## Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

## Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

## Convocatoria extraordinaria

**Ejercicio 1.** (2.5 puntos) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$  la función dada por

$$f_n(z) = \int_{z}^{n+1} \frac{e^{z^2 - t}}{1 + t^2} dt \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- a) Probar que  $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ .
- b) Probar que la serie de funciones  $\sum_{n\geqslant 0} f_n$  converge en  $\mathbb{C}$  y que su suma es una función entera.

**Ejercicio 2.** (2.5 puntos) Integrando una conveniente función sobre la poligonal  $[-R, R, R + i\pi, -R + i\pi, -R]$ , con  $R \in \mathbb{R}^+$ , calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} dx.$$

**Ejercicio 3.** (2.5 puntos) Sea  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{C}$  y  $\{\alpha_n\} \subset \Omega$  una sucesión convergente a  $\alpha \in \Omega$ . Sean  $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ , supongamos que existe  $k \in \mathbb{N}$  de modo que  $f^k(\alpha_n) = g^k(\alpha_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que existe  $\lambda \in \mathbb{C}$ , con  $\lambda^k = 1$ , tal que  $f(z) = \lambda g(z)$  para cada  $z \in \Omega$ .

**Ejercicio 4.** (2.5 puntos) Sea f una función entera y sea  $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{f(0)\})$  verificando que  $g(f(z)) = \frac{1}{z}$  para todo  $z \in \mathbb{C}^*$ .

- Probar que f es inyectiva en  $\mathbb{C}^*$ .
- ullet Probar que f es un polinomio de grado uno.
- lacktriangle Deducir la forma que debe tener g.