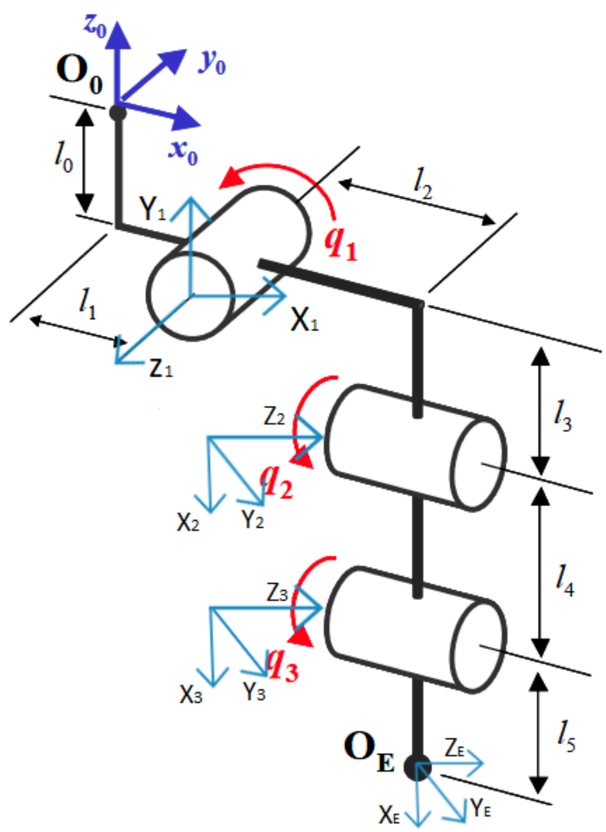
Εξαμηνιαία Εργασία

Αδνρέας Βεζάκης AM: 03117186

30-12-2020

1 Θεωρητική Ανάλυση

1. Αρχικά τοποθετούμε τα πλαίσια συντεταγμένων των αρθρώσεων σύμφωνα με τη σύμβαση $Denavit - Hartenberg$.



Σχήμα 1: Πλαίσια συντεταγμένων.

Ο πίνακας παραμέτρων $Denavit - Hartenberg(D - H)$ που προκύπτει είναι ο εξής:

i	θ_i	d_i	α_i	a_i
1	0	$-l_0$	l_1	$\pi/2$
2	$q_1 - \pi/2$	0	$l_3 = 0$	$-\pi/2$
3	q_2	0	l_4	0
E	q_3	l_2	l_5	0

2. Για να υπολογιστεί η ευθεία κινηματική εξίσωση του ρομπότ, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς A_i^{i-1}. Τους οποίους βρίσκουμε εύκολα βασιζόμενοι στο παραπάνω πινακάκι.

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_4 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_E^3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_5 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_5 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η ευθεία κινηματική εξίσωση του ρομποτικού βραχίονα προκύπτει από την παρακάτω σχέση:
$T(q) = T(q_1, q_2, q_3) = A_1^0 A_2^1 A_3^2 A_E^3 \Rightarrow$

$$T(q) = \begin{bmatrix} s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & c_1 l_2 + c_2 l_4 s_1 + l_1 + l_5 s_1 c_{23} \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_5 s_{23} + l_4 s_2 \\ -c_1 c_{23} & c_1 s_{23} & s_1 & -l_0 - c_1 l_5 c_{23} + l_2 s_1 - c_2 c_1 l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Ο ρομποτικός βραχίονας έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας, συνεπώς η Ιακωβιανή μήτρα J θα είναι $6x3$. Ο άνω $3x3$ υποπίνακας j_L αφορά τις γραμμικές ταχύτητες, ενώ ο κάτω $3x3$ υποπίνακας j_A αφορά τις γωνιακές ταχύτητες.

   - Για $i = 2$: $b_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$
     $r_{1,E} = \begin{bmatrix} c_1 l_2 + c_2 l_4 s_1 + l_5 s_1 c_{23} \\ l_5 s_{23} + l_4 s_2 \\ -c_1 l_5 c_{23} + l_2 s_1 - c_2 c_1 l_4 \end{bmatrix}$
     $j_{L_2} = \begin{bmatrix} -l_2 s_1 + c_1 l_5 c_{23} + c_1 c_2 l_4 \\ 0 \\ c_2 l_4 s_1 + l_5 c_{23} s_1 + c_1 l_2 \end{bmatrix}$
   - Για $i = 3$: $b_2 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \end{bmatrix}^T$
     $r_{2,E} = \begin{bmatrix} c_1 l_2 + c_2 l_4 s_1 + l_5 l_1 c_{23} \\ l_5 s_{23} + l_4 s_2 \\ -c_1 l_5 c_{23} + l_2 s_1 - c_2 c_1 l_4 \end{bmatrix}$
     $j_{L_3} = \begin{bmatrix} -s_1(l_4 s_2 + l_5 s_{23}) \\ c_2 l_4 s_1^2 + l_5 c_{23} s_1^2 + c_1^2 l_5 c_{23} + c_1^2 c_2 l_4 \\ c_1(l_4 s_2 + l_5 s_{23}) \end{bmatrix}$
   - Για $i = E$: $b_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \end{bmatrix}^T$
     $r_{3,E} = \begin{bmatrix} c_1 l_2 + l_5 s_1 c_{23} \\ l_5 s_{23} \\ l_2 s_1 - c_1 l_5 c_{23} \end{bmatrix}$
     $j_{L_3} = \begin{bmatrix} -l_5 s_1 s_{23} \\ c_{23} l_5 \\ c_1 l_5 s_{23} \end{bmatrix}$

   Συνεπώς, η Ιακωβιανή μήτρα θα έχει την μορφή:
   $$J = \begin{bmatrix} -l_2 s_1 + c_1 l_5 c_{23} + c_1 c_2 l_4 & -s_1(l_4 s_2 + l_5 s_{23}) & -l_5 s_1 s_{23} \\ 0 & c_2 l_4 + l_5 c_{23} & c_{23} l_5 \\ c_2 l_4 s_1 + l_5 c_{23} s_1 + c_1 l_2 & c_1(l_4 s_2 + l_5 s_{23}) & c_1 l_5 s_{23} \\ 0 & c_1 & c_1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 \end{bmatrix}$$

και το ευθύ διαφορικό μοντέλο περιγράφεται από τη σχέση:

$$\dot{p} = J\dot{q}$$

4. Η λύση του διαφορικού προβλήματος βρίσκεται από την λύση του συστήματος:

$$\dot{q} = J_L^{-1} u_e$$

Ισχύει ότι $J_L^{-1} = \dfrac{1}{det(J_M)} * adj(J_M)$
Για το συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε:

$$\frac{1}{det(J_M)} = \frac{1}{s_3 l_4 l_5 (c_2 l_4 + c_{23} l_5)}$$

και,

$$adj(J_L) =$$
$$\begin{bmatrix} c_1 s_3 l_4 l_5 & c_{23} l_5 (c_1 l_2 + s_1 c_2 l_4 + s_1 c_{23} l_5) & -(l_2 c_1 + l_4 s_1 c_2 + l_5 s_1 c_{23}) l_4 c_2 \\ 0 & l_5 s_{23} (l_4 c_2 + l_5 c_{23}) & -(l_4 s_2 + l_5 c_{23})(l_4 c_2 + l_5 c_{23}) \\ s_1 s_3 l_4 l_5 & (l_2 s_1 - l_4 c_1 c_2 - l_5 c_1 c_{23}) l_5 c_{23} & (-l_2 s_1 + l_4 c_1 c_2 + l_5 c_1 c_{23}) l_4 c_2 \end{bmatrix}$$

Για την εύρεση των ιδιόμορφων διατάξεων, δηλαδή των θέσεων εκείνων στις οποίες ο ρομποτικός χειριστής χάνει έναν ή περισσότερους βαθμούς ελευθερίας, αρκεί να βρούμε τις τιμές των q_1, q_2, q_3 για τις οποίες μηδενίζονται οι ορίζουσες των υποπινάκων J_M και J_L.

$$det(J_L) = 0 \Rightarrow l_4 l_5 s_3 (l_4 c_2 + l_5 c_{23}) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} s_3 = 0 \\ l_4 c_2 + l_5 c_{23} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_3 = k\pi, & k = 0, 1 \\ l_4 c_2 + l_5 c_{23} = 0 \end{cases}$$

Επίσης, βρίσκουμε ότι:

$$det(J_A) = 0$$

Επομένως, δεν είναι εφικτός ο προσδιορισμός των ιδιόμορφων διατάξεων ως προς την γωνιακή ταχύτητα.

5. Από τα προηγούμενα είναι γνωστά τα εξής:

$$\begin{cases} p_x = (l_5c_{23} + l_4c_2)s_1 + l_2c_1 + l1 \\ p_y = l_5s_{23} + l_4s_2 \\ p_z = -(l_5c_{23} + l_4c_2)c_1 + l_2s_1 - l_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p'_x = p_x - l_1 \\ p_y = l_5s_{23} + l_4s_2 \\ p'_z = p_z + l_0 \end{cases}$$

$p'^2_x + p'^2_z = (l_5c_{23} + l_4c_2)^2 + l_2^2$
$p'^2_x + p_y^2 + p'^2_z = l_5^2 + l_4^2 + l_2^2 + 2l_4l_5(c_{23}c_2 + s_{23}s_2)$

Από το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε ότι:

$$c_3 = \frac{p'^2_x + p_y^2 + p'^2_z - l_5^2 - l_4^2 - l_2^2}{2l_4l_5} \Rightarrow q_3 = atan2(s_3, c_3)$$

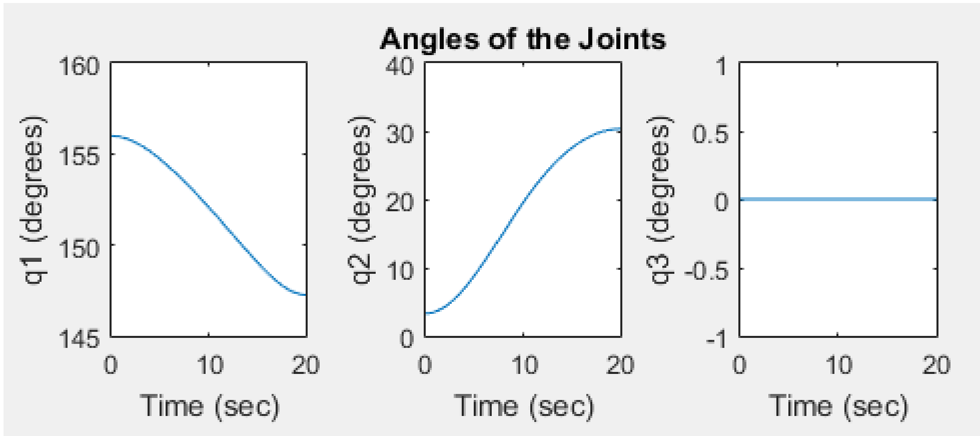
$p_x" = p'_x - l_5n_x = a$
$p_z" = p'_z - l_5n_z = b$

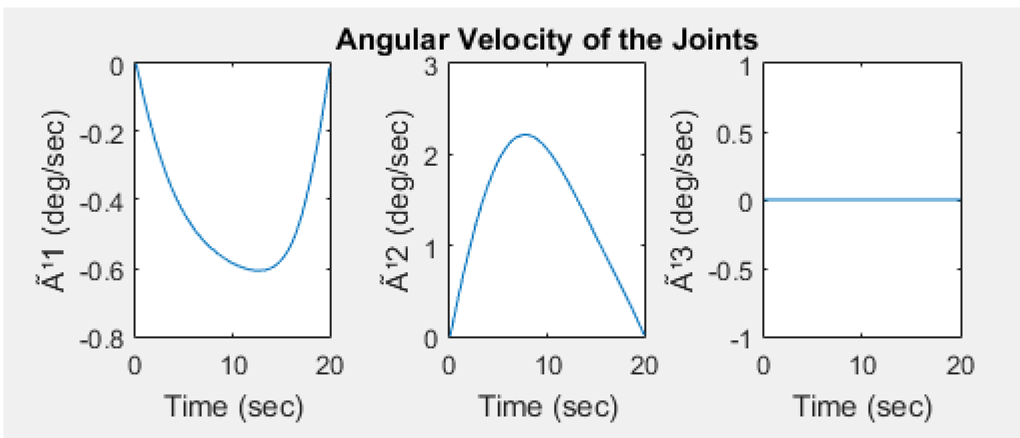
$$a^2 + b^2 = l_2^2 + l_4^2c_2^2 \Rightarrow c_2 = \pm\sqrt{\frac{a^2 + b^2 - l_2^2}{l_4^2}} \Rightarrow q_2 = atan2(s_2, c_2)$$

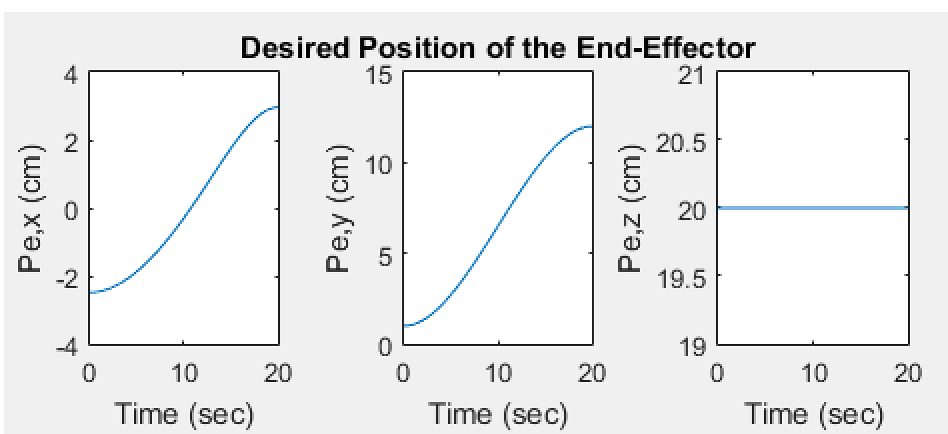
Γνωρίζοντας τα q_2, q_3 μπορούμε να υπολογίσουμε το q_1 από τα p'_x και p'_z
Συνεπώς, έχουμε:

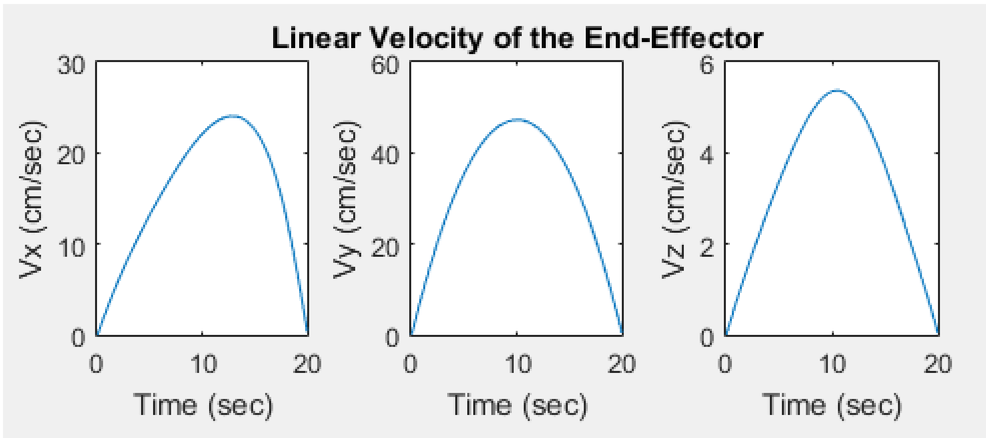
$$q_1 = atan2(p'_x, -p'_z) - atan2(l_2, l_5c_{23} + l_4c_2)$$

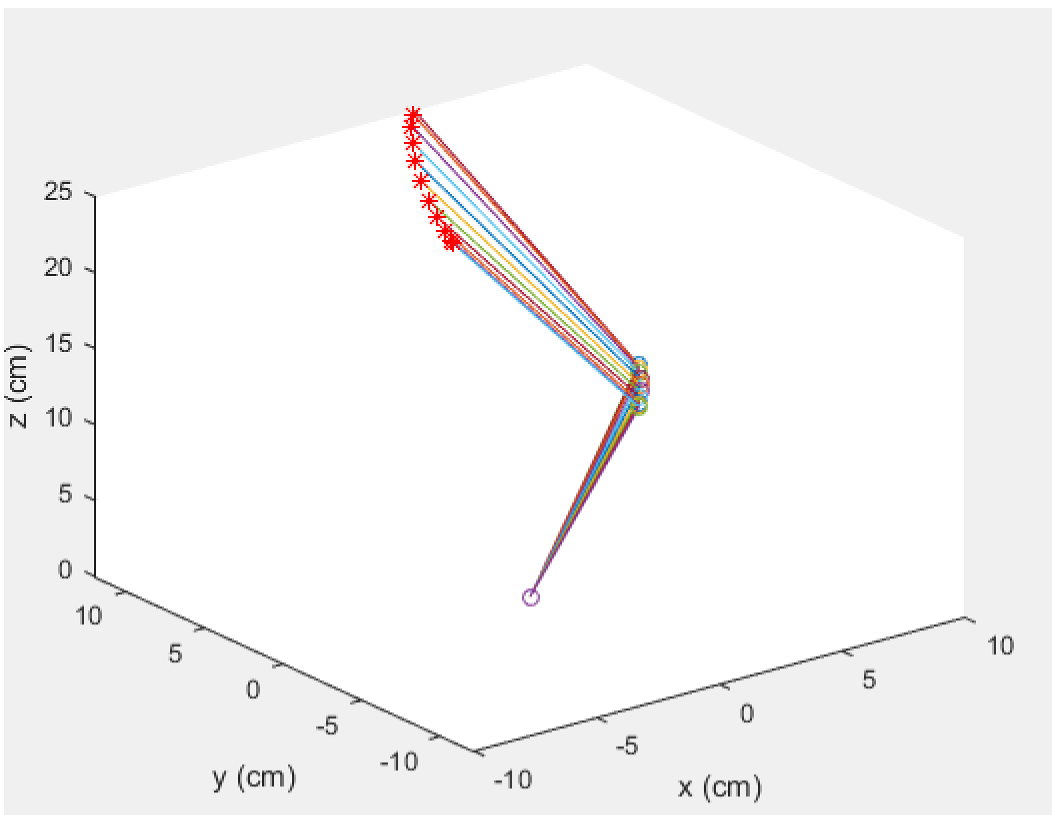
2 Κινηματική Προσομοίωση


Angles of the Joints
q1 (degrees)
q2 (degrees)
q3 (degrees)
Time (sec)
Time (sec)
Time (sec)


Angular Velocity of the Joints
Ã¹1 (deg/sec)
Ã¹2 (deg/sec)
Ã¹3 (deg/sec)
Time (sec)
Time (sec)
Time (sec)


Desired Position of the End-Effector
Pe,x (cm)
Pe,y (cm)
Pe,z (cm)
Time (sec)
Time (sec)
Time (sec)





Σχήμα 2: *Animation* Κινησης