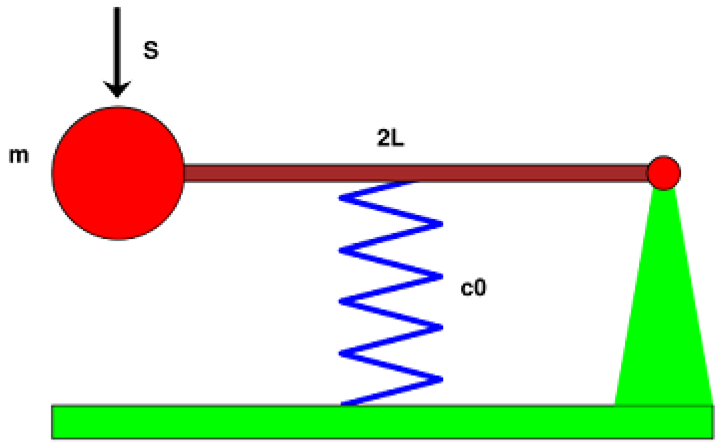
Документация модели "Удар"

Антон Логунов
БФУ им. И.Канта

Сентябрь 14, 2012

1 Задание

Дана система из груза массой m, связанного с невесомой, жесткой, угруго закрепленной балкой длины $2L$. Один конец балки закреплен на шарнире, расположенном на неподвижной опоре. Балка опирается на пружину, жесткость которой равна c_0. В начальный момент времени $t = 0$ происходит вертикальный удар по грузу с величиной мгновенного импульса S. Если x – угол отклонения системы от положения равновесия, то система разрушается при $x = \frac{S}{\sqrt{c_0 m L}}$



2 Описание модели

После придания грузу импульса S система покидает положение равновесия. Груз отклоняется от начального положения на отрицательный угол $x(t)$, относительно шарнира, с отрицательной угловой скоростью $\dot{x}(t)$. В то же время на балку начинает действовать сила упругости пружины, стремящаяся вернуть систему в положения равновесия, то есть груз движется с положительным угловым ускорением $\ddot{x}(t)$. В данной модели так же можно рассматривать действие силы тяжести груза, но для упрощения вычислений сила тяжести в данной модели не учитывается. Как только $\dot{x}(t) = 0$ груз начнет движение к положению равновесия. Когда $x(t) = 0$ и следовательно $\ddot{x}(t) = 0$, по инерции груз продолжит движение вверх по дуге с положительной угловой скоростью $\dot{x}(t)$. А сила упругости пружины придаст грузу отрицательное угловое ускорение $\ddot{x}(t)$. В итоге видно, что система подобна пружинному маятнику.

Для данной модели для упрощения вычислений $\Delta\vec{d}(t)$ – величина отклонения пружины от положения равновесия измеряется длиной дуги, полученной перемещением точки закрепления пружины к балке по ходу ее движения, так же $\vec{F}_{\text{упр.}}(t)$ пружины считается направленной параллельно $\vec{a}(t)$ - ускорению груза.

Для описания движения балки воспользуемся вторым законом Ньютона и правилом рычагов:

$$\vec{F}_{\text{упр.}}(t) = 2\vec{F}_{\text{равн.}}(t),$$

где $\vec{F}_{\text{равн.}}(t)$ - равнодействующая сила груза. Далее имеем,

$$\Delta\vec{d}(t)c_0 = 2\vec{a}(t)m.$$

И по определениям $\Delta\vec{d}(t)$ и углового ускорения,

$$-x(t)Lc_0 = 2 \cdot \ddot{x}(t) \cdot 2Lm \quad \text{или} \quad 4m\ddot{x}(t) + c_0x(t) = 0$$

К полученному дифференциальному уравнению несложно найти начальные условия для формирования задачи Коши, а именно,

$$x(0) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{x}(0) = \frac{S}{2mL}.$$

Решив поставленную задачу, выведем прямую зависимость отклонения системы от времени, что и необходимо при визуализации модели.

3 Вывод формул

Общее решение диф. уравнения вида $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$, находится следующими операциями,

$$y(t) = C_1e^{\alpha t}cos(\beta t) + C_2e^{\alpha t}sin(\beta t), \quad \text{где} \quad \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b}}{2a}.$$

Тогда для задачи Коши:

$$4m\ddot{x}(t) + c_0x(t) = 0, \quad x(0) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{x}(0) = \frac{S}{2mL},$$

поскольку $b = 0$, имеем,

$$x(t) = C_1cos(\beta t) + C_2sin(\beta t), \quad \text{где} \quad \beta = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

При подстановке первого начального условия получим $_1 = 0$. При подстановке второго начального условия:

$$\dot{x}(0) = C_2cos(\beta t) \cdot \beta = \frac{S}{2mL}, \quad C_2 = \frac{S}{2mL\beta}$$

Тогда искомое частное решение,

$$x(t) = \frac{S}{2mL\beta} sin(\beta t) = \frac{S}{2mL}\sqrt{\frac{a}{c}} \cdot sin(\frac{c}{a}t) = \frac{S}{2mL}\sqrt{\frac{4m}{c_0}} \cdot sin(\sqrt{\frac{c_0}{4m}} \cdot t),$$

$$x(t) = \frac{S}{L\sqrt{mc_0}} \cdot sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_0}{m}} \cdot t).$$

По условию, модель разрушается при

$$x_{.} = \frac{S}{\sqrt{c_0 mL}}, \text{ то } \quad x(t) < x_{.}, \frac{S}{L\sqrt{mc_0}} \cdot sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_0}{m}} \cdot t) < \frac{S}{\sqrt{c_0 mL}},$$

$$\sqrt{\frac{1}{L}} \cdot sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_0}{m}} \cdot t) < 1.$$

Так как t – непрерывная возрастающая величина, $sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_0}{m}} \cdot t)$ принимает всевозможные значения при $c_0 \neq 0$, тогда нер-во можно представить в виде

$$\sqrt{\frac{1}{L}} < 1. \quad \text{или} \quad L > 1.$$