

ĐỒ HỌA 3D

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI 3D

Công thức biến đổi



Biến đổi dạng ánh xạ

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$P \mapsto P'$$

Biến đổi dạng hàm

$$P' = T(P)$$

hay

$$\left\| \begin{array}{l} P'_x = T_x(P_x, P_y, P_z) \\ P'_y = T_y(P_x, P_y, P_z) \\ P'_z = T_z(P_x, P_y, P_z) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} x' = T_x(x, y, z) \\ y' = T_y(x, y, z) \\ z' = T_z(x, y, z) \end{array} \right\|$$

Biến đổi Taper



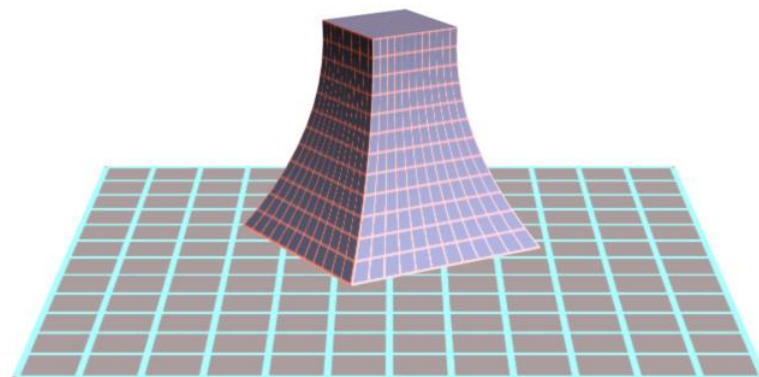
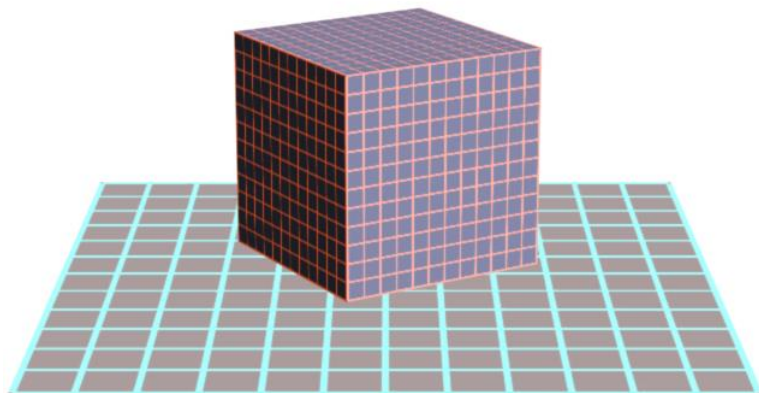
Dạng hàm

$$x' = T_x(x, y, z) = rx$$

$$y' = T_y(x, y, z) = ry$$

$$z' = T_z(x, y, z) = z$$

với $r = f(z)$



Biến đổi Twist



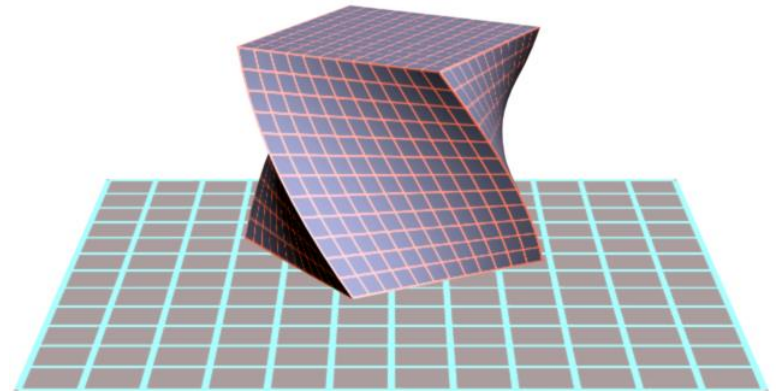
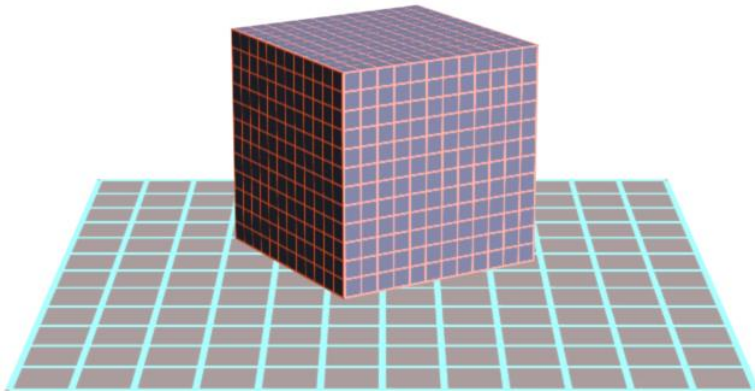
Dạng hàm

$$x' = T_x(x, y, z) = x \cos \theta - y \sin \theta$$

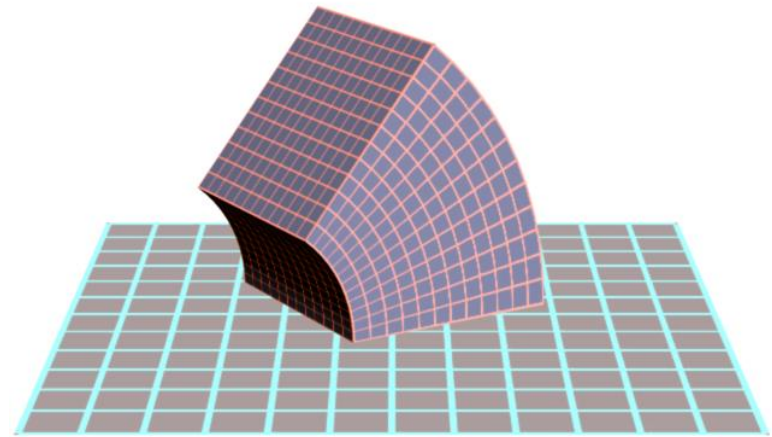
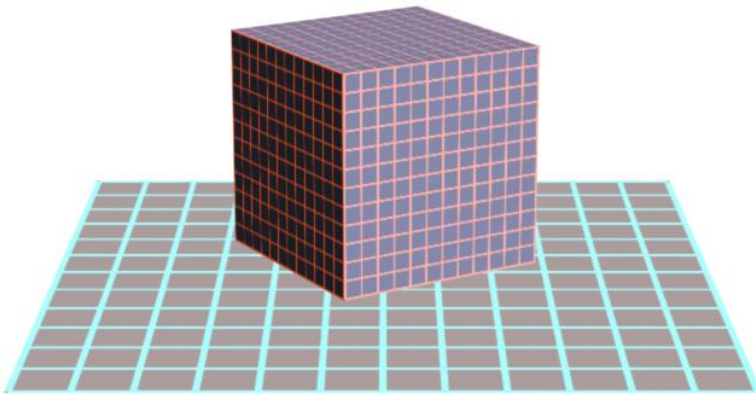
$$y' = T_y(x, y, z) = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = T_z(x, y, z) = z$$

với $\theta = f(z)$



Biến đổi Bend



Biến đổi affine



Dạng hàm :

$$\begin{cases} P'_x = m_{00}P_x + m_{10}P_y + m_{20}P_z + m_{30} \\ P'_y = m_{01}P_x + m_{11}P_y + m_{21}P_z + m_{31} \\ P'_z = m_{02}P_x + m_{12}P_y + m_{22}P_z + m_{32} \end{cases}$$

Dạng ma trận :

$$\begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & P_y & P_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & 0 \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & 0 \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

Cấu trúc dữ liệu cho biến đổi affine



```
// Lưu thông tin phép biến đổi  
struct TAffine3D {  
    double M[4][4];  
};
```



❖ Những kết quả của biến đổi 2D vẫn đúng cho biến đổi 3D

Phép biến đổi affine 3D có 3 tính chất

- Bảo toàn tính thẳng
- Bảo toàn tính song song
- Bảo toàn tỉ lệ

Nguyên lý kết hợp và phân rã



Nếu T_1, T_2 là phép biến đổi affine 3D

Thì

- $T = T_1 + T_2$ là phép biến đổi affine 3D
- $M = M_1 \times M_2$

Mọi phép biến đổi affine đều có thể phân rã thành một chuỗi các phép biến đổi cơ bản

Phép tịnh tiến

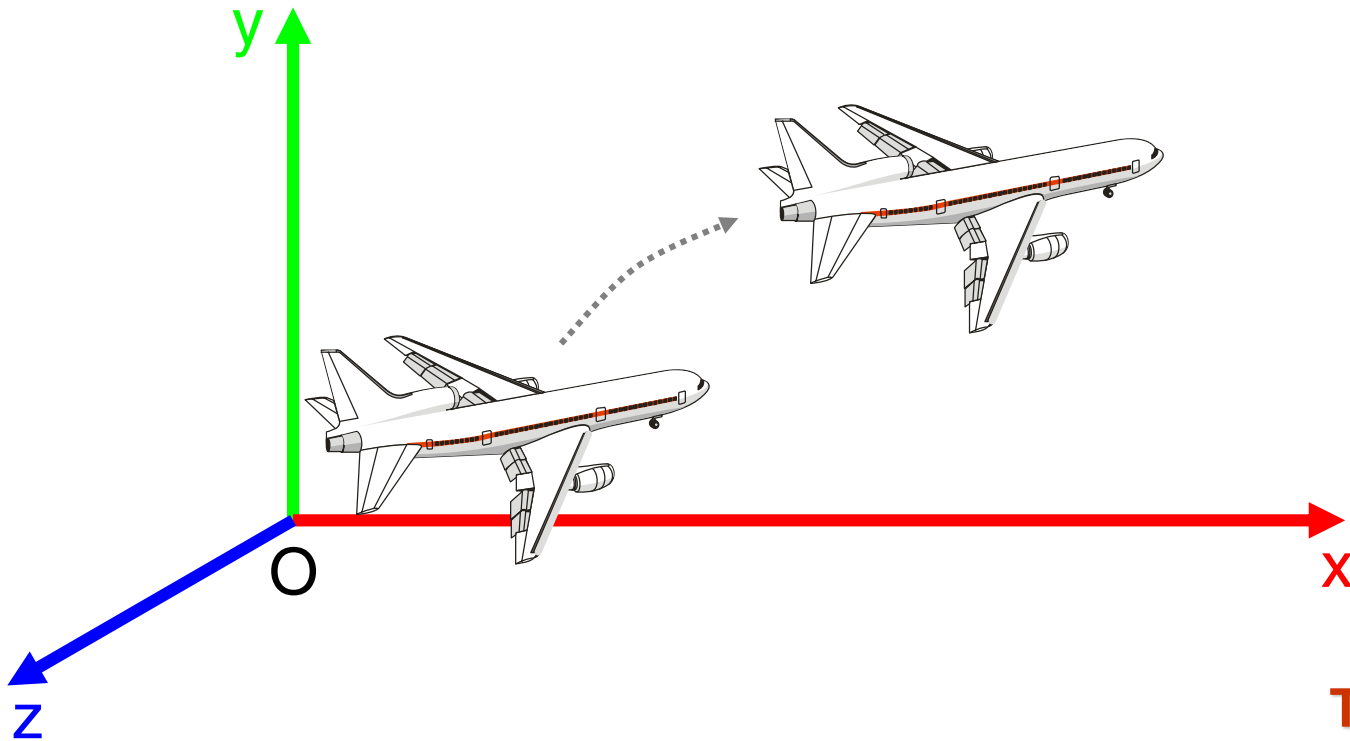


Tham số :

độ dời trên trục $Ox : t_x$

độ dời trên trục $Oy : t_y$

độ dời trên trục $Oz : t_z$





Dạng hàm

$$\begin{cases} P'_x = P_x + t_x \\ P'_y = P_y + t_y \\ P'_z = P_z + t_z \end{cases}$$

Dạng ma trận

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{pmatrix}$$



```
TAffine3D BuildTranslation3D(double tx, double ty, double tz)
{
    TAffine3D T;

    T.M[0][0]= 1;T.M[0][1]= 0;T.M[0][2]= 0;T.M[0][3]=0;
    T.M[1][0]= 0;T.M[1][1]= 1;T.M[1][2]= 0;T.M[1][3]=0;
    T.M[2][0]= 0;T.M[2][1]= 0;T.M[2][2]= 1;T.M[2][3]=0;
    T.M[3][0]=tx;T.M[3][1]=ty;T.M[3][2]=tz;T.M[3][3]=1;

    return T;
}
```

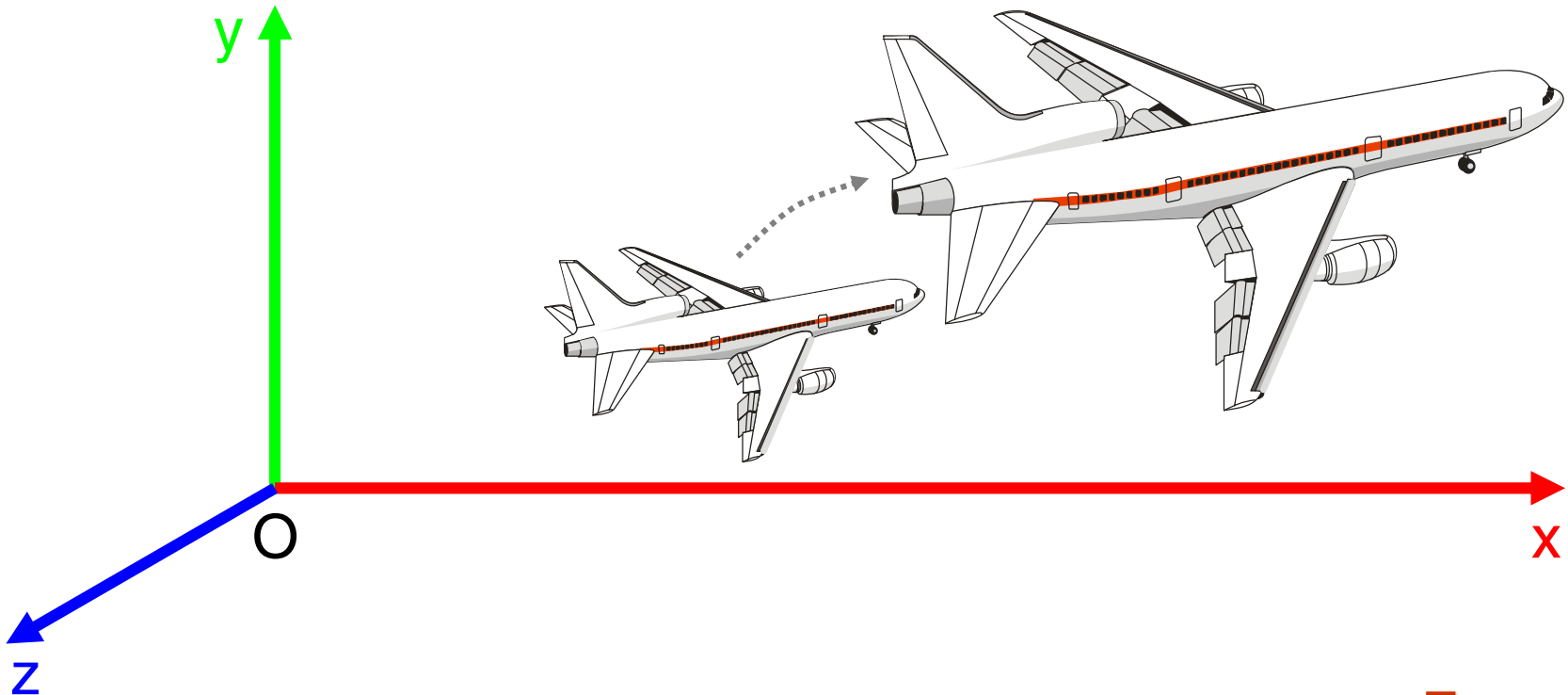
Phép tỉ lệ



Tham số :

Tâm tỉ lệ : O

Hệ số tỉ lệ trên 3 trục : s_x, s_y, s_z





Dạng hàm

$$\begin{cases} P'_x = s_x P_x \\ P'_y = s_y P_y \\ P'_z = s_z P_z \end{cases}$$

Dạng ma trận

$$M = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



```
TAffine3D BuildScaling3D(double sx, double sy, double sz)
{
    TAffine3D T;

    T.M[0][0]=sz;T.M[0][1]= 0;T.M[0][2]= 0;T.M[0][3]=0;
    T.M[1][0]= 0;T.M[1][1]=sy;T.M[1][2]= 0;T.M[1][3]=0;
    T.M[2][0]= 0;T.M[2][1]= 0;T.M[2][2]=sz;T.M[2][3]=0;
    T.M[3][0]= 0;T.M[3][1]= 0;T.M[3][2]= 0;T.M[3][3]=1;

    return T;
}
```

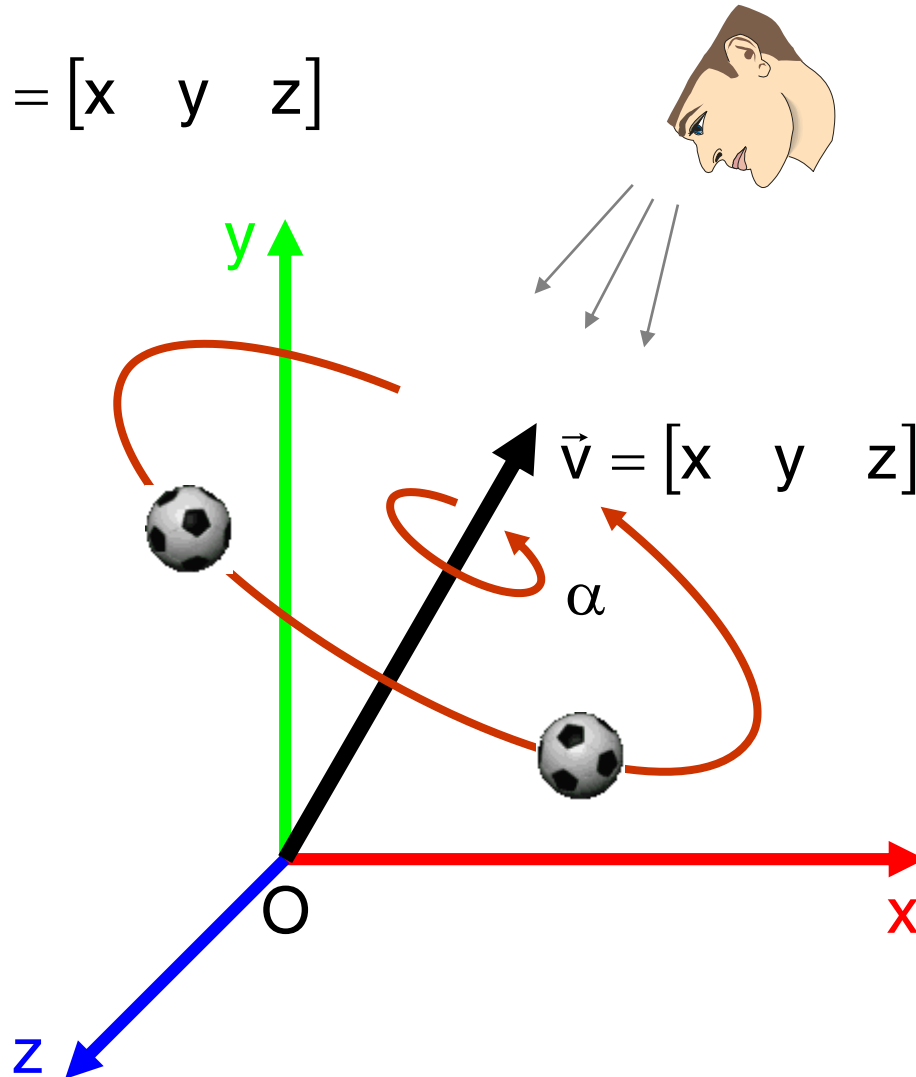
Phép quay



Tham số :

Trục quay : $\vec{v} = [x \ y \ z]$

Góc quay : α



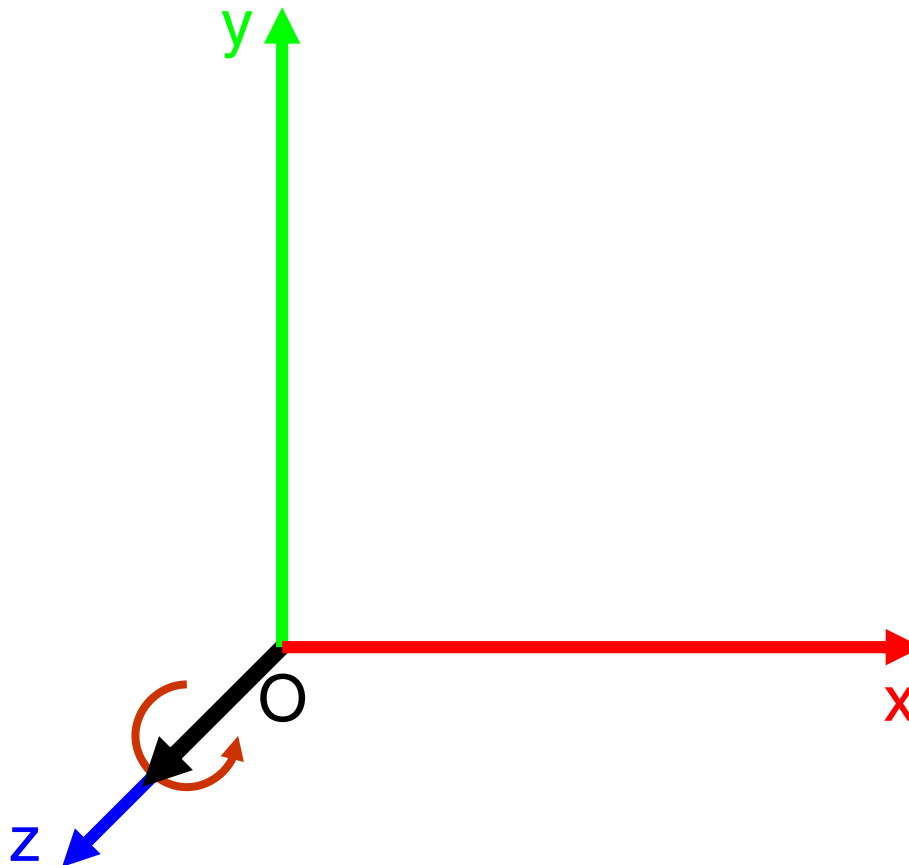
Quay quanh trục Oz

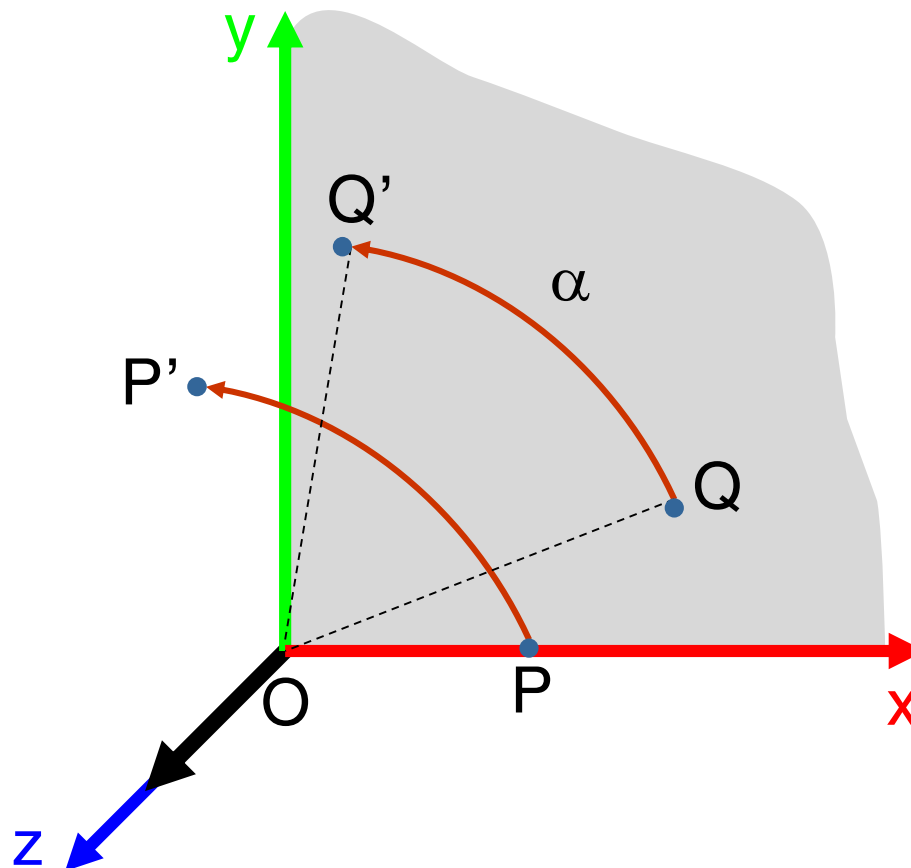


Tham số :

Trục quay : $\vec{v} = [0 \quad 0 \quad 1]$

Góc quay : α







Dạng hàm

$$\begin{cases} P'_x = \cos \alpha P_x - \sin \alpha P_y \\ P'_y = \sin \alpha P_x + \cos \alpha P_y \\ P'_z = P_z \end{cases}$$

Dạng ma trận

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

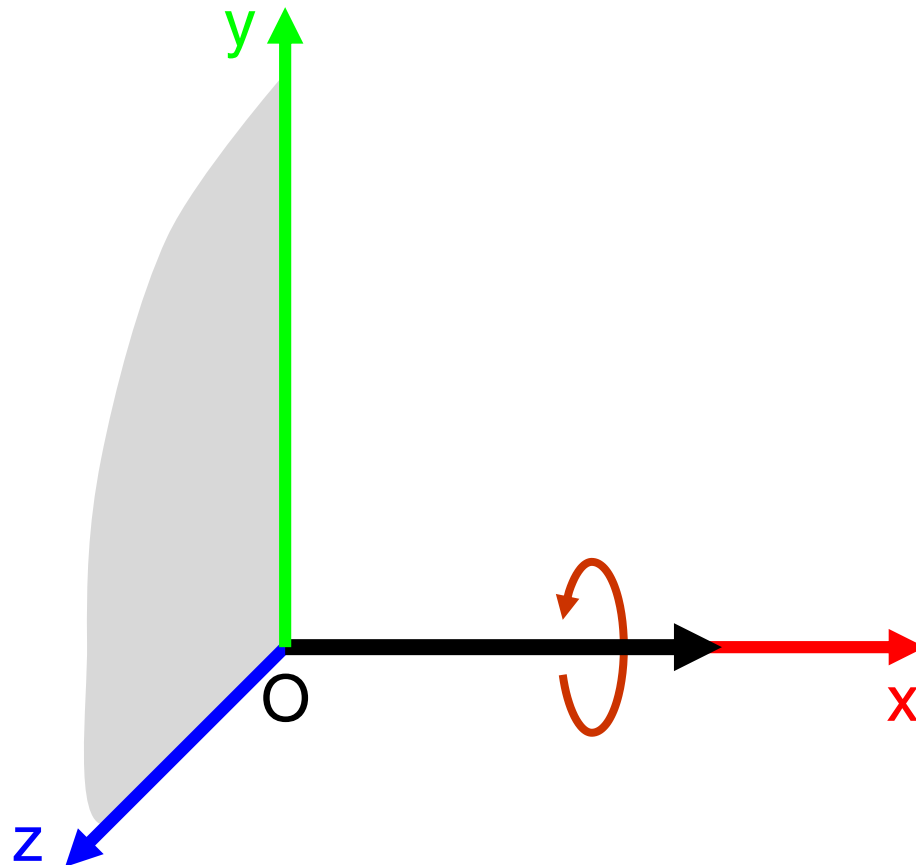
Quay quanh trục Ox



Tham số :

Trục quay : $\vec{v} = [1 \ 0 \ 0]$

Góc quay : α





Dạng hàm

$$\begin{cases} P'_x = P_x \\ P'_y = \cos \alpha P_y - \sin \alpha P_z \\ P'_z = \sin \alpha P_y + \cos \alpha P_z \end{cases}$$

Dạng ma trận

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

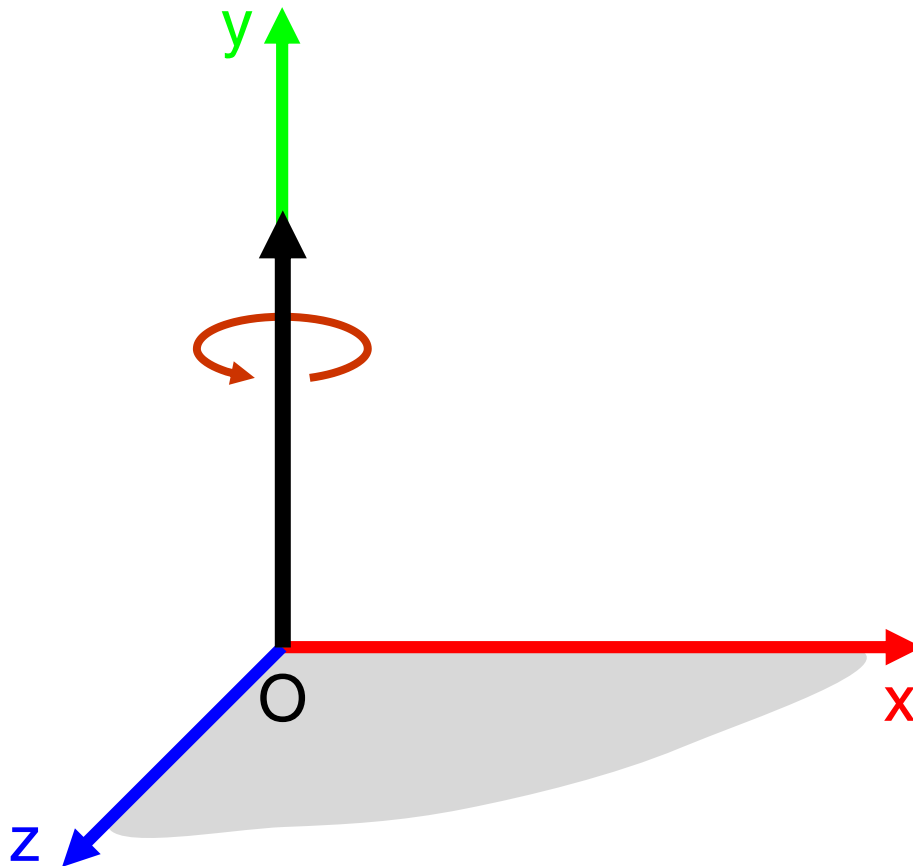
Quay quanh trục Oy



Tham số :

Trục quay : $\vec{v} = [0 \quad 1 \quad 0]$

Góc quay : α





Dạng hàm

$$P'_x = \cos \alpha P_x + \sin \alpha P_z$$

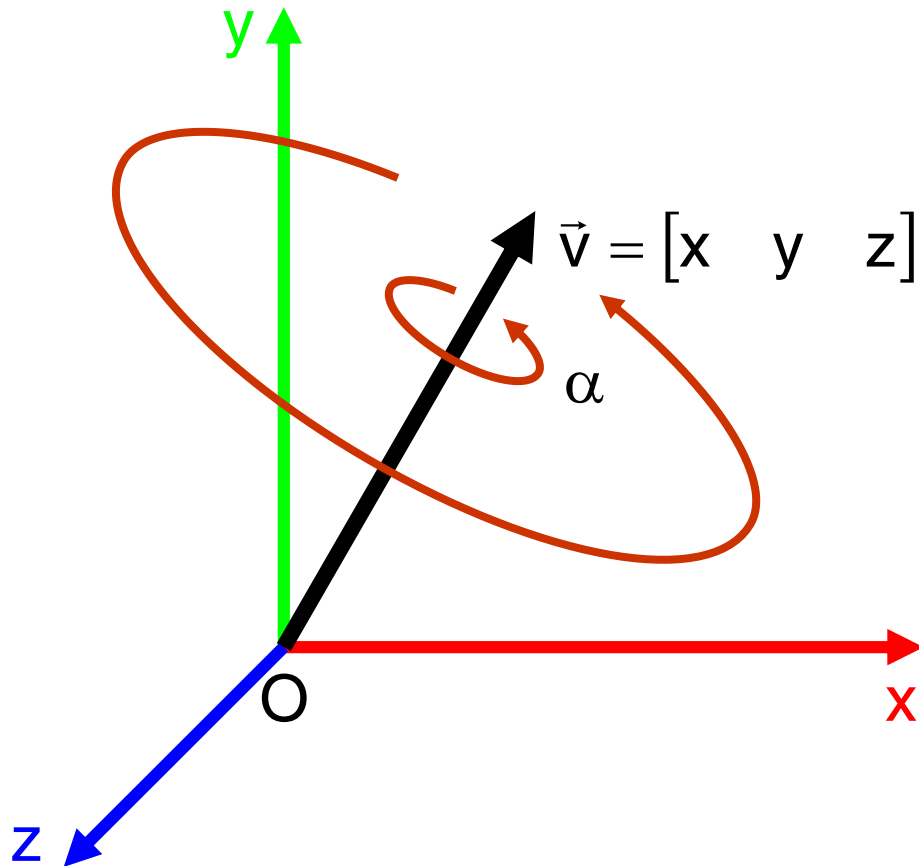
$$P'_y = P_y$$

$$P'_z = -\sin \alpha P_x + \cos \alpha P_z$$

Dạng ma trận

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

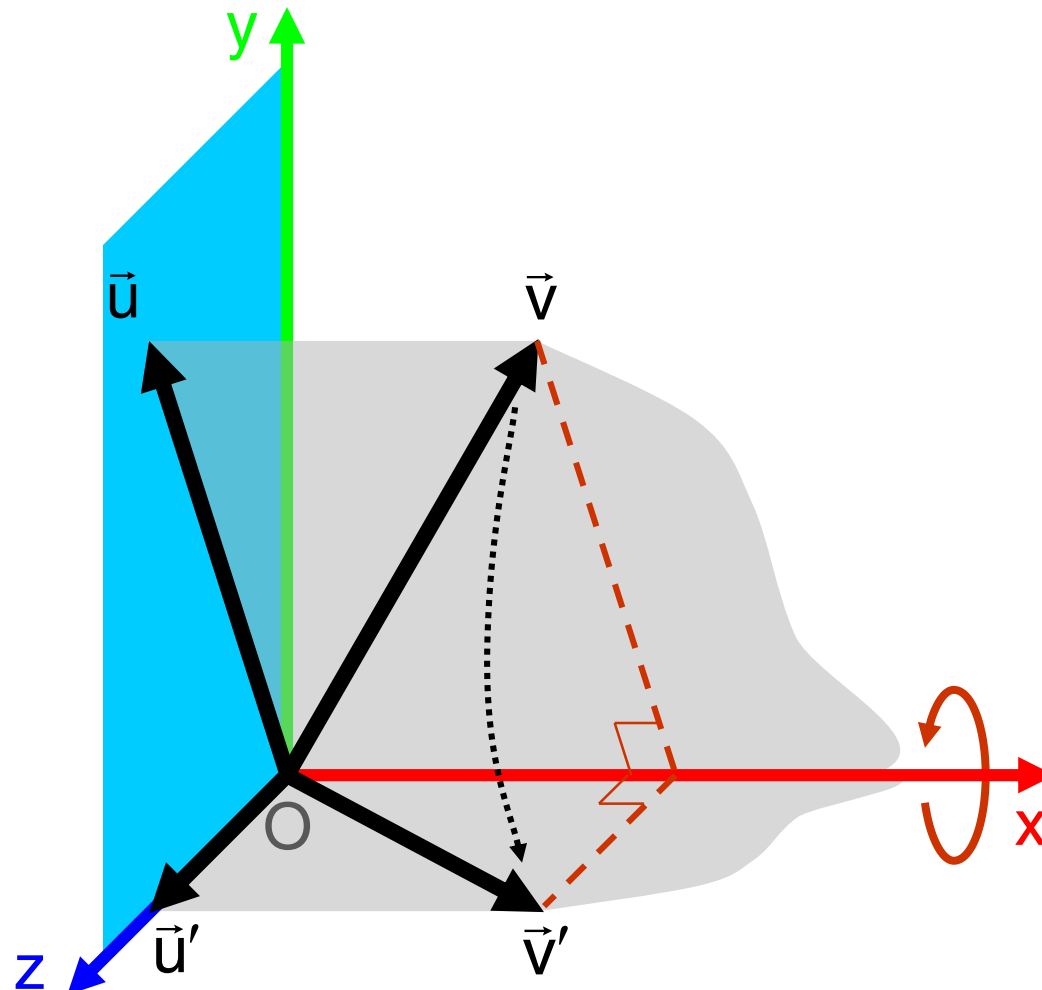
Quay quanh trục đi qua gốc



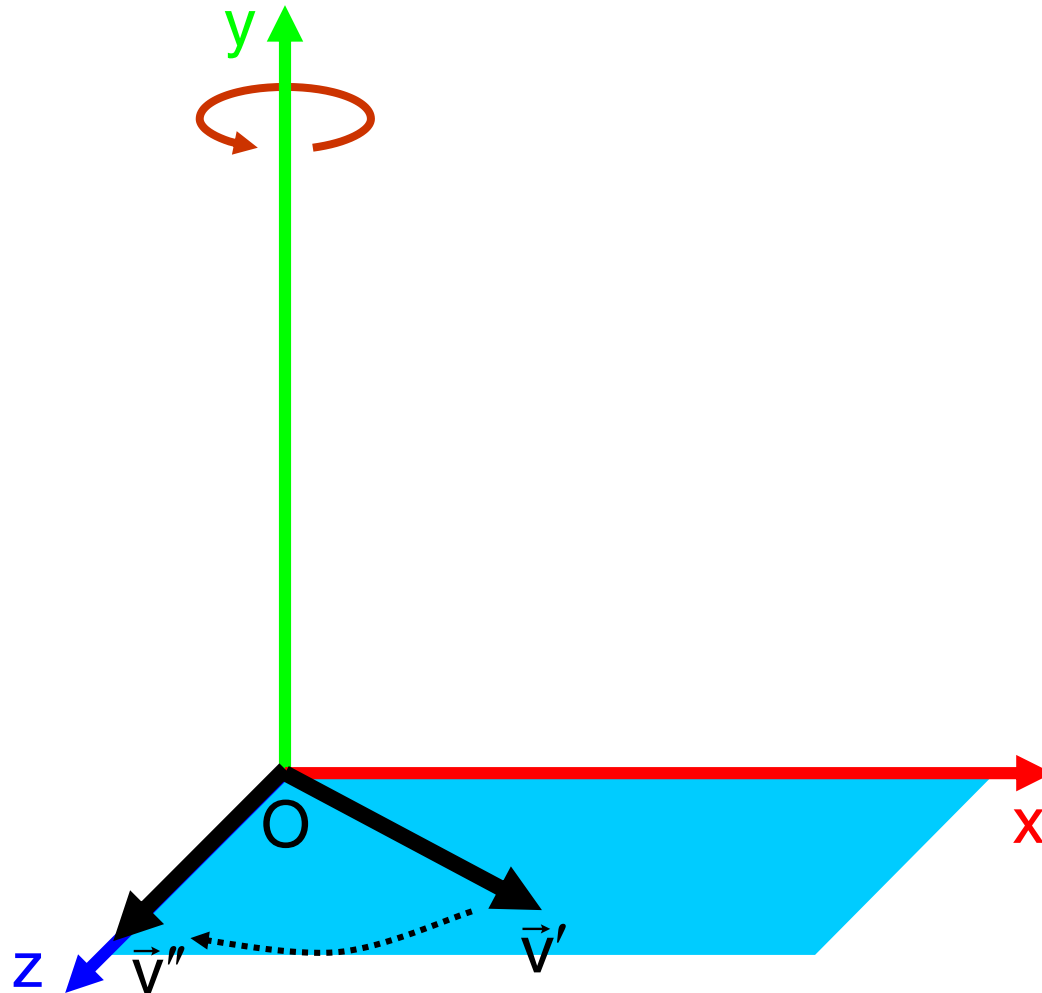
Phép biến đổi Quay(trục v , α)
được phân tích thành :

1. Quay(trục Ox , γ)
2. Quay(trục Oy , β)
3. Quay(trục Oz , α)
4. Quay(trục Oy , $-\beta$)
5. Quay(trục Ox , $-\gamma$)

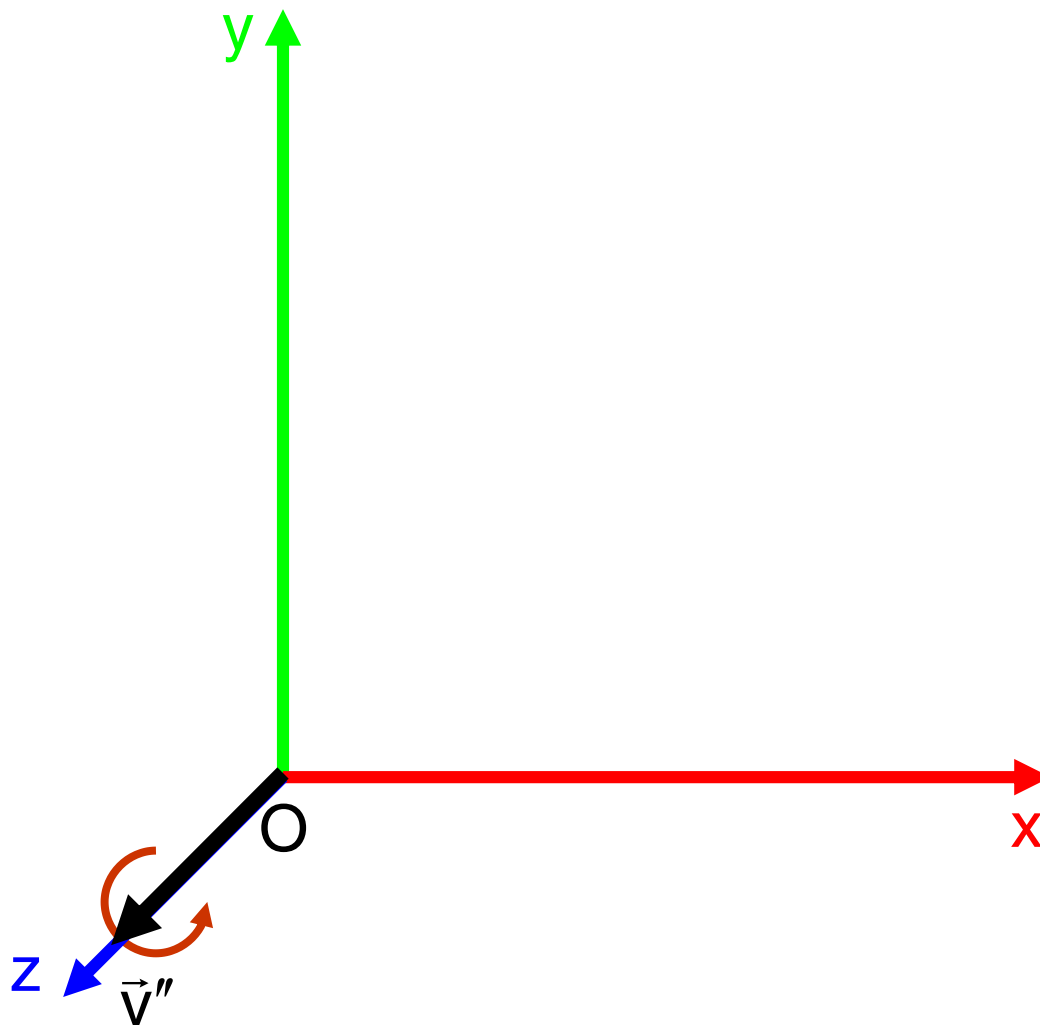
Quay(trục Ox, γ)



Quay(trục Oy, β)



Quay(trục Oz, α)



Công thức



Dạng ma trận

$$\vec{v} = [x \quad y \quad z]$$

$$c = \cos \alpha$$

$$s = \sin \alpha$$

$$M = \begin{pmatrix} xx(1-c) + c & yx(1-c) + zs & zx(1-c) - ys & 0 \\ xy(1-c) - zs & yy(1-c) + c & zy(1-c) + xs & 0 \\ xz(1-c) + ys & yz(1-c) - xs & zz(1-c) + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



```
TAffine3D BuildRotation3D(double angle,  
                           double x, double y, double z)  
{  
    TAffine3D T;  
    double c, s, d;  
  
    angle *= PI/180;  
    c = cos(angle);  
    s = sin(angle);  
    d = sqrt(x*x + y*y + z*z);  
    if(d == 0) return;  
    x /= d;  
    y /= d;  
    z /= d;  
  
    T.M[0][0] = x*x*(1-c) + c;  
    T.M[1][0] = x*y*(1-c) - z*s;  
    T.M[2][0] = x*z*(1-c) + y*s;  
    T.M[3][0] = 0;
```

Cài đặt ...



```
T.M[0][1] = y*x*(1-c) + z*s;  
T.M[1][1] = y*y*(1-c) + c;  
T.M[2][1] = y*z*(1-c) - x*s;  
T.M[3][1] = 0;
```

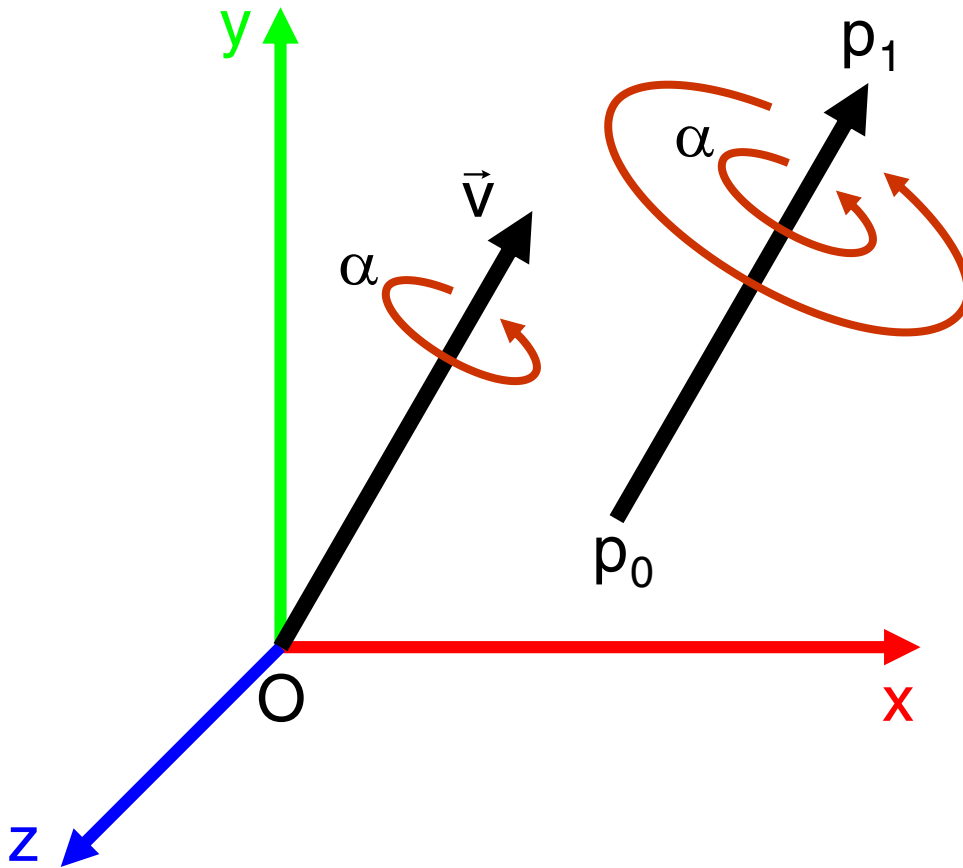
```
T.M[0][2] = z*x*(1-c) - y*s;  
T.M[1][2] = z*y*(1-c) + x*s;  
T.M[2][2] = z*z*(1-c) + c;  
T.M[3][2] = 0;
```

```
T.M[0][3] = 0;  
T.M[1][3] = 0;  
T.M[2][3] = 0;  
T.M[3][3] = 1;
```

```
return T;
```

```
}
```

Quay quanh một trục bất kỳ



Tính v

$$v = p_1 - p_0$$

Biến đổi Quay(trục p_0p_1 , α) được phân tích thành

1. Tịnh_tiến($-p_{0x}$, $-p_{0y}$, $-p_{0z}$)
2. Quay(trục v , α)
3. Tịnh_tiến(p_{0x} , p_{0y} , p_{0z})