ASRR

Tema 8: Equivalencia entre analiticidad y holomorfía

$f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad \forall z \in D(a,r)$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$$

1.- Desarrollo en serie de Taylor

- **Teorema** (Desar. en serie de T.)

Si $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow f$ analítica en Ω. En particular, f indef deriv en Ω

Además:

i) $\Omega = \mathbb{C} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{C}$ $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ radio de conv. inf $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$

ii) Si $\Omega \neq \mathbb{C} \Rightarrow \forall a \in \Omega$ con $R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ radio $\geq R_a \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ $\forall z \in D(a, R_a)$

2.- Fórmula de Cauchy para las derivadas

- **Fórmula**: sea $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dado $a \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}^+$ tq $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Se tiene

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw \quad \forall z \in D(a,r) \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$\hookrightarrow$ calcular int. $\Rightarrow \int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z^5}\, dz = \frac{2\pi i}{4!} \cos^{(4)}(0) = \frac{\pi i}{12}$

3.- Teorema de extensión de Riemann

- **Teorema**: sea $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Son equivalentes

i) $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq $g(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ $\rightarrow \exists$ extensión de f

ii) f tiene límite en z_0

iii) $\exists \delta, M > 0$ tq $|f(z)| < M$ $\forall z \in \Omega$ tq $|z - z_0| < \delta$

iv) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$

$\hookrightarrow$ Si $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ y continua en $z_0 \Rightarrow f \in \mathcal{H}(\Omega)$