VC-2015-feb-sol.pdf

Variable Compleja I (Febrero 2015)

Soluciones a los ejercicios del examen

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f_n(z) = \int_0^n \sqrt{t}\, e^{-t\,z}\, dt \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

a) Probar que f_n es una función entera y calcular su desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen.

b) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ en el semiplano de la derecha $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

c) Deducir que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde $f(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-t\,z}\, dt$ para todo $z \in \Omega$.

Solución.

a). Fijado $n \in \mathbb{N}$, para probar que f_n es una función entera se puede aplicar el teorema de holomorfía de la integral dependiente de un parámetro, considerando la cadena $\Gamma = [0, n]$ y la función $\Phi : \Gamma^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(t, z) = \sqrt{t}\, e^{-tz} \qquad \forall\, (t, z) \in \Gamma^* \times \mathbb{C}$$

Claramente Φ es continua y, para todo $t \in \Gamma^*$, la función $\Phi_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi_t(z) = \Phi(t, z) = \sqrt{t}\, e^{-t\,z} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

es una función entera, luego el mencionado teorema nos dice que f_n también es entera. No obstante, puesto que vamos a expresar f_n como suma de una serie de potencias que converge en todo el plano, eso también probará que f_n es entera.

Fijado $z \in \mathbb{C}$, para todo $t \in [0, n]$ tenemos obviamente

$$\sqrt{t}\, e^{-t\,z} = \sqrt{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t\,z)^k}{k\,!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\,!} \sqrt{t}\; t^k\, z^k \tag{1}$$

y vamos a probar que esta serie converge uniformemente en el intervalo $[0, n]$. Para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y todo $t \in [0, n]$ se tiene claramente

$$\left| \frac{(-1)^k}{k\,!} \sqrt{t}\; t^k\, z^k \right| \leq \sqrt{n}\, \frac{\big(n\,|\,z\,|\big)^k}{k\,!}$$

Teniendo presente que tanto $n \in \mathbb{N}$ como $z \in \mathbb{C}$ están fijos, la serie $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \sqrt{n} \frac{\big(n\,|\,z\,|\big)^k}{k\,!}$ es convergente, de hecho su suma es $\sqrt{n}\, e^{\,n\,|\,z\,|}$.

Por tanto, el test de Weierstrass nos dice que la serie que aparece en (1) converge uniformemente en el intervalo $[0,n]$. Aplicando entonces la continuidad de la integral de Cauchy, tenemos

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\int_0^n \sqrt{t}\, t^k \, dt \right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\,(-1)^k \sqrt{n}\, n^{k+1}}{k!\,(2k+3)}\, z^k \qquad (2)$$

y en particular, la última serie converge en el punto z que habíamos fijado. Como $z \in \mathbb{C}$ era arbitrario, la serie de potencias que aparece en (2) tiene radio de convergencia infinito y su suma coincide con la función f_n en todo el plano. Esto prueba que f_n es una función entera y (2) nos da su desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen.

b). Si B un subconjunto no vacío de Ω tal que $\inf\{\operatorname{Re} z : z \in B\} = \alpha > 0$, probaremos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en B. Para ello escribimos la sucesión $\{f_n\}$ en forma de serie:

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} (f_k - f_{k-1}) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

donde se entiende que f_0 es idénticamente nula. Para todo $z \in B$ y todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene entonces

$$\begin{aligned} |\, f_k(z) - f_{k-1}(z)\,| &= \left| \int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\, e^{-k\,t}\, dt \right| \le \int_{k-1}^{k} \left| \sqrt{t}\, e^{-t\,z} \right| dt \le \sqrt{k} \int_{k-1}^{k} e^{-t \operatorname{Re} z}\, dt \\ &\le \sqrt{k} \int_{k-1}^{k} e^{-\alpha\, t}\, dt = \frac{\sqrt{k}}{\alpha} \left(e^{-\alpha(k-1)} - e^{-\alpha\, k} \right) = \frac{(e^{\alpha} - 1)}{\alpha} \sqrt{k}\, e^{-\alpha\, k} = M_k \end{aligned}$$

donde M_k se define por la última igualdad. La serie $\sum_{k \ge 1} M_k$ es convergente, ya que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{M_{k+1}}{M_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k+1}{k}}\, e^{-\alpha} = e^{-\alpha} < 1$$

y basta aplicar el criterio del cociente. Por el test de Weierstrass, la serie $\sum_{k\ge 1} (f_k - f_{k-1})$ converge uniformemente en B, es decir, $\{f_n\}$ converge uniformemente en B.

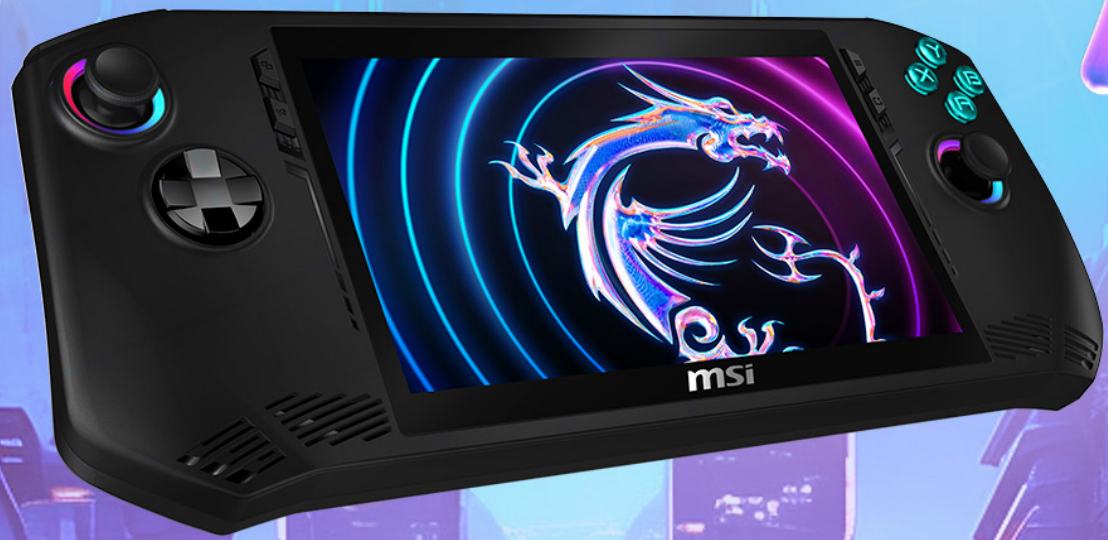
Si ahora K es compacto y $K \subset \Omega$, tenemos claramente $\min\{\operatorname{Re} z : z \in K\} > 0$ y podemos usar lo anterior con $B = K$. Por tanto, $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω y, en particular, converge puntualmente en Ω.

(c) Sabemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente en Ω, y tenemos claramente

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \sqrt{t}\, e^{-t\,z}\, dt = \int_0^{\infty} \sqrt{t}\, e^{-t\,z}\, dt = f(z) \qquad \forall\, z \in \Omega$$

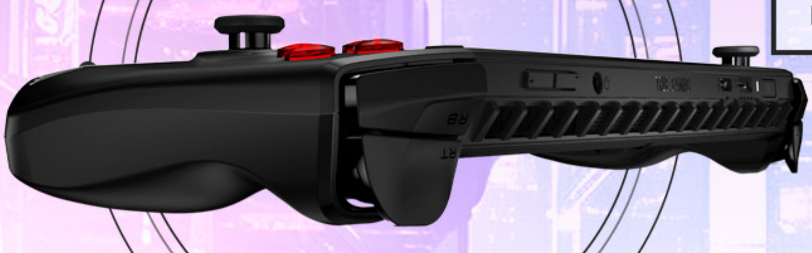
Como f_n es holomorfa en Ω para todo $n \in \mathbb{N}$, y hemos visto que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en cada subconjunto compacto de Ω, el teorema de convergencia de Weierstrass nos asegura que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, como queríamos.

msi



CLAW A1M

Para jugársela tanto como tú estudiando el día de antes.



La MSI Claw A1M redefine el gaming portátil con su procesador Intel Core Ultra y tecnología XeSS para un rendimiento AAA, junto con diseño ergonómico, refrigeración avanzada, iluminación RGB personalizable, y la capacidad de conectar a una pantalla de sobremesa a través de Thunderbolt 4.

COMPRAR AHORA

2. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \varepsilon < |\,z\,| < R\,, \;\; 0 < \arg z < \pi/2\}$, con $0 < \varepsilon < 1 < R$, evaluar la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log\, x}{1\,+\,x^4}\,dx$$

Solución.

Consideramos el abierto $\Omega \,=\, \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y el conjunto finito S formado por la raíces cuartas de -1 es decir, tomando $\alpha \,=\, e^{i\,\pi/4}$, se tiene $S \,=\, \{\alpha\,,\, i\,\alpha\,,\, -\alpha\,,\, -i\,\alpha\}$. Es claro que $S' \,\cap\, \Omega \,=\, \emptyset$. Como el logaritmo principal es una función holomorfa en Ω, la función $f : \Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) \,=\, \frac{\log\, z}{1 + z^4} \qquad \forall\, z \in \Omega \setminus S$$

es holomorfa en $\Omega \setminus S$.

Para $0 < \varepsilon < 1 < R$ usamos el camino cerrado $\Gamma \,=\, \sigma_1 \,+\, \gamma_R \,-\, \sigma_2 \,-\, \gamma_\varepsilon$, donde

$$\begin{array}{lll} \sigma_1(x) \,=\, x\,, & \sigma_2(x) \,=\, i\,x & \forall\, x \in [\varepsilon, R] \\ \gamma_R(t) \,=\, R\,e^{it}\,, & \gamma_\varepsilon(t) \,=\, \varepsilon\,e^{it} & \forall\, t \in [0, \pi/2] \end{array}$$

Es claro que $\Gamma^* \subset \Omega \setminus S$ y que Γ es un ciclo nul-homólogo con respecto Ω, pues de hecho Ω es homológicamente conexo. Por último se tiene claramente

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 1 \quad \text{ y } \quad \operatorname{Ind}_\Gamma(i\,\alpha) = \operatorname{Ind}_\Gamma(-\alpha) = \operatorname{Ind}_\Gamma(-i\,\alpha) = 0$$

Por tanto, el teorema de los residuos nos dice que

$$I \,=\, \int_\Gamma f(z)\,dz \,=\, 2\,\pi\,i\operatorname{Res}\big(\,f(z)\,,\,\alpha\,\big)$$

Para calcular el residuo, se tiene claramente

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\,f(z) \,&=\, \lim_{z\to\alpha}\frac{(z-\alpha)\,\log\, z}{1+z^4} \,=\, \lim_{z\to\alpha}\frac{\log\, z}{(z+\alpha)(z-i\alpha)(z+i\alpha)} \\ &=\, \frac{\log\, \alpha}{2\,\alpha^3\,(1-i)(1+i)} \,=\, \frac{i\,\pi/4}{4\,\alpha^3} \,=\, \frac{\pi}{16\,\alpha} \neq 0 \end{aligned}$$

donde también se podría haber aplicado la regla de L'Hôpital. Así pues, f tiene un polo simple en el punto α y acabamos de calcular el residuo, luego podemos escribir

$$I \,=\, 2\,\pi\,i\,\frac{\pi}{16\,\alpha} \,=\, \frac{\pi^2\,\alpha}{8}$$

Denotaremos por $I_1, I_R, I_2, I_\varepsilon$ a las integrales de f sobre los arcos $\sigma_1, \gamma_R, \sigma_2, \gamma_\varepsilon$ respectivamente, y vamos a trabajar por separado con cada una de estas integrales La que en principio no interesa es

$$I_1 \,=\, \int_{\sigma_1} f(z)\,dz \,=\, \int_\varepsilon^R \frac{\log\, x}{1+x^4}\,dx$$

Por otra parte, tenemos

$$I_2 = \int_{\sigma_2} f(z)\, dz = \int_\varepsilon^R \frac{\log(i\,x)}{1+x^4}\, i\, dx = i \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{1+x^4}\, dx - \frac{\pi}{2}\int_\varepsilon^R \frac{dx}{1+x^4}$$

y observamos que la parte imaginaria de I_2 también es la integral real que nos interesa. Claramente, en la igualdad $I = I_1 - I_2 + I_R - I_\varepsilon$, conviene igualar las partes imaginarias de ambos miembros, obteniendo

$$\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} = \operatorname{Im}(I) = -\int_\varepsilon^R \frac{\log x}{1+x^4}\, dx + \operatorname{Im} I_R - \operatorname{Im} I_\varepsilon$$

Concluimos por tanto que

$$\left| \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} + \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{1+x^4}\, dx \right| \leq |\, I_R\,| + |\, I_\varepsilon\,| \tag{3}$$

Trabajamos ahora con las integrales I_R e I_ε. Para $z \in \gamma_R^*$ tenemos $|\,z\,| = R > 1$ y $0 \leq \arg z \leq \pi/2$, de donde

$$|\log z| \leq \log R + (\pi/2) \qquad \text{y} \qquad |1+z^4| \geq R^4 - 1 > 0$$

Deducimos que

$$|\, I_R\,| \leq \frac{\pi R}{2}\left(\frac{\log R + (\pi/2)}{R^4-1}\right), \qquad \text{luego} \quad \lim_{R\to+\infty} I_R = 0 \tag{4}$$

Por otra parte, para $z \in \gamma_\varepsilon^*$ tenemos $|\,z\,| = \varepsilon < 1$ y también $0 \leq \arg z \leq \pi/2$ de donde

$$|\log z| \leq (\pi/2) - \log \varepsilon \qquad \text{y} \qquad |1+z^4| \geq 1 - \varepsilon^4 > 0$$

Deducimos que

$$|\, I_\varepsilon\,| \leq \frac{\pi\,\varepsilon}{2}\,\frac{(\pi/2) - \log\varepsilon}{1-\varepsilon^4}, \qquad \text{luego} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = 0 \tag{5}$$

En vista de (3), (4) y (5), concluimos finalmente que

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^4}\, dx = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$$

3. Sean f y g funciones enteras verificando que

$$|f(z)| \leq |g(z)| \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

¿Qué se puede afirmar sobre f y g?

Solución.

Suponiendo que g no es idénticamente nula, el principio de identidad nos dice que el conjunto $A = \{a \in \mathbb{C} : g(a) = 0\}$ verifica que $A' = \emptyset$. Entonces $\mathbb{C} \setminus A$ es abierto, y consideramos la función $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$ definida por

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus A$$

que por hipótesis verifica

$$|h(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus A$$

Fijado $a \in A$, como a es punto aislado de A, podemos tomar $\rho_a \in \mathbb{R}^+$ de forma que $D(a, \rho_a) \cap A = \{a\}$. La restricción de h a $D(a, r_a) \setminus \{a\}$ es una función holomorfa y acotada, luego el teorema de extensión de Riemann nos dice que existe una única función $h_a \in \mathcal{H}\big(D(a, \rho_a)\big)$ tal que

$$h_a(z) = h(z) \qquad \forall z \in D(a, \rho_a) \setminus \{a\}$$

Como lo anterior es válido para todo $a \in A$, podemos definir $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ escribiendo

$$\varphi(z) = h(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus A \quad \text{y} \quad \varphi(a) = h_a(a) \quad \forall z \in A$$

En el caso $A = \emptyset$, lo anterior no es necesario, tomamos directamente $\varphi = h$.

Como la restricción de φ al abierto $\mathbb{C} \setminus A$ coincide con h, el carácter local de la derivada nos dice que φ es derivable en todo punto de $\mathbb{C} \setminus A$. Pero además, fijado $a \in A$, la restricción de φ al disco abierto $D(a, \rho_a)$ coincide con h_a, luego φ también es derivable en el punto a. Así pues, φ es una función entera.

Para $z \in \mathbb{C} \setminus A$ tenemos $|\varphi(z)| = |h(z)| \leq 1$. Pero, para $a \in A$ también tenemos

$$|\varphi(a)| = |h_a(a)| = \lim_{z \to a} |h(z)| \leq 1$$

luego $|\varphi(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville, φ es constante, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi(z) = \lambda$ para todo $z \in \mathbb{C}$, y obviamente será $|\lambda| \leq 1$. Para $z \in \mathbb{C} \setminus A$ se tiene entonces $f(z) = h((z)\, g(z) = \lambda\, g(z)$, igualdad que es evidente para todo $a \in A$, pues entonces $g(a) = 0$, luego también $f(a) = 0$. Finalmente, esta igualdad también es obvia, con $\lambda = 1$ por ejemplo, cuando g es idénticamente nula, pues entonces f también lo es.

En resumen, podemos afirmar que

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1 \quad \text{y} \quad f(z) = \lambda\, g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{6}$$

Recíprocamente, si se cumple (6), se tiene obviamente $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, luego no se puede afirmar nada más.

4. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\setminus\{0\}\big)$ una función que diverge en el origen. Probar que la imagen de f contiene un conjunto de la forma $\{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |\,z\,| \,>\, \rho \,\}$ con $\rho \in \mathbb{R}^+$.

Solución.

Puesto que f diverge en el origen, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$, con $\delta \leq 1$, tal que

$$|\, f(z)\,| \,>\, 1 \quad \forall\, z \in D(0,\delta) \setminus \{0\}$$

Además, tenemos claramente

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{f(z)} \,=\, 0$$

Definiendo entonces $g : D(0,\delta) \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \forall\, z \in D(0,\delta) \setminus \{0\} \quad \text{ y } \quad g(0) = 0$$

obtenemos una función $g \in \mathcal{H}\big(D(0,\delta) \setminus \{0\}\big)$, que es continua en el origen. Por el teorema de extensión de Riemann, deducimos que $g \in \mathcal{H}\big(D(0,\delta)\big)$.

Puesto que $D(0,\delta)$ es un dominio y g no es constante, el teorema de la aplicación abierta nos dice que la imagen de g es un conjunto abierto y, en particular, $0 = g(0)$ es un punto interior a la imagen de g, es decir,

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; D(0,\varepsilon) \subset g\big(D(0,\delta)\big)$$

Bastará entonces tomar $\rho = 1/\varepsilon$.

En efecto, si $w \in \mathbb{C}$ verifica que $|\,w\,| > \rho$, tenemos $|\,1/w\,| < \varepsilon$, luego existe $z \in D(0,\delta)$ tal que $g(z) = 1/w$. Como $1/w \neq 0$ será también $z \neq 0$, así que

$$\frac{1}{w} \,=\, g(z) \,=\, \frac{1}{f(z)}, \quad \text{ es decir, } \quad w = f(z)$$

Esto prueba que el conjunto $\{w \in \mathbb{C} \,:\, |\,w\,| > \rho\}$ está contenido en la imagen de f como se pedía.