

ĐỒ HỌA FRACTAL

Nội dung

1. Tổng quan Fractal
2. IFS
3. L-System
4. Tập Mandelbrot

Tổng quan Fractal

Fractal là gì ?

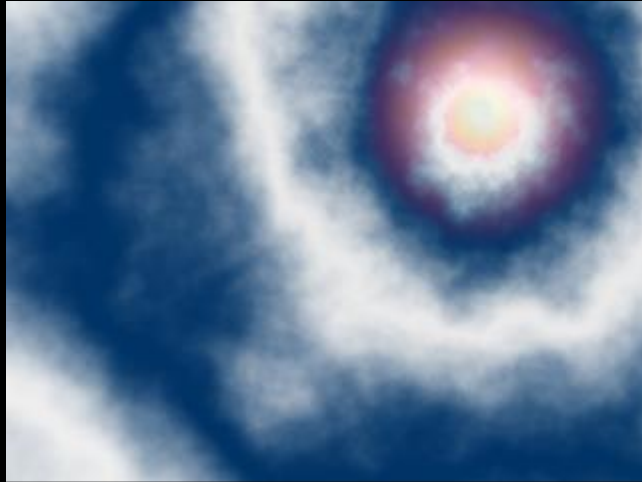
Đây là môn hình học nghiên cứu sự “**tự đồng dạng**” của thế giới tự nhiên



Ứng dụng Fractal

1. Ứng dụng trong tạo ảnh
2. Ứng dụng trong nén ảnh
3. Ứng dụng trong nghiên cứu khoa học cơ bản

Tạo ảnh



Tạo ảnh



Michael P. Cox 2002

Đường cong Van Kock

Step 1 (tập gốc)

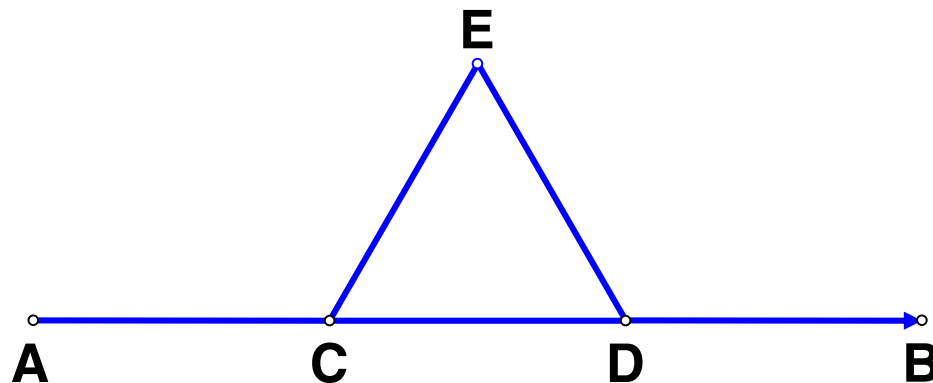
Lấy một đoạn thẳng AB.

Step 2 (quy tắc sinh)

1. Chia AB ra làm 3 phần bằng nhau {AC, CD, DB}.
2. Bỏ đoạn thẳng CD.
3. Thêm hai đoạn thẳng CE, ED.

Step 3

Lặp lại **Step 2** cho cho các đoạn thẳng.



Đường cong Van Kock

Kết quả

$n=0$



$n=1$



$n=2$



Đường cong Minkowski

Step 1 (*tập gốc*)

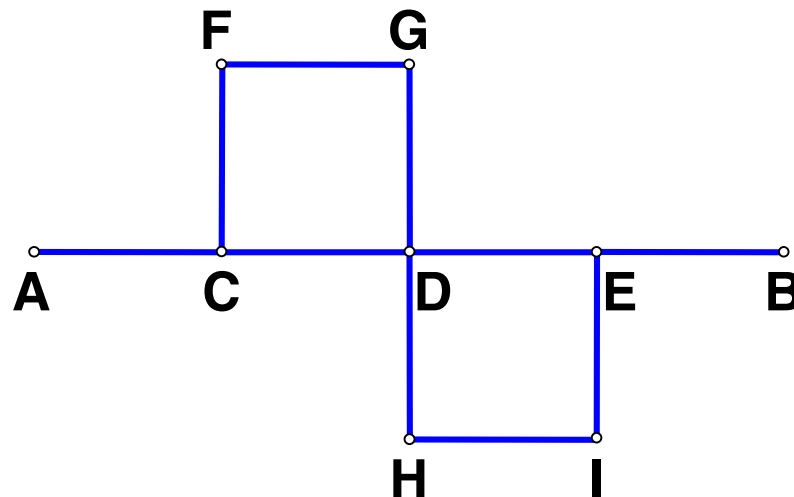
Lấy một đoạn thẳng AB.

Step 2 (*quy tắc sinh*)

1. Chia AB ra làm 4 phần bằng nhau {AC, CD, DE, EB}.
2. Bỏ hai đoạn thẳng CD, DE.
3. Thêm sáu đoạn thẳng CF, FG, GD, DH, HI, IE.

Step 3

Lặp lại **Step 2** cho các đoạn thẳng.

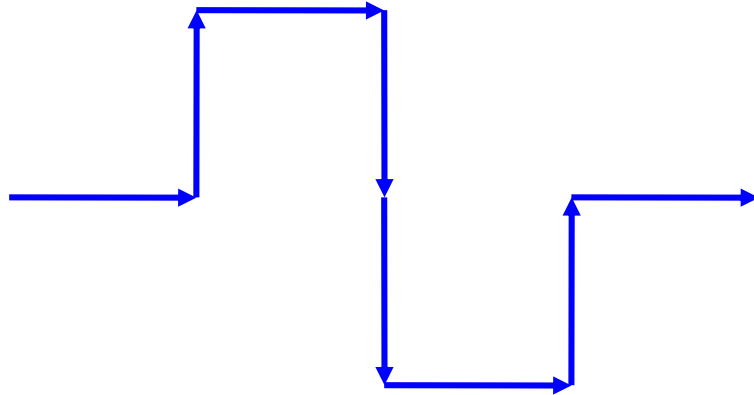


Đường cong Minkowski

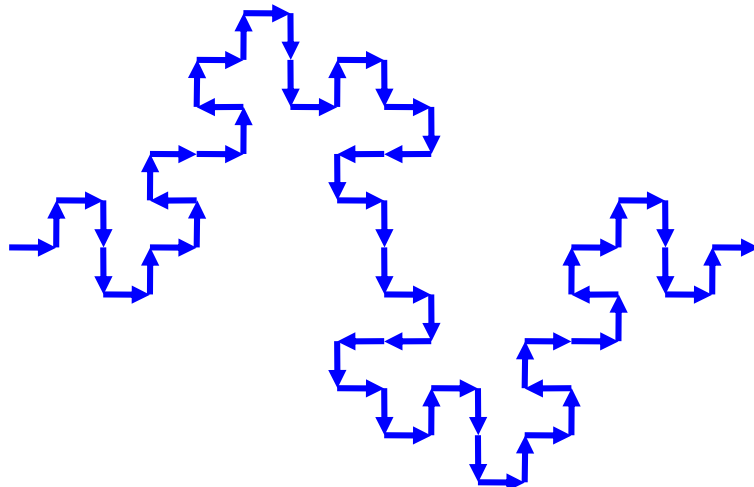
Kết quả $n=0$



$n=1$



$n=2$



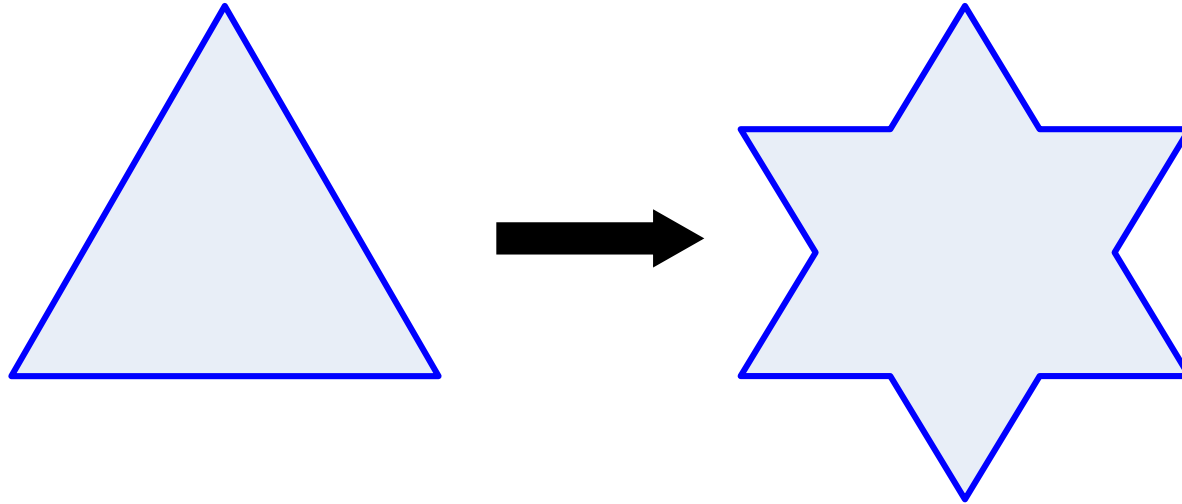
Bông tuyết Van Kock

Step 1 (*tập gốc*)

Lấy một tam giác đều.

Step 2 + 3 (*quy tắc sinh*)

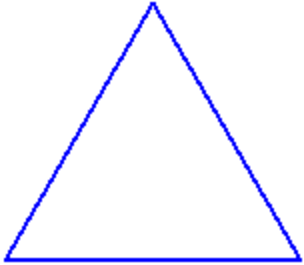
Biến đổi các cạnh thành đường cong Van Kock.



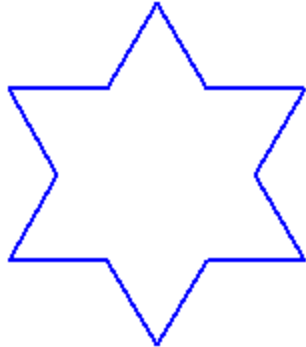
Bông tuyết Van Kock

Kết quả

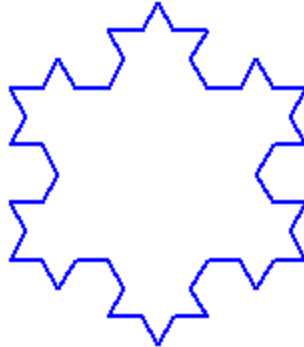
$n=0$



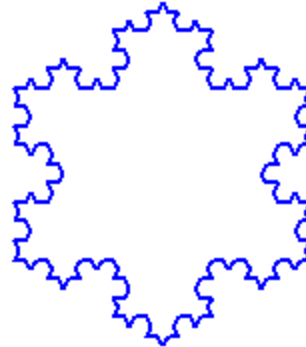
$n=1$



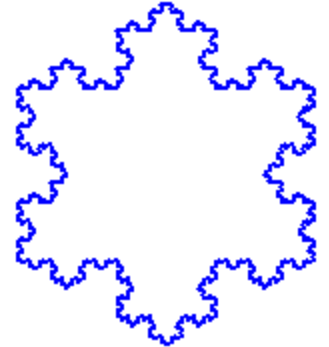
$n=2$



$n=3$



$n=4$



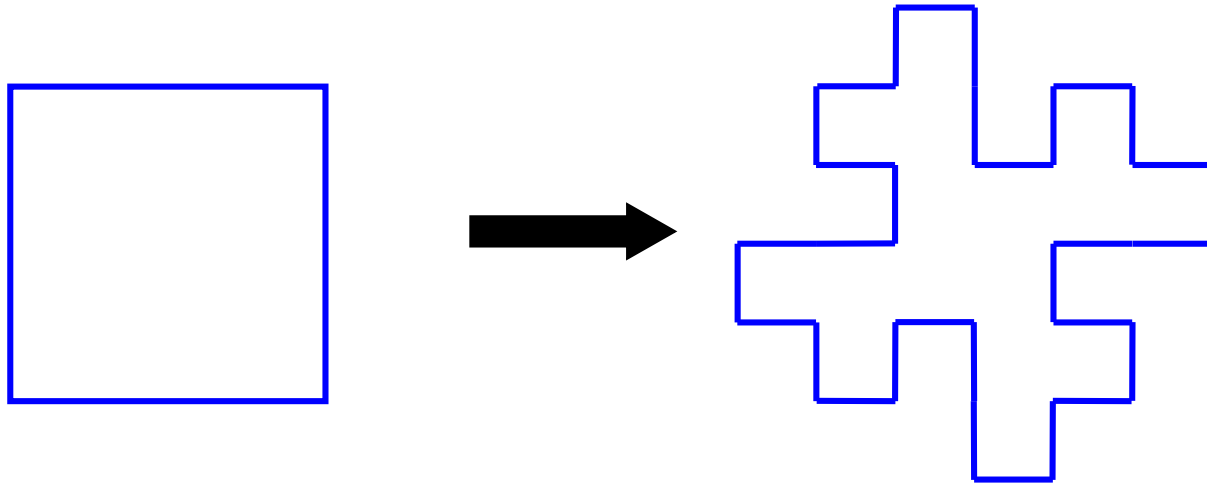
Hòn đảo Minkowski

Step 1 (*tập gốc*)

Lấy một hình vuông.

Step 2 + 3 (*quy tắc sinh*)

Biến đổi các cạnh hình vuông thành đường cong Minkowski.



Tam giác Sierpinski

Step 1 (*tập gốc*)

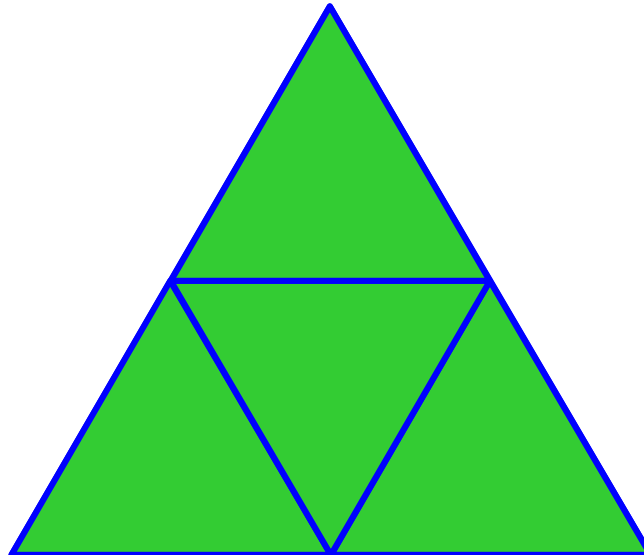
Lấy một tam giác đều.

Step 2 (*quy tắc sinh*)

1. Chia tam giác ra thành 4 tam giác đều bằng nhau.
2. Bỏ tam giác ở giữa.

Step 3

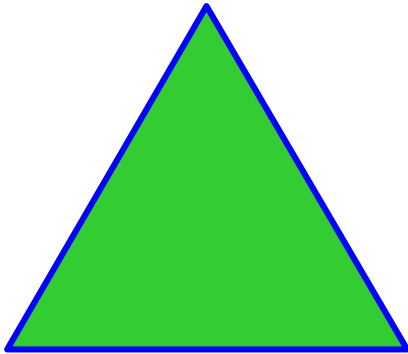
Lặp lại **Step 2** cho các tam giác đều còn lại.



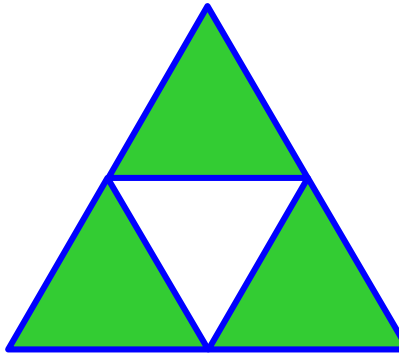
Tam giác Sierpinski

Kết quả

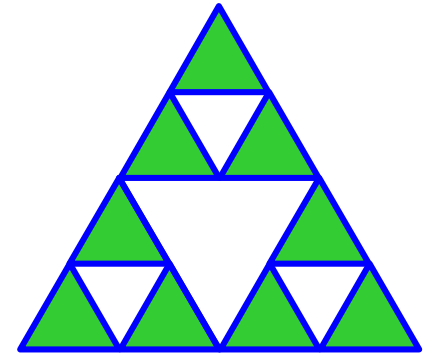
$n=0$



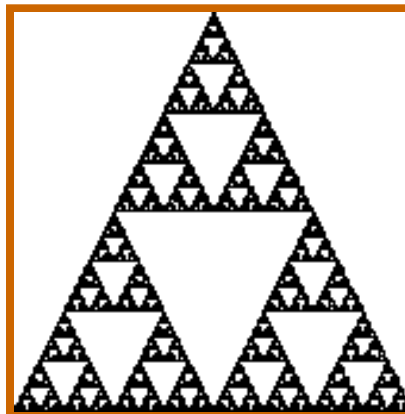
$n=1$



$n=2$



$n=\infty$

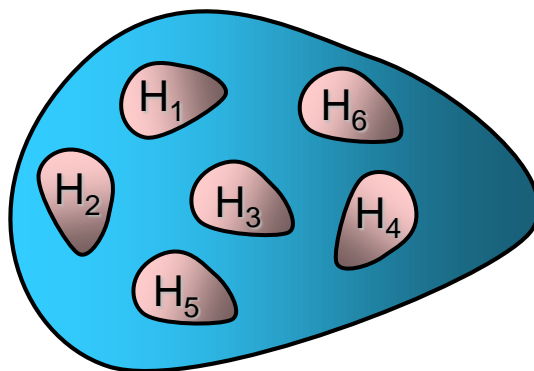


Số chiều tự đồng dạng

Định nghĩa

Cho một hình H được chia thành N phần $\{H_1, \dots, H_N\}$, mỗi phần đồng dạng với H theo tỉ lệ s . Thì

$$d = \frac{\log N}{\log 1/s},$$



H

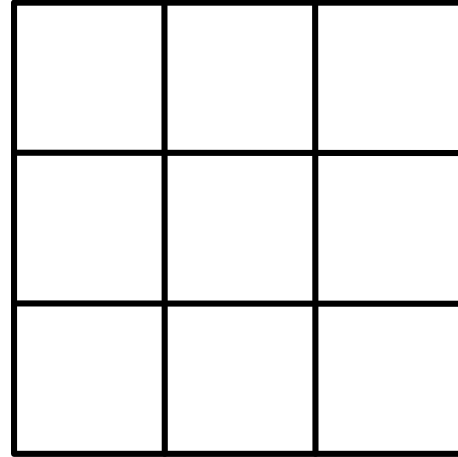
Số chiều của đoạn thẳng



Đoạn thẳng được chia thành N đoạn thẳng nhỏ bằng nhau, có hệ số đồng dạng là $1/N$. Vậy số chiều của đoạn thẳng là

$$d = \frac{\log N}{\log N} = 1$$

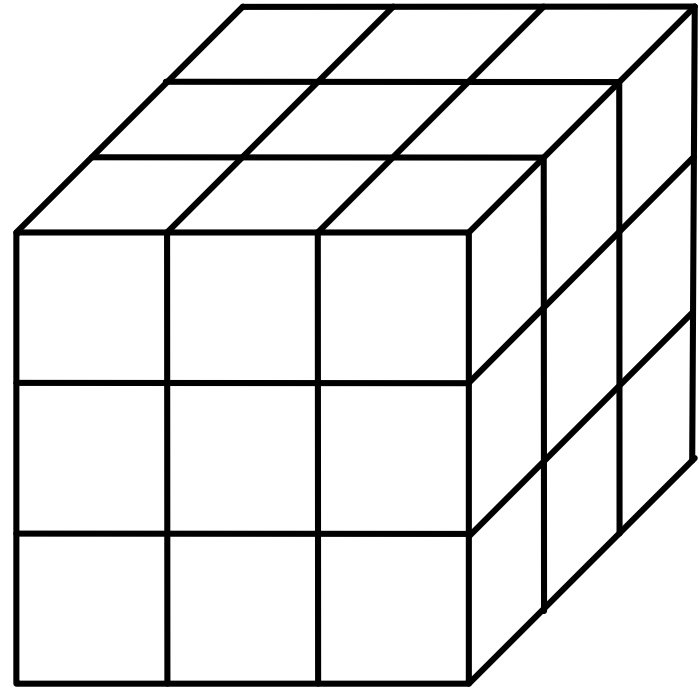
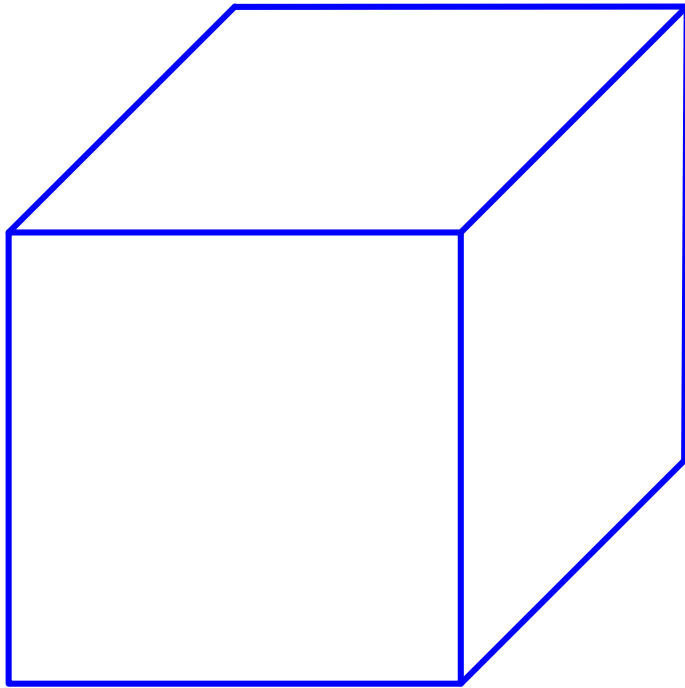
Số chiều của hình vuông



Hình vuông được chia thành N^2 hình vuông nhỏ bằng nhau, có hệ số đồng dạng là $1/N$. Vậy số chiều của hình vuông là

$$d = \frac{\log N^2}{\log N} = 2$$

Số chiều của hình lập phương



Hình lập phương được chia thành N^3 hình lập phương nhỏ bằng nhau, có hệ số đồng dạng $1/N$. Vậy số chiều là

$$d = \frac{\log N^3}{\log N} = 3$$

Số chiều của đường cong cong Van-Kock



Đường cong Van-Kock được chia thành 4 đoạn, có hệ số đồng dạng là $1/3$. Vậy số chiều là

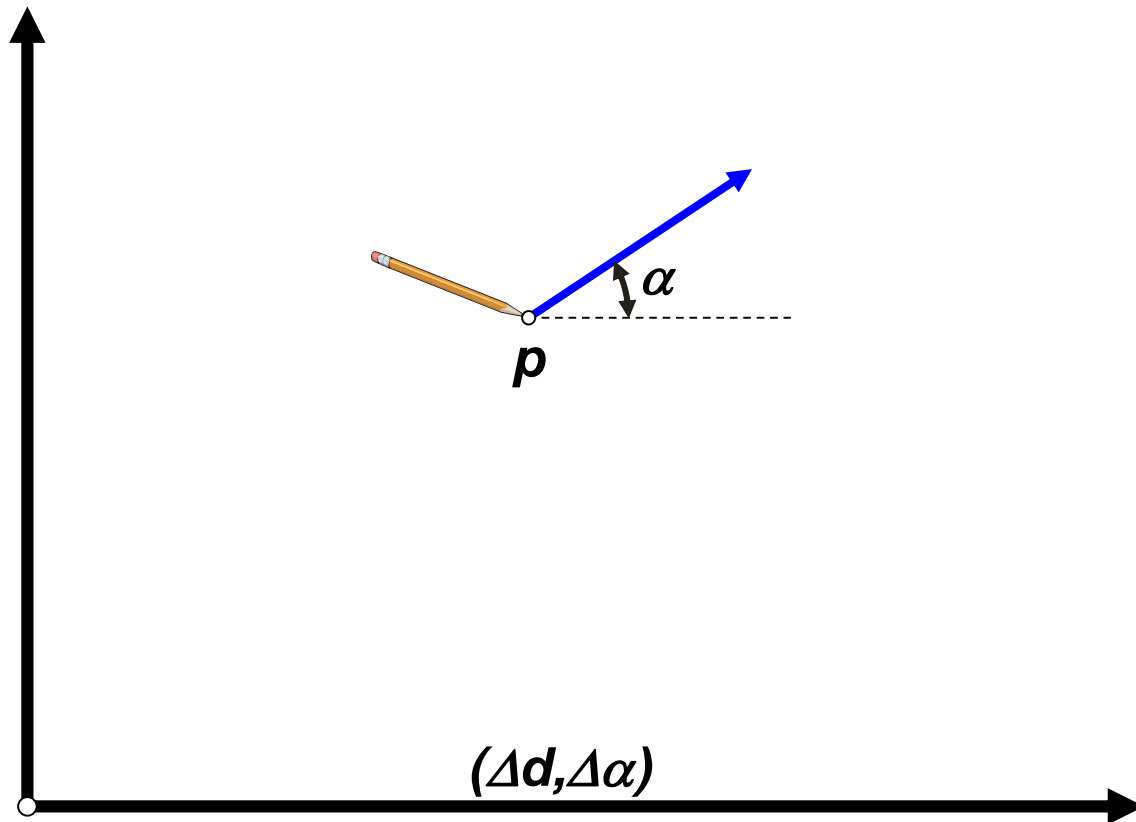
$$d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26186$$

L-System

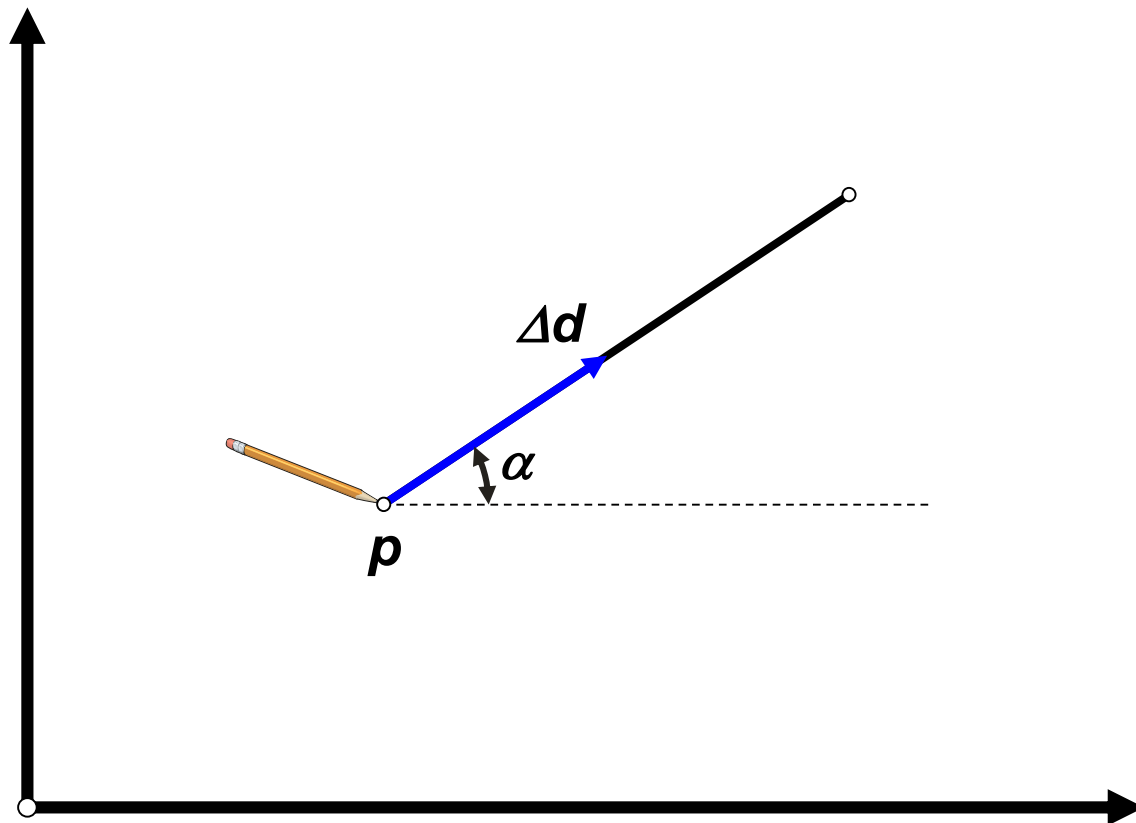
Đồ họa Turtle

HỆ THỐNG ĐỒ HỌA TURTLE		
Bút vẽ		
	Thuộc tính(<i>vị trí p, hướng α, Δd, $\Delta \alpha$</i>)	
	Lệnh vẽ	Nội dung
	F	Vẽ thẳng tới trước một đoạn Δd
	+	Quay bút vẽ qua trái một góc $\Delta \alpha$
	-	Quay bút vẽ qua phải một góc $\Delta \alpha$
	[Lưu lại <i>vị trí</i> và <i>hướng</i> của bút vẽ
]	Phục hồi lại <i>vị trí</i> và <i>hướng</i> của bút vẽ

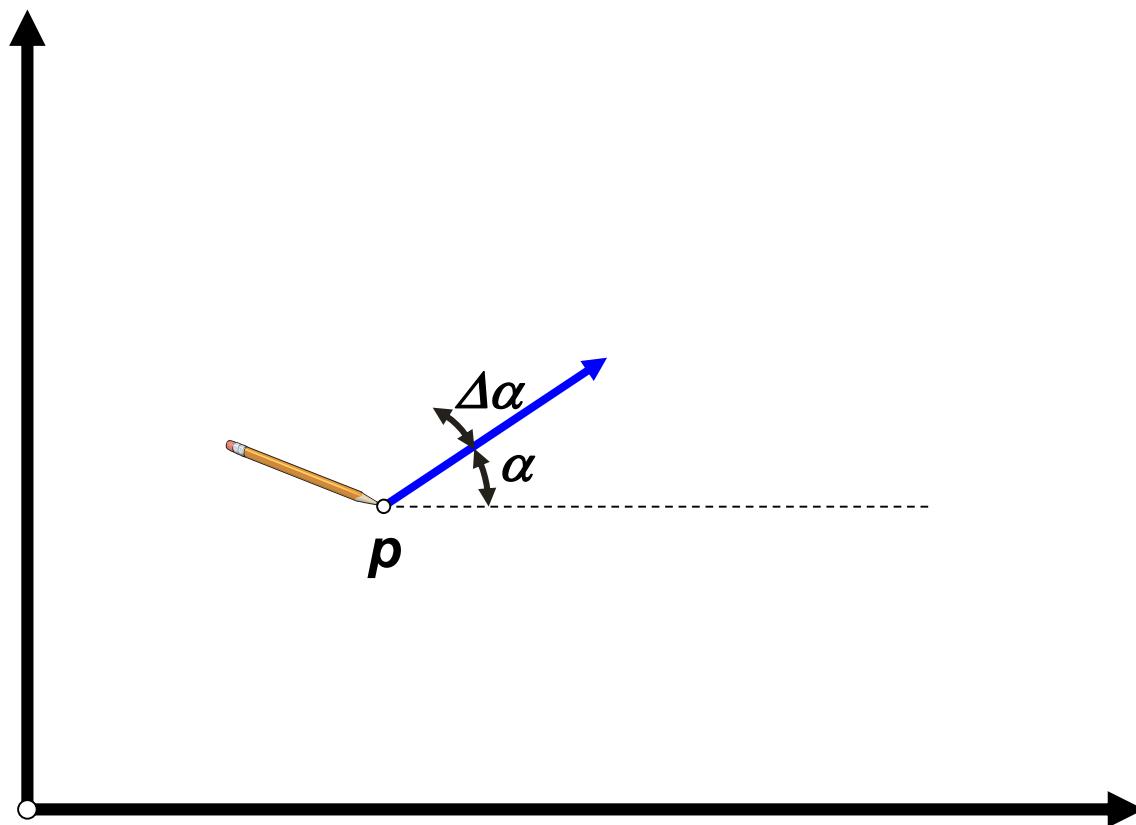
Thuộc tính của Bút vẽ



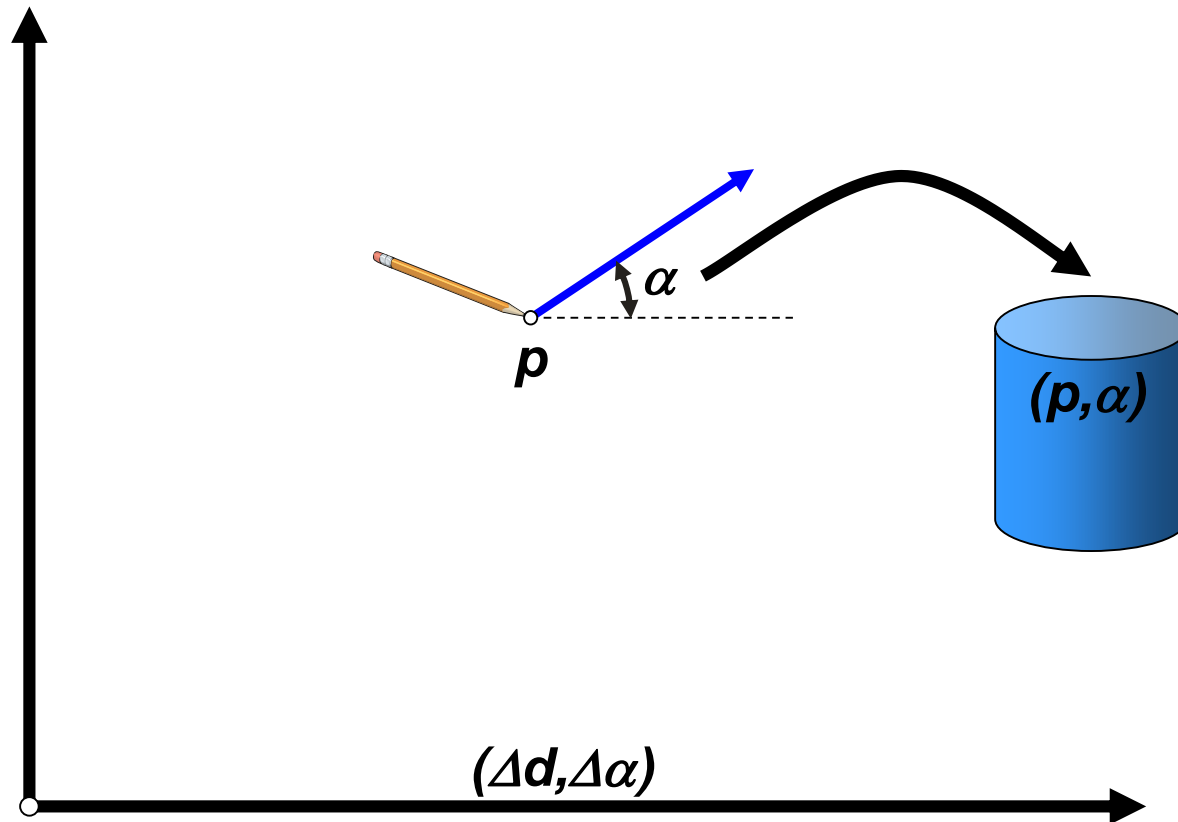
Lệnh vẽ F



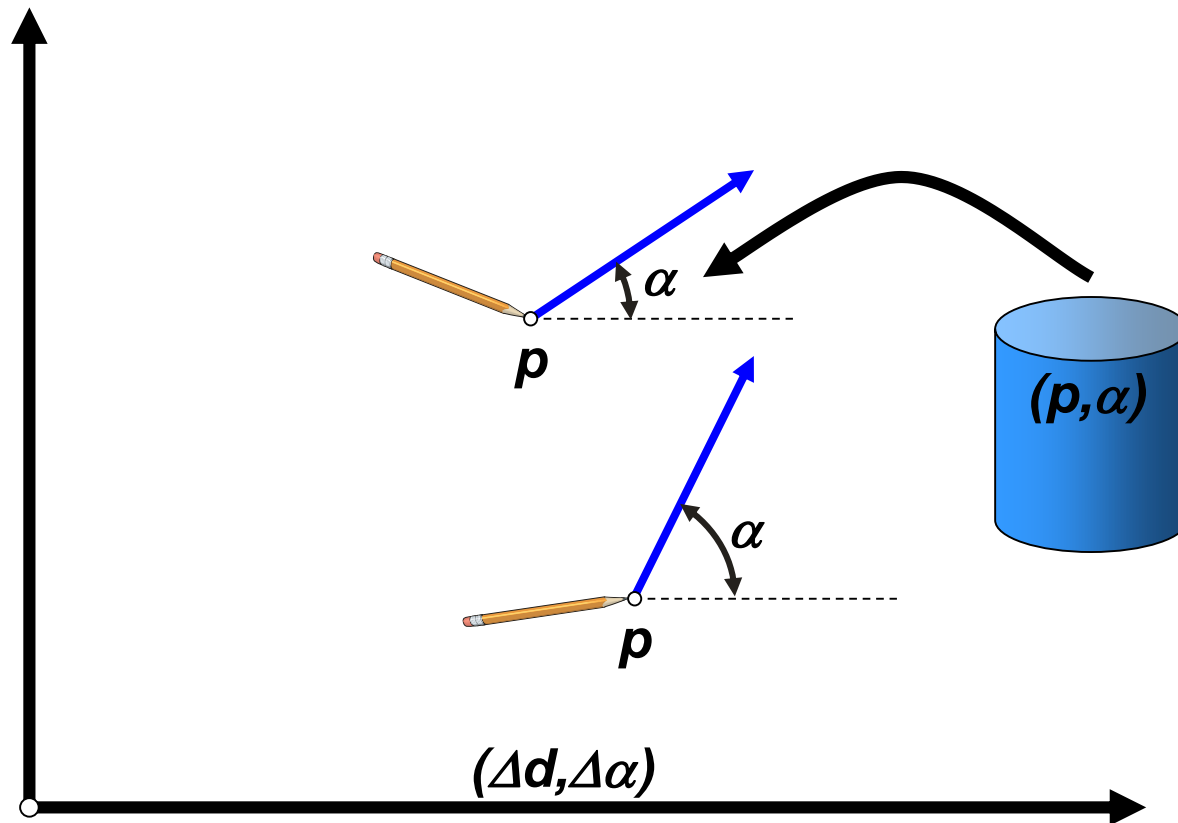
Lệnh + -



Lệnh [



Lệnh]



Ví dụ

Cho chuỗi lệnh vẽ **F+F-F-F+F**

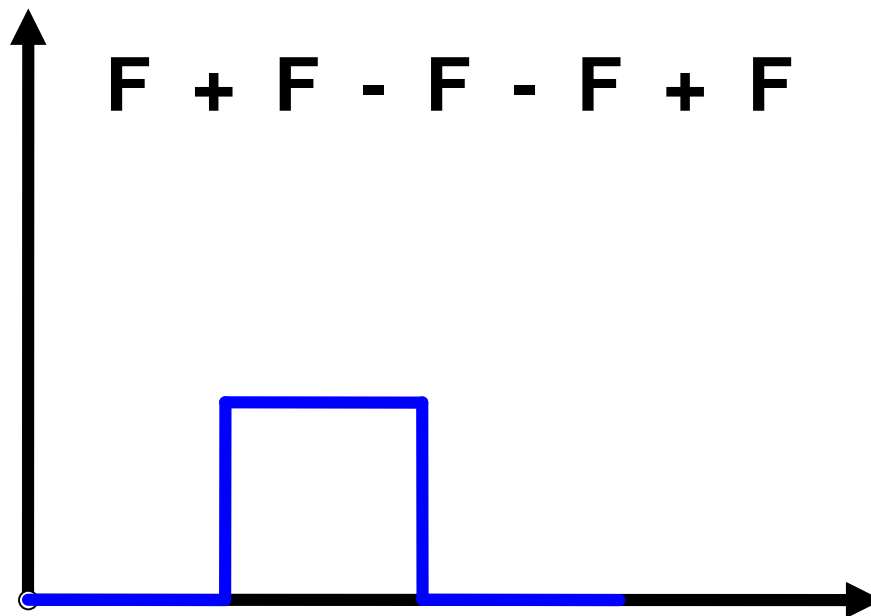
Với

$$p = (0.0, 0.0)$$

$$\alpha = 0^\circ$$

$$\Delta d = 1.0$$

$$\Delta\alpha = 90^\circ$$



Ví dụ

Cho chuỗi lệnh vẽ **F[-F]F[+F]F**

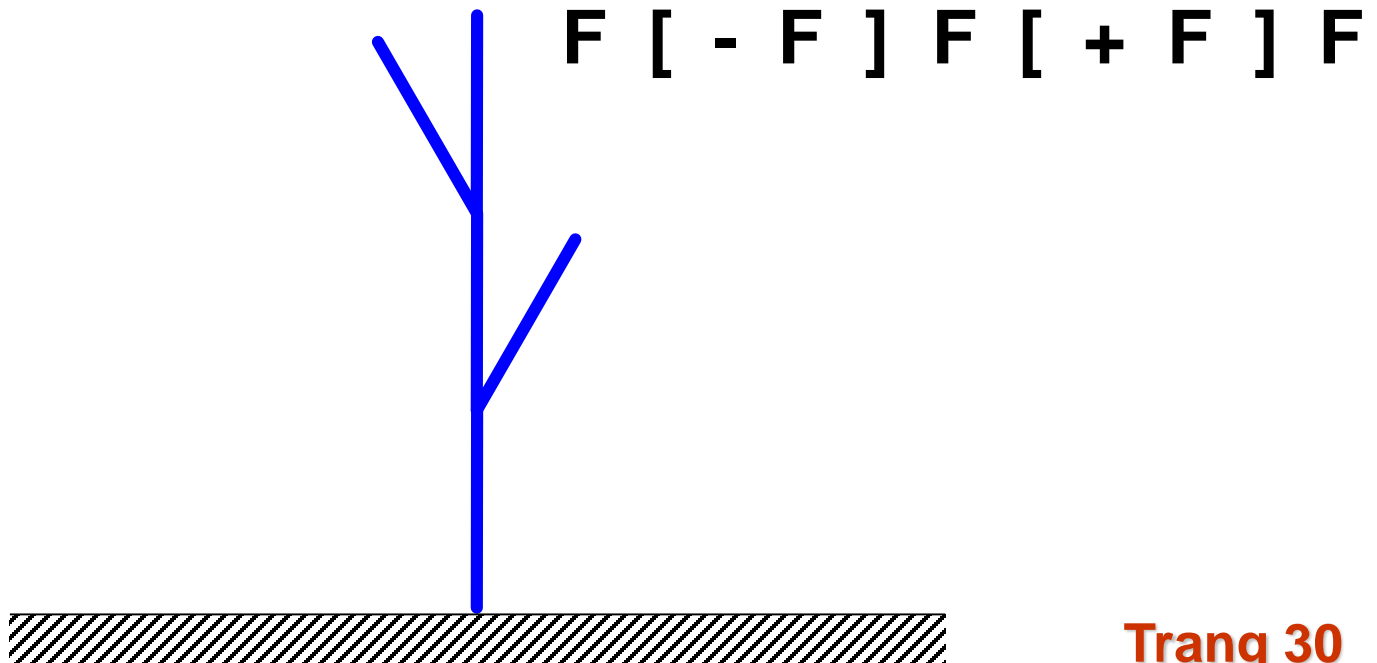
Với

$$p = (0.0, 0.0)$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\Delta d = 1.0$$

$$\Delta\alpha = 30^\circ$$



Hệ L-System

❑ Người khai sinh **Lindenmayer**

❑ Hệ L-System bao gồm

- Tập ký hiệu $\{\mathbf{F}, +, -, [,], \dots\}$
- Tiên đề s_0
- Tập luật sinh $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$

❑ Thực hiện quá trình sinh sản $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_n$ (Lần lượt thay các ký hiệu trong chuỗi s_i bằng vế phải trong tập luật sinh thì thu được chuỗi s_{i+1}).

❑ Dùng hệ đồ họa Turtle để vẽ s_n .

Ví dụ

Cho Hệ L-System

- Tập ký hiệu $\{\mathbf{F}, +, -\}$
- Tiên đề $s_0 = \mathbf{F}$
- Tập luật sinh $\{f_1 : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}+\mathbf{F}-\mathbf{F}\}$

Ví dụ

Thực hiện sinh sản

$$S_0 = \mathbf{F}$$

$$S_1 = F + F - F$$

$$S_2 = F+F-F+F+F-F-F+F-F$$

$$S_3 = F+F-F+F+F-F-F+F-F+F+F-F+F+F-F-F-F+F-F-F+F-F+F-F-F+F-F$$

$$S_4 = \begin{matrix} F+F-F+F+F-F-F+F-F+F+F-F+F+F-F-F+F-F-F+F-F+F+F- \\ F-F+F-F+F+F-F+F+F-F-F+F-F+F+F-F-F+F-F-F+F-F- \\ F+F-F+F+F-F-F+F-F-F+F-F+F+F-F-F+F-F+F+F-F+F+F- \\ F-F+F-F-F+F-F+F+F-F-F-F+F-F \end{matrix}$$

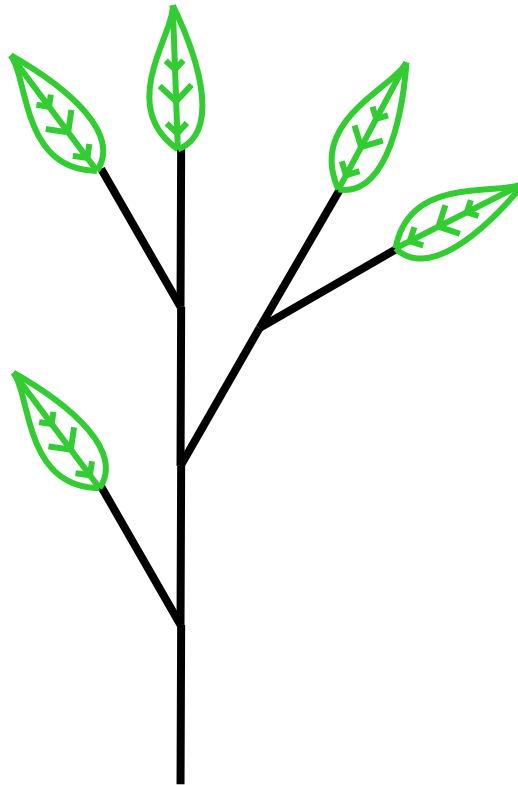
Ví dụ

Hệ L-System thích hợp để tạo cây thực vật

Tree → **Branch Tree** | *Leaf*

Branch Tree → *Cylinder* | **Tree** | [+Tree] | [-Tree]

Một chuỗi được phát sinh C[+CL]C[-C[-CL]CL]C[[+CL]CL]



Ví dụ

Tập ký hiệu $\{F, +, -, [,]\}$

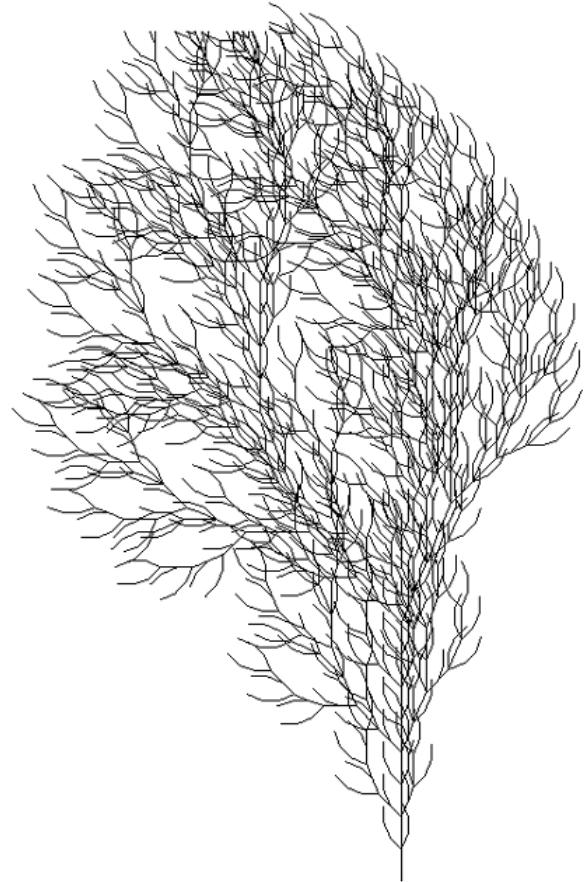
Tiên đề $s_0 = F$

Tập luật sinh

$F \rightarrow FF+[+F-F-F]-[-F+F+F]$

$\Delta d = 1.0$

$\Delta\alpha = 22.5^\circ$



Ví dụ

Tập ký hiệu $\{F, +, -, [,], X\}$

Tiên đề $s_0 = X$

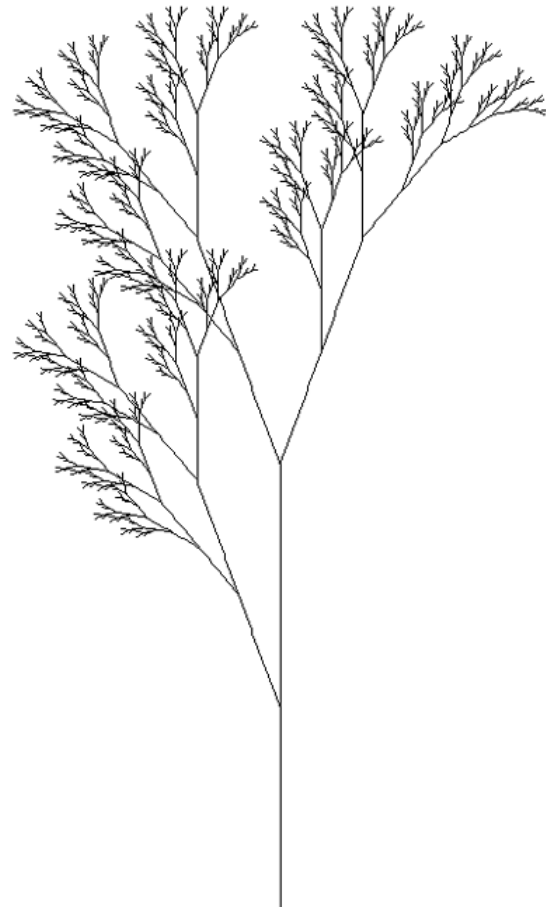
Tập luật sinh

$F \rightarrow FF$

$X \rightarrow F[+X]F[-X]+X$

$\Delta d = 1.0$

$\Delta\alpha = 20.0^\circ$



Ví dụ

Tập ký hiệu $\{F, +, -, [,], X\}$

Tiên đề $s_0 = X$

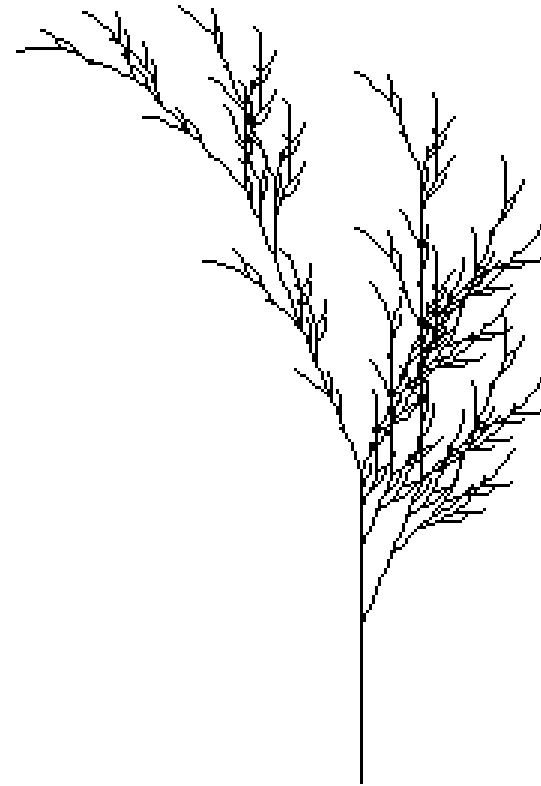
Tập luật sinh

$F \rightarrow FF$

$X \rightarrow F-[[X]+X]+F[+FX]-X$

$\Delta d = 1$

$\Delta\alpha = 22.5$



Ví dụ

Tập ký hiệu $\{F, +, -\}$

Tiên đề $s_0 = F++F++F$

Tập luật sinh

$F \rightarrow F-F++F-F$

$\Delta d = 1.0$

$\Delta\alpha = 60.0^\circ$

