ASRR

# Tema 4
## Esperanza condicionada

### • Definición

Sean $X$ e $Y$ v.a. tq $\exists\, \mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$

Se define $\mathbb{E}[Y/X]$ → es v.a

- Caso discreto: $\mathbb{E}[Y/X=x] = \sum_{y \in Supp(p_{Y/X=x})} y\, p_{Y/X=x}(y) \quad \forall x \in \mathbb{E}_X$

  → valores que toma $Y$ cuando $X = x$, soporte de la func

- Caso continuo: $\mathbb{E}[Y/X=x] = \int_{Supp(f_{Y/X=x})} y\, f_{Y/X=x}(y)\, dy \quad \forall x \in \mathbb{E}_X$

### • Esperanza condicionada de una función

Sea $g: \mathbb{E}_Y \to \mathbb{R}$ medible, la esperanza de $g(Y)$ cond. a $x$ de $X$:

$$\mathbb{E}[g(Y)/X=x] = \sum_{y \in Supp(p_{Y/X=x})} g(y)\, p_{Y/X=x}(y) \;\vee\; \int_{Supp(f_{Y/X=x})} g(y) f_{Y/X=x}(y)\, dy \quad \forall x \in \mathbb{E}_X$$

### • Propiedades

- $|\mathbb{E}[X/Y]| \leq \mathbb{E}[|X|/Y]$
- $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b/Y] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}[X_i/Y] + b$ — solo UNA $b$, varias $a_i$
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[g(X)/Y]] = \mathbb{E}[g(X)]$
- $\mathbb{E}[X\, g(Y)/Y] = g(Y)\, \mathbb{E}[X/Y] \;\wedge\; \mathbb{E}[h(X)/X] = h(X)$

### • Esp Condicionada de vectores aleatorios

Con $X = (X_1, \dots, X_n) \wedge Y = (Y_1, \dots, Y_m)$, tenemos

$$\mathbb{E}[X/Y] = (\mathbb{E}[X_1/Y], \dots, \mathbb{E}[X_n/Y])$$ Análogo

### • Momentos condicionados

- No centrados: $\mathbb{E}[X^k/Y] \equiv g(X) = X^k,\ \mathbb{E}[g(X)/Y]$
- Centrados: $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X/Y])^k/Y] \equiv g(X) = [X - \mathbb{E}[X/Y]]^k,\ \mathbb{E}[g(X)/Y]$

### • Varianza condicionada

Si $\exists\, \mathbb{E}[X^2] \Longrightarrow$

i) $\exists\, Var(X/Y)$ con $Var(X/Y) \geq 0$ — es v.a

ii) $Var(X/Y) = \mathbb{E}[X^2/Y] - (\mathbb{E}[X/Y])^2$

iii) $Var(X) = Var(\mathbb{E}[X/Y]) + \mathbb{E}[Var(X/Y)]$

### • Regresión mínimo cuadrática bidimensional

Consiste en aproximar una v.a. $Y$ mediante una func. de otra v.a. $X$

$$Y \simeq \varphi(X)$$

($Y$: dep. o endógena; $X$: indep o exógena)

Consideramos la función de perdida o error cuadrático medio ECM como

$$\mathbb{E}[(Y - \varphi(X))^2]$$

Si buscamos la aproximación óptima $\varphi_{opt}(X) = \min_{\varphi} \mathbb{E}[(Y - \varphi(X))^2]$ vemos que

$$\varphi_{opt}(X) = \mathbb{E}[Y/X] \Rightarrow ECM(\varphi(X)) = \mathbb{E}[Var(Y/X)]$$

$$\hookrightarrow = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[(\mathbb{E}(Y/X))^2]$$

- Curvas de regresión

curva de regresión de $Y$ sobre $X$

Se define como $y = \varphi_{opt}(x) = E[Y/X = x] \quad \forall x \in E_X$

ECM de la curva: $E[Var(Y/X)]$

ECM de un valor $x$: $Var(Y/X = x)$

Propiedades:
- Si $Y$ dep. funcionalmente de $X$, $Y = f(X) \Rightarrow$ Curva: $y = f(x)$, $ECM = 0$
- Si $X$ e $Y$ independientes, $y = E[Y]$ $x = E[X]$ rectas paralelas

$ECM = Var(X \circ Y)$

Cuadro resumen para predecir $Y$ (equivalentemente para predecir $X$)

| | Sin observar $X$ | Observando $X$ | Para valor concreto $X = x$ |
|---|---|---|---|
| **Predicción para $Y$** | $E[Y]$ | $E[Y/X]$ | $E[Y/X = x]$ |
| **E.C.M.** | $Var[Y]$ | $E[Var[Y/X]]$ | $Var[Y/X = x]$ |

- Razones de Correlación

  - Correlación: estudia la bondad del ajuste encontrado.

  - Razón de correlación de $X$ sobre $Y$: $\eta^2_{X/Y} = \dfrac{Var(E[X/Y])}{Var(X)} = 1 - \dfrac{E[Var(X/Y)]}{Var(X)} \in [0,1]$

análogo $Y$ sobre $X$

Propiedades $\quad \forall a > 0 \quad \eta^2_{aX/Y} = \eta^2_{X/Y}$

$\eta^2_{X/Y} = \eta^2_{Y/X} = 0 \iff x = E[X] \wedge y = E[Y] \quad X$ e $Y$ indep.

$\eta^2_{X/Y} = 1 \iff X = f(Y)$, $X$ dep. func. de $Y$

- Planteamiento de la regresión lineal

Objetivo: predecir $Y$ a partir de una función lineal de $X$

En este caso:

$$\varphi^{L}_{opt}(X) = \min_{a,b} E[(Y - aX - b)^2]$$

Encontramos que $a, b$ tq $L = E[(Y - aX - b)^2]$ sea mínimo valdrán

$$a = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}, \quad b = E[Y] - aE[X]$$

Entonces obtenemos que la Recta de Regresión de $Y$ sobre $X$ $R_{Y/X}$ será

$$y - E[Y] = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}(x - E[X])$$

y el $ECM(\varphi^L_{opt}(X)) = Var(Y) - \dfrac{[Cov(X,Y)]^2}{Var(X)} = Var(Y) - Var(\varphi^L_{opt}(X))$

Coeficiente de regresión: $\gamma_{Y/X} = \dfrac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$

Propiedades:
- $Cov(X,Y) = 0 \iff R_{Y/X}: y = E[Y] \quad R_{X/Y}: x = E[X]$
- Si $X$ e $Y$ linealmente relacionadas, se puede obtener una de la otra y las de regresión coinciden con la de dep.
- $R_{Y/X}$ y $R_{X/Y}$ se cortan en $(E[X], E[Y])$

## Coeficiente de determinación lineal:

Como las razones de correlación, mide la bondad del ajuste lineal:

$$\rho^2_{X,Y} = \frac{[Cov(X,Y)]^2}{Var(X)\,Var(Y)} = \gamma_{X/Y}\,\gamma_{Y/X} \in [0,1]$$

Propiedades

- $\rho^2_{aX+b,\,cY+d} = \rho^2_{X,Y}$
- $\rho^2_{X,Y} = 0 \iff R_{Y/X}: y = E[Y]$, $R_{X/Y}: x = E[X]$
- $\rho^2_{X,Y} = 1 \iff$ Dependencia lineal de $X, Y$
- $\rho^2_{X,Y} \le \eta^2_{Y/X}$, $\rho^2_{X,Y} \le \eta^2_{X/Y}$

## Coeficiente de correlación lineal

Informa de la bondad y del sentido del ajuste.

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} \in [-1,1]$$

Propiedades

- $\rho_{aX+b,\,cY+d} = \pm\,\rho_{X,Y}$
- $|\rho_{X,Y}| = 1 \iff$ Dep. funcional lineal posit. o negat.
- $|\rho_{X,Y}| = 1 \iff$ Rectas de regresión = recta de dep. = curva de reg.
- $\rho_{X,Y} > 0 \Rightarrow$ Cuando una crece, la otra también
- $\rho_{X,Y} < 0 \Rightarrow$ Cuando una decrece, la otra crece y viceversa