden dos finito. Justificar que:

   a) **(0.5 puntos)** $\exists \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n a_i^2\mathrm{Var}(X_i), \quad \forall\, a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$.

   b) **(0.5 puntos)** $(X_1,\ldots,X_n)$ es un vector aleatorio continuo.

2. Sea $(X,Y)$ una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en el recinto

$$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}.$$

   a) **(1.25 puntos)** Calcular la función de distribución de probabilidad conjunta.

   b) **(1.25 puntos)** Calcular las funciones de densidad condicionadas.

3. Se considera $(X,Y)$ la distribución uniforme en el cuadrado unidad.

   a) **(1.25 puntos)** Calcular la función de densidad de probabilidad de $Z=(X+Y,X-Y)$

   b) **(1.25 puntos)** La función de densidad de probabilidad conjunta del máximo y el mínimo.

4. **(1.5 puntos)** Dado un vector aleatorio con función generatriz de momentos

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2)=\left(\frac{e^{t_1}}{2}+\frac{e^{t_2}}{4}+\frac{1}{4}\right)^5, \quad t_1,\ t_2\in\mathbb{R}$$

   Calcular la razón de correlación y el coeficiente de correlación lineal de las variables $X_1$ y $X_2$.

5. Dado el vector bidimensional $(X,Y)$ con la siguiente función masa de probabilidad conjunta:

| $X\|Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/4 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1/4 | 0 |
| 3 | 1/4 | 0 | 1/4 |

   a) **(1.25 puntos)** Obtener la mejor aproximación minimo-cuadrática a la variable $Y$ conocidos valores de la variable $X$, así como calcular una medida de la bondad del ajuste.

   b) **(1.25 puntos)** Obtener las ecuaciones de la rectas de regresión de $Y/X$ y $X/Y$ y el error cuadrático medio.

Observaciones e indicaciones:

- En el **apartado 2.a** se obtiene **hasta 1 punto** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.25 puntos** si se obtienen sus primitivas de forma explícita.
- Si necesitara obtener la primitiva de la función $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, realizar el cambio de variable unidimensional $x=\sin(t)$.

ASRR. Extraordinaria 2022

1.- a) $Var(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = E[(\sum_{i=1}^n a_i X_i)^2] - E[\sum_{i=1}^n a_i X_i]^2$

Fijándonos en el primer sumando

$$E[(\sum_{i=1}^n a_i X_i)^2] = E[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i a_j X_i X_j] = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n E[a_iX_i]E[a_jX_j] + \sum_{i=1}^n E[a_i^2 X_i^2] \quad \exists \text{ por hipót.}$$

ya que son independientes, en cuanto al segundo

$$E[\sum_{i=1}^n a_i X_i]^2 = (\sum_{i=1}^n E[a_iX_i])^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n E[a_iX_i]E[a_jX_j] + \sum_{i=1}^n E[a_iX_i]^2$$

Al sustituir en la primera expresión

$$Var(\sum_{i=1}^n a_iX_i) = \sum_{i=1}^n (E[a_i^2X_i^2] - E[a_iX_i]^2) = \sum_{i=1}^n Var(a_iX_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i) \ //$$

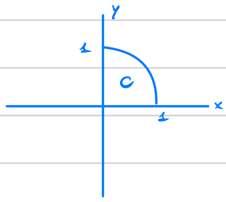
b) Vemos que para $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)$, podemos definir $F_X(x_1,x_2,\dots,x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\dots F_{X_n}(x_n)$, ya que definiendo $f_X(t_1,t_2,\dots,t_n) = f_{X_1}(t_1)\dots f_{X_n}(t_n)$ ya que son independientes, así

$$F_X(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_n}\dots\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_1} f_X(t_1,\dots,t_n)dt_1 dt_2\dots dt_n = \int_{-\infty}^{x_n}\dots\int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(t_1)\dots f_{X_n}(t_n)dt_1\dots dt_n = \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_n}(t_n)dt_n \dots \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(t_1)dt_1 =$$

$$= F_{X_1}(x_1)\dots F_{X_n}(x_n) \ //$$

Con lo cual X será vector aleatorio

2.- $C = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1,\ x\geq 0\ \ y\geq 0\}$



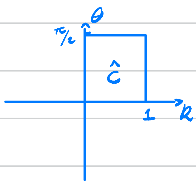

Cambio a coordenadas polares

$(X,Y)\to(R,\theta)$ tq $R=\sqrt{X^2+Y^2} \wedge \theta = arctg(\frac{Y}{X})$ es un cambio válido con

$X = R\cos(\theta) \wedge Y = R\,sen(\theta)$

Vemos que el recinto en este caso será $\hat C = \{(r,\theta): 0<r<1 \wedge 0\leq\theta\leq \frac{\pi}{2}\}$

Calculamos J:




$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial R} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial R} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \cos\theta \cdot R\cos\theta + R\,sen\theta \cdot sen\,\theta = R \neq 0$$

de forma de $f_{(R,\theta)}(r,\theta) = |J|\, f_{(X,Y)}(x,y)$

Como $(X,Y)$ distrib unif $f_{(X,Y)}(x,y) = k>0$ tq $\int_C k = 1 \Rightarrow \int_C k = k\lambda(C) = k\cdot\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{k = \frac{4}{\pi}}$

Por lo tanto $f_{(R,\theta)}(r,\theta) = \frac{4}{\pi}R$ //

a) Primero calcularé la de $(R,\theta)$.

- Si $r\le0 \vee \theta\le 0 \Rightarrow F_{(R,\theta)}(r,\theta)=0 \iff$ Si $x\le0 \vee y\le 0$ $F(x,y)=0$
- Si $(r,\theta)\in\hat C \Rightarrow F_{(R,\theta)}(r,\theta) = \int_0^\theta\int_0^r \frac{4}{\pi} t\,dt = \theta\frac{2}{\pi}r^2 = \frac{2}{\pi}\theta r^2$

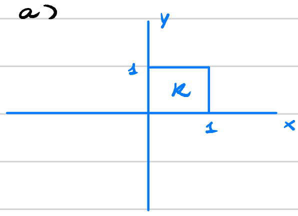
  Si $(x,y)\in C \Rightarrow F(x,y) = \frac{2}{\pi} arctg(\frac{y}{x})(x^2+y^2)$
- Si $r\ge1 \Rightarrow F_{(R,\theta)}(r,\theta) = \int_0^\theta \int_0^1 \frac{4}{\pi}t\,dt = \theta\frac{2}{\pi} \Rightarrow F(x,y) = arctg(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x})\cdot\frac{2}{\pi}$ si $y\ge\sqrt{1-x^2}$
- Si $x\ge1 \wedge y\ge1$ $F(x,y)=1$ $\quad F(x,y) = arctg(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}})\cdot\frac{2}{\pi}$ si $x\ge\sqrt{1-y^2}$

Está mal casi seguro

b) Primero marginales $f_X(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{4}{\pi}dt = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2} \wedge f_Y(y) = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}$

$$f_{X/Y=y_0}(x) = \frac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{4/\pi}{4/\pi\sqrt{1-y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}} \ \forall x\in[0,\sqrt{1-y_0^2}[ \qquad f_{Y/X=x_0}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \ \forall y\in[0,\sqrt{1-x_0}[$$

3.- a)




Como $(X,Y)$ unif. en $R \Rightarrow f(x,y)=k>0\ \forall (x,y)\in R$ tq $\int_R k = 1 \Rightarrow \boxed{k=1}$

Cambio de variable $Z=(X+Y, X-Y)$, comprobamos

$g:(x,y)\longmapsto(x+y,x-y)$ derivable

$g^{-1}(z,t)=\left(\frac{z+t}{2},\frac{z-t}{2}\right) \Rightarrow$ inyectiva

$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ Es cambio válido

$f_Z(z,t)=|J|\cdot f_{(X,Y)}(x,y) = 1/2$

b) Vemos que, siendo $\tilde{Z}=(\min(X,Y),\max(X,Y))$ tenemos que

$$F_{\tilde{Z}}(x,y) = \begin{cases} F_{(X,Y)}(y,y) & y\le x \\ F_{(X,Y)}(y,y) - P[x\le X\le y,\ x\le Y\le y] & y>x\end{cases}$$

$F'_{(X,Y)}(x,y) = y+x$

siendo $P[x\le X\le y,\ x\le Y\le y] = \int_x^y\int_x^y f_{(X,Y)}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 = (y-x)^2 \ \wedge\ F_{(X,Y)}(x,y)=\int_0^y\int_0^x 1\, dt_1\, dt_2 = xy$

Como $F_{\tilde{Z}}(x,y) = \int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y f_{\tilde{Z}}(t_1,t_2)\,dt_2\,dt_1 \Rightarrow f_{\tilde{Z}}(t_1,t_2) = \begin{cases} F'_{(X,Y)}(t_1,t_2)=2t_2 & t_2\le t_1 \\ F'_{(X,Y)}(t_1,t_2) - ((y-x)^2)' = 2t_2 - \cancel{2(y-x)} + \cancel{2(y-x)} & t_2\ge t_1\end{cases}$

luego $f_{\tilde{Z}}(t_1,t_2)=2t_2 \quad \forall (t_1,t_2)\in R$

4.- Razón de correlación: $\eta^2_{X_1/X_2} = 1 - \frac{E[Var(X_1/X_2)]}{Var(X_1)}$

Coef. de correlación lineal $\rho^2_{X,Y} = \frac{(Cov(X_1,X_2))^2}{Var(X_1)Var(X_2)} = \frac{(M(1,1)-M(1,0)M(0,1))^2}{(M(2,0)-M(1,0)^2)(M(0,2)-M(0,1)^2)}$

5.- a) $y = \varphi_{opt}(x) = E[Y/X=x] = \sum_{Supp\, P_{Y/X=x}} y\cdot p_{Y/X=x}(y)$

$p_{Y/X=x}(y) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} \Rightarrow x=1:\ p_{Y/X=1}(y)=\begin{cases}1 & y=0\\ 0 & y=1,2\end{cases}$

$x=2:\ p_{Y/X=2}(y) = \begin{cases}1 & y=1\\ 0 & y=0,2\end{cases}$

$x=3:\ p_{Y/X=3}(y) = \begin{cases}1/2 & y=0,2\\ 0 & y=1\end{cases}$

Luego la mejor estimación será $y=\varphi_{opt}(x)$ con $\boxed{\varphi_{opt}(x)=\begin{cases}0 & x=1\\ 1 & x=2\\ 1 & x=3\end{cases}}$

Medida de bondad: razón de correlación: $\eta^2_{Y/X} = Var(\varphi_{opt}(x))\cdot\frac{1}{Var(Y)}$

b) $R_{Y/X}:\ y - E[Y] = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}(x-E[X]) \Rightarrow y - 3/4 = \frac{5}{11}(x-9/4) \Rightarrow ECM = \frac{11}{16}-\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{16} = 6/11 \simeq 0'545$

$R_{X/Y}:\ x - E[X] = \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}(y-E[Y]) \Rightarrow x - 9/4 = \frac{5}{11}(y-3/4) \Rightarrow ECM = 6/11 \simeq 0'545$

$E[Y] = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{3}{4}$ $\quad E[Y^2] = \frac{1}{4}\cdot 1 + 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$E[X] = 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{4}$ $\quad E[X^2] = 1\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} + 9\cdot\frac{1}{2} = 5 + \frac{3}{4} = \frac{23}{4}$

$Cov(X,Y) = E[XY]-E[X]E[Y] = (0\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot\frac{1}{4}) - \frac{27}{16} = 2 - \frac{27}{16} = \frac{5}{16}$

$Var(X) = E[X^2]-E[X]^2 = \frac{23}{4} - \frac{81}{16} = \frac{11}{16}$

$Var(Y) = E[Y^2]-E[Y]^2 = \frac{5}{4} - \frac{9}{16} = 11/16$