A3RR

Tema 10: T^a de Morera

1- Teorema de Morera

- Teorema: sea $\Omega = \Omega^\circ \neq \emptyset$ y f continua en Ω verificando

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,dz = 0$$

$\forall \Delta(a,b,c) \subset \Omega$. Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Fijado $\alpha \in \Omega$, $R \in \mathbb{R}^+$ tq $D(\alpha,R) \subset \Omega$, tomamos $F: D(\alpha,R) \to \mathbb{C}$ $F(z) = \int_{[\alpha,z]} f(w)\,dw$

Sea $a \in D(\alpha,R)$ y $r = R - |a-\alpha| > 0 \Rightarrow D(a,r) \subset D(\alpha,R)$. $\forall z \in D(a,r)$ $\Delta(\alpha,a,z) \subset D(\alpha,R) \subset \Omega$

con lo que $0 = \int_{[\alpha,a,z,\alpha]} f(w)\,dw = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\,dw - F(z)$

Hemos demostrado que

$$F(z) = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\,dw \Rightarrow F \text{ primit. de } f \Rightarrow F \in \mathcal{H}(D(\alpha,R)),$$

luego $F' \in \mathcal{H}(D(\alpha,R))$ con $F' = f \Rightarrow f$ deriv en α, $\forall \alpha \in \Omega \Rightarrow f \in \mathcal{H}(\Omega)$

2- Teorema de convergencia de Weierstrass

- Teorema: sea $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sup $\{f_n\} \overset{\text{unif}}{\to} f: \Omega \to \mathbb{C}$ en cada compacto de Ω

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad \forall z \in \Omega$$

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\forall k \in \mathbb{N}$ $\{f_n^{(k)}\} \overset{\text{unif}}{\to} f^{(k)}$ en cada compacto

↳ tb aplicado en series

3- Integrales dependientes de un parámetro

- Lema 1: Continuidad: sea γ camino, $A \subset \mathbb{C}$ y $\Phi: \gamma^* \times A \to \mathbb{C}$ continua. Entonces $f: A \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \int_\gamma \Phi(w,z)\,dw \quad \forall z \in A$$

es continua

- Lema 2: sean γ y φ caminos y $\Phi: \gamma^* \times \varphi^* \to \mathbb{C}$ continua. Entonces:

$$\int_\varphi \left(\int_\gamma \Phi(w,z)\,dw \right) dz = \int_\gamma \left(\int_\varphi \Phi(w,z)\,dz \right) dw$$

- Teorema Holomorfía: Sea γ camino y Ω abierto y $\Phi: \gamma^* \times \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Supongamos que, $\forall w \in \gamma^*$, la función $\Phi_w: \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $\Phi_w(z) = \Phi(w,z)$ $\forall z \in \Omega$ es holomorfa en Ω. Entonces, definiendo

$$f(z) = \int_\gamma \Phi(w,z)\,dw \quad \forall z \in \Omega$$

$f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Además, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \Omega$, $w \mapsto \Phi_w^{(k)}(z)$ de γ^* a $\mathbb{C}$ es continua con

$$f^{(k)}(z) = \int_\gamma \Phi_w^{(k)}(z)\,dw \quad \forall z \in \Omega \ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$f^{(k)}(z) = \int_\gamma \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k}(w,z)\,dw \quad \forall z \in \Omega \ \forall k \in \mathbb{N}$$