Ковальков Антон 577гр

Задача 1.

1. $\{a,\ aa\} \cdot \{b,\ bb\} = \{ab,\ abb,\ aab,\ aabb\}$

   так как $X \cdot Y = \{x \cdot y, x \in X, y \in Y\}$

2. $\{a,\ aa\} + \{b,\ bb\} = \{a,\ aa,\ b,\ bb\}$
   так как $X + Y = \{x, x \in X | x \in Y\}$

3. $\{a,\ aa\} \times \{b,\ bb\} = \{(a,b),\ (a,bb),\ (aa,b),\ (aa,bb)\}$
   так как $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$

4. $((aa|b)^*(a|bb)^*)^* = (b^*a^*)^* = (a|b)^*$

5. $\{a^{3n}|n > 0\} \cap \{a^{5n+1}|n \geqslant 0\}^* = \{a^{3n}|n > 0\}$
   так как $a^1 \in \{a^{5n+1}|n \geqslant 0\}$, а значит $\{a^{5n+1}|n \geqslant 0\}^* = \{a|b\}^*$

6. $\emptyset \cap \{\varepsilon\} = \emptyset$
   так как в пустом множестве нет элементов

Задача 2.
Пусть А интересующий нас язык. Пусть $\omega \in A$. Представим ω в виде $\omega_1 ab \omega_2$, где ω_1 и ω_2 не содержат ab. Тогда ω_1 представляется в виде $b \dots ba \dots a$, а ω_2 в виде $a \dots ab \dots b$.
Ответ: $b^*a^*(ab)b^*a^*$

Задача 3.
$L = \Sigma^* \setminus \{(a|b)^*bb(a|b)^*\}$
$T = \{(a|(ba))^*(b|\varepsilon)\}$
1) Докажем, что $T \subseteq L$:
Язык L включает все слова без bb. Представим слово языка T в виде $\omega_1 \cdot \omega_2$, где $\omega_1 = (a|(ba))^*$, а $\omega_2 = (b|\varepsilon)$. Если b встретится в ω_1, то после обязательно следует a. Так же ω_1 либо пустое либо заканчивается на a. ω_2 либо пустое либо b. Это значит, что словах языка нету bb. $\Rightarrow T \subseteq L$.

Задача 4.

1. Автомат $\mathcal{A} : (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, где
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
$\Sigma = \{a, b\}$;
δ :
$\delta(q_0, b) = \{q_0\}$,
$\delta(q_0, a) = \{q_1\}$,
$\delta(q_1, a) = \{q_0\}$,
$\delta(q_1, b) = \{q_2\}$,
$\delta(q_2, a) = \{q_2\}$,
$\delta(q_2, b) = \{q_1\}$,
$F = \{q_1\}$;

Автомат $\mathcal{B} : (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, где
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
$\Sigma = \{a, b\}$;
δ :
$\delta(q_0, b) = \{q_0\}$,
$\delta(q_0, a) = \{q_1\}$,
$\delta(q_1, b) = \{q_0, q_2\}$,
$\delta(q_2, a) = \{q_2\}$,
$\delta(q_2, b) = \{q_1\}$,
$F = \{q_1\}$;

2. Автомат $\mathcal{A}$ детерминированный, так как функция перехода из каждой вершины определена однозначно.

Автомат $\mathcal{B}$ недетерминированный, так как функция перехода от (q_1, b) определена неоднозначно.

3. $(q_0, aababab) \vdash (q_1, ababab) \vdash (q_0, babab) \vdash (q_0, abab) \vdash (q_1, bab) \vdash (q_2, ab) \vdash (q_2, b) \vdash (q_1, \varepsilon)$
$aababab \in L(\mathcal{A})$ так как автомат $\mathcal{A}$ на входе $aababab$ закончил работу в принимающем состоянии. $(q_1 \in F)$

4. Автомат $\mathcal{B}$ принимает слово $abbba$, так как
$(q_0, abbba) \vdash (q_1, bbba) \vdash (q_0, bba) \vdash (q_0, ba) \vdash (q_0, a) \vdash (q_1, \varepsilon)$ и $(q_1 \in F)$

5. $a \in L(\mathcal{A})$; $abb \in L(\mathcal{B})$; $b \notin L(\mathcal{A})$; $bb \notin L(\mathcal{B})$

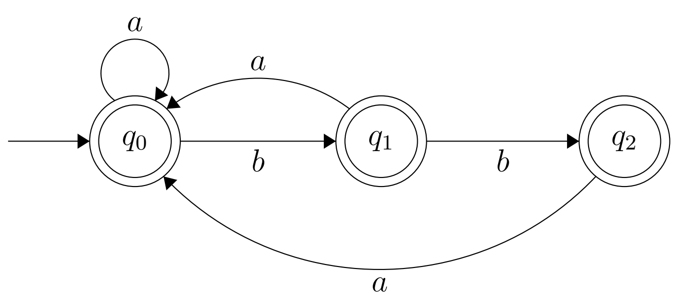
Задача 5.

1. 1) Докажем по индукции, что $\forall \omega \in L : |\omega| = n \hookrightarrow \omega \in T$.

База индукции: для слов длины меньшей трёх из L выполнено.
Шаг индукции: Пусть утверждение доказано для слов длины $n-1$, $n-2$ и $n-3$. Тогда дописывая к ним a, ba, bba мы получим слова в которых так же нет трёх букв b подряд.
Значит $w \in T$, где $|w| = n$.

2) Докажем по индукции, что $\forall \omega \in T : |\omega| = n \hookrightarrow \omega \in L$
База индукции: $\{\varepsilon, a, b, ab, aa, bb\} \subset L$.
Шаг индукции: Пусть утверждение доказано для слов длины $n-1$. Тогда если $\omega = a\omega_1$, где $|\omega_1| = n-1$, то так как $\omega_1 \in L \Rightarrow a \cdot \omega_1 \in L \Rightarrow \omega \in L$.
Если же $\omega = b\omega_1$, то:
если ω_1 начинается с a, то $\omega = ba\omega_2$, $\omega_2 \in L \Rightarrow ba \cdot \omega_2 \in L \Rightarrow \omega \in L$.
если ω_1 начинается с b, то $\omega = bba\omega_2$, так как $\omega \in T$. $\omega_2 \in L \Rightarrow bba \cdot \omega_2 \in L \Rightarrow \omega \in L$.

2.



Докажем по индукции, что этот автомат распознаёт слово длины n языка T.
1) База индукции: $n = 0$, если на вход автомату дать ε, то он остановится в принимающем состоянии q_0.
2) Пусть Автомат принял слово ω_1 длины $n-1$ из языка T, докажем, что он примет слово ω длины n из языка T.

Если ω получилось дописыванием буквы a к ω_1, то автомат закончит в принимающем состоянии q_0. Так как из любого состояния определен переход по a в состояние q_0.

Если же это слово получилось дописыванием буквы b к слову длины $n-1$, то возможны следующие случаи:
а)ω_1 заканчивается на a
Тогда автомат закончит работу в принимающем состоянии q_1. Так

как на ω_1 автомат закончил в состоянии q_0.

б)ω_1 заканчивается на одну букву b

Тогда автомат закончит работу в принимающем состоянии q_2. Так как на ω_1 автомат закончил в состоянии q_1.

в)ω_1 заканчивается на bb

Тогда автомат на ω_1 закончил в состоянии q_2, а по букве b из q_2 переход не определен. Значит слово, в котором 3 буквы b подряд не распознается автоматом.