Ковальков Антон 577гр

Задача 1.

В решении используется теория из книги "А. Ахо, Дж. Ульман Теория Синтаксического анализа, перевода и компиляции".
1. Это уравнение имет вид $X = \alpha X + \beta$. где $\alpha = (101)^* + 110^*, \beta = \varnothing$.
    1) Частное решение этого уравнения: $\alpha^* \cdot \beta = \varnothing$.
    2) Минимальное по включению решение: $\alpha^* \cdot \beta = \varnothing$.
    3) Так как $\varepsilon \in L(\alpha)$, то все решения: $\alpha^* \cdot (\beta + \gamma) = \alpha^* \cdot \gamma \; \forall \; \gamma$.

2. Это уравнение имет вид $X = \alpha X + \beta$. где
$\alpha = 00 + 01 + 10 + 11, \beta = 0 + 1 + \varepsilon$.
    1) Частное решение этого уравнения:
    $\alpha \cdot \beta = (00 + 01 + 10 + 11)^* \cdot (0 + 1 + \varepsilon)$.
    2) Минимальное по включению решение:
    $\alpha^* \cdot \beta = (00 + 01 + 10 + 11)^* \cdot (0 + 1 + \varepsilon)$.
    3) Так как $\varepsilon \notin L(\alpha)$, то все решения:
    $\alpha^* \cdot \beta = (00 + 01 + 10 + 11)^* \cdot (0 + 1 + \varepsilon)$.

3. Пусть q_0, q_1, q_2 это перевёрнутые Q_0, Q_1, Q_2. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} q_0 &= 0q_0 + 1q_1 + \varepsilon \\ q_1 &= 1q_0 + 0q_2 \\ q_2 &= 0q_1 + 1q_2 \end{cases}$$

Из последнего уравнения выразим q_2 и подставим во второе.

$$\begin{cases} q_0 &= 0q_0 + 1q_1 + \varepsilon \\ q_1 &= 1q_0 + 01^*0q_1 \\ q_2 &= 1^* \cdot 0q_1 \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим q_1 и подставим впервое.

$$\begin{cases} q_0 &= (0 + 11(01^*0)^*1)q_0 + \varepsilon \\ q_1 &= (01^*0)^*1q_0 \\ q_2 &= 1^* \cdot 0q_1 \end{cases}$$

Решим систему уравнений.

$$\begin{cases} q_0 &= (0 + 1(01^*0)^*1)^* \\ q_1 &= (01^*0)^*1(0 + 1(01^*0)^*1)^* \\ q_2 &= 1^*0(01^*0)^*1(0 + 1(01^*0)^*1)^*. \end{cases}$$

Вернёмся к исходным переменным.
$$\begin{cases} Q_0 &= (0+1(01^*0)^*1)^* \\ Q_1 &= (0+1(01^*0)^*1)^*1(01^*0)^* \\ Q_2 &= (0+1(01^*0)^*1)^*1(01^*0)^*01^*. \end{cases}$$
Мы нашли частное, минимальное по включению, и все решения.

Задача 2.

Определим грамматику G так: $S \to aSb \mid \varepsilon$. Она линейна по определению. $L(G) = \{a^n b^n\}$. $L(G)$ нерегулярный язык. Значит утверждение не верно.

Задача 3.

1.Покажим индукцией по длине слова, что КС-грамматика G с правилами $S \to SS \mid aSb \mid bSa \mid \varepsilon$ порождает язык $L^=$.
Докажем, что $L^= \subseteq L(G)$.
1) База: $\varepsilon \in L(G)$, так как $S \to e$.
$ab \in L(G)$, так как $S \to aSb \to ab$.
$ba \in L(G)$, так как $S \to bSa \to ba$.
2) Пусть все слова из $L^=$ длины меньшей или равной n выводимы из грамматики G.
Рассмотрим слово $\omega \in L^=$ длины $n+2$.Представим ω в виде $a\omega_1 b\omega_2$ или $b\omega_1 a\omega_2$, где ω_1 и ω_2 слова длины меньшей $n+2$, и $\omega_1 \in L^=$. По предположению индукции $S \vdash^* \omega_1$. $S \vdash^* \omega_2$. Тогда ω выводимо, так как $S \to SS \to aSbS$ и $S \to SS \to bSaS$.

Докажем, что $L(G) \subseteq L^=$.
1) База: $\varepsilon \in L^=$, $ab \in L^=$, $ba \in L^=$.
2) Пусть все слова длины меньшей или равной n выводимые из грамматики G лежат в $L^=$.
Тогда слово длины $n+2$ лежит в $L^=$, так как оно получилось приминением ещё один раз правила $S \to aSb \mid bSa$ на любом этапе вывода слова длины n.

2. Нелинейность нужна чтобы выести,например, слова из последовательности $\{a^n b^n a^n b^n\}$. Иначе потребуется бесконечное число правил вывода.

Задача 4.

Построим граматику для языка неполиндромов:
$S \to aTb \mid bTa \mid aMa \mid bMb$
$T \to TaT \mid TbT \mid \varepsilon$
$M \to aTb \mid bTa \mid aMa \mid bMb$
Из нетерминала T можно вывести любое слово.
Нетерминалы S и M задают слово от концов к середине. Тогда и только тогда когда будет выбрано правило вида $B \to aAb$ или $B \to bAa$, полученное слово будет являтся непалиндромом. Вывод может быть закончен только если будет выбрано правило упомянутого вида.
Таким образом по правилам могут быть выведены только непалиндромы. Причём всё, так как до нарушения палиндромности (если идти от концов к началу) a и b могут чередоваться как угодно, за это отвечает нетерминал M. А после нарушения палиндромности из нетерминала T может быть выведено всё что угодно.