VC-2016-ene-sol.pdf

DEDLED

Variable Compleja I

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

Variable Compleja I

27 de enero de 2016

1. Probar que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(z-k)^2}$ converge en el abierto $\Omega=\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$ y que su suma es una función $f\in\mathcal{H}(\Omega)$. Probar también que, para todo $z\in D(0,1)$ se tiene $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n z^n$, donde $c_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n+2}}$ para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Solución

(a). Abreviando la notación, para cada $k\in\mathbb{N}$ definimos

$$f_k(z)\;=\;\frac{1}{(z-k)^2}\qquad\forall\, z\in\Omega$$

con lo que $f_k\in\mathcal{H}(\Omega)$, pues se trata de una función racional. Necesitaremos más adelante las sucesivas derivadas de f_k, así que comprobamos por inducción que

$$f_k^{(n)}(z)\;=\;\frac{(-1)^n\,(n+1)!}{(z-k)^{n+2}}\qquad\forall\, z\in\Omega\,,\quad\forall\, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\tag{1}$$

En efecto, para $n=0$ la igualdad anterior no es más que la definición de f_k y, supuesto que dicha igualdad es cierta para $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, se tiene claramente

$$f_k^{(n+1)}(z)\;=\;(-1)^n\,(n+1)!\,\big(-(n+2)\big)\,(z-k)^{-(n+2)-1}\;=\;\frac{(-1)^{n+1}(n+2)!}{(z-k)^{n+3}}\qquad\forall\, z\in\Omega$$

que es (1) para $n+1$ en lugar de n. En particular, tomando $z=0$ tenemos

$$f_k^{(n)}(0)\;=\;\frac{(-1)^n(n+1)!}{(-1)^{n+2}\,k^{n+2}}\;=\;\frac{(n+1)!}{k^{n+2}}\qquad\forall\, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,,\quad\forall\, k\in\mathbb{N}\tag{2}$$

(b). Sea ahora H un subconjunto compacto de Ω y sea $R=\max\{\,|\,z\,|\,:\,z\in H\}$. Para $k\in\mathbb{N}$ con $k\geq 2R$ y $z\in H$ se tiene que

$$|\,z-k\,|\;\geq\;k-|\,z\,|\;\geq\;k\;-\;R\;\geq\;k/2\,,\qquad\text{de donde}\quad|\,f_k(z)\,|\;\leq\;\frac{4}{k^2}$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ es convergente, el test de Weierstrass nos dice que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{k\geq 1}f_k$ converge absoluta y uniformemente en H. Esto prueba que dicha serie converge absolutamente en Ω y uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω. El teorema de convergencia de Weierstrass nos dice entonces que la suma de la serie es una función $f\in\mathcal{H}(\Omega)$.

(c). El mismo teorema nos dice también que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{k^{n+2}} = (n+1)!\, c_n$$

donde hemos usado (2). Finalmente, como $D(0,1) \subset \Omega$, el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen es válido en $D(0,1)$, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, c_n\, z^n \qquad \forall z \in D(0,1) \qquad \blacksquare$$

2. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{\log(z+i)}{1+z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, con $R \in \mathbb{R}$ y $R > 1$, evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1 + x^2}\, dx$$

Solución

(a). Aplicaremos el teorema de los residuos, usando el abierto convexo

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -1\}$$

que en particular es homológicamente conexo, y el conjunto $S = \{i\}$, que obviamente verifica $S' \cap \Omega = \emptyset$.

Para $z \in \Omega \setminus S$ tenemos $z + i \neq 0$ y $1 + z^2 \neq 0$, lo que permite definir

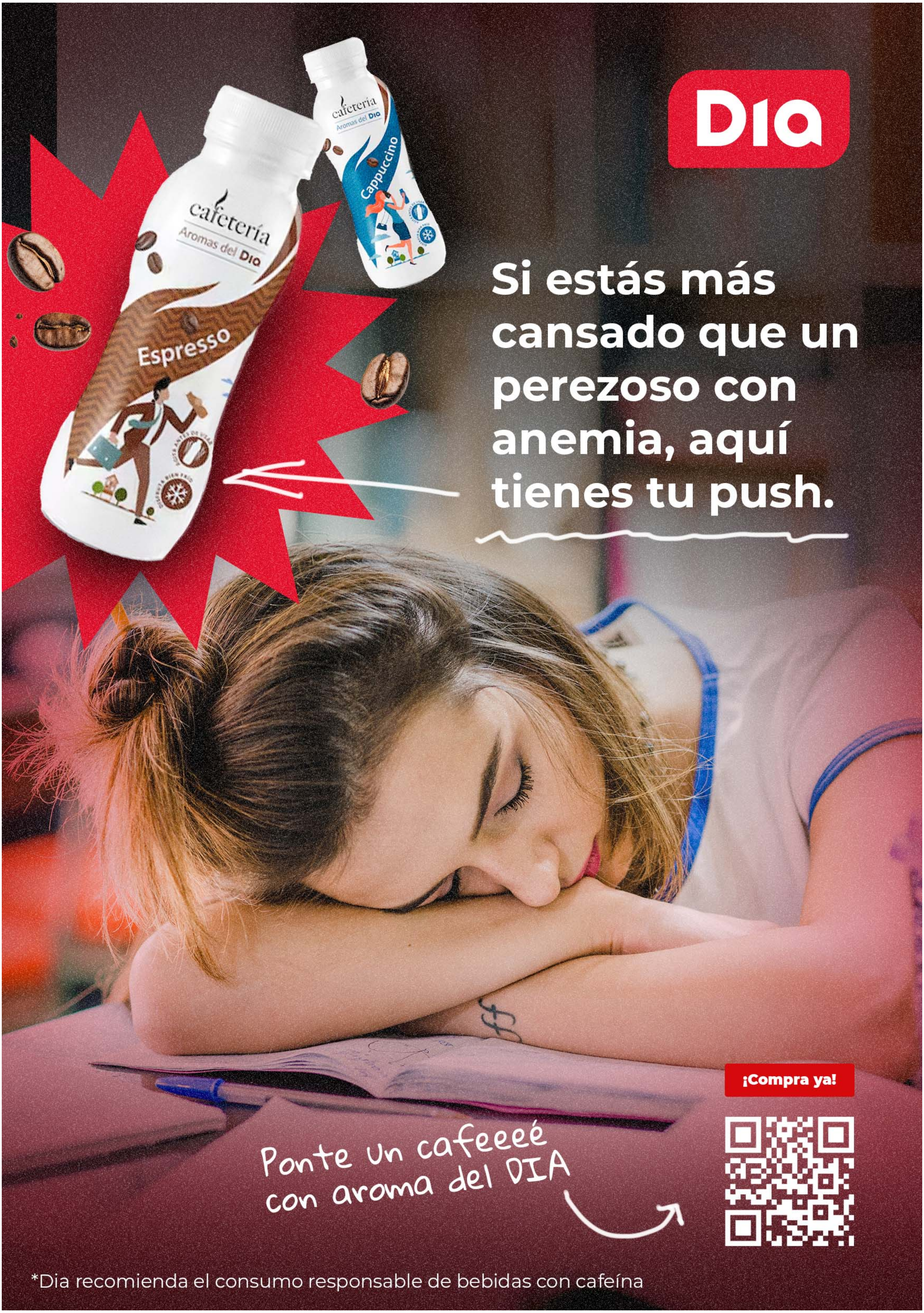
$$f(z) = \frac{\log(z+i)}{1 + z^2} \qquad \forall z \in \Omega \setminus S$$

De hecho, para $z \in \Omega$ se tiene que $z + i \notin \mathbb{R}$, luego el logaritmo principal es derivable en el punto $z + i$, y la regla de la cadena nos dice que la función $z \mapsto \log(z+i)$ es holomorfa en Ω. Deducimos claramente que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$.

Fijado $R \in \mathbb{R}$ con $R > 1$, consideramos finalmente el camino cerrado $\Gamma_R = \sigma_R + \gamma_R$, donde los arcos $\sigma_R : [-R, R] \to \mathbb{R}$ y $\gamma_R : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ vienen dados por

$$\sigma_R(x) = x \quad \forall x \in [-R, R] \qquad \text{y} \qquad \gamma_R(t) = R\, e^{it} \quad \forall t \in [0, \pi]$$

Es claro que $\Gamma_R^* \subset \Omega$ pues de hecho $\operatorname{Im} z \geq 0$ para todo $z \in \Gamma_R^*$, así como que $i \notin \Gamma_R^*$. Por tanto Γ_R es un ciclo en $\Omega \setminus S$ y obviamente es nul-homólogo con respecto a Ω. Quedan así comprobadas todas las hipótesis del teorema de los residuos.


Dia
cafetería
Aromas del Dia
Espresso
Cappuccino
Si estás más cansado que un perezoso con anemia, aquí tienes tu push.
¡Compra ya!
Ponte un cafeeeé con aroma del DIA
*Dia recomienda el consumo responsable de bebidas con cafeína

(b). Para calcular el residuo de f en el punto i, observamos que

$$\lim_{z\to i}(z-i)\,f(z) \;=\; \lim_{z\to i}\frac{\log(z+i)}{z+i} \;=\; \frac{\log(2i)}{2\,i}\neq 0$$

luego i es un polo simple de f y el residuo coincide con el límite que acabamos de calcular. Por tanto, al aplicar el teorema de los residuos, teniendo en cuenta que $\operatorname{Ind}_{\Gamma_R}(i) \;=\; 1$, obtenemos

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \;=\; 2\,\pi\,i\,\operatorname{Res}(f(z)\,;\,i) \;=\; \pi\,\log(2i) \;=\; \pi\,\log 2 \;+\; i\,\frac{\pi^2}{2} \tag{3}$$

(c). Para $x\in[-R,R]$ tenemos

$$\operatorname{Re} f(x) \;=\; \frac{\log|\,x+i\,|}{1+x^2} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}$$

de donde deducimos que

$$\operatorname{Re}\int_{\sigma_R} f(z)\,dz \;=\; \operatorname{Re}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \;=\; \int_{-R}^{R}\operatorname{Re} f(x)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$$

Por tanto, igualando las partes reales de los dos miembros de (3), obtenemos

$$\pi\,\log 2 \;=\; \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx \;+\; \operatorname{Re}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz \tag{4}$$

igualdad que es válida para todo $R\in\mathbb{R}$ con $R>1$.

(d). Para $z\in\gamma_R^*$ se tiene $1\;\leq\;|\,z+i\,|\;\leq\;R+1$ luego $0\;\leq\;\log|\,z+i\,|\;\leq\;\log(R+1)$, de donde

$$|\,\log(z+i)\,|\;\leq\;\big|\,\log|\,z+i\,|\,\big|\;+\;|\arg(z+i)\,|\;\leq\;\log(R+1)\;+\;\pi$$

mientras que $|\,1+z^2\,|\;\geq\;|\,z\,|^2\;-\;1\;=\;R^2-1$. Esto prueba que

$$|\,f(z)\,|\;\leq\;\frac{\log(R+1)\;+\;\pi}{R^2-1}\qquad\forall\,z\in\gamma_R^*$$

y deducimos que

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right|\;\leq\;\pi\,R\,\frac{\log(R+1)\;+\;\pi}{R^2-1}$$

desigualdad que también es válida para todo $R\in\mathbb{R}$ con $R>1$. Usando la escala de infinitos tenemos

$$\lim_{R\to+\infty}\pi\,R\,\frac{\log(R+1)\;+\;\pi}{R^2-1}\;=\;\lim_{R\to+\infty}\left(\frac{\pi\,R}{R-1}\,\frac{\log(R+1)}{R+1}\;+\;\frac{\pi^2\,R}{R^2-1}\right)\;=\;0$$

de donde deducimos que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\;=\;0$$

y usando (4) concluimos claramente que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx\;=\;\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx\;=\;2\,\pi\,\log 2 \qquad\blacksquare$$

3. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y supongamos que f diverge en 0 y en ∞. Probar que f se anula en algún punto de $\mathbb{C}^*$.

Solución

Supongamos por el contrario que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$ y consideremos la función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}^* \quad \text{y} \quad g(0) = 0$$

Es claro que $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y, usando que f diverge en el origen, tenemos claramente

$$\lim_{z \to 0} g(z) \;=\; \lim_{z \to 0} \frac{1}{f(z)} \;=\; 0 \;=\; g(0)$$

luego g es continua en 0. Como consecuencia del teorema de extensión de Riemann tenemos $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Pero además, usando que f diverge en ∞ deducimos que

$$\lim_{z \to \infty} g(z) \;=\; \lim_{z \to \infty} \frac{1}{f(z)} \;=\; 0$$

Esto implica que existe $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $|g(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,R)$. Pero por continuidad, g también está acotada en el compacto $\overline{D}(0,R)$. Así pues, g es una función entera y acotada luego, por el teorema de Liouville, g es constante. Como $g(0) = 0$, deducimos que $g(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, lo cual es una flagrante contradicción, pues de hecho $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Esto prueba que f ha de anularse en algún punto de $\mathbb{C}^*$, como queríamos. ■

4. Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, se tiene

$$f'(1/n)\, g(1/n) \,-\, f(1/n)\, g'(1/n) \;=\; 0$$

¿Qué se puede afirmar sobre f y g?

Solución

La función $f'\,g - f\,g'$ es holomorfa en el dominio $D(0,1)$ y se anula en el conjunto $A = \{1/n : n \in \mathbb{N},\, n \geq 2\}$, que evidentemente verifica $A' \cap \Omega = \{0\} \neq \emptyset$. Por el principio de identidad tenemos

$$f'(z)\, g(z) \,-\, f(z)\, g'(z) \;=\; 0 \qquad \forall\, z \in D(0,1) \tag{5}$$

Si g es idénticamente nula, la igualdad anterior se cumple automáticamente y no nos permite afirmar nada sobre f. En otro caso, fijamos $a \in D(0,1)$ tal que $g(a) \neq 0$. Por ser g continua en a podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset D(0,1)$ y $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,\delta)$.

Definimos entonces

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \qquad \forall\, z \in D(a,\delta)$$

y tenemos obviamente que $h \in \mathcal{H}\big(D(a,\delta)\big)$ con

$$h'(z) = \frac{f'(z)\,g(z) - f(z)\,g'(z)}{g(z)^2} = 0 \qquad \forall\, z \in D(a,\delta)$$

Por tanto h es constante, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \lambda\, g(z)$ para todo $z \in D(a,\delta)$. Entonces, podemos aplicar el principio de identidad a las funciones f y $\lambda\, g$, que son holomorfas en el dominio $D(0,1)$ y coinciden en el conjunto $D(a,\delta)$, que obviamente tiene puntos de acumulación en $D(0,1)$. Concluimos que

$$f(z) = \lambda\, g(z) \qquad \forall\, z \in D(0,1) \tag{6}$$

En resumen, podemos afirmar que, o bien g es idénticamente nula, o bien existe una constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que se verifica (6). Recíprocamente, en ambos casos es obvio que se verifica (5), luego nada más se puede afirmar sobre f y g. ∎