ASRR

Resumen T2: Derivación

Derivación numérica

Objetivo: $f^{(k)}(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(f)$

coef → α_i, nodos → x_i, error → $R(f)$

Métodos para encontrar coefs

Nodos $= \{x_0, \dots, x_n\}$

1- Deriv. Polinomios Lagrange

Polin. Fund. Lagrange: $\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \Rightarrow \alpha_i = \ell_i'(a)$

2- Imponiendo exactitud a $\{1, x, \dots, x^n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a \\ 3a^2 \\ \vdots \\ na^{n-1} \end{pmatrix}$$

↳ matriz de Vandermonde $\Rightarrow$ nodos distintos $\Leftrightarrow \exists!$ solución

3. Combinando desarrollos de Taylor

Siendo $h_i = x_i - a$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ h_0 & h_1 \cdots & h_n \\ \vdots & & \vdots \\ h_0^k & h_1^k \cdots & h_n^k \\ h_0^n & h_1^n \cdots & h_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k! \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Encontrar el error

Si $p(x)$ es el interpolante de $f(x)$ en $\{x_0, \dots, x_n\}$

$$E(x) = f(x) - p(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]\,\pi(x) \qquad \pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

↳ dif. dividida

$$R(f) = E'(a) = \frac{f^{(n+2)}(\mu_1)}{(n+2)!}\pi(a) + \frac{f^{(n+1)}(\mu_2)}{(n+1)!}\pi'(a) \qquad \min\{x_0, \dots, x_n, a\} \le \mu_1, \mu_2 \le \max\{x_0, \dots, x_n, a\}$$

$$R(f) = E'(a) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, a, a]\,\pi(a) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, a]\,\pi'(a)$$

Fórmula habitual

- Dos nodos: $f'(a) \approx f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ $\quad R(f) = \frac{f'''(\mu_1)}{3!}(a - x_0)(a - x_1) + \frac{f''(\mu_2)}{2!}(2a - x_0 - x_1)$

- Dif. Progresiva: $f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\nu)}{2}h$

- Dif. Regresiva: $f'(a) = \frac{f(a) - f(a-h)}{h} + \frac{f''(\nu)}{2}h$

- Dif. Centrada: $f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{f'''(\nu)}{3!}h^2 \Rightarrow$ Exactitud $= 2$

- Dif. Centrada 3 nodos: $f''(a) = \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2} - \frac{f^{iv}(\nu)}{4!}h^2 \Rightarrow$ Exactitud $= 3$

Teorema Ninguna con n nodos para $f^{(k)}$ puede ser exacta en $\mathbb{P}_{n+k+1}$ $\nearrow$ $n+k =$ máx exactitud