ASRR MNII

Tema 1. Resolución de Ecuaciones

• Mult. de Raíces: s raíz con mult $m \geq 1$ de f si $\exists\, g(x)$ continua en entorno de s tq

$$f(x) = (x-s)^m g(x) \quad \text{con} \quad g(s) \neq 0$$

Si f suf deriv.

$$f(s) = f'(s) = \dots = f^{(m-1)}(s) = 0 \,, \quad f^{(m)}(s) \neq 0$$

· Orden de convergencia: $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ positivos tendrán orden de convergencia $p \geq 1$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = C_1 \quad \text{con} \quad \{\varepsilon_n\} \to 0$$

Si $\{x_n\} \to s$, converge con orden $p \geq 1$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-s|}{|x_n - s|^p} = C_1 \overset{def}{=} \text{cte. asintótica del error}$$

Métodos Elementales

• Bisección → Tª de Bolzano: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a)f(b)<0$ Entonces $\exists\, s \in]a,b[$ tq $f(s)=0$

→ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad m_n = \frac{a_n+b_n}{2} \Rightarrow$ Si $f(m_n) = 0 \Rightarrow s = m_n$

Si $f(a_n)f(m_n) < 0 \Rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, m_n]$

Si $f(b_n)f(m_n) < 0 \Rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] = [m_n, b_n]$

→ Propiedades

1- $\{m_n\} \longrightarrow s \in]a,b[$

2- $\{e_n = m_n - s\}_{n\geq 0}$ cumple $|e_n| < \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$

3- Orden al menos lineal, $p \geq 1$ con $C = 1/2$ — 3 iter ≃ 1 decimal

• Método de Newton-Raphson

$$\begin{cases} x_0 = \text{semilla} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \quad n = 0, 1 \dots$$

→ Deducciones:

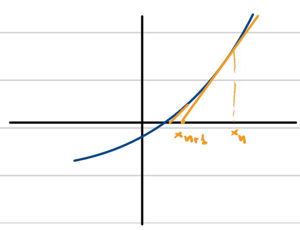
· Analítica: Si f sufic. deriv con continuidad $\Rightarrow$ Desarrollo de Taylor en x_n: $\quad f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \text{Error}$

Si $x \simeq x_n \Rightarrow \text{Error} \simeq 0 \Rightarrow f(x) \simeq f(x_n) + f'(x_n)(x-x_n)$

Solución $f(x) = 0 \Rightarrow f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \simeq 0$

$$x_{n+1} = x \simeq x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

· Geométrica:



Convergencia Global de NR

Dada $f \in C^2([a,b])$ cumpliendo

1- $f(a)f(b)<0$

2- $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

3- $f''(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$

4- $\max\left\{\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\} \leq b-a$

o

4-alt- $f(x_0)f''(x_0)>0 \overset{*}{\Longrightarrow}$ Entonces vale para ese x_0, si $\forall x_0 \in [a,b]$ entonces $= 4-$

Entonces:

1.- $\exists!\, s \in]a,b[$ tq $f(s)=0$

2- El método de NR converge a s $\forall x_0 \in [a,b]^*$

3.- Orden de convergencia $p \geq 2$

Convergencia local

Dado $f \in C^2(\mathcal{I})$ con $\mathcal{I}$ entorno abierto de s tq $f(s)=0$ con $f'(s) \neq 0$, entonces $\exists\, \mathcal{I}_\varepsilon =]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\subset \mathcal{I}$ donde el método de NR converge a s $\forall x_0 \in \mathcal{I}_\varepsilon$

Raíces múltiples: Convergencia local

Dada $f \in C^2(\mathcal{I})$ con $\mathcal{I}$ ent. abierto de s solución con mult. $m \geq 1$. Entonces $\exists\, \mathcal{I}_\varepsilon =]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\subset \mathcal{I}$ donde el método de NR converge a s con orden lineal y $q = 1 - 1/m$

→ Recuperar orden cuadrático:

→ $x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mult

→ $\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow h(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)}$

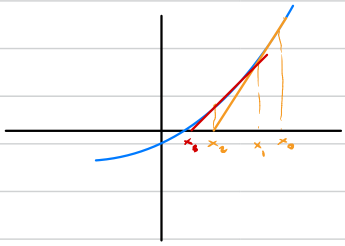
$x_{n+1} = h(x_n)$

• **Secante** →

$$\begin{cases} x_0, x_1 = \text{semillas} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{cases}$$

→ Deducciones: Analítica: igual que NR pero con $f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

Geométrica:



Convergencia local

Dada $f \in C^2(\mathcal{I})$ con $\mathcal{I}$ entorno abierto de s solución simple. Entonces $\exists\, \mathcal{I}_\varepsilon =]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\subset \mathcal{I}$ donde el método de la Secante converge a s con orden $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\forall x_0 \in \mathcal{I}_\varepsilon$

Métodos de Iteración funcional

Se centra en $f(x)=0 \iff x=g(x)$, de forma que $s=g(s) \iff f(s)=0$ para aplicar Tª Punto Fijo de Banach.

- Función contráctil: $|g'(x)| \leq \alpha \quad \forall x \in [a,b]$

  $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ tq $|g(x)-g(y)| \leq \alpha |x-y| \quad \forall x,y \in [a,b]$ será Lipschitziana.

  Si α es el ínfimo de las cte que lo cumplen $\Rightarrow$ Cte. Lipschitziana.

  Si $\alpha < 1 \Rightarrow g$ contractiva y α cte. de contractibilidad.

- Tª del Punto Fijo

  Sea $g:[a,b] \to \underline{[a,b]}$ contráctil con cte. α. Entonces:

  1.- $\exists! \, s \in [a,b]$ pto fijo de g

  2.- $\{x_n\} \to s$ con $x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall x_0 \in [a,b]$

  3.- Los errores $e_n = x_n - s$ cumple $|e_n| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} |x_1 - x_0|$

  → Convergencia local

  Sea $g \in C^1(I)$ siendo I int. abierto de s pto fijo de g tq $|g'(s)|<1$. Entonces $\exists I_\varepsilon \subset I$ tq $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a s $\forall x_0 \in I_\varepsilon$

Orden de convergencia

Sea $s = g(s)$ con $g \in C^p(I)$ y $g'(s) = \ldots = g^{(p-1)}(s) = 0$ $g^{(p)}(s) \neq 0$. Entonces el método $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a s con orden p y $C = \dfrac{1}{p!} |g^{(p)}(s)|$

Aceleración de Aitken

$\{x_n\} \to s$ con $p \geq 1 \Rightarrow \{\hat{x}_n\} \to s$ con $\hat{p} \geq p$

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \Rightarrow \Delta^2 x_n = \Delta(x_{n+1} - x_n)$
$= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$

Aceleración de Steffensen

Sea $x = g(x) \Rightarrow x_{n+1} = g(x_n)$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \\ x_1 = g(x_0) \\ x_2 = g(x_1) \end{array}\right\} \longrightarrow x_0' = x_0 - \frac{(\Delta x_0)^2}{\Delta^2 x_0}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0' \\ x_1' = g(x_0') \\ x_2' = g(x_1') \end{array}\right\} \longrightarrow x_0'' = x_0' - \frac{(\Delta x_0')^2}{\Delta^2 x_0'}$$

$$\{x_0^{(n)}\} \to s \text{ con } \tilde{p} \geq \hat{p}$$

Ecuaciones polinómicas

Teorema. Sea $P(x) = \alpha_k x^k + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Entonces $\forall s$ $P(s) = 0 \Rightarrow |s| \le 1 + \alpha$ con $\alpha = \max_{0 \le i < k} \left|\frac{\alpha_i}{\alpha_k}\right|$

Sucesión de Sturm $\{f_0, \dots, f_m\} \subset C[a,b]$ suc. de Sturm en $[a,b]$ si $\forall x \in [a,b]$:

1. $f_0 \in C_1[a,b]$
2. $f_0(x) = 0 \Rightarrow f_0'(x) f_1(x) > 0$
3. $f_j(x) = 0 \Rightarrow f_{j-1}(x) f_{j+1}(x) < 0$
4. $f_m(x) \neq 0$

Teorema. Si $\{f_0, f_1, \dots f_m\}$ de Sturm en $[a,b]$. Entonces el nº de raíces de f_0 en $[a,b]$ es la dif entre los cambios de signo que hay entre $\{f_0(a), f_1(a) \dots f_m(a)\}$ y $\{f_0(b), \dots f_m(b)\}$

Obtener una suc. de Sturm para un polinomio

Sea $P(x) \Rightarrow$
$$f_0 = P$$
$$f_1 = P'$$
$$f_{j-2} = q_{j-1} f_{j-1} - f_j$$ coges el resto de dividir $\frac{f_{j-2}}{f_{j-1}}$ cambiado de signo!!
$$f_m = \text{últ. resto no nulo}$$
Si f_m no cte $\Rightarrow \{f_0/f_m, f_1/f_m \dots f_m/f_m\}$

Algoritmo de Horner

Sea $P(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ y queremos $P(t)$. $P(x) = (x-t)Q(x) + b_0$ con $Q(x) = b_k x^{k-1} + \dots + b_2 x + b_1$

$$b_k = a_k$$ ← Ruffini
$$b_j = a_j + t b_{j+1}$$

De forma que $P(t) = b_0$
$$P'(t) = Q(t)$$

Métodos para Sist. Ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, \dots x_k) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x_1, \dots x_k) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow F(X) = 0 \text{ con } F: D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$
$D = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$

· Iteración funcional

$F(X) = 0 \Rightarrow G(X) = X$

Conv. Global

$G: D \to D$!! con $\|G(X) - G(Y)\| \le \alpha \|X - Y\|$ con $0 \le \alpha < 1$

$\|G'(X)\| \le \alpha$ o $\left|\frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}\right| \le \alpha/k \;\; \forall i,j$

Entonces
1. $\exists! s \in D$ tq $G(s) = s$
2. $\{X_n\} \to s$ $\forall X_0 \in D$
3. $\|E_n\| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|X_1 - X_0\|$

Conv. Local

Sea $\mathcal{I}$ entorno de $S = G(S)$ con $G \in C^1(\mathcal{I})$ y $\|G'(S)\| < 1$

Entonces $\exists \mathcal{I}_\varepsilon \subset \mathcal{I}$ donde $\{X_n\} \to S$ $\forall X_0 \in \mathcal{I}_\varepsilon$

· Newton - Raphson

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X_{n+1} = X_n - J_n^{-1} F(X_n)} \quad \text{con} \quad J_n = J(X_n)$$

Esto vale si $\det(J(X)) \neq 0 \ \forall X \in D$

Teorema Conv. Local

$F(X) = 0$ con $F \in C^2(\mathcal{I})$ siendo $\mathcal{I}$ entorno de S con $\det(J(F)|_{X=S}) \neq 0$

Entonces $\exists \mathcal{I}_\varepsilon \subseteq \mathcal{I}$ donde $\{X_n\} \to S$ $\forall X_0 \in \mathcal{I}_\varepsilon$