Ковальков Антон 577гр

Упражнение 1.

Пусть у нас есть два КС языка L_1 и L_2. Без ограничения общности положим, что множества нетерминальных символов у них не пересекаются. Пусть стартовый символы $S1$ и $S2$. Тогда построим Грамматику для языка $L = L_1 \cup L_2$ добавил к правилам для L_1 и L_2 ещё два: $S \to S_1 \mid S_2$, где S стартовый символ для языка L. Из нетерминала S_1 выводимы все слова языка L_1 и только они. То же справедливо для языка L_2 и нетерминала S_2. Получаем что из S выводимы слова языка $L_1 \cup L_2$ и только они.

Задача 1.

Пусть язык L задан МП-автоматом принимающим по допускающему состоянию.
$\mathcal{A} = (Q_L, \Sigma, \Gamma, \sigma_L, q_{0L}, Z_0, F_L)$
Пусть язык R задан детерминированным конечным автоматом
$\mathcal{B} = (Q_R, \Sigma, \sigma_R, q_{0R}, F_R)$.
Построим пересечение этих автоматов:
$\mathcal{C} = (Q_L \times Q_R, \Sigma, \Gamma, \sigma_\cap, (q_{0L}, q_{0R}), Z_0, F_L \times F_R)$
Функцию переходов определим так:
$\sigma_\cap((q_1, q_2), \omega, \alpha) = (\sigma_L(q_1, \omega, \alpha), \sigma_R(q_2, \omega))$ Мы построили МП автомат для языка пересечения, значит язык пересечения КС язык.

Задача 3.

Предположим, что $L \in \mathsf{CFL}$, тогда для некоторого числа p выполнена лемма о накачке. Рассмотрим слово $w = a^p b^p c^p$. Тогда подслово uyv из разбиения слова w, существующего по лемме о накачке, либо состоит из одинаковых букв (a^l или b^l или c^l) или имеет вид $a^l b^r$ или $b^l c^r$. Три различные буквы подслово uyv содержать не может, поскольку его длина ограниченна числом p. Но тогда uv – слово, в котором нет одной из трёх букв. Пусть это будет буква c для определённости. Взяв $i = 0$, получаем, что по лемме о накачке $w_0 = a^{p-k}b^{p-m}c^p \in L$, при этом $k + m \geqslant 1$, откуда следует, что слово w_0 не принадлежит языку L.

Задача 4.

Нет, это не верно, так как $abc \notin \Sigma^* \setminus \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 0\}$.
$a \in \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee i \neq k\}$, при $i = 1, j = k = 0$.
$b \in \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee i \neq k\}$, при $i = 0, j = 1, k = 0$.
$c \in \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee i \neq k\}$, при $i = 0, j = 0, k = 1$.
Значит $abc \in \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee i \neq k\}^3 \subset \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee i \neq k\}^*$.

Задача 5.

Да, это верно. Построим грамматику для $L = \{a^m b^m b^n c^n \mid n, m \geqslant 0\}$:
$S \to AB$
$A \to aAb \mid \varepsilon$
$B \to bBc \mid \varepsilon$.

Если слово было выведено из грамматики, то сначала было применено правило $S \to AB$. Затем n раз правило $A \to aAb$ и правило $A \to \varepsilon$.Затем k раз правило $B \to bBc$ и правило $B \to \varepsilon$. Получившиеся слово имеет вид $a^n b^n b^k c^k$ и лежит в языке.

Любое слово из языка можно вывести из грамматики сначала надо применить правило $S \to AB$. Затем m раз правило $A \to aAb$ и правило $A \to \varepsilon$.Затем n раз правило $B \to bBc$ и правило $B \to \varepsilon$.

Заметим, что язык L совдадает с языком из условия задачи, так как $b^n b^m = b^{n+m} = b^{m+n} = b^m b^n$.

Задача 6.

Предположим, что $L \in \mathsf{CFL}$, тогда для некоторого числа p выполнена лемма о накачке. Рассмотрим слово $w = a^p b^p a^p b^p$. Тогда подслово uyv из разбиения слова w, существующего по лемме о накачке имеет вид:
1) a^l, взяв $i = 2$ по лемме о накачке получаем, что $a^{p+k}b^p a^p b^p \in L$, если подслово uyv лежит в первой части слова, и $a^p b^p a^{p+k} b^p \in L$, если подслово uyv лежит в первой части слова. Получаем противоречие так как $k \geqslant 1$
2) b^l, аналогично пункту 1) получаем противоречие.

3)$a^l b^m$, взяв $i = 2$ по лемме о накачке получаем, что $a^{p+k}b^{p+n}a^p b^p \in L$, если подслово uyv лежит в первой части слова, и $a^p b^p a^{p+k}b^{p+n} \in L$, если подслово uyv лежит в первой части слова. Получаем противоречие так как $k + n \geqslant 1$
4) $b^m a^l$, взяв $i = 2$ по лемме о накачке получаем, что $a^p b^{p+k}a^{p+n}b^p \in L$. Получаем противоречие, так как $k \geqslant 1$.

Значит $L \notin \mathsf{CFL}$