

VC-2017-ene-sol.pdf



DEDLED



Variable Compleja I



3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas



Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación Universidad de Granada

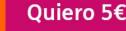
La vida es más bonita con dinero extra para caprichos, por eso te damos **5€ por la cara al abrir tu Cuenta NoCuenta de ING.**

Aquí los tienes



Esta es tu señal para abrir tu Cuenta NoCuenta de ING y **llevarte 5€ por la cara.**

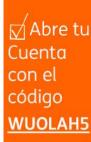


















Variable Compleja I

Examen del 26 de enero de 2017

Soluciones

1. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\log(t+z)}{(t+1)^2} dt$$
 $\forall z \in \Omega$

- (a). Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- (b). Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge en Ω y que su suma es una función $f\in \mathcal{H}(\Omega)$.
- (c). Calcular el desarrollo de Taylor de f centrado en 1.

Solución

(a). Fijado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, para $(t,z) \in [n,n+1] \times \Omega$ se tiene $t+z \in \Omega$ y, en particular, $t+z \neq 0$. En efecto, si fuese $t+z \in \mathbb{R}$ con $t+z \leq 0$, se tendría también $z=t+z-t \in \mathbb{R}$ y $z \leq z+t \leq 0$, de donde $z \notin \Omega$, una contradicción.

Consideramos entonces la función $\Phi: [n, n+1] \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(t,z) \,=\, \frac{\log{(t+z)}}{(t+1)^2} \qquad \forall \, (t,z) \in [\, n,n+1\,] \times \Omega$$

a la que vamos a aplicar el teorema de holomorfía de la integral dependiente de un parámetro. Escribimos $\psi(t,z) = \log(t+z)$ para todo $(t,z) \in [n,n+1] \times \Omega$.

- Puesto que el logaritmo principal es una función continua en $\Omega = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, vemos que ψ es continua, como composición de dos funciones continuas. Entonces Φ también es continua, como cociente de ψ por una función polinómica.
- Fijado $t \in [n, n+1]$ consideramos la función $\Phi_t : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$\Phi_t(z) = \Phi(t, z) = \frac{\log(t + z)}{(t + 1)^2} \qquad \forall z \in \Omega$$

y escribimos también $\psi_t(z) = \log(t+z)$ para todo $z \in \Omega$.

Usando de nuevo que $t + z \in \Omega$ para todo $z \in \Omega$, como $\log \in \mathcal{H}(\Omega)$, la regla de la cadena nos dice que $\psi_t \in \mathcal{H}(\Omega)$, y deducimos que $\Phi_t \in \mathcal{H}(\Omega)$, pues Φ_t es el producto de una constante por ψ_t .

En resumen, Φ es continua y $\Phi_t \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $t \in [n, n+1]$. El teorema de holomorfía de la integral dependiente de un parámetro nos dice que $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, lo cual es válido para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, como se pedía.





(b). Sea K un subconjunto compacto de Ω , sea $\rho = \max\{|z| : z \in K\}$ y fijemos $n \in \mathbb{N}$ con $n > \rho + 1$. Para $z \in K$ y $t \in [n, n + 1]$ tenemos

$$1 < n - \rho \le t - |z| \le |t + z| \le t + |z| \le n + 1 + \rho$$

Puesto que el logaritmo neperiano es una función creciente, deducimos que

$$0 < \log|t + z| \le \log(n + 1 + \rho)$$

de donde

$$|\log |t + z|| = \log |t + z| \le \log (n + 1 + \rho)$$

y la definición del logaritmo principal nos dice que

$$|\log(t+z)| \le |\log|t+z|| + |\arg(t+z)| \le \log(n+1+\rho) + \pi$$

Por ser $(t+1)^2 \ge (n+1)^2 > 0$ deducimos que

$$|\Phi(t,z)| = \left|\frac{\log(t+z)}{(t+1)^2}\right| \le \frac{\log(n+1+\rho) + \pi}{(n+1)^2}$$

Esta desigualdad es válida para todo $t \in [n, n+1]$, intervalo de longitud 1, luego

$$|f_n(z)| = \left| \int_n^{n+1} \Phi(t, z) dt \right| \le \frac{\log(n+1+\rho) + \pi}{(n+1)^2} \forall z \in K$$

y esta desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > \rho + 1$.

Veamos que la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{\log{(n+1+\rho)}+\pi}{(n+1)^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\log{(n+\rho)}+\pi}{n^2}$ es convergente. Para

ello escribimos

$$\frac{\log(n+\rho) + \pi}{n^2} = \frac{\log(n+\rho) + \pi}{n^{1/2}} \frac{1}{n^{3/2}}$$

y la escala de infinitos nos dice que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log (n+\rho) + \pi}{n^{1/2}} = 0$$

Como la serie armónica $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente, basta aplicar el criterio de comparación por paso al límite.

El test de Weierstrass nos dice que la serie $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absoluta y uniformemente en K. Como esto es válido para todo conjunto compacto $K\subset \Omega$, hemos probado

que dicha serie converge absolutamente en Ω y uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω . Por ser $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el teorema de convergencia de Weierstrass nos asegura que la suma de la serie es una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.



Si ya tuviste sufi con tanto estudio...

Te dejamos este espacio para desahogarte.

Pinta, arranca, Ilora... tú decides ;)



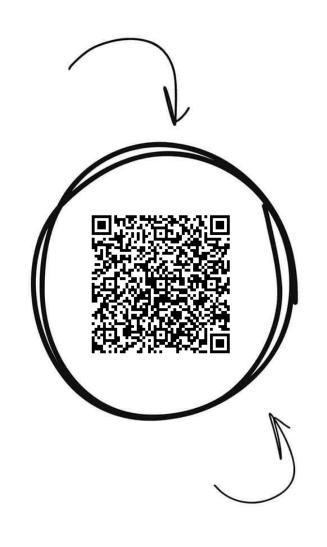
¿Te sientes más liberado? Sigue siéndolo con la **Cuenta NoCuenta: libre de comisiones*, y de lloraditas.**

Y ahora con 5€ por la cara.

¡Quiero una de esas!

do your thing

Variable Compleja I



Banco de apuntes de la



Comparte estos flyers en tu clase y consigue más dinero y recompensas

- Imprime esta hoja
- Recorta por la mitad
- Coloca en un lugar visible para que tus compis puedan escanar y acceder a apuntes
- documentos descargados a través de tu QR





(c). Empezamos calculando f(1), teniendo en cuenta que

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(1) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} f_j(1)$$

Para $n \in \mathbb{N}$ tenemos claramente

$$\sum_{j=0}^{n-1} f_j(1) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{\log(t+1)}{(t+1)^2} dt = \int_0^n \frac{\log(t+1)}{(t+1)^2} dt$$

integral que se calcula fácilmente, usando la fórmula de integración por partes y la regla de Barrow:

$$\int_0^n \frac{\log(t+1)}{(t+1)^2} dt = \left[-\frac{\log(t+1)}{t+1} \right]_0^n + \int_0^n \frac{dt}{(t+1)^2}$$
$$= -\frac{\log(n+1)}{n+1} + \left[-\frac{1}{t+1} \right]_0^n = -\frac{\log(n+1)}{n+1} + 1 - \frac{1}{n+1}$$

Deducimos por tanto que

$$f(1) = \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{\log(n+1)}{n+1} + 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Para obtener los restantes coeficientes del desarrollo pedido, fijados $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t \in [n,n+1]$, calculamos las derivadas sucesivas de la función Φ_t . De la definición de Φ_t deducimos que

$$\Phi'_t(z) = \frac{1}{(t+1)^2 (t+z)} \qquad \forall z \in \Omega$$

y a partir de aquí comprobamos por inducción que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\Phi_t^{(k)}(z) \, = \, \frac{(-1)^{k-1} \, (k-1) \, !}{(t+1)^2 \, (t+z)^k} \qquad \, \forall \, z \in \Omega$$

En efecto, el caso k = 1 ya se ha visto y, suponiendo que la igualdad anterior es cierta para $k \in \mathbb{N}$, la deducimos para k + 1:

$$\Phi_t^{(k+1)}(z) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(t+1)^2} \cdot \frac{(-k)}{(t+z)^{k+1}} = \frac{(-1)^k k!}{(t+1)^2 (t+z)^{k+1}} \qquad \forall z \in \Omega$$

En particular, tomando z = 1 obtenemos

$$\Phi_t^{(k)}(1) \, = \, \frac{(-1)^{k-1}(k-1)\,!}{(t+1)^{k+2}} \qquad \, \forall \, k \in \mathbb{N}$$



Las anteriores igualdades son válidas para todo $t \in [n, n+1]$, con lo que aplicando otra vez el teorema de holomorfía de la integral dependiente de un parámetro, obtenemos que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene

$$f_n^{(k)}(1) = \int_n^{n+1} \Phi_t^{(k)}(1) dt = \int_n^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(t+1)^{k+2}} dt \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Es el momento de aplicar de nuevo el teorema de convergencia de Weierstrass, que nos dice que, para todo $k \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω y su suma coincide con $f^{(k)}$. En particular tenemos

$$f^{(k)}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(1) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} f_j^{(k)}(1)$$

Ahora bien, para todo $n \in \mathbb{N}$, usando lo ya demostrado, tenemos

$$\sum_{j=0}^{n-1} f_j^{(k)}(1) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(t+1)^{k+2}} dt = (-1)^{k-1}(k-1)! \int_0^n \frac{dt}{(t+1)^{k+2}} dt$$

y la regla de Barrow nos da

$$\int_0^n \frac{dt}{(t+1)^{k+2}} = \left[-\frac{1}{(k+1)(t+1)^{k+1}} \right]_0^n = \frac{1}{k+1} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^{k+1}} \right)$$

con lo que obtenemos finalmente

$$f^{(k)}(1) \, = \, \frac{(-1)^{k-1}(k-1)\,!}{k+1} \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^{k+1}}\right) \, = \, \frac{(-1)^{k-1}(k-1)\,!}{k+1} \quad \forall \, k \in \mathbb{N}$$

Como $D(0,1)\subset\Omega$, el desarrollo de Taylor de f centrado en 1 es válido en D(0,1) y, como hemos visto, viene dado por

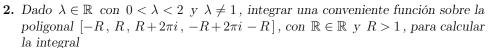
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (z-1)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} (z-1)^k \qquad \forall z \in D(0,1)$$





EL SUEÑO DE CUALQUIER ESTUDIANTE: **CONSEGUIR EL TÍTULO OFICIAL** DE INGLÉS EN 50H.





$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\lambda x}}{\left(e^x + 1\right)\left(e^x + 2\right)} \, dx$$

Solución

(a). Para $z \in \mathbb{C}$ se tiene $(e^z + 1)(e^z + 2) = 0$ si, y sólo si, $z \in A$, donde

$$A = \text{Log}(-1) \cup \text{Log}(-2)$$

= $\{(2k+1)\pi i : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\log 2 + (2k+1)\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$

y observamos que $A' = \emptyset$, pues A es el conjunto de los ceros de una función entera.

Aplicaremos el teorema de los residuos usando:

- El abierto $\Omega = \mathbb{C}$.
- El conjunto A, que verifica $A' \cap \Omega = A' = \emptyset$ como ya se ha indicado.
- \blacksquare La función f definida por

$$f(z) = \frac{e^{\lambda z}}{(e^z + 1)(e^z + 2)} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus A$$

que es el cociente de dos funciones holomorfas en $\mathbb{C}\setminus A$, luego $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus A)$.

■ El ciclo $\Gamma = [-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i - R]$, un camino cerrado que verifica $\Gamma^* \subset \mathbb{C} \setminus A$. En efecto, para $a \in A$ se tiene por una parte, $\operatorname{Im} a = (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, luego Im $a \notin \{0, 2\pi\}$ y a no pertenece a ninguno de los segmentos horizontales de Γ^* ; por otra, $-R < 0 < \operatorname{Re} a < \log 2 < 1 < R$, luego a tampoco pertenece a ninguno de los segmentos verticales de Γ^* . Finalmente, Γ es trivialmente nul-homólogo con respecto a \mathbb{C} .

Al aplicar el teorema de los residuos, nos encontramos con que

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(a) = 0 \quad \forall a \in A \setminus \{\pi i, \log 2 + \pi i\}$$

mientras que

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(\pi i) = \operatorname{Ind}_{\Gamma}(\log 2 + \pi i) = 1$$

luego el teorema nos dice que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2 \pi i \operatorname{Res} (f(z), \pi i) + 2 \pi i \operatorname{Res} (f(z), \log 2 + \pi i)$$





(b). Calculamos ahora los dos residuos que aparecen en la última igualdad. Usando la definición de derivada se tiene

$$\lim_{z \to \pi i} (z - \pi i) f(z) = \lim_{z \to \pi i} \frac{e^{\lambda z}}{e^z + 2} \cdot \frac{z - \pi i}{e^z - e^{\pi i}} = \frac{e^{\lambda \pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{\lambda \pi i}$$

de donde deducimos que

$$\operatorname{Res}(f(z), \pi i) = -e^{\lambda \pi i}$$

Análogamente, escribiendo $\alpha = \log 2 + \pi i$, tenemos $e^{\lambda \alpha} = 2^{\lambda} e^{\lambda \pi i}$, y también es claro que $(e^{\alpha} + 1) e^{\alpha} = 2$, luego

$$\lim_{z \to \alpha} (z - \alpha) f(z) = \lim_{z \to \alpha} \frac{e^{\lambda z}}{e^z + 1} \cdot \frac{z - \alpha}{e^z - e^\alpha} = \frac{e^{\lambda \alpha}}{(e^\alpha + 1) e^\alpha} = 2^{\lambda - 1} e^{\lambda \pi i}$$

y deducimos que

Res
$$(f(z), \log 2 + \pi i) = 2^{\lambda - 1} e^{\lambda \pi i}$$

Hemos calculado ya la integral curvilínea buscada:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2 \pi i \left(2^{\lambda - 1} - 1 \right) e^{\lambda \pi i}$$

(c). Acotamos ahora las integrales de f sobre los segmentos verticales de Γ , que obviamente dependen de R, concretamente:

$$I_1(R) = \int_{[R, R+2\pi i]} f(z) dz$$
 e $I_2(R) = \int_{[-R+2\pi i, -R]} f(z) dz$

Para $z \in [R, R + 2\pi i]^*$ tenemos Re z = R, con lo cual,

$$|e^{\lambda z}| = e^{\lambda R}, \quad |e^z + 1| \ge e^R - 1 > 0 \quad y \quad |e^z + 2| \ge e^R - 2 > 0$$

de donde deducimos que

$$|f(z)| \le \frac{e^{\lambda R}}{(e^R - 1)(e^R - 2)} \quad \forall z \in [R, R + 2\pi i]^*$$

Análogamente, para $z \in [-R + 2\pi i, -R]^*$ tenemos Re z = -R, con lo cual,

$$|e^{\lambda z}| = e^{-\lambda R}, \quad |e^z + 1| \ge 1 - e^{-R} > 0 \quad \text{y} \quad |e^z + 2| \ge 2 - e^{-R} > 0$$

de donde deducimos

$$|f(z)| \le \frac{e^{-\lambda R}}{(1 - e^{-R})(2 - e^{-R})} \quad \forall z \in [-R + 2\pi i, -R]^*$$



Como ambos segmentos verticales tienen longitud 2π , concluimos que

$$|I_1(R)| \le \frac{2\pi e^{\lambda R}}{(e^R - 1)(e^R - 2)}$$
 y $|I_2(R)| \le \frac{2\pi e^{-\lambda R}}{(1 - e^{-R})(2 - e^{-R})}$

Por ser $\lambda < 2$, tenemos

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{2 \pi e^{\lambda R}}{(e^R - 1)(e^R - 2)} = \lim_{R \to +\infty} \frac{2 \pi e^{(\lambda - 2)R}}{(1 - e^{-R})(2 - e^{-R})} = 0$$

y por ser $\lambda > 0$, tenemos también

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{2\pi e^{-\lambda R}}{(1 - e^{-R})(2 - e^{-R})} = 0$$

Concluimos que $\lim_{R \to +\infty} I_1(R) = \lim_{R \to +\infty} I_2(R) = 0.$

(d). Consideramos ahora las integrales sobre los segmentos horizontales $\sigma = [-R, R]$ y $\tau = [R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$. Es claro que

$$\int_{\sigma} f(z) dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\lambda x}}{(e^x + 1)(e^x + 2)} dx$$

y también que

$$\int_{\mathcal{T}} f(z) dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{\lambda(x+2\pi i)}}{(e^{x+2\pi i}+1)(e^{x+2\pi i}+2)} dx = -e^{2\lambda\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{e^{\lambda x}}{(e^{x}+1)(e^{x}+2)} dx$$

Por tanto, recordando el valor de la integral sobre Γ , ya calculada, tenemos

$$2\pi i \left(2^{\lambda-1} - 1\right) e^{\lambda \pi i} = \left(1 - e^{2\lambda \pi i}\right) \int_{-R}^{R} \frac{e^{\lambda x}}{\left(e^{x} + 1\right) \left(e^{x} + 2\right)} dx + I_{1}(R) + I_{2}(R)$$

Como esta igualdad es válida para todo $R\in\mathbb{R}$ con R>1, y ya habíamos comprobado que $\lim_{R\to+\infty}I_1(R)=\lim_{R\to+\infty}I_2(R)=0$, obtenemos que

$$2\pi i \left(2^{\lambda - 1} - 1\right) e^{\lambda \pi i} = \left(1 - e^{2\lambda \pi i}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\lambda x}}{\left(e^x + 1\right) \left(e^x + 2\right)} dx$$

Puesto que $0<\lambda<2\,$ y $\,\lambda\neq 1\,,$ tenemos $\,e^{\,2\,\lambda\,\pi\,i}\neq 1\,,$ y concluimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\lambda x}}{(e^x + 1)(e^x + 2)} dx = \frac{2\pi i (1 - 2^{\lambda - 1}) e^{\lambda \pi i}}{e^{2\lambda \pi i} - 1}$$
$$= \frac{2\pi i (1 - 2^{\lambda - 1})}{e^{\lambda \pi i} - e^{-\lambda \pi i}} = \pi (1 - 2^{\lambda - 1}) \csc(\pi \lambda)$$

Obsérvese que, cuando $0 < \lambda < 1$ se tiene $2^{\lambda - 1} < 1$ y $\operatorname{cosec}(\pi \lambda) > 0$, mientras que, si $1 < \lambda < 2$ se tendrá $2^{\lambda - 1} > 1$ y $\operatorname{cosec}(\pi \lambda) < 0$. En ambos casos, como no podía ser de otra forma, el resultado obtenido es un número real y positivo.



3. Sean Ω un abierto de \mathbb{C} , $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Supongamos que f tiene un polo en el punto a. Probar que el polo es simple si, y sólo si, f es inyectiva en $D(a,r) \setminus \{a\}$ para algún $r \in \mathbb{R}^+$ con $D(a,r) \subset \Omega$.

Solución

La caracterización de los polos nos dice que f diverge en el punto a. En particular, existe un $R \in \mathbb{R}^+$ tal que, escribiendo U = D(a,R), se tiene $U \subset \Omega$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in U \setminus \{a\}$. Definimos entonces $g: U \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \forall z \in U \setminus \{a\} \qquad y \qquad g(a) = 0$$

Tenemos $g\in\mathcal{H}(U\setminus\{a\})$ y $\lim_{z\to a}g(z)=0=g(a)$, luego g es continua en a. Por el teorema de extensión de Riemann, $g\in\mathcal{H}(U)$.

Sea m el orden del polo de f en a, y veamos que g tiene un cero de orden m en el punto a. En efecto, por la caracterización de los polos, ahora teniendo en cuenta el orden, podemos escribir

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^m} \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\}$$

donde $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\psi(a) \neq 0$. Para $z \in U \setminus \{a\}$ tenemos $f(z) \neq 0$ luego también $\psi(z) \neq 0$. Así pues, $\psi(z) \neq 0$ para todo $z \in U$ y podemos definir $\varphi(z) = 1/\psi(z)$ para todo $z \in U$, obteniendo $\varphi \in \mathcal{H}(U)$ tal que $\varphi(a) \neq 0$. Podemos entonces escribir

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^m}{\psi(z)} = (z-a)^m \varphi(z) \qquad \forall z \in U \setminus \{a\}$$

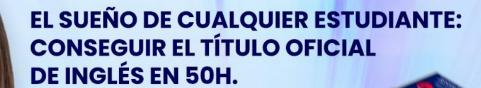
y la igualdad así obtenida es evidente para z=a. Por la caracterización del orden de un cero, g tiene un cero de orden m en el punto a, como queríamos. La misma caracterización nos dice que m=1 si, y sólo si, $g'(a) \neq 0$.

Supongamos que f es inyectiva en $D(a,r)\setminus\{a\}$ con $r\in\mathbb{R}^+$ y $D(a,r)\subset\Omega$. Podemos obviamente tomar r< R, de forma que $D(a,r)\subset U$, y vemos que g es inyectiva en D(a,r). En efecto, si $z,w\in D(a,r)$ verifican que $g(z)=g(w)\neq 0$, tenemos $z,w\in D(a,r)\setminus\{a\}$, ya que g(a)=0, y f(z)=f(w), luego z=w. Si, por contrario, g(z)=g(w)=0, como g no se anula en $U\setminus\{a\}$, se tendrá z=w=a. Aplicando la caracterización de la inyectividad local de una función holomorfa, obtenemos que $g'(a)\neq 0$, luego m=1.

Para obtener el recíproco, basta revertir paso a paso el razonamiento anterior. Si m=1 tenemos $g'(a) \neq 0$, luego g es inyectiva en un entorno de a. Existe entonces $r \in \mathbb{R}^+$ con $D(a,r) \subset U \subset \Omega$ tal que g es inyectiva en D(a,r). Para $z,w \in D(a,r) \setminus \{a\}$ con f(z) = f(w), se tiene entonces g(z) = g(w), luego z = w, así que f es inyectiva en $D(a,r) \setminus \{a\}$.









4. Sea Ω un dominio de \mathbb{C} y $f,g\in\mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $f(z)^n = g(z)^n$ para todo $z \in \Omega$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda^n = 1$, tal que $f(z) = \lambda g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Solución

Descartamos previamente el caso trivial de que g sea idénticamente nula, pues entonces f también es idénticamente nula y basta tomar $\lambda = 1$.

Sea $a \in \Omega$ tal que $g(a) \neq 0$ y, usando la continuidad de g en a, sea D un disco abierto de centro a tal que $D \subset \Omega$ y $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D$. Tenemos entonces $h \in \mathcal{H}(D)$ donde

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \qquad \forall z \in D$$

Por hipótesis tenemos $h(z)^n = 1$ para todo $z \in D$, es decir, h(D) está contenido en el conjunto de las raíces n-ésimas de la unidad, que es finito. Pero siendo D conexo y h continua, h(D) es conexo, luego h(D) se reduce a un punto: existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda^n = 1$ tal que $h(z) = \lambda$ para todo $z \in D$.

Tenemos entonces $f(z) = \lambda g(z)$ para todo $z \in D$. Puesto que Ω es un dominio, fy $\lambda \, g$ son holomorfas en Ω y coinciden en el conjunto $D\,,$ que obviamente verifica $D' \cap \Omega \neq \emptyset$, el principio de identidad nos dice que $f(z) = \lambda g(z)$ para todo $z \in \Omega$, como queríamos demostrar.



