VC-2017-ene-sol.pdf

DEDLED

Variable Compleja I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

Variable Compleja I

Examen del 26 de enero de 2017

Soluciones

1. *Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ la función definida por*

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\log(t+z)}{(t+1)^2}\, dt \qquad \forall\, z \in \Omega$$

(a). *Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

(b). *Probar que la serie de funciones $\sum_{n\ge 0} f_n$ converge en Ω y que su suma es una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

(c). *Calcular el desarrollo de Taylor de f centrado en 1.*

Solución

(a). Fijado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, para $(t,z) \in [\,n, n+1\,] \times \Omega$ se tiene $t+z \in \Omega$ y, en particular, $t+z \neq 0$. En efecto, si fuese $t+z \in \mathbb{R}$ con $t+z \le 0$, se tendría también $z = t+z-t \in \mathbb{R}$ y $z \le z+t \le 0$, de donde $z \notin \Omega$, una contradicción.

Consideramos entonces la función $\Phi : [\,n, n+1\,] \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(t,z) = \frac{\log(t+z)}{(t+1)^2} \qquad \forall\,(t,z) \in [\,n, n+1\,] \times \Omega$$

a la que vamos a aplicar el teorema de holomorfía de la integral dependiente de un parámetro. Escribimos $\psi(t,z) = \log(t+z)$ para todo $(t,z) \in [\,n,n+1\,] \times \Omega$.

- Puesto que el logaritmo principal es una función continua en $\Omega = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, vemos que ψ es continua, como composición de dos funciones continuas. Entonces Φ también es continua, como cociente de ψ por una función polinómica.

- Fijado $t \in [\,n, n+1\,]$ consideramos la función $\Phi_t : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$\Phi_t(z) = \Phi(t,z) = \frac{\log(t+z)}{(t+1)^2} \qquad \forall\, z \in \Omega$$

  y escribimos también $\psi_t(z) = \log(t+z)$ para todo $z \in \Omega$.

  Usando de nuevo que $t+z \in \Omega$ para todo $z \in \Omega$, como $\log \in \mathcal{H}(\Omega)$, la regla de la cadena nos dice que $\psi_t \in \mathcal{H}(\Omega)$, y deducimos que $\Phi_t \in \mathcal{H}(\Omega)$, pues Φ_t es el producto de una constante por ψ_t.

En resumen, Φ es continua y $\Phi_t \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $t \in [\,n, n+1\,]$. El teorema de holomorfía de la integral dependiente de un parámetro nos dice que $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, lo cual es válido para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, como se pedía.

(b). Sea K un subconjunto compacto de Ω, sea $\rho = \text{máx}\{|z| \, : \, z \in K\}$ y fijemos $n \in \mathbb{N}$ con $n > \rho + 1$. Para $z \in K$ y $t \in [\,n, n+1\,]$ tenemos

$$1 < n - \rho \leq t - |z| \leq |\,t + z\,| \leq t + |z| \leq n + 1 + \rho$$

Puesto que el logaritmo neperiano es una función creciente, deducimos que

$$0 < \log|\,t+z\,| \;\leq\; \log(n+1+\rho)$$

de donde

$$\big|\,\log|\,t+z\,|\,\big| = \log|\,t+z\,| \leq \log(n+1+\rho)$$

y la definición del logaritmo principal nos dice que

$$|\log(t+z)| \;\leq\; \big|\,\log|\,t+z\,|\,\big| \;+\; \big|\arg(t+z)\big| \;\leq\; \log(n+1+\rho)+\pi$$

Por ser $(t+1)^2 \geq (n+1)^2 > 0$ deducimos que

$$|\,\Phi(t,z)\,| = \left|\frac{\log(t+z)}{(t+1)^2}\right| \leq \frac{\log(n+1+\rho)+\pi}{(n+1)^2}$$

Esta desigualdad es válida para todo $t \in [\,n, n+1\,]$, intervalo de longitud 1, luego

$$|\,f_n(z)\,| = \left|\int_n^{n+1} \Phi(t,z)\,dt\right| \leq \frac{\log(n+1+\rho)+\pi}{(n+1)^2} \qquad \forall\, z \in K$$

y esta desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > \rho + 1$.

Veamos que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\log(n+1+\rho)+\pi}{(n+1)^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\log(n+\rho)+\pi}{n^2}$ es convergente. Para ello escribimos

$$\frac{\log(n+\rho)+\pi}{n^2} \;=\; \frac{\log(n+\rho)+\pi}{n^{1/2}}\,\frac{1}{n^{3/2}}$$

y la escala de infinitos nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+\rho)+\pi}{n^{1/2}} \;=\; 0$$

Como la serie armónica $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente, basta aplicar el criterio de comparación por paso al límite.

El test de Weierstrass nos dice que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absoluta y uniformemente en K. Como esto es válido para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, hemos probado que dicha serie converge absolutamente en Ω y uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω. Por ser $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el teorema de convergencia de Weierstrass nos asegura que la suma de la serie es una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

ING BANK NV se encuentra adherido al Sistema de Garantía de Depósitos Holandés con una garantía de hasta 100.000 euros por depositante. Consulta más información en ing.es

1/6

Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

Si ya tuviste sufi con tanto estudio...
Te dejamos este espacio
para desahogarte.

Pinta, arranca,
llora... tú decides ;)

¿Te sientes más liberado?
Sigue siéndolo con la **Cuenta NoCuenta:**
libre de comisiones*, y de lloraditas.

Y ahora con 5€ por la cara.

¡Quiero una de esas!

***TIN 0 % y TAE 0 %.**

do your thing

(c). Empezamos calculando $f(1)$, teniendo en cuenta que

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f_j(1)$$

Para $n \in \mathbb{N}$ tenemos claramente

$$\sum_{j=0}^{n-1} f_j(1) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{\log(t+1)}{(t+1)^2} dt = \int_0^n \frac{\log(t+1)}{(t+1)^2} dt$$

integral que se calcula fácilmente, usando la fórmula de integración por partes y la regla de Barrow:

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{\log(t+1)}{(t+1)^2} dt &= \left[-\frac{\log(t+1)}{t+1}\right]_0^n + \int_0^n \frac{dt}{(t+1)^2} \\ &= -\frac{\log(n+1)}{n+1} + \left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^n = -\frac{\log(n+1)}{n+1} + 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Deducimos por tanto que

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{\log(n+1)}{n+1} + 1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Para obtener los restantes coeficientes del desarrollo pedido, fijados $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t \in [n, n+1]$, calculamos las derivadas sucesivas de la función Φ_t. De la definición de Φ_t deducimos que

$$\Phi_t'(z) = \frac{1}{(t+1)^2\,(t+z)} \qquad \forall\, z \in \Omega$$

y a partir de aquí comprobamos por inducción que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\Phi_t^{(k)}(z) = \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!}{(t+1)^2\,(t+z)^k} \qquad \forall\, z \in \Omega$$

En efecto, el caso $k = 1$ ya se ha visto y, suponiendo que la igualdad anterior es cierta para $k \in \mathbb{N}$, la deducimos para $k+1$:

$$\Phi_t^{(k+1)}(z) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(t+1)^2} \cdot \frac{(-k)}{(t+z)^{k+1}} = \frac{(-1)^k\,k!}{(t+1)^2\,(t+z)^{k+1}} \qquad \forall\, z \in \Omega$$

En particular, tomando $z = 1$ obtenemos

$$\Phi_t^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(t+1)^{k+2}} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Las anteriores igualdades son válidas para todo $t \in [\,n, n+1\,]$, con lo que aplicando otra vez el teorema de holomorfía de la integral dependiente de un parámetro, obtenemos que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene

$$f_n^{(k)}(1) \,=\, \int_n^{n+1} \Phi_t^{(k)}(1)\,dt \,=\, \int_n^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)\,!}{(t+1)^{k+2}}\,dt \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Es el momento de aplicar de nuevo el teorema de convergencia de Weierstrass, que nos dice que, para todo $k \in \mathbb{N}$, la serie $\sum\limits_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω y su suma coincide con $f^{(k)}$. En particular tenemos

$$f^{(k)}(1) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(1) \,=\, \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f_j^{(k)}(1)$$

Ahora bien, para todo $n \in \mathbb{N}$, usando lo ya demostrado, tenemos

$$\sum_{j=0}^{n-1} f_j^{(k)}(1) \,=\, \sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)\,!}{(t+1)^{k+2}}\,dt \,=\, (-1)^{k-1}(k-1)\,! \int_0^n \frac{dt}{(t+1)^{k+2}}$$

y la regla de Barrow nos da

$$\int_0^n \frac{dt}{(t+1)^{k+2}} \,=\, \left[-\frac{1}{(k+1)(t+1)^{k+1}}\right]_0^n \,=\, \frac{1}{k+1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{k+1}}\right)$$

con lo que obtenemos finalmente

$$f^{(k)}(1) \,=\, \frac{(-1)^{k-1}(k-1)\,!}{k+1} \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{k+1}}\right) \,=\, \frac{(-1)^{k-1}(k-1)\,!}{k+1} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Como $D(0,1) \subset \Omega$, el desarrollo de Taylor de f centrado en 1 es válido en $D(0,1)$ y, como hemos visto, viene dado por

$$f(z) \,=\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k\,!}(z-1)^k \,=\, 1 \,+\, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k\,(k+1)}(z-1)^k \qquad \forall\, z \in D(0,1) \qquad \blacksquare$$

2. *Dado* $\lambda \in \mathbb{R}$ *con* $0 < \lambda < 2$ *y* $\lambda \neq 1$, *integrar una conveniente función sobre la poligonal* $[-R\,,\,R\,,\,R+2\pi i\,,\,-R+2\pi i\;-R]$, *con* $\mathbb{R} \in \mathbb{R}$ *y* $R > 1$, *para calcular la integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\lambda x}}{(e^x+1)\,(e^x+2)}\,dx$$

Solución

(a). Para $z \in \mathbb{C}$ se tiene $(e^z+1)(e^z+2) = 0$ si, y sólo si, $z \in A$, donde

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{Log}(-1) \cup \operatorname{Log}(-2) \\ &= \{(2k+1)\pi i \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\log 2 \,+\, (2k+1)\pi i \;:\; k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

y observamos que $A' = \emptyset$, pues A es el conjunto de los ceros de una función entera.

Aplicaremos el teorema de los residuos usando:

- El abierto $\Omega = \mathbb{C}$.
- El conjunto A, que verifica $A' \cap \Omega = A' = \emptyset$ como ya se ha indicado.
- La función f definida por

$$f(z) \;=\; \frac{e^{\lambda z}}{(e^z+1)\,(e^z+2)} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus A$$

  que es el cociente de dos funciones holomorfas en $\mathbb{C} \setminus A$, luego $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$.
- El ciclo $\Gamma = [-R\,,\,R\,,\,R+2\pi i\,,\,-R+2\pi i\;-R]$, un camino cerrado que verifica $\Gamma^* \subset \mathbb{C} \setminus A$. En efecto, para $a \in A$ se tiene por una parte, $\operatorname{Im} a = (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, luego $\operatorname{Im} a \notin \{0, 2\pi\}$ y a no pertenece a ninguno de los segmentos horizontales de Γ^*; por otra, $-R < 0 \leq \operatorname{Re} a \leq \log 2 < 1 < R$, luego a tampoco pertenece a ninguno de los segmentos verticales de Γ^*. Finalmente, Γ es trivialmente nul-homólogo con respecto a $\mathbb{C}$.

Al aplicar el teorema de los residuos, nos encontramos con que

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(a) = 0 \qquad \forall\, a \in A \setminus \{\pi i\,,\,\log 2 + \pi i\}$$

mientras que

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(\pi i) \;=\; \operatorname{Ind}_{\Gamma}(\log 2 + \pi i) \;=\; 1$$

luego el teorema nos dice que

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz \;=\; 2\,\pi\, i \operatorname{Res}\big(\,f(z)\,,\,\pi i\big) \;+\; 2\,\pi\, i \operatorname{Res}\big(\,f(z)\,,\,\log 2 + \pi i\big)$$

(b). Calculamos ahora los dos residuos que aparecen en la última igualdad. Usando la definición de derivada se tiene

$$\lim_{z\to\pi i}(z-\pi i)\, f(z) \;=\; \lim_{z\to\pi i}\frac{e^{\lambda z}}{e^{z}+2}\cdot\frac{z-\pi i}{e^{z}-e^{\pi i}} \;=\; \frac{e^{\lambda\pi i}}{e^{\pi i}} \;=\; -\,e^{\lambda\pi i}$$

de donde deducimos que

$$\operatorname{Res}\big(\,f(z)\,,\,\pi\, i\big) \;=\; -\,e^{\lambda\pi i}$$

Análogamente, escribiendo $\alpha = \log 2+\pi i$, tenemos $e^{\lambda\alpha} \;=\; 2^{\lambda}\, e^{\lambda\pi i}$, y también es claro que $(e^{\alpha}+1)\, e^{\alpha} \;=\; 2$, luego

$$\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) \;=\; \lim_{z\to\alpha}\frac{e^{\lambda z}}{e^{z}+1}\cdot\frac{z-\alpha}{e^{z}-e^{\alpha}} \;=\; \frac{e^{\lambda\alpha}}{(e^{\alpha}+1)\, e^{\alpha}} \;=\; 2^{\lambda-1}\, e^{\lambda\pi i}$$

y deducimos que

$$\operatorname{Res}\big(\,f(z)\,,\,\log 2+\pi\, i\big) \;=\; 2^{\lambda-1}\, e^{\lambda\pi i}$$

Hemos calculado ya la integral curvilínea buscada:

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz \;=\; 2\,\pi\, i\,\big(\,2^{\lambda-1}-1\,\big)\, e^{\lambda\pi i}$$

(c). Acotamos ahora las integrales de f sobre los segmentos verticales de Γ, que obviamente dependen de R, concretamente:

$$I_1(R) \;=\; \int_{[\,R\,,\,R+2\pi i\,]} f(z)\, dz \qquad \text{e} \qquad I_2(R) \;=\; \int_{[\,-R+2\pi i\,,\,-R\,]} f(z)\, dz$$

Para $z\in[R, R+2\pi i]^*$ tenemos $\operatorname{Re} z = R$, con lo cual,

$$|\,e^{\lambda z}\,| \;=\; e^{\lambda R}, \qquad |\,e^{z}+1\,| \;\geq\; e^{R}-1 \;>\; 0 \quad \text{y} \quad |\,e^{z}+2\,| \;\geq\; e^{R}-2 \;>\; 0$$

de donde deducimos que

$$|\,f(z)\,| \;\leq\; \frac{e^{\lambda R}}{(e^{R}-1)(e^{R}-2)} \qquad \forall\, z\in[\,R\,,\,R+2\pi i\,]^*$$

Análogamente, para $z\in[-R+2\pi i\,,\,-R\,]^*$ tenemos $\operatorname{Re} z = -R$, con lo cual,

$$|\,e^{\lambda z}\,| \;=\; e^{-\lambda R}, \qquad |\,e^{z}+1\,| \;\geq\; 1-e^{-R} > 0 \quad \text{y} \quad |\,e^{z}+2\,| \;\geq\; 2-e^{-R} \;>\; 0$$

de donde deducimos

$$|\,f(z)\,| \;\leq\; \frac{e^{-\lambda R}}{(1-e^{-R})(2-e^{-R})} \qquad \forall\, z\in[-R+2\pi i, -R\,]^*$$

Como ambos segmentos verticales tienen longitud 2π, concluimos que

$$|\, I_1(R)\,| \le \frac{2\pi\, e^{\lambda R}}{(e^R-1)(e^R-2)} \qquad \text{y} \qquad |\, I_2(R)\,| \le \frac{2\pi\, e^{-\lambda R}}{(1-e^{-R})(2-e^{-R})}$$

Por ser $\lambda < 2$, tenemos

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{2\pi\, e^{\lambda R}}{(e^R-1)(e^R-2)} = \lim_{R\to+\infty} \frac{2\pi\, e^{(\lambda-2)R}}{(1-e^{-R})(2-e^{-R})} = 0$$

y por ser $\lambda > 0$, tenemos también

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{2\pi\, e^{-\lambda R}}{(1-e^{-R})(2-e^{-R})} = 0$$

Concluimos que $\lim\limits_{R\to+\infty} I_1(R) = \lim\limits_{R\to+\infty} I_2(R) = 0.$

(d). Consideramos ahora las integrales sobre los segmentos horizontales $\sigma = [-R, R]$ y $\tau = [R+2\pi i\,, -R+2\pi i]$. Es claro que

$$\int_\sigma f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\lambda x}}{(e^x+1)\,(e^x+2)}\, dx$$

y también que

$$\int_\tau f(z)\, dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{\lambda(x+2\pi i)}}{(e^{x+2\pi i}+1)\,(e^{x+2\pi i}+2)}\, dx = -\, e^{2\lambda\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{\lambda x}}{(e^x+1)\,(e^x+2)}\, dx$$

Por tanto, recordando el valor de la integral sobre Γ, ya calculada, tenemos

$$2\pi i \left(2^{\lambda-1}-1\right) e^{\lambda\pi i} = \left(1-e^{2\lambda\pi i}\right)\int_{-R}^{R} \frac{e^{\lambda x}}{(e^x+1)\,(e^x+2)}\, dx + I_1(R) + I_2(R)$$

Como esta igualdad es válida para todo $R\in\mathbb{R}$ con $R>1$, y ya habíamos comprobado que $\lim\limits_{R\to+\infty} I_1(R) = \lim\limits_{R\to+\infty} I_2(R) = 0$, obtenemos que

$$2\pi i \left(2^{\lambda-1}-1\right) e^{\lambda\pi i} = \left(1-e^{2\lambda\pi i}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\lambda x}}{(e^x+1)\,(e^x+2)}\, dx$$

Puesto que $0<\lambda<2$ y $\lambda\ne 1$, tenemos $e^{2\lambda\pi i}\ne 1$, y concluimos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\lambda x}}{(e^x+1)\,(e^x+2)}\, dx &= \frac{2\pi i\left(1-2^{\lambda-1}\right) e^{\lambda\pi i}}{e^{2\lambda\pi i}-1}\\ &= \frac{2\pi i\left(1-2^{\lambda-1}\right)}{e^{\lambda\pi i}-e^{-\lambda\pi i}} = \pi\left(1-2^{\lambda-1}\right)\,\operatorname{cosec}(\pi\lambda)\end{aligned}$$

Obsérvese que, cuando $0<\lambda<1$ se tiene $2^{\lambda-1}<1$ y $\operatorname{cosec}(\pi\lambda)>0$, mientras que, si $1<\lambda<2$ se tendrá $2^{\lambda-1}>1$ y $\operatorname{cosec}(\pi\lambda)<0$. En ambos casos, como no podía ser de otra forma, el resultado obtenido es un número real y positivo. ■

3. *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Supongamos que f tiene un polo en el punto a. Probar que el polo es simple si, y sólo si, f es inyectiva en $D(a,r) \setminus \{a\}$ para algún $r \in \mathbb{R}^+$ con $D(a,r) \subset \Omega$.*

Solución

La caracterización de los polos nos dice que f diverge en el punto a. En particular, existe un $R \in \mathbb{R}^+$ tal que, escribiendo $U = D(a,R)$, se tiene $U \subset \Omega$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in U \setminus \{a\}$. Definimos entonces $g : U \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \forall\, z \in U \setminus \{a\} \qquad \text{y} \qquad g(a) = 0$$

Tenemos $g \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$ y $\lim\limits_{z \to a} g(z) = 0 = g(a)$, luego g es continua en a. Por el teorema de extensión de Riemann, $g \in \mathcal{H}(U)$.

Sea m el orden del polo de f en a, y veamos que g tiene un cero de orden m en el punto a. En efecto, por la caracterización de los polos, ahora teniendo en cuenta el orden, podemos escribir

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^m} \qquad \forall\, z \in \Omega \setminus \{a\}$$

donde $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\psi(a) \neq 0$. Para $z \in U \setminus \{a\}$ tenemos $f(z) \neq 0$ luego también $\psi(z) \neq 0$. Así pues, $\psi(z) \neq 0$ para todo $z \in U$ y podemos definir $\varphi(z) = 1/\psi(z)$ para todo $z \in U$, obteniendo $\varphi \in \mathcal{H}(U)$ tal que $\varphi(a) \neq 0$. Podemos entonces escribir

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^m}{\psi(z)} = (z-a)^m \varphi(z) \qquad \forall\, z \in U \setminus \{a\}$$

y la igualdad así obtenida es evidente para $z = a$. Por la caracterización del orden de un cero, g tiene un cero de orden m en el punto a, como queríamos. La misma caracterización nos dice que $m = 1$ si, y sólo si, $g'(a) \neq 0$.

Supongamos que f es inyectiva en $D(a,r) \setminus \{a\}$ con $r \in \mathbb{R}^+$ y $D(a,r) \subset \Omega$. Podemos obviamente tomar $r < R$, de forma que $D(a,r) \subset U$, y vemos que g es inyectiva en $D(a,r)$. En efecto, si $z, w \in D(a,r)$ verifican que $g(z) = g(w) \neq 0$, tenemos $z, w \in D(a,r) \setminus \{a\}$, ya que $g(a) = 0$, y $f(z) = f(w)$, luego $z = w$. Si, por contrario, $g(z) = g(w) = 0$, como g no se anula en $U \setminus \{a\}$, se tendrá $z = w = a$. Aplicando la caracterización de la inyectividad local de una función holomorfa, obtenemos que $g'(a) \neq 0$, luego $m = 1$.

Para obtener el recíproco, basta revertir paso a paso el razonamiento anterior. Si $m = 1$ tenemos $g'(a) \neq 0$, luego g es inyectiva en un entorno de a. Existe entonces $r \in \mathbb{R}^+$ con $D(a,r) \subset U \subset \Omega$ tal que g es inyectiva en $D(a,r)$. Para $z, w \in D(a,r) \setminus \{a\}$ con $f(z) = f(w)$, se tiene entonces $g(z) = g(w)$, luego $z = w$, así que f es inyectiva en $D(a,r) \setminus \{a\}$. ■

4. *Sea* Ω *un dominio de* $\mathbb{C}$ *y* $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Supongamos que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f(z)^n = g(z)^n$ *para todo* $z \in \Omega$. *Probar que existe* $\lambda \in \mathbb{C}$, *con* $\lambda^n = 1$, *tal que* $f(z) = \lambda\, g(z)$ *para todo* $z \in \Omega$.

Solución

Descartamos previamente el caso trivial de que g sea idénticamente nula, pues entonces f también es idénticamente nula y basta tomar $\lambda = 1$.

Sea $a \in \Omega$ tal que $g(a) \neq 0$ y, usando la continuidad de g en a, sea D un disco abierto de centro a tal que $D \subset \Omega$ y $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D$. Tenemos entonces $h \in \mathcal{H}(D)$ donde

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \qquad \forall\, z \in D$$

Por hipótesis tenemos $h(z)^n = 1$ para todo $z \in D$, es decir, $h(D)$ está contenido en el conjunto de las raíces n-ésimas de la unidad, que es finito. Pero siendo D conexo y h continua, $h(D)$ es conexo, luego $h(D)$ se reduce a un punto: existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda^n = 1$ tal que $h(z) = \lambda$ para todo $z \in D$.

Tenemos entonces $f(z) = \lambda\, g(z)$ para todo $z \in D$. Puesto que Ω es un dominio, f y $\lambda\, g$ son holomorfas en Ω y coinciden en el conjunto D, que obviamente verifica $D' \cap \Omega \neq \emptyset$, el principio de identidad nos dice que $f(z) = \lambda\, g(z)$ para todo $z \in \Omega$, como queríamos demostrar. ■