

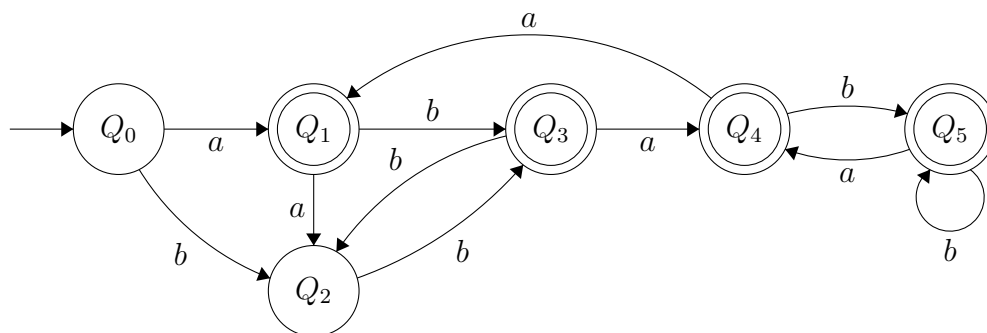
Ковальков Антон 577гр

Задача 1.

$$S \rightarrow aSa \mid aSaa \mid aSb \mid aSbb \mid a \mid b$$

Будем использовать алгоритм приведённый в книге Серебрякова на 70ой странице. Для начала детерминизируем автомат \mathcal{A} .

Макросост.	сост НКА	0	1
Q_0	q_0, q_1	Q_1	Q_2
Q_1	q_3, q_2	Q_2	Q_3
Q_2	q_3	Q_4	Q_3
Q_3	q_0, q_1, q_4	Q_4	Q_2
Q_4	q_0, q_1, q_2, q_3	Q_1	Q_5
Q_5	q_0, q_1, q_3, q_4	Q_4	Q_5

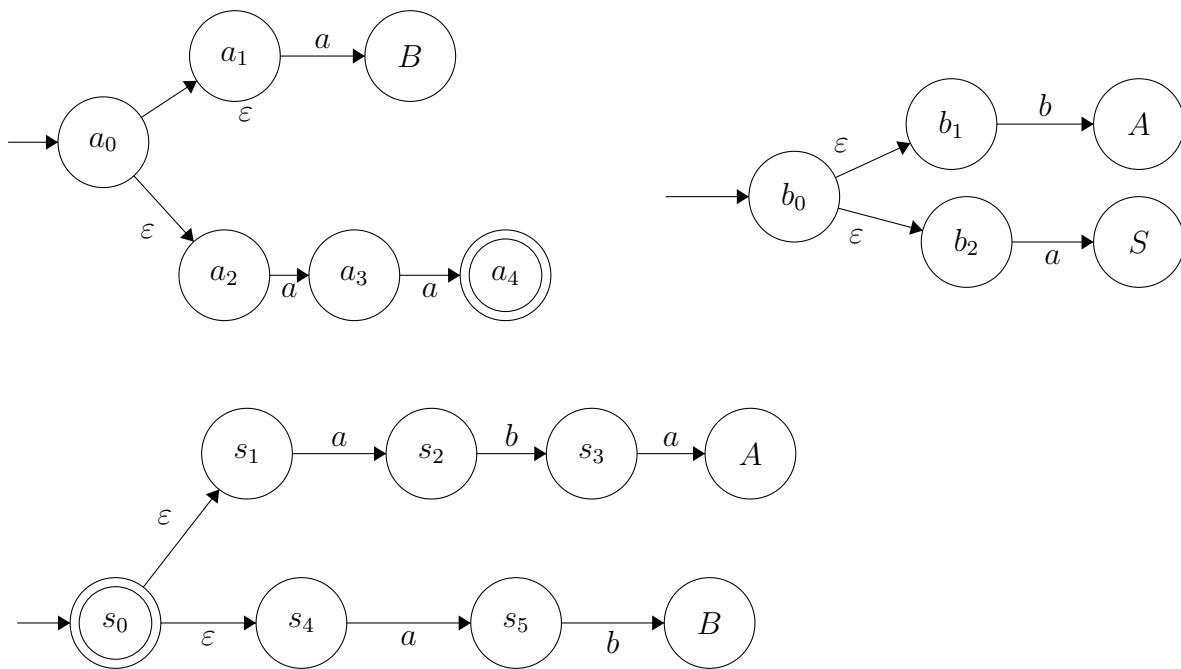


Теперь определи грамматику:

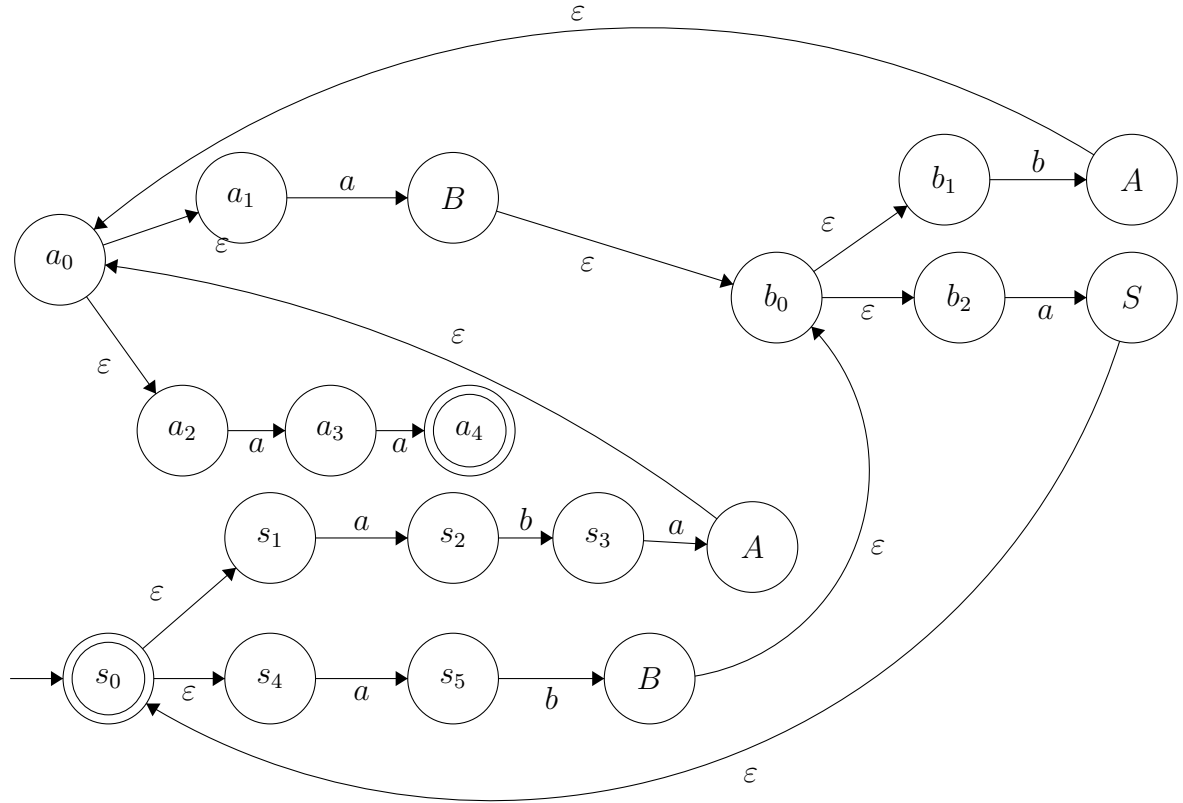
1. Нетерминалами грамматики будут состояния автомата $N = Q$.
2. В качестве начального символа примем Q_0 . $S = Q_0$.
3. $Q_0 \rightarrow aQ_1 \mid a \mid bQ_2$
 $Q_1 \rightarrow aQ_2 \mid bQ_3 \mid b$
 $Q_2 \rightarrow bQ_3 \mid b$
 $Q_3 \rightarrow aQ_4 \mid a \mid bQ_2$
 $Q_4 \rightarrow aQ_1 \mid a \mid bQ_5 \mid b$
 $Q_5 \rightarrow aQ_4 \mid a \mid bQ_5 \mid b$

Задача 2.

Построим автоматы для правил вывода для каждого нетерминала :



Для всех нетерминальных символов добавим эpsilon переходы из вершин A, B и S в начальные состояния соответствующих автоматов. Получим автомат распознающий язык $L(G)$.



Задача 3.

Нет, грамматика G не является однозначной, так как слово $abaaaa$ можно вывести разными способами. Например: $S \rightarrow abaA \rightarrow abaaaa$ и $S \rightarrow abaA \rightarrow abaaB \rightarrow abaaaaS \rightarrow abaaaa$.

Задача 4.

1. $\forall i \neq j : a^i, a^j \in \{a^n\}$ выберем подслово $z = ab^i$. Получим, что $a^i \cdot z = a^i ab^i \in L$, а $a^j \cdot z = a^j ab^i \notin L$. Таким образом любые два элемента последовательности $\{a^n\}$ лежат в разных классах эквивалентности. И по теореме Майхилла — Нероуда язык не регулярен. 2. Допустим, что дополнение регулярен язык, тогда существует ДКА распознающий этот

язык. Доопределим всюду этот ДКА добавляя ещё одно непринимаящее состояние и добавляя отсутствующие переходы. Теперь сделаем принимающие состояния непринимаящими, а непринимаящие принимающими. Таки образом мы построили автомат к дополнению дополнения, то есть к самому языку, а, по ранее доказаному этого автомата не существует.

Задача 5.

$$G : S \rightarrow aSbb \mid aSb \mid \varepsilon.$$

Докажем, что $L \subset L(G)$. $\forall \omega \in L, |\omega| = n \Leftrightarrow \omega \in L(G)$.
 $n = 0, \varepsilon \in L(G)$

Допустим выполнено для всех слов длины $n - 1$, слово длины $n, \omega \in L$ можно представить в виде $a\omega_1b$. По предположению индукции ω_1 выводится по правилам грамматики и, так как в грамматике есть правило $S \rightarrow aSb$, то ω тоже выводится.

Включение в обратную сторону очевидно.

Задача 1. Верно ли, что праволинейная грамматика G однозначна тогда и только тогда, когда построенный по ней автомат является детерминированным?

Задача 2. Назовём грамматику линейной, если в правой части её правил может быть не более одного нетерминала. Верно ли, что для любой линейной грамматики $G, L(G) \in \text{REG}$?

Ещё раз напоминаю, что задачи, помеченные \dagger являются дополнительными, поэтому списывать их из книжек – бессмысленное увеличение энтропии.

Определение 1. Для языка $L \subseteq \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}^* = \Sigma_n^*$ и языков $L_{\sigma_1}, L_{\sigma_2}, \dots, L_{\sigma_n} \subseteq \Sigma_n^*$, подстановкой в L языков $L_{\sigma_1}, \dots, L_{\sigma_n}$ назовём язык L' , такой что для всех слов $w = w[1] \dots w[n]$ из языка L справедливо $L_{w[1]}L_{w[2]} \dots L_{w[n]} \subseteq L'$

Задача 3 † . Доказать, что регулярные языки замкнуты относительно операции подстановки.

Определение 2. Даны алфавиты Σ и Δ . Для языка $L \subseteq \Sigma \times \Delta$ определены операции проекции на Σ^* и Δ^* . Проекцией L на Σ^* называется язык $L_\Sigma = \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Delta^* : (w, v) \in L\}$. Проекция L на Δ^* определяется аналогичным образом.

Задача 4[†] . Доказать, что регулярные языки замкнуты относительно операции проекции.

Определение 3. Для языка $L_\Sigma \subseteq \Sigma^*$, Δ -цилиндром называется язык L , такой что $L = \{w \mid w = (u, v), u \in L_\Sigma, v \in \Delta^*\}$

Задача 5[†] . Показать, что Σ -проекция Δ -цилиндра L есть L . Доказать, что регулярные языки замкнуты относительно операции цилиндра.

Задача 6. На семинаре я «доказал», что грамматика $G : S \rightarrow aSb \mid SS \mid \varepsilon$ порождает язык правильных скобочных выражений с одним типом скобок – язык Дика D_1 . На самом деле, я дал доказательство только в одну сторону: что любое слово, выведенное из этой грамматики будет правильным скобочным выражением. После чего порадовавшись, что меня никто за руку не поймал, в назидание оставляю доказательство в другую сторону в качестве домашней задачи. Напомню, что мы договорились считать, что слово w является правильным скобочным выражением, если его скобочный итог $d(w)$ равен нулю, и при этом скобочный итог любого префикса w неотрицательный. Скобочным итогом называется разница между числом открывающих и закрывающих скобок: $d(u) = |u|_a - |u|_b$.

Задача 7. Является ли грамматика G для языка D_1 из предыдущей задачи однозначной?