ASNR

Tema 3: Problemas de valores iniciales

1.- Introducción

Si $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $D = [a,b] \times \mathbb{R}$ y satisface

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq L|u-v| \quad \forall t \in [a,b] \qquad L \in \mathbb{R}^+$$

entonces $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = \mu \quad (t_0,\mu) \in D \end{cases}$ tiene una única solución $x(t)$ en $[a,b]$

2.- Métodos de discretización

- Generalidades

Básicamente

1.- Partición de $[a,b]$: $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$

Normalmente $h = \frac{b-a}{N} \Rightarrow t_{n+1} = t_n + h \Leftrightarrow t_n = a + n \cdot h$

2.- Obtener $\{x_n\}_{n=0}^N$ tq si $x(t)$ sol $\Rightarrow x(t_i) \simeq x_i$

- Clasificación de métodos

Método de K pasos: $\begin{cases} x_0, x_1, \dots x_{k-1} = \text{valores iniciales} \\ x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j x_{n+j} + h\Phi(x_{n+k}, x_{n+k-1}, \dots x_n; t_n, h) \end{cases}$ (1)

cumpliendo $\forall h < h_0$

$$f \equiv 0 \Rightarrow \Phi \equiv 0$$

$$|\Phi(u_0, \dots u_k; t, h) - \Phi(v_0, \dots v_k; t, h)| \leq M \sum_{j=0}^{k} |u_j - v_j|$$

Si la función Φ

- Depende de $x_{n+k} \Rightarrow$ Método implícito
- No depende de $x_{n+k} \Rightarrow$ Método explícito

- Errores
  - $\to$ de truncatura global: $e_n = x(t_n) - x_n$
  - $\to$ de truncatura local:

$$R_{n+k} = x(t_{n+k}) - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j x(t_{n+j}) - h\Phi(x(t_{n+k}), x(t_{n+k-1}), \dots, x(t_n); t_n, h)$$

- Método consistente: si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ t = a + nh}} \frac{R_{n+k}}{h} = 0$

- Primer polinomio característico de un método como (1)

$$p(\lambda) = \lambda^k - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \lambda^j$$

$\rightarrow$ cambiar x_{n+j} por λ^j

- Teorema: un método es consistente si y solo si

$$\begin{cases} p(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j = 1 \\ \Phi(x(t_n), \dots x(t_n); t_n, 0) = p'(1) f(t_n, x(t_n)) \end{cases}$$

- **Teorema** Método estable (0-estable) $\Leftrightarrow$ Raíces de $p(\lambda) \in B(0,1)$ y si raíz $\lambda = \pm 1$, entonces es simple

- **Teorema** Método convergente $\Leftrightarrow$ Consistente y estable

- Orden: método de orden $p \geq 1$ si $\forall f \in \mathcal{F}_p(D)$ — derivadas parciales continuas y acotadas en D hasta orden p

3.- Métodos de un paso

- Generalidades:
  - Mét. explícito: $x_0 = \mu,\ t_0 = a$
    $t_{n+1} = t_n + h$
    $x_{n+1} = x_n + h\Phi(x_n; t_n, h)$
  - Mét. implícito: $x_0 = \mu \quad t_0 = a$
    $t_{n+1} = t_n + h$
    $x_{n+1} = x_n + h\Phi(x_{n+1}, x_n; t_n, h)$
  - Error total: $e_n = x(t_n) - x_n$
  - Error local: $R_{n+1} = x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\Phi(x(t_n); t_n, h)$
  - Primer pol. caract. $p(\lambda) = \lambda - 1$
  - Carac. Consistencia: $p(1) = 0 \Rightarrow$ la cumple; $\Phi(x(t_n); t_n, 0) = f(t_n, x(t_n))$
  - Carac. Estabilidad: siempre es estable $(p(1) = 0)$
  - Carac. Convergencia: converge $\Leftrightarrow$ consistente
  - Orden: $p \geq 1$ si $\forall f \in \mathcal{F}_p(D)$:
    $R_{n+1} = x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\Phi(x(t_n); t_n, h) = O(h^{p+1})$

- **Notación**: $D^m_{\phi,\psi}\, g = \left(\phi \frac{\partial \cdot}{\partial t} + \psi \frac{\partial \cdot}{\partial x}\right)^m g = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \phi^{m-j} \psi^j \frac{\partial^m g}{\partial t^{m-j} \partial x^j}$

Con esto, el desarrollo de Taylor de $g(t,x)$ en (t,x) será

$$g(t+h, x+k) = g + D_{h,k}\, g + \tfrac{1}{2!} D^2_{h,k}\, g + \dots + \tfrac{1}{p!} D^p_{h,k}\, g + \text{Resto}$$

- Método de Euler: $\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \end{cases}$

  - Deducciones:
    a) Por int. numérica
    $$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s)ds \simeq hf(t_n, x(t_n))$$
    b) Por deriv. numérica
    $$x'(t_n) = f(t_n, x(t_n)) \simeq \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h}$$
    c) Geométrica: recta que pasa por (t_n, x_n) con pend. $f(t_n, x_n)$

  - Error: $R_{n+1} = \frac{h^2}{2} x''(t) + O(h^3)$ Orden $p=1$

- Método de Euler implícito $\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}) \end{cases}$ Deducciones análogas

  - Error: $R_{n+1} = -\frac{h^2}{2} x''(t) + O(h^3)$ Orden $p=1$

- Método de Euler mejorado $\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ x_{n+1} = x_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n)) \end{cases}$

  - Error: $R_{n+1} = \frac{h^3}{6} (\frac{1}{4} G + f_x F) + O(h^4)$ Orden $p=2$

    - $F = D_{1,f} f = \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x}$
    - $G = D^2_{1,f} f = (\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x})^2$

- Método de Euler modificado / Heun $\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_n + hf(t_n, x_n))) \end{cases}$

  - Error $R_{n+1} = \frac{h^3}{6} (-1/2\, G + f_x F) + O(h^4)$ Orden $p=2$

- Método de Taylor para método de orden p
$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2} x''(t) + \dots + \frac{h^p}{p!} x^{(p)}(t) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} x^{(p+1)}(\xi_t)$$
$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ x_{n+1} = x_n + hx'_n + \frac{h^2}{2} x''_n + \dots + \frac{h^p}{p!} x^{(p)}_n \end{cases} \longrightarrow x^{(r)}_n = f^{(r-1)}(t_n, x_n) \text{ ya que } x'(t) = f(t, x(t))$$

  - Orden $p=1 \Rightarrow$ Euler explícito
  - Orden $p=2 \Rightarrow \begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) + \frac{h^2}{2} F(t_n, x_n) \end{cases}$

- Métodos de Runge-Kutta de m evaluaciones $\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ x_{n+1} = x_n + h\sum_{j=1}^{m} b_j K_j(t_n, x_n) \end{cases}$
$$K_i(t,x) = f(t + c_i h, x + h\sum_{j=1}^{m} a_{ij} K_j(t,x)) \quad i = 1, \dots m$$

  - Arreglo de Butcher: método determinado por:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ c_2 & a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_m & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_m \end{array}$$

- Observación:
  - Implícito en general
  - $a_{ij}=0 \quad \forall i\le j \Rightarrow$ Explícito
  - $a_{ij}=0 \quad \forall i<j \Rightarrow$ Diag. implícito
  - Consistente $\Leftrightarrow b_1+\dots+b_m=1$
  - Tomaremos $c_i=a_{i1}+\dots+a_{im}$

  - Si es explícito $K_1=f(t,x) \quad K_i=f(t+c_ih,\ x+h\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}K_j)$

- De 2 evaluaciones: $x_{n+1}=x_n+h((1-\alpha)K_1+\alpha K_2)$

$$K_1=f(t_n,x_n)$$
$$K_2=f(t_n+\beta h,\ x_n+h\beta K_1)$$

  - Error: $R_{n+1}=h^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\beta\right)F+\frac{h^3}{6}\left((1-3\alpha\beta^2)G+f_xF\right)+O(h^4)$

Orden $p=2 \Leftrightarrow 1/2-\alpha\beta=0 \Rightarrow \alpha\beta=1/2$ → $\alpha=1\ \beta=1/2 \Rightarrow$ Euler mejorado
→ $\alpha=1/2\ \beta=1 \Rightarrow$ Heun

- De 4 evaluaciones
$$\begin{cases} t_{n+1}=t_n+h \\ x_{n+1}=x_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \end{cases}$$
$$K_1=f(t_n,x_n)$$
$$K_2=f(t_n+h/2,\ x_n+\tfrac{h}{2}K_1)$$
$$K_3=f(t_n+h/2,\ x_n+\tfrac{h}{2}K_2)$$
$$K_4=f(t_n+h,\ x_n+hK_3)$$

  - Error: $R_{n+1}(t)=\frac{h^4}{24}\left(x^{iv}-(H+f_xG+F(f_x^2+3f_{tx}+3ff_{xx}))\right)+O(h^5)$

Orden $p=4$

- Análisis de Errores
  - Acotación del error global: dado un método $\begin{cases} t_{n+1}=t_n+h \\ x_{n+1}=x_n+h\Phi(x_n,t_n,h) \end{cases}$ con Φ Lipschitziana respecto a x con cte. M, entonces:
    1. Convergente $\Leftrightarrow$ Consistente
    2. Si orden $p\ge 1 \Rightarrow$ Error global es $O(h^p)$, en concreto
$$|x(t)-x_n|\le Ch^p\frac{e^{M(b-a)}-1}{M}$$

  - Acotación del error global con error de redondeo

$$\tilde{x}_0=x_0+\delta_0$$
$$\tilde{x}_{n+1}=\tilde{x}_n+h\Phi(\tilde{x}_n,t_n,h)+\delta_n$$

En las condiciones anteriores con error de redondeo, si $|\delta_i|\le\delta\ \forall i$, entonces
$$|x(t)-\tilde{x}_n|\le\left(Ch^p+\frac{\delta}{h}\right)\frac{e^{M(b-a)}-1}{M}$$

  - Convergencia métodos clásicos: con $f\in\mathcal{F}_r(D)$ con r adecuado,
    - Euler convergen
    - Taylor de orden p convergen
    - Runge-Kutta explícitos de orden p convergen

• Control de tamaño de paso

- Estimar error local: $R_{n+1} \approx \frac{x_{n+1} - x_{n+1}^{(2h)}}{2(2^p-1)}$ para ver si conviene aumentar o disminuir el paso

- A-Estabilidad o est. numérica: si al aplicarlo a $\begin{cases} x' = \lambda x \\ x(0) = \mu \end{cases}$ con $R(\lambda) < 0$ tenemos $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \forall n \geq 0$

• Estudio: al aplicarlo a mét. de un paso $\Rightarrow x_{n+1} = Q(w)x_n$ con Q polinómica si explícito o racional si implícito. Luego método A-estable $\Leftrightarrow |Q(w)| < 1 \quad w \in \mathbb{C}$

• Región de A-estabilidad: $R_A = \{ w \in \mathbb{C} : |Q(w)| < 1 \}$

• Intervalo de A-estabilidad $R_A \cap \mathbb{R}_-$

• Redefinición: método estable $\Rightarrow R_A$ contiene a semiplano izq de $\mathbb{C}$

4.- Métodos multipaso lineal

• Definición: un método de k pasos es MML si se puede escribir
$$x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j x_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} \quad \text{con } f_i = f(t_i, x_i)$$

• Proposición: si $f(t,x)$ Lipschitziana con cte L y MML con $\beta_k \neq 0$ (implícito). Si $h < \frac{1}{|\beta_k| L}$ entonces el método es convergente

• Polinomios característicos: primero $p(\lambda) = \lambda^k - \alpha_{k-1}\lambda^{k-1} - \dots - \alpha_0$
segundo $q(\lambda) = \beta_k \lambda^k + \beta_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + \beta_0$

• Consistente si: $p(1) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j = 0$
$p'(1) = q(1) \Longrightarrow k - \sum_{j=1}^{k-1} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{k} \beta_j$

• Diseño de MML
consideramos $d_k(z(t), h) = z(t+kh) - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j z(t+jh) - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j z'(t+jh)$
con lo cual
$$R_{n+k} = d_k(x(t_n), h)$$
Orden $p \Leftrightarrow d_k(z(t), h) = O(h^{p+1})$

• Proposición: si z suf deriv. $d_k(z(t), h) = C_0 z(t) + C_1 z'(t)h + \dots + C_m z^{(m)}(t) h^m$
con $C_0 = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \quad C_1 = k - \sum_{j=1}^{k-1} j\alpha_j - \sum_{j=0}^{k} \beta_j$
$$C_m = \frac{k^m}{m!} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j^m}{m!}\alpha_j - \sum_{j=1}^{k} \frac{j^{m-1}}{(m-1)!}\beta_j$$

- **Teorema**: el MML es de orden $p \geq 1 \iff C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0$ y $C_{p+1} \neq 0$ (cte. princ. de error)

  $C_{p+1} h^{p+1} x^{(p+1)}(t_n) \equiv$ parte principal de error local

- **Teorema de Dahlquist**: el orden máx de un MML de k pasos convergente es $p = k+1$ si k impar
  $p = k+2$ si k par

- **MML basados en cuadraturas** $x_{n+k} = x_{n+k-q} + h\sum_{j=m}^{k-r} \beta_j f_{n+j}$ ($r=0 \Rightarrow$ implícito)

  $r \in \mathbb{N}_k$, $m + r \leq k$ $\quad q = k$ ó $m = 0$

  - **Tipo Adams**: $q = 1 \Rightarrow m = 0$

    $x_{n+k} = x_{n+k-1} + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \dots + \beta_{k-r} f_{n+k-r})$

    $C_0 = 0 \qquad C_1 = 1 - \sum_{j=0}^{k-r} \beta_j \qquad C_m = \frac{k^m - (k-1)^m}{m!} - \sum_{j=1}^{k-r} \frac{j^{m-1}}{(m-1)!}\beta_j$

    - **Mét. Adams-Bashforth** AB: $q=1$, $m=0$, $r=1$ con exactitud máxima (explícito)

      $x_{n+k} = x_{n+k-1} + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \dots + \beta_{k-1} f_{n+k-1})$

    - **Mét. Adams-Moulton** AM: $q=1$, $m=0$, $r=0$ con exactitud máxima (implícito)

      $x_{n+k} = x_{n+k-1} + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \dots + \beta_k f_{n+k})$

- **Métodos de Milne-Simpson** $q=2$ $m=0$ $r=0$

  $x_{n+k} = x_{n+k-2} + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \dots + \beta_k f_{n+k})$

- **Tipo Newton-Cotes**: $q = k$

  $x_{n+k} = x_n + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \dots + \beta_k f_{n+k})$

  - $m = r = 1 \Rightarrow$ Abiertos
  - $m = r = 0 \Rightarrow$ Cerrados

- **Predictor-Corrector**
  - Predictor P: $x^{(0)}_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* x_{n+j} + h\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j}$
  - Corrector C^m: (m = núm. de correcciones)

    $x^{(\nu)}_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j x_{n+j} + h\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} + \beta_k f(t_{n+k}, x^{(\nu-1)}_{n+k})$, $\nu = 1 \dots m$

  - **Orden**: sea método PC^m con orden p^* de P y p de C
    - $p^* + m > p \Rightarrow$ Orden p y cte princ. de error = a la de C
    - $p^* + m = p \Rightarrow$ Orden p y cte " " " $\neq$ a la de C
    - $p^* + m < p \Rightarrow$ Orden $p^* + m$