Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 3 / 2 / 2

Выполнил:
студент 102 группы
Плеханов А. Д.

Преподаватель:
Кулагин А. Г.

Москва
2020

Содержание

Постановка задачи

По условию задачи требуется реализовать программу на языке Си, вычисляющую с заданной точностью площадь фигуры, ограниченной графиками следующих функций:

1. $f_1 = e^{-x} + 3$
2. $f_2 = 2x - 2$
3. $f_3 = \frac{1}{x}$

Для этого требуется реализовать численный метод, позволяющий вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми. Вычисление абсцисс точек пересечения функций должно производиться методом хорд. Отрезки поиска точки пересечния вычисляются аналитически. Для вычисления определенного интеграла необходимо использовать метод трапеций.

Математическое обоснование

В данном разделе проводится анализ заданного набора кривых, приводятся их графики (рис. 1), обоснование выбора значений ε_1 и ε_2, а также отрезков для поиска точек пересечения кривых.

В обосновании необходимо указать требования на сходимость методов и оценки точности со ссылкой на литературу, которая оформляется так [1]. Для выбора отрезков поиска корней и значений ε_1 и ε_2 необходимо привести полное обоснование со всеми нужными вычислениями, а не только ответ.

Требования на сходимость метода хорд для функции $f(x)$ на отрезке [a, b] взяты из учебника по математическому анализу [1]:

1. Корень функции $f(x)$ должен находиться на отрезке [a, b]

2. Функция $f'(x)$ должна быть монотонна и непрерывна на [a, b]

3. Функция $f'(x)$ должна сохранять знак на [a, b]

Требование на сходимость метода трапеций состоит в непрерывности второй производной функции $f(x)$ на рассматриваемом отрезке [a, b].
Исходя из приведенного ниже графика и требуемых условий, отрезки для поиска точек пересечения заданных функций были выбраны следующим образом:

$f_1(x) = e^{-x} + 3$ и $f_2(x) = 2x - 2$: [2, 3]
$f_1(x) = e^{-x} + 3$ и $f_3(x) = 1/x$: [0.1, 1]
$f_2(x) = 2x - 2$ и $f_3(x) = 1/x$: [1, 2]

Погрешность вычисления площади S складывается из погрешностей вычислений интегралов S_1, S_2 и S_3 (площадь S вычисляется как S_1 - S_2 - S_3, где S_i - интеграл функции f_i на соответствующем отрезке). Погрешность вычисления интеграла S_i состоит из двух компонент. Первая известна, т.к. с помощью правила Рунге мы можем вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с произвольной точностью ε_2. Вторая компонента появляется из-за неточного вычисления концов отрезка интегрирования. Таким образом, если точки пересечения функций вычислялись с одинаковой точностью ε_1, то первая компонента погрешности p_i имеет вид:

$$p_i = |\int_{a-\varepsilon_1}^{a} f(x)dx| + |\int_{b}^{b+\varepsilon_1} f(x)dx|$$

Заметим, что выражение выше можно рассматривать как сумму приращений первообразной функции $f(x)$ в точках a и b, с соответствующими приращениями аргументов $-\varepsilon_1$ и ε_1. Воспользовавшись приближением приращения функции к первому дифференциалу, получим:

$$p_i = (|f(a)| + |f(b)|)\varepsilon_1$$

Таким образом, можем вычислить первые компоненты погрешностей для интегралов S_1, S_2 и S_3: $p_1 = 6.8457 * \varepsilon_1$, $p_2 = 3.811 * \varepsilon_1$, $p_3 = 4,4989 * \varepsilon_1$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Тогда суммарная погрешность вычисления интеграла равна $3 * (p_1 + p_2 + p_3 + \varepsilon_2) \leq 3 * (max\{p_1, p_2, p_3\} + \varepsilon_2)/le24 * \varepsilon_1 = \varepsilon$.
Таким образом, можем положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{24}$

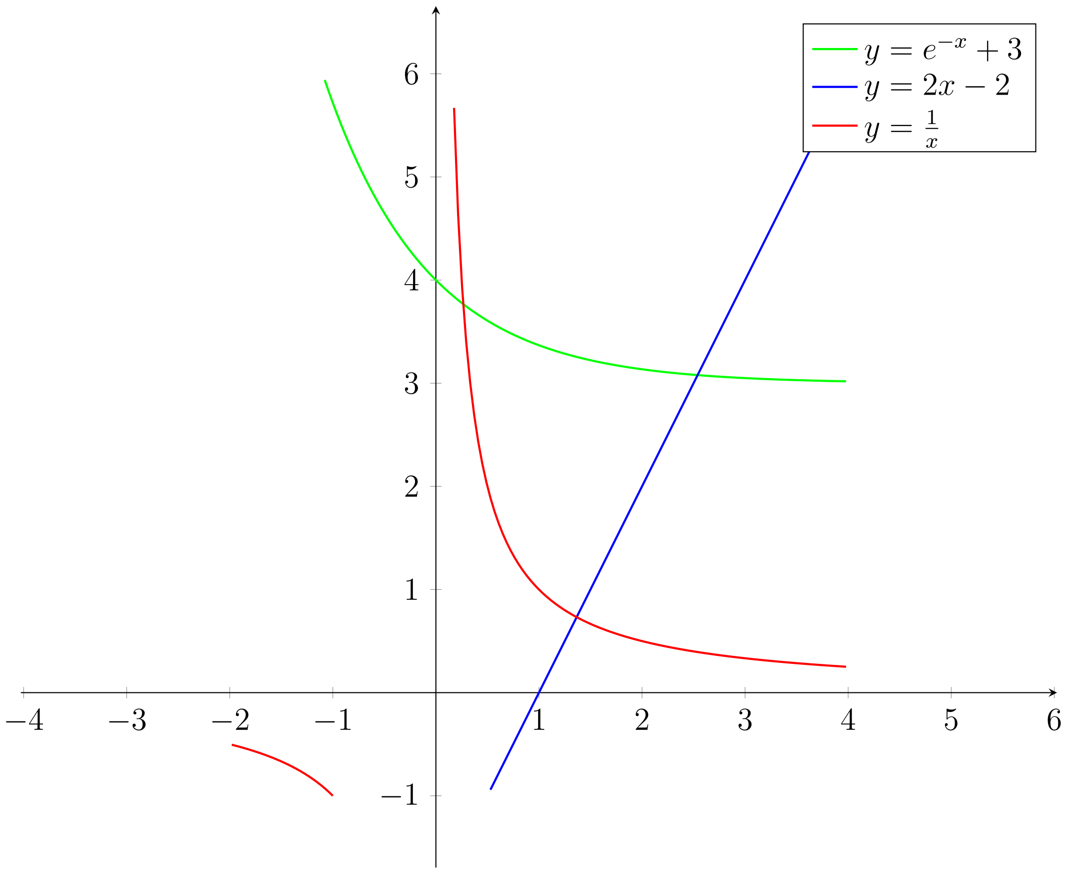

Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Результаты экспериментов

Результаты вычисления абсцисс вершин фигуры приведены в следующей таблице:

Кривые	x	y
1 и 2	2.5394	3.0789
1 и 3	0.2654	3.7668
2 и 3	1.3660	0.7321

Таблица 1: Координаты точек пересечения

Результат вычисления площади фигуры указан в легенде следующего графика:

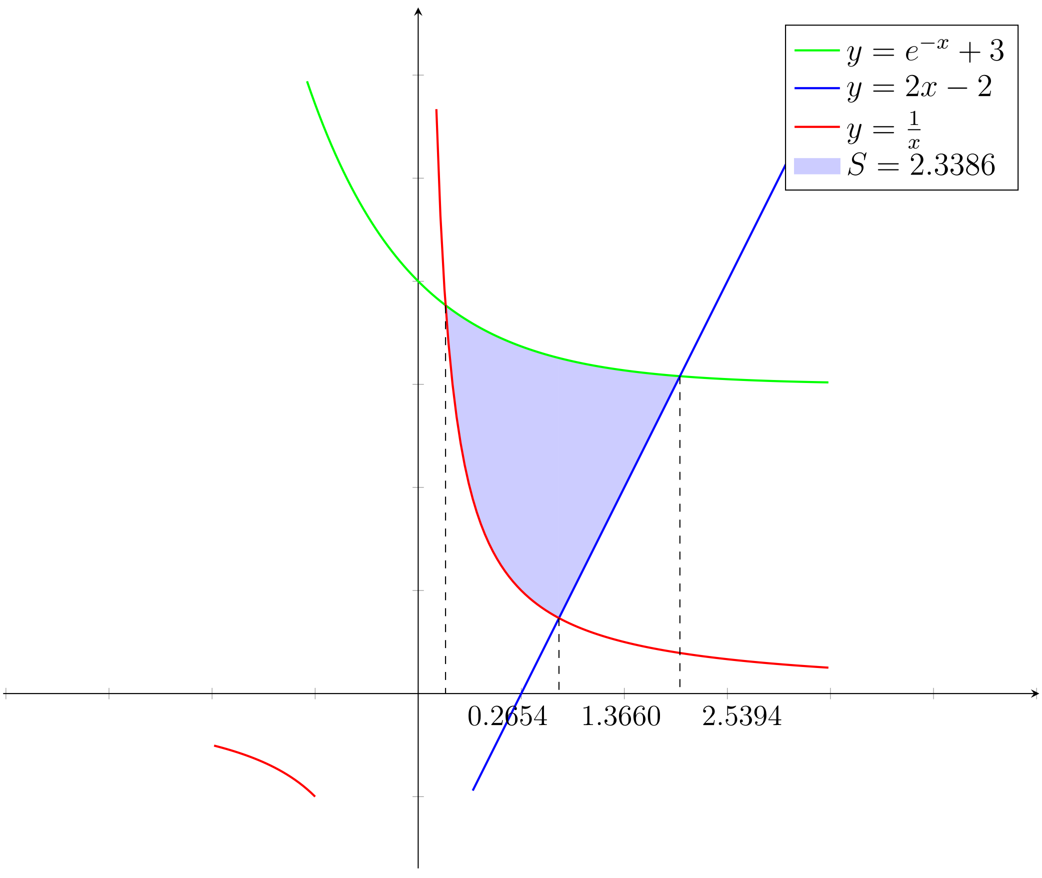

Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Структура программы и спецификация функций

В данном разделе необходимо привести полный список модулей и функций, описать их функциональность.

Все функции написаны на языке Си. Функции f_1, f_2, f_3 реализованы с помощью ассемблерных вставок.

- double f1(double x)
  Функция вычисляет значение выражения $e^{-x} + 3$

- double f2(double x)
  Функция вычисляет значение выражения $2x - 2$

- double f3(double x)
  Функция вычисляет значение выражения $\frac{1}{x}$

- double get_monotone(double (*f)(double), double (*g)(double), double a, double b)
  Функция возвращает 1, если (f - g) - возрастающая, и -1, если (f - g) - убывающая

- double get_convexity(double (*f)(double), double (*g)(double), double a, double b)
  Функция определяет выпуклость функции (f - g) на отрезке [a, b]
  Возвращает 1, если (f - g) выпукла вверх, и -1, если выпукла вниз

- double point(double (*f)(double), double (*g)(double), double a, double b, double epsl, int *k)
  Функция вычисляет абсциссу пересечения хорды функции (f - g) на отрезке [a, b] с осью Ox
  k - указатель на int, хранящий количество итераций

- double root(double (*f)(double), double (*g)(double), double a, double b, double epsl, int *k)
  Функция находит корень уравнения $f(x) = g(x)$ на отрезке [a, b] с точностью epsl методом хорд

- integral(double (*f)(double), double a, double b, double epsl)
  Функция вычисляет интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с точностью epsl методом трапеций

Сборка программы (Make-файл)

Код Make-файла:

```
all: out

out: square_calc.c
@ gcc square_calc.c -std=c99 -masm=intel -o square_calc

clean:
@ rm -rf *.o
```

Программа получается при компиляции единственного файла square_calc.c

Отладка программы, тестирование функций

Тестрование метода хорд нахождения корня уравнения $f(x) = g(x)$ проводилось на следующих функция:

1. $f(x) = e^{-x} + 3$ и $g(x) = 2x - 2$, решение: $x = 2.5394$
2. $f(x) = e^{-x} + 3$ и $g(x) = \frac{1}{x}$, решение: $x = 0.2654$
3. $f(x) = 2x - 2$ и $g(x) = \frac{1}{x}$, решение: $x = 1.3660$

Тестирование метода трапеций нахождения интеграла $\int_a^b f(x)dx$ проводилось на следующих функция:

1. $f(x) = e^{-x} + 3$ на отрезке [-1, 0] : I = 4.718282
2. $f(x) = 2x - 2$ на отрезке [-4, 5] : I = -9.0
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ на отрезке [1, 2.718282] : I = 1.0

Программа на Си и на Ассемблере

Исходный текст программы находится в архиве, приложенном к данному отчёту.

Анализ допущенных ошибок

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.