ASRR

Tema 14. Residuos

1- Residuos de una función en un punto

· Notación: sea $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$ y $f \in \mathcal{H}(D(a,R)\setminus\{a\})$ $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ $\forall z \in D(a,R)\setminus\{a\}$

$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\forall \rho \in]0,R[$

· Residuo: de f en a es

$$\operatorname{Res}(f(z),a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} f(w)\,dw \quad \forall \rho \in]0,R[$$

→ Si a pto regular de $f \Rightarrow \operatorname{Res}(f(z),a)=0$

2- Teorema de los residuos

· Teorema: sea $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$, $A \subset \Omega$ tq $A' \cap \Omega = \emptyset$ $f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus A)$. Sea Γ ciclo en $\Omega\setminus A$ nul-homólogo con respecto a Ω. Entonces $\{a \in A : \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$ finito y verifica

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in A} \operatorname{Ind}_\Gamma(a)\operatorname{Res}(f(z),a)$$

3- Cálculo de residuos

· Proposición: sea $f \in \mathcal{H}(D(a,R)\setminus\{a\})$. Si f tiene polo de orden $k \in \mathbb{N}$ en a, se tiene

$$\operatorname{Res}(f(z),a) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-a)^k f(z)\right)$$

→ $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \operatorname{Res}(f(z),a) = \alpha$

· L'Hôpital: para calcular el límite previo.

Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(a,R))$ con $f(a) = g(a) = 0$ y $g \neq 0$. Entonces $\exists \delta \in]0,R[$ tq $g(z) \neq 0$ y $g'(z) \neq 0$ $\forall z \in D(a,\delta)\setminus\{a\}$. Se verifica que

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)} = \alpha \in \mathbb{C} \quad \vee \quad \left[\frac{f(z)}{g(z)} \xrightarrow{z\to a} \infty \ \wedge\ \frac{f'(z)}{g'(z)} \xrightarrow{z\to a} \infty\right]$$