

УДК 629.78.015 : 531.55 : 523.3

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ЗЕМЛЯ—ЛУНА—ЗЕМЛЯ С ВЫХОДОМ НА ОРБИТУ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЛУНЫ

В. А. Ильин, Н. А. Истомин

Рассматривается приближенный метод синтеза оптимальных траекторий орбита ИСЗ — орбита ИСЛ — атмосфера Земли.

Показано, что расчет геоцентрических участков движения проводится независимо от расчета селеносферического участка движения с помощью методики, разработанной ранее для расчета траекторий облета Луны. Определение параметров селеносферического участка сводится к решению задачи о построении гиперболы, проходящей через заданную точку на орбите ИСЛ и имеющей на сфере действия Луны заданный вектор скорости.

Для случая круговой орбиты ИСЛ получено аналитическое решение задачи об оптимальном одноимпульсном выходе на орбиту ИСЛ или сходе с нее. Для эллиптической орбиты ИСЛ малого эксцентриситета получено приближенное решение той же задачи в виде первого члена разложения решения по степеням эксцентриситета. Для круговой орбиты ИСЛ решена задача оптимизации ее высоты.

Установлены правила пересчета ориентации в пространстве орбиты ИСЛ и селеносферической гиперболы, которые обеспечивают инвариантность движения аппарата по новой оптимальной гиперболе относительно новой орбиты ИСЛ при замене геоцентрического маршрута перелета с апогейного на апогейный и, наоборот, при отображении геоцентрической траектории относительно плоскости орбиты Луны и при обращении направления движения по траектории.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СХЕМА ЕЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим следующую задачу. При старте с заданной орбиты ИСЗ (точка 0) космический аппарат выходит на заданную орбиту ИСЛ (от точки 1 до точки 2) с минимальным импульсным приращением скорости в точке 2 (фиг. 1). После пребывания на орбите ИСЛ в течение заданного времени t_{23} аппарат сходит с нее (от точки 3 до точки 4) с минимальным импульсным приращением скорости и совершает перелет к Земле с входом в ее атмосферу (точка 5) и последующей посадкой в заданном районе поверхности Земли.

Конечную орбиту ИСЛ, с которой аппарат стартует к Земле, можно считать заданной, например, при непродолжительном пребывании аппарата на орбите ИСЛ, при отсутствии управления эволюцией орбиты ИСЛ в случае длительного пребывания аппарата на орбите ИСЛ, при наложении ограничений на конечную орбиту ИСЛ, обусловленных условиями возврата к Земле. Полагая в дальнейшем, что конечная орбита ИСЛ задана, будем рассматривать траектории выхода на орбиту ИСЛ 012 и схода с орбиты ИСЛ 345 независимо друг от друга. Поставленная задача может быть решена с помощью методики сфер действия [1], [2];

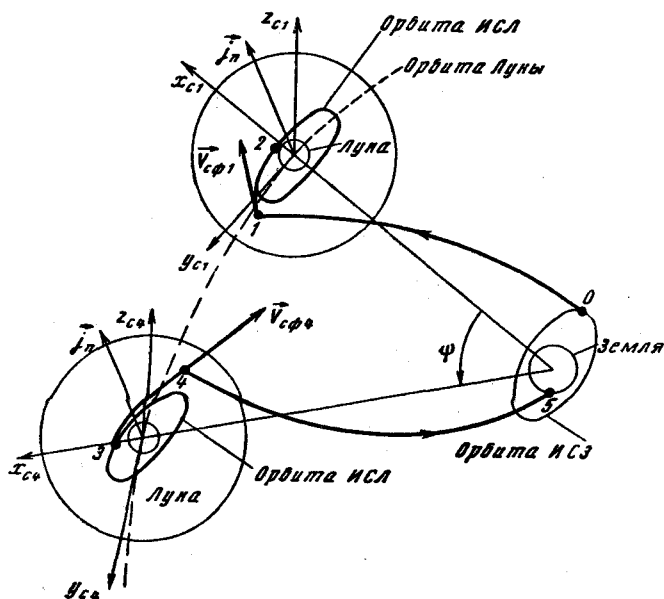
при этом задача сводится к численному решению достаточно сложной системы конечных трансцендентных соотношений при наличии ограничений.

Сделаем следующие предположения:

1) воздействие Луны на аппарат ограничивается пределами ее сферы действия;

2) при расчете геоцентрических участков радиус сферы действия Луны $\rho_{сф}$ полагается нулевым;

3) при расчете селеносферических участков движения 12 и 34 орбита Луны заменяется круговой орбитой с постоянными элементами; соот-



Фиг. 1

ветствующие векторы орбитальной скорости Луны $\vec{V}_л$ считаются неизменными;

4) активные участки при старте с орбит ИСЗ и ИСЛ и при выходе на орбиту ИСЛ заменяются импульсным приращением скорости.

Первые три предположения позволяют для приближенного решения указанных задач воспользоваться общей схемой синтеза траекторий облета Луны, изложенной в [3]. Расчет геоцентрических участков перелетов Земля—Луна и Луна—Земля проводится независимо от расчета селеносферического участка движения и в соответствии с методикой работы [3] сводится к выполняемым независимо друг от друга построению плоскостей перелетов Земля—Луна и Луна—Земля и расчету параметров дуг конических сечений перелетов в найденных плоскостях.

Геоцентрические радиус-векторы Луны и аппарата задаем с помощью обычной системы элементов: модуля радиус-вектора r , наклона плоскости орбиты к плоскости экватора i , долготы восходящего узла Ω и аргумента широты u . Имеем для Луны $\vec{r}_л (r_л, i_л, \Omega_л, u_л)$, для аппарата в момент старта с орбиты ИСЗ

$\vec{r}_0(r_0, i_{01}, \Omega_{01}, u_0)$, в момент подлета к сфере действия Луны $\vec{r}_1(r_1, i_{01}, \Omega_{01}, u_1)$, в момент вылета из сферы действия $\vec{r}_4(r_4, i_{45}, \Omega_{45}, u_4)$, в момент прохождения условного перигея $\vec{r}_5 = \vec{r}_\Pi(r_\Pi, i_{45}, \Omega_{45}, u_5)$. Обозначим через α угол между плоскостью орбиты Луны и плоскостью перелета; α равен углу между \vec{V}_Π и трансверсальной компонентой вектора геоцентрической скорости аппарата \vec{U}_t в точках 1 или 4; $\alpha > 0$, если кратчайший поворот от \vec{U}_t к \vec{V}_Π виден в направлении от Земли к Луне происходящим против часовой стрелки.

Задавая i_Π, u_Π, i_{45} , направление движения аппарата по отношению к полюсам Земли, характеризуемое величиной $\operatorname{sgn} \cos u_4$, и угловую дальность перелета Луна—Земля $\Delta\eta_{45}$, можно, исходя из равенства $\vec{r}_4 = \vec{r}_\Pi$, найти u_4, u_5, α_4 и географическую широту условного перигея φ_Π . Аналогично, задавая $i_\Pi, u_\Pi, i_{01}, \operatorname{sgn} \cos u_1$, найдем u_1 и α_1 , исходя из равенства $\vec{r}_1 = \vec{r}_\Pi$. Величина u_0 и широта точки старта с орбиты ИСЗ φ_0 находятся после определения параметров кеплеровой дуги перелета Земля—Луна.

Траектория перелета Луна—Земля представляет собой дугу конического сечения в определенной выше плоскости с перигейным радиус-вектором \vec{r}_Π , проходящую через радиус-вектор \vec{r}_Π ;

$(\vec{r}_\Pi, \vec{r}_\Pi) = \Delta\eta_{45}$. Фокальный параметр p_{45} и эксцентриситет e_{45} этого перелета определяются по формулам

$$p_{45} = r_\Pi \frac{1 - \cos \Delta\eta_{45}}{\frac{r_\Pi}{r_\Pi} - \cos \Delta\eta_{45}}, \quad e_{45} = \frac{p_{45}}{r_\Pi} - 1.$$

Задавая $\Delta\eta_{45}, r_5$ и r_Π , можно определить все динамические параметры перелета Луна—Земля.

Траекторию перелета Земля—Луна рассматриваем как дугу конического сечения в соответствующей плоскости, соединяющую точки с радиус-векторами \vec{r}_0 и \vec{r}_Π . Считаем, что старт в сторону Луны происходит с круговой орбиты ИСЗ радиусом r_0 с заданной величиной импульса скорости ΔU_0 . Тогда

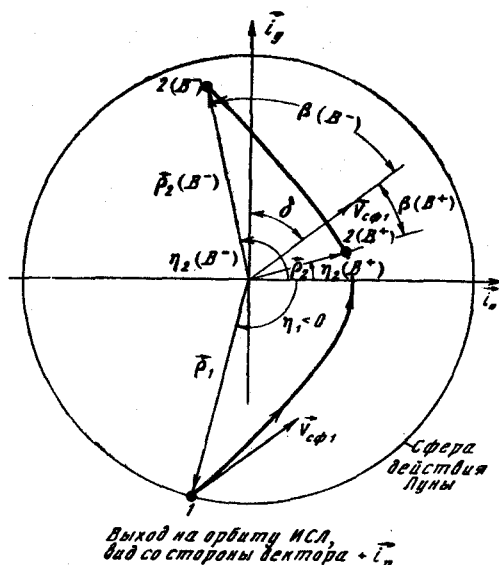
$$\Delta U_0^2 = U_0^2 + U_{\oplus 1}^2 - 2U_{\oplus 1} U_0, \quad (1.1)$$

где U_0, U_{0t} — геоцентрическая скорость аппарата и ее трансверсальная компонента в начальной точке; $U_{\oplus 1} = \sqrt{\frac{K_\oplus}{r_0}}$ — первая космическая скорость на расстоянии r_0 от центра Земли, K_\oplus — гравитационная постоянная Земли. Соотношение (1.1) вследствие интегралов энергии, момента количества движения и равенства $U^2 = U_r^2 + U_t^2$, где U, U_r — геоцентрическая скорость аппарата и ее радиальная компонента, задает связь между двумя из трех величин U, U_r и U_t . Для определения дуги перелета Земля—Луна необходимо задать еще одно условие, например, задать продолжительность этого перелета. В дальнейшем считаем, что задачи опреде-

ления перелетов Земля—Луна и Луна—Земля решены, в результате чего определены векторы геоцентрической скорости аппарата в точках входа \vec{U}_1 и выхода \vec{U}_4 на селеносфере.

2. ДВИЖЕНИЕ АППАРАТА В СФЕРЕ ДЕЙСТВИЯ ЛУНЫ

В качестве основной селеноцентрической системы координат рассматриваем правую прямоугольную систему $x_c y_c z_c$ (см. фиг. 1): ось $+x_c$ является продолжением геоцентрического радиус-вектора центра Луны $\vec{r}_л$, ось $+y_c$ направлена по вектору $\vec{V}_л$. Введем также систему сферических координат: долготу $0 \leq \lambda \leq 360^\circ$, отсчитываемую от вектора $-x_c$ в плоскости $x_c y_c$ против часовой стрелки, если смотреть с оси $+z_c$; широту $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, отсчитываемую от плоскости $x_c y_c$, $\text{sgn } \varphi = \text{sgn } z_c$ и радиальное расстояние ρ .



Фиг. 2

В проекциях на оси x_c , y_c , z_c векторы селеноцентрической скорости аппарата в точках 1 и 4 $\vec{V}_{cf} = \vec{U} - \vec{V}_л$ имеют компоненты

$$\vec{V}_{cf} = \{U_r, U_t \cos \alpha - V_l, U_t \sin \alpha\}; \quad (2.1)$$

здесь всегда $U_t > 0$, а $U_{1r} > 0$, $U_{4r} < 0$ для геоцентрического маршрута A, не содержащего апогея, $U_{1r} < 0$, $U_{4r} > 0$ для геоцентрического маршрута C, содержащего апогея.

Орбиту ИСЛ задаем фокальным параметром p_c , эксцентриситетом e_c и правой тройкой ортогональных ортов $\vec{j}_п$, \vec{j}_y , $\vec{j}_н$; $\vec{j}_п$ направлен в перигецентр орбиты, $\vec{j}_н$ направлен по нормали к орбите так, что с его конца движение по орбите видно происходящим против часовой стрелки.

Рассмотрим для определенности выход на орбиту ИСЛ (фиг. 2). Обозначим через $\vec{\rho}$ радиус-вектор, направленный в точку выхода на орбиту ИСЛ, и через β —угол между векторами $\vec{\rho}$ и \vec{V}_{cf} , $0 \leq \beta \leq \pi$.

Орт, нормальный к плоскости гиперболы, зададим в виде

$$\vec{i}_n = \pm \frac{[\vec{\rho}^{\circ}, \vec{V}_{\text{сф}}]}{\sin \beta}, \quad (2.2)$$

где $\vec{\rho}^{\circ} = \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|}$, $\vec{V}_{\text{сф}} = \frac{\vec{V}_{\text{сф}}}{|\vec{V}_{\text{сф}}|}$. Вектор \vec{i}_n направим так, чтобы с его конца движение по гиперболе было видно происходящим против часовой стрелки. Для бесперицентрического маршрута A выхода на орбиту ИСЛ в (2.2) всегда берется „+“, для перицентрических же маршрутов B возможен поворот от $\vec{\rho}$ к $\vec{V}_{\text{сф}}$ на угол β как в направлении движения по гиперболе, так и против него. В первом случае в (2.2) берем „+“ и соответствующий маршрут обозначаем через B^+ , во втором случае в (2.2) берем „—“ и соответствующий маршрут обозначаем через B^- .

Орт \vec{i}_n , направленный в перицентр гиперболы, представим в виде

$$\vec{i}_n = \mu \vec{\rho}^{\circ} + \nu \vec{V}_{\text{сф}}, \quad (2.3)$$

где

$$\mu = \frac{\cos \eta - \cos \beta \cos (\eta \pm \beta)}{\sin^2 \beta}, \quad (2.4)$$

$$\nu = \frac{\cos (\eta \pm \beta) - \cos \beta \cos \eta}{\sin^2 \beta}. \quad (2.5)$$

В (2.4) и (2.5) через η обозначена истинная аномалия вектора $\vec{\rho}$ в плоскости гиперболы, знак „+“ перед β соответствует маршрутам A и B^+ , знак „—“ — маршруту B^- . Орт \vec{i}_y , дополняющий систему до правой, равен $\vec{i}_y = [\vec{i}_n, \vec{i}_n]$.

Аналогично поступаем в случае схода с орбиты ИСЛ. Поскольку сход с орбиты ИСЛ можно рассматривать как результат обращения движения для выхода, имеем $\vec{V}_{\text{сф}4} = -\vec{V}_{\text{сф}1}$ и

$$\beta_{34} = \pi - \beta_{12}. \quad (2.6)$$

В этом случае μ не меняет, а ν меняет знак, что компенсирует изменение знака $\vec{V}_{\text{сф}}$ в (2.3), поскольку \vec{i}_n в обоих случаях один и тот же.

Как следует из второго и третьего предположений (см. разд. 1), задача определения селеносферического движения аппарата сводится к построению гиперболы по заданному свободному вектору $\vec{V}_{\text{сф}}$ на сфере действия Луны и вектору $\vec{\rho}$. Учитывая, что для всех практически интересных орбит ИСЛ $\frac{\rho_{\text{сф}}}{\rho} \gg 1$, можно положить $\frac{\rho_{\text{сф}}}{\rho} = \infty$, т. е. приближенно считать, что в окрестности сферы действия движение аппарата происходит по асимптоте гиперболы. Решение задачи о построении планетоцентрической гиперболы по векторам $\vec{\rho}$ и $\vec{V}_{\text{сф}}$ ($\rho_{\text{сф}} = \infty$) приведено в [4].

При указанном предположении гиперболу можно также рассматривать как перелет между векторами $\vec{\rho}_1$ и $\vec{\rho}_2$ (выход на орбиту ИСЛ) с заданной угловой дальностью $\pi \pm \beta$ или $\vec{\rho}_3$ и $\vec{\rho}_4$ (сход с орбиты ИСЛ) с угловой дальностью β или $2\pi - \beta$. В этом случае имеем связь между фокальным параметром p и эксцентриситетом e гиперболы, даваемую соотношением (21) из [5] при $n = \frac{\rho_{\text{сф}}}{\rho} = \infty$:

$$e^2 = 2 \frac{1 \pm \cos \beta}{\sin^2 \beta} - 2 \frac{1 \pm \cos \beta}{\sin^2 \beta} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left(\frac{p}{\rho} \right)^2. \quad (2.7)$$

Поскольку известна большая полуось гиперболы $a = \frac{K_{\text{л}}}{V_{\text{сф}}^2 - 2 \frac{K_{\text{л}}}{\rho_{\text{сф}}}}$, где $K_{\text{л}}$ — гравитационная постоянная Луны, имеем также

$$e^2 = \frac{p}{a} + 1, \quad (2.8)$$

Исключая e^2 из (2.7) и (2.8), получим

$$\sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{p}{a} \sin^2 \beta + 1 \pm \cos \beta} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{a}} \sin \beta. \quad (2.9)$$

В (2.7) и (2.9) и в дальнейшем верхний знак перед $\cos \beta$ соответствует выходу на орбиту ИСЛ, нижний знак — сходу с орбиты ИСЛ [см. (2.6)]. Знак „+“ перед вторым радикалом соответствует перелетам по маршрутам A, B^+ , знак „—“ — перелетам по маршруту B^- .

Как указал В. С. Вожаев (для случая схода с орбиты), это же соотношение может быть получено и с использованием формулы

$$\sin \delta = \frac{1}{e}, \quad (2.10)$$

где δ — угол между векторами $\vec{V}_{\text{сф}}$ и \vec{i}_y [6].

В [3] показано, что формула (2.10) справедлива с точностью до величин порядка $\left(\frac{\rho}{\rho_{\text{сф}}} \right)^3$, откуда следует и весьма высокая точность соотношения (2.9).

Перелеты A и B^+ при изменении β непрерывно переходят друг в друга. Граничным между этими перелетами является перелет, пересекающий орбиту ИСЛ в перигентре гиперболы. Обозначая соответствующее граничное значение β через $\bar{\beta}$, имеем

$$\cos \bar{\beta} = \pm \frac{1}{1 + \frac{p}{a}}. \quad (2.11)$$

В случае выхода на орбиту ИСЛ при $\beta < \bar{\beta}$ реализуются маршруты B^+ и B^- , а при $\beta > \bar{\beta}$ — маршруты A и B^- . В случае схода с орбиты ИСЛ при $\beta < \bar{\beta}$ реализуются маршруты A и B^- , а при $\beta > \bar{\beta}$ — маршруты B^+ и B^- .

Соотношения (2.2) — (2.5), (2.8) и (2.9) полностью решают задачу определения параметров селеносферического движения аппарата. Заметим, что приведенные результаты дают приближенное решение задачи синтеза траекторий орбита ИСЗ — поверхность Луны, поверхность Луны — атмосфера Земли в случае замены активного участка при посадке на поверхность Луны или при старте с нее импульсом тяги.

Обозначим через \vec{V} вектор скорости аппарата на гиперболе и через \vec{v} — вектор скорости аппарата на орбите ИСЛ в точке выхода на орбиту или схода с нее. Вектор импульса скорости в этой точке равен $\Delta \vec{V} = \pm (\vec{v} - \vec{V})$, откуда

$$\Delta V^2 = v^2 + V^2 - 2(v_r V_r + v_t V_t \cos \gamma); \quad (2.12)$$

здесь v_r , V_r — радиальные компоненты векторов \vec{v} и \vec{V} ; v_t , V_t — тангенциальные компоненты этих же векторов (в соответствующих плоскостях); γ — угол между плоскостями орбиты ИСЛ и гиперболы ($\gamma > 0$, если кратчайший поворот от V_t к v_t в направлении вектора $\vec{\rho}$ виден происходящим против часовой стрелки).

Чтобы исключить траектории с чрезмерно большими импульсами скорости, ограничимся рассмотрением только случая $\cos \gamma > 0$. На основании (2.2) имеем

$$\cos \gamma = \pm \frac{(\vec{\rho}^\circ, \vec{V}_{сф}^\circ, \vec{j}_n)}{\sin \beta}. \quad (2.13)$$

Используя (2.12), (2.13), (2.9), интеграл энергии и соотношения

$$V_t = \frac{\sqrt{K_L p}}{\rho}, \quad V_r = e \sin \eta \frac{\sqrt{K_L}}{p}, \quad v_t = \frac{\sqrt{K_L p_c}}{\rho}, \quad v_r = e_c \sin \vartheta \sqrt{\frac{K_L}{p_c}},$$

где ϑ — истинная аномалия в плоскости орбиты ИСЛ, получим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V^2}{K_L/p_c} = & 3 + x + e_c^2 + 4e_c \cos \vartheta - 2e_c \sin \vartheta e \sin \eta \sqrt{\frac{p_c}{p}} - \\ & - \frac{p_c}{\rho} \left[\sqrt{x + \frac{4p_c}{\rho(1 + \cos \beta)}} \pm \sqrt{x} \right] |(\vec{\rho}^\circ, \vec{V}_{сф}^\circ, \vec{j}_n)|, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $x = \frac{p_c}{a}$.

При фиксированных параметрах орбиты ИСЛ и векторе $\vec{V}_{сф}$ ΔV является функцией радиус-вектора $\vec{\rho}$ точки на орбите ИСЛ и как периодическая функция ϑ достигает минимума. При решении задачи определения оптимальной точки на орбите ИСЛ, доставляющей $\min \Delta V$, в качестве независимой переменной вместо ϑ удобно взять β (см. ниже разд. 3).

Обозначим направляющие косинусы $\vec{V}_{сф}$ относительно осей \vec{j}_p , \vec{j}_y , \vec{j}_n через l , m , n . Тогда $\cos \beta = (\vec{\rho}^\circ, \vec{V}_{сф}^\circ) = l \cos \vartheta + m \sin \vartheta$,

$(\vec{\rho}^0, \vec{V}_{\text{сф}}, \vec{j}_n) = m \cos \vartheta - l \sin \vartheta$. Обозначим $l^2 + m^2 = 1 - n^2 = \sigma$, $0 \leq \sigma \leq 1$ и введем угол τ ; $\sin \tau = \frac{l}{\sqrt{\sigma}}$, $\cos \tau = \frac{m}{\sqrt{\sigma}}$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta &= \sqrt{\sigma} \sin(\vartheta + \tau), \\ (\vec{\rho}^0, \vec{V}_{\text{сф}}, \vec{j}_n) &= \sqrt{\sigma} \cos(\vartheta + \tau), \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

откуда

$$|(\vec{\rho}^0, \vec{V}_{\text{сф}}, \vec{j}_n)| = \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta}. \quad (2.16)$$

При заданном значении β переход к ϑ производится с помощью (2.15) и соотношения $\cos(\vartheta + \tau) = \pm \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \beta}{\sigma}}$, где, согласно (2.2), знак „+“ берется для маршрутов A, B^+ , знак „—“ — для маршрута B^- .

3. ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫХОД НА ОРБИТУ ИСЛ И СХОД С ОРБИТЫ ИСЛ

В случае круговой орбиты ИСЛ $e_c = 0$, $\rho = \rho_c$ и из (2.14) и (2.16) получаем

$$\begin{aligned} \Delta V^2 &= \frac{\Delta V^2}{\frac{K_L}{a}} = \\ &= \frac{1}{x} \left[3 + x - 2 \left(\sqrt{\frac{x}{4} + \frac{1}{1 \mp \cos \beta}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{x} \right) \sqrt{\sigma - \cos^2 \beta} \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

При заданных a, ρ или $x = \frac{\rho}{a}$ и σ найдем на орбите ИСЛ точку, в которой достигается $\min \Delta V$. Освобождаясь в получаемом из (3.1) равенстве $\frac{\partial \Delta V^2}{\partial \cos \beta} = 0$ от иррациональностей, приведем его к виду

$$x = - \frac{(\cos^2 \beta \mp 2 \cos \beta + \sigma)^2}{\mp \cos \beta (\sigma \mp \cos \beta) (1 \mp \cos \beta)^2}. \quad (3.2)$$

Заметим, что (3.2) является относительно $\cos \beta$ алгебраическим уравнением четвертой степени. Из (3.2) и численных расчетов делаем следующий вывод (фиг. 3):

1) поскольку $x > 0$ только в промежутках $0 < \cos \beta < \sigma$ для выхода на орбиту ИСЛ и $\sigma < \cos \beta < 0$ для схода с орбиты ИСЛ, то значения $\cos \beta_{\text{opt}}$ заключены в этих промежутках, меньших допустимого диапазона $\cos \beta$ [см. (2.16)]:

$$0 < |\cos \beta_{\text{opt}}| < \sigma \leq \sqrt{\sigma};$$

2) $x \rightarrow +\infty$ при $\cos \beta \rightarrow 0$ и $|\cos \beta| \rightarrow \sigma$;

3) $x = 0$ при $\pm \cos \beta = 1 - \sqrt{1 - \sigma} \leq \sigma$, (3.3)

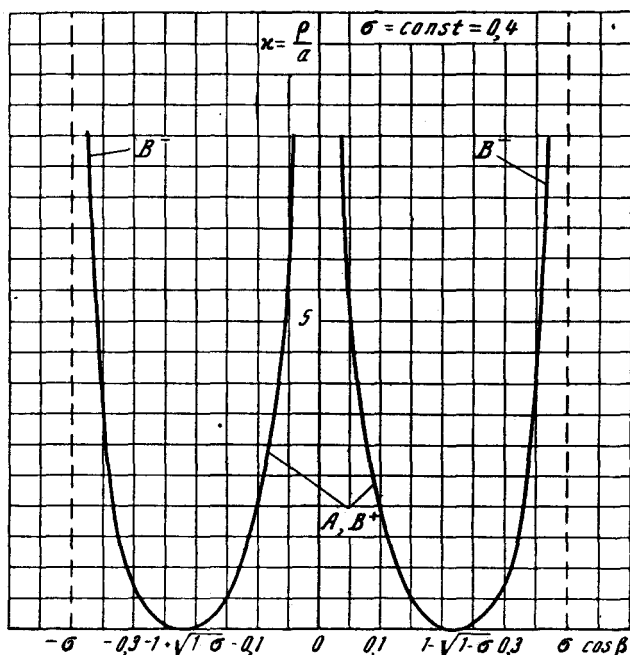
причем каждое из этих значений $\cos \beta$ является двукратным корнем числителя (3.2);

4) непосредственно анализируя (3.1) при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow 0$, можно показать, что значения $0 < |\cos \beta_{\text{opt}}| < 1 - \sqrt{1 - \sigma}$ характеризуют

оптимальный перелет по маршрутам A, B^+ , а значения $1 - \sqrt{1-\sigma} < |\cos \beta_{\text{opt}}| < \sigma$ характеризуют оптимальный перелет по маршруту B^- ; 5) для ветви A, B^+ при любом x (см. ниже)

$$|\cos \beta(x, \sigma)| \leq |\cos \bar{\beta}(x, \sigma = 1)|.$$

Отсюда и из сказанного в разд. 2 следует, что в составе оптимальных перелетов нет перелетов B^+ . Поскольку, как это видно из (3.1), $\min \Delta \bar{V}(A, B^+) \leq \min \Delta \bar{V}(B^-)$, то глобальный $\min \Delta \bar{V}$ достигается на дуге гиперболы A , не содержащей перицентра. Дуга гиперболы B^- , содержащая перицентр, дает локальный $\min \Delta \bar{V}$.



Фиг. 3

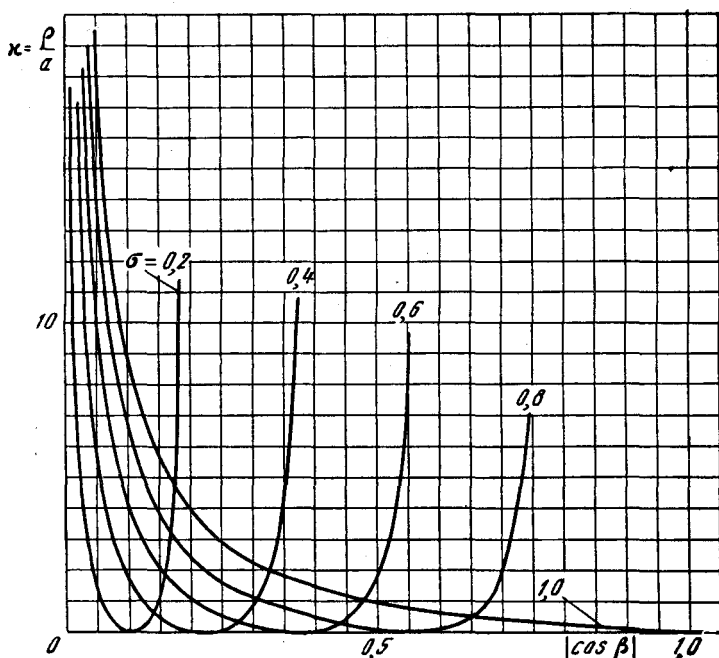
Результаты расчета зависимостей $x = x(\cos \beta, \sigma)$ по (3.2) и минимального импульса $\Delta \bar{V} = \Delta V / \sqrt{\frac{K_{\text{Л}}}{a}}(x, \sigma)$ по (3.1) с учетом (3.2) приведены на фиг. 4 и 5.

При перелете в плоскости орбиты ИСЛ $\sigma = 1$, и из (3.2) получаем $\cos \beta_{\text{opt}} = \cos \bar{\beta} = \pm \frac{1}{1+x}$. Таким образом, в плоском случае оптимальным является выход на орбиту ИСЛ или сход с нее в перицентре гиперболы.

Хотя решение уравнения (3.2) относительно $\cos \beta$ при заданных x и σ может быть получено одним из регулярных методов, например, методом Феррари, вследствие громоздкости выражений для корней практический интерес представляет получение простых приближенных решений этого уравнения.

Поскольку $\cos \beta_{\text{opt}}(A) \rightarrow 0$, $\cos \beta_{\text{opt}}(B^-) \rightarrow \sigma$ при $x \rightarrow +\infty$ и любом σ , имеем из (3.2) приближенное решение при $x \gg 1$:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_{\text{opt}}(A) &= \pm \frac{\sigma}{x} \left[1 - \frac{3-2\sigma}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right], \\ \cos \beta_{\text{opt}}(B^-) &= \pm \sigma \left[1 - \frac{\sigma}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$



Фиг. 4

Полагая в (3.2) $\cos \beta_{\text{opt}} = \cos \beta_{\text{opt}}^* + \Delta \cos \beta$, где $|\cos \beta_{\text{opt}}^*|$ равен (3.3), получим с точностью до членов второго порядка малости приближенное решение при $x \ll 1$:

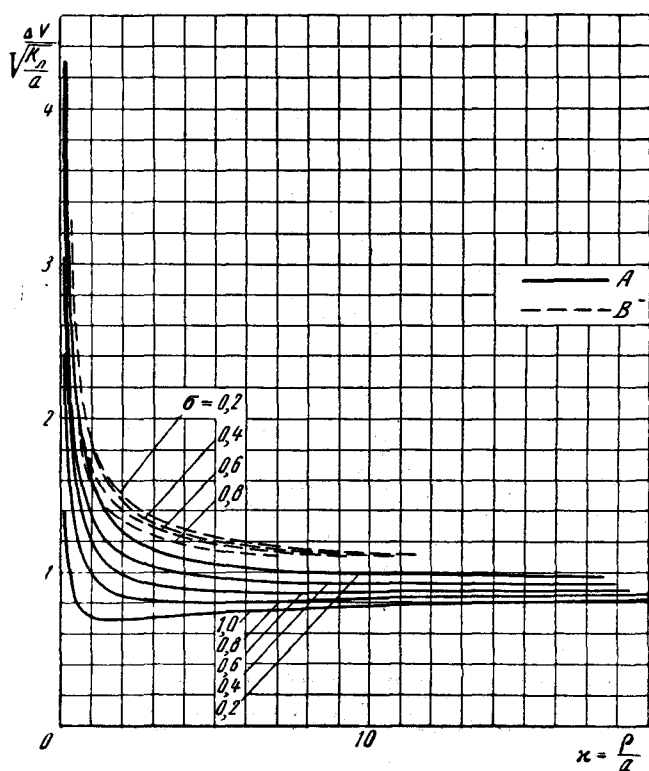
$$\pm \Delta \cos \beta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{x} [(1 - \sqrt{1-\sigma})(\sqrt{1-\sigma} - 1 + \sigma)]^{\frac{1}{2}}.$$

В правой части знак „+“ соответствует маршруту А, знак „-“ — маршруту В⁻. Поскольку $x = \frac{\rho}{a} \approx \frac{V_{\text{сф}}^2}{v^2}$ и отсюда $x_{\text{min}} \approx 0,24$, практическое значение этого случая невелико.

Для эллиптической орбиты ИСЛ найдем при заданных a , ρ_c или $x = \frac{\rho_c}{a}$, σ , e_c и τ точку на орбите ИСЛ, доставляющую $\min \Delta V$.

В этом случае соотношение $\frac{\partial \Delta V^2}{\partial \cos \beta} = 0$, получаемое из (2.14), настолько сложно, что делает практически невозможным получение для $\cos \beta_{\text{opt}}$ соотношений, аналогичных найденным для круговой орбиты ИСЛ. Что касается численного определения $\cos \beta_{\text{opt}}$, то здесь

предпочтительнее искать $\min_{\{\cos \beta\}} \Delta V^2$, используя (2.14). Поэтому ограничимся рассмотрением орбит малой эллиптичности $e_c \ll 1$. Считая известным решением $\cos \beta_{\text{opt}}$ при $e_c = 0$, можно получить приближенное решение для эллиптической орбиты в виде ряда по степеням e_c , в котором вследствие чрезвычайной громоздкости коэффициентов этого ряда практически можно вычислить лишь второй член.



Фиг. 5

Если дополнительно предположить, что плоскость гиперболы близка к плоскости орбиты ИСЛ, и положить $\sigma = 1 - \Delta\sigma$, $\Delta\sigma = n^2$, $\cos \beta_{\text{opt}} = \cos \bar{\beta} + \Delta \cos \beta$, то с точностью до малых второго порядка для маршрута А получаем

$$\Delta \cos \beta = \pm f_{\sigma} \Delta \sigma + (f_{e_c}^l l \pm f_{e_c}^m m) e_c, \quad (3.5)$$

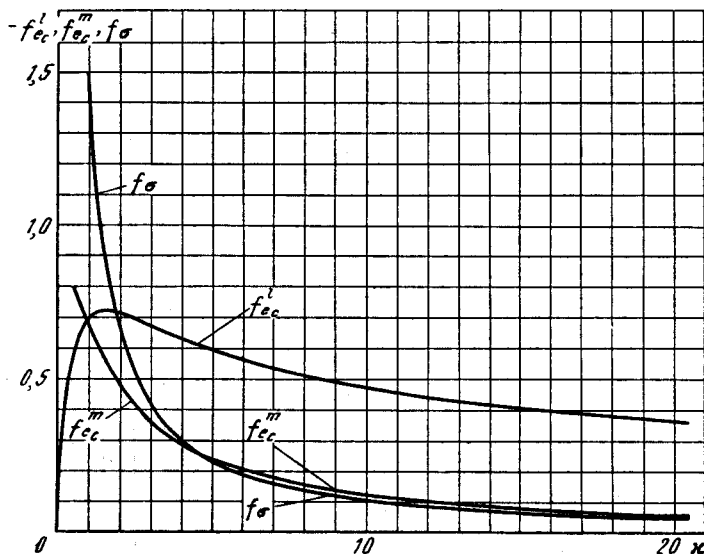
где $l^2 + m^2 = 1$;

$$f_{\sigma} = \frac{2+x}{x(1+x)}; \quad (3.6)$$

$$f_{e_c}^l = \frac{x}{(1+x)^3} \left[1 - 2 \frac{(2+x)^2}{1+x} (\sqrt{2+x} - 1) \right]; \quad (3.7)$$

$$f_{e_c}^m = \frac{\sqrt{(2+x)x}}{(1+x)^3} \left[x + 2 \frac{2+x}{1+x} (\sqrt{2+x} - 1) \right]. \quad (3.8)$$

В (3.5) верхние знаки относятся к случаю выхода на орбиту, а нижние — к случаю схода с орбиты (см. разд. 5). Графики функций f_σ , $f_{e_c}^l$, $f_{e_c}^m$ приведены на фиг. 6. Как показывает сравнение с точными расчетами, (3.5) дает достаточно хорошие результаты до значений $\Delta z \approx 0,3$, $e_c \approx 0,3$ (при $x > 1,5$). При этом $\cos \beta$ определяется с ошибкой $\sim 10\%$, а ΔV — на порядок точнее.



Фиг. 6

4. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ ИСЛ

Рассмотрим выражение $\Delta \bar{V}(x, \sigma)$ [см. (3.1)] при $\cos \beta = \cos \beta_{\text{opt}}(x, \sigma)$.

Считаем, что $x = \frac{\rho}{a}$ изменяется при изменении ρ . Можно показать, что в случае маршрута А существует x_{opt} , при котором достигается $\min_{\{x\}} \Delta \bar{V}$; в случае же маршрута В — величина $\Delta \bar{V}$ монотонно уменьшается с ростом x (см. фиг. 5). Раскладывая с помощью (3.4) $\frac{\partial \Delta \bar{V}^2}{\partial x}$ в ряд при $x \gg 1$ и приравнивая в этом разложении сумму первых трех членов нулю, получим для приближенного определения x соотношение

$$\frac{\partial \Delta \bar{V}^2}{\partial x} \approx -\frac{1}{x^2} \left[3 - \sqrt{x} \sqrt{\sigma} \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right] = 0, \quad (4.1)$$

которое определяет x_{opt} только при $\sigma \leq \frac{3}{4}$. Чтобы избавиться от этого дефекта, заменим (4.1) соотношением

$$3 - \sqrt{x} \sqrt{\sigma} \left(1 + \frac{A}{x} \right) = 0, \quad (4.2)$$

где A определим из условия, чтобы зависимость $\sigma(x_{\text{opt}})$ достигала максимума $\sigma = 1$.

В этом случае $A = \frac{9}{4}$ и

$$\chi_{\text{opt}} \approx \frac{9}{4} \frac{(1 + \sqrt{1 - \sigma})^2}{\sigma}. \quad (4.3)$$

Формула (4.3) дает хорошую сходимость χ_{opt} с точным значением (ошибка не превышает 20%) и очень хорошее совпадение соответствующих величин $\Delta \bar{V}$ (что следует из фиг. 5).

Суммируя выражения (3.1) для случаев выхода на орбиту и схода с нее при неизменной высоте орбиты, получим для суммарной характеристической скорости ΔV выражение

$$\Delta V = \sqrt{\frac{K_L}{a_B}} \Delta \bar{V}_B(\chi_B, \sigma_B, \cos \beta_B) + \sqrt{\frac{K_L}{a_{CX}}} \Delta \bar{V}_{CX}(\chi_{CX}, \sigma_{CX}, \cos \beta_{CX}), \quad (4.4)$$

где индексы „B“ и „CX“ означают выход и сход соответственно; $\chi_B = \frac{\rho}{a_B}$;

$\chi_{CX} = \frac{\rho}{a_{CX}}$; $\cos \beta_B = \cos \beta_{\text{opt}}(\chi_B, \sigma_B)$; $\cos \beta_{CX} = \cos \beta_{\text{opt}}(\chi_{CX}, \sigma_{CX})$. Требуется при заданных $a_B, a_{CX}, \sigma_B, \sigma_{CX}$ определить оптимальную высоту круговой орбиты ρ_{opt} или $\chi_{B \text{ opt}}$, доставляющую $\min \Delta V$ (4.4). Можно показать, что для маршрутов A выхода и схода существует $\chi_{B \text{ opt}}$, а для маршрутов B- значение ΔV монотонно убывает с ростом χ_B . Далее рассматривается селеносферическое движение только по маршрутам A, доставляющим глобальный $\min \Delta V$.

Чтобы получить приближенное выражение для $\chi_{B \text{ opt}}$, воспользуемся для $\frac{\partial (\Delta \bar{V}_B^2)}{\partial \chi_B}$ и $\frac{\partial (\Delta \bar{V}_{CX}^2)}{\partial \chi_{CX}}$ по аналогии с (4.2) приближенным соотношением

$$\frac{\partial (\Delta \bar{V}^2)}{\partial \chi} \approx - \frac{1}{\chi^2} \left[3 - \sqrt{\chi} \sqrt{\sigma} \left(1 + \frac{B}{\chi} \right) \right], \quad (4.5)$$

где B — одна и та же постоянная для выхода и схода.

Пользуясь тем, что $\Delta \bar{V}(\chi, \sigma = \text{const}) \approx \text{const}$ в широком диапазоне значений χ (см. фиг. 5), и учитывая (4.5), получим из $\frac{\partial \Delta \bar{V}}{\partial \chi_B} = 0$

$$\sqrt{\chi_{B \text{ opt}}} \approx \frac{3(\xi + \sqrt{a}) + \sqrt{9(\xi + \sqrt{a})^2 - 4B(\xi \sqrt{\sigma_B} + \sqrt{a_{CX}})(\xi \sqrt{\sigma_B} + \sqrt{a_{CX}})}}{2(\xi \sqrt{\sigma_B} + \sqrt{a_{CX}})}, \quad (4.6)$$

где

$$\bar{a} = \frac{a_{CX}}{a_B}, \quad \xi = \frac{\Delta \bar{V}_{CX}(\chi_{CX}, \sigma_{CX})}{\Delta \bar{V}_B(\chi_B, \sigma_B)}. \quad (4.7)$$

Величину B определим по аналогии с A : потребуем, чтобы при $\sigma_B = \sigma_{CX} = 1$ подкоренное выражение в (4.6) обращалось в нуль. Тогда

$$B = \frac{9}{4} \frac{(\xi + \sqrt{a})}{(1 + \xi)(\xi + a)}. \quad (4.8)$$

Соотношения (4.6) — (4.8) удобно использовать для итерационного определения $\chi_{B \text{ opt}}$, причем в начале итерационного процесса целесообразно положить $\xi = 1$ (см. фиг. 5). Сравнение значений $\chi_{B \text{ opt}}$, определенных по формуле (4.6), с точными значениями $\chi_{B \text{ opt}}$ и соответствующих им значений ΔV показывает, что практически при всех \bar{a} , σ_B и σ_{CX} достаточно двух—трех итераций. Ввиду крайней пологости функции $\Delta V(\chi_B)$ для определения $\Delta V(\chi_{B \text{ opt}})$ с тремя первыми значащими цифрами достаточно посчитать эту функцию для значения $\chi_{B \text{ opt}}$, вычисленного по (4.6) при $\xi = 1$; в этом случае наибольшее различие между $\chi_{B \text{ opt}}$ и χ_B ($\xi = 1$) не превышает ~20%.

Рассмотрим некоторые задачи оптимизации ориентации круговой орбиты ИСЛ в пространстве и продолжительности пребывания на ней. В (3.1) и (4.4) полагаем $\cos \beta = \cos \beta_{\text{opt}}(\chi, \sigma)$. Величину χ считаем либо заданной, либо оптимальной.

Считаем заданными $\vec{V}_{\text{сф}1}$, $\vec{V}_{\text{сф}4}$, a_b и a_c . При указанных условиях в (3.1) $\frac{d\Delta V}{d\sigma} = \frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma} < 0$, в (4.4) $\frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma_b} < 0$ и $\frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma_c} < 0$, т. е. ΔV уменьшается с ростом σ_b и σ_c .

Пусть продолжительность пребывания на орбите ИСЛ t_{23} мала. В этом случае можно полагать $t_{23} = 0$ и считать орбиту ИСЛ в момент выхода на нее и схода с нее одной и той же. Если выбрать

$$\vec{j}_n = \frac{[\vec{V}_{\text{сф}1}, \vec{V}_{\text{сф}4}]}{||[\vec{V}_{\text{сф}1}, \vec{V}_{\text{сф}4}]||}, \quad (4.9)$$

то для такой орбиты имеем выход и сход в плоскости орбиты, $\sigma_b = \sigma_{\text{сх}} = 1$, и реализуется $\min \min \Delta V$.

Если продолжительность пребывания на орбите ИСЛ достаточно велика, то за счет перемещения Луны по орбите и эволюции орбиты ИСЛ ее расположение относительно мгновенной системы осей $x_c y_c z_c$ и форма существенно меняются. Предположим, что эволюцией орбиты можно пренебречь, т. е. орбита остается круговой, высота орбиты не меняется, расположение орбиты относительно системы осей $x_c y_c z_c$ меняется только за счет перемещения Луны по орбите на угол ψ (см. фиг. 1). Если t_{23} задана, то, зная $\vec{V}_{\text{сф}1}$ и $\vec{V}_{\text{сф}4}$, в соответствии с (4.9) для любой t_{23} можно выбрать ориентацию орбиты ИСЛ, обеспечивающую плоский выход и сход.

Пусть задана ориентация орбиты ИСЛ в момент выхода на нее в системе координат $x_{c1} y_{c1} z_{c1}$ ортом $\vec{j}_n \{j_{nx}, j_{ny}, j_{nz}\}$ (см. фиг. 1). Определим продолжительность пребывания на орбите ИСЛ t_{23} , обеспечивающую $\min \Delta V$. Пусть

вектор $\vec{V}_{\text{сф}4}$ в системе координат $x_{c4} y_{c4} z_{c4}$ имеет компоненты $\vec{V}_{\text{сф}4}^{\{t_{23}\}} \{f, g, h\}$. Тогда в момент схода

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{сх}} &= 1 - n_4^2, \\ n_4 &= (\vec{V}_{\text{сф}4}^{\circ}, \vec{j}_n) = b + c \cos \psi + d \sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

где $b = j_{nz} h$, $c = j_{nx} f + j_{ny} g$, $d = j_{ny} f - j_{nx} g$.

Из (4.10) следует, что $\max \sigma_{\text{сх}} \rightarrow \min |n_4|$. Если $j_{nz}^2 + h^2 < 1$, то $\min |n_4| = 0$ и существуют два оптимальных угла ψ_{opt} , определяемых из соотношения

$$\sin(\psi_{\text{opt}} + \chi) = -\frac{b}{\sqrt{c^2 + d^2}},$$

где

$$\sin \chi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \quad \cos \chi = \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}.$$

Если же $j_{nz}^2 + h^2 \geq 1$, то $\min |n_4|$ достигается для $b > 0$ при $\psi_{\text{opt}} = \frac{3}{2}\pi - \chi$, для $b < 0$ при $\psi_{\text{opt}} = \frac{\pi}{2} - \chi$.

Аналогично может быть решена задача об оптимальной продолжительности пребывания на орбите ИСЛ при заданной ориентации орбиты в момент схода с нее.

5. ИНВАРИАНТНОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК СЕЛЕНОСФЕРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ АППАРАТА

При переходе с безапогейного маршрута А на апогейный С (или наоборот) в (2.1) меняет знак только первая компонента U_r . Изменим ориентацию орбиты ИСЛ и селеносферической гиперболы так, чтобы относительно новой орбиты ИСЛ движение аппарата по оптимальной гиперболе оставалось неизменным. Из (2.9) следует, что для неизменности параметров гиперболы не должен меняться

$\cos \beta$; для этого первая компонента $\vec{\rho}^{\circ}$ должна изменить знак. Но тогда из (2.3) — (2.5), вследствие неизменности μ и ν , следует, что направляющие косинусы ортов $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_n$ относительно системы осей $x_c y_c z_c$ меняются следующим образом: $\vec{i}_x (- + +)$, $\vec{i}_y (- + +)$, $\vec{i}_n (+ - -)$. Здесь и в дальнейшем знаком „+“ обозначены неизменные элементы векторов, а знаком „—“ — элементы, меняющие знак.

Из неизменности $\cos \gamma$ [см. (2.13)] и ΔV [см. (2.14)] следует, что векторы $\vec{j}_x, \vec{j}_y, \vec{j}_n$ в осях $x_c y_c z_c$ должны иметь вид $\vec{j}_x (- + +)$, $\vec{j}_y (- + +)$, $\vec{j}_n (+ - -)$. Новый вектор $\vec{V}_{\text{сф}}^{\circ}$ в осях $\vec{j}_x, \vec{j}_y, \vec{j}_n$ имеет при этом следующие компоненты: $\vec{V}_{\text{сф}}^{\circ} (+ + -)$.

При указанной замене ортов $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_n$ и $\vec{j}_x, \vec{j}_y, \vec{j}_n$ все параметры, характеризующие движение аппарата в плоскости селеноцентрической гиперболы, и углы ϑ и τ остаются неизменными. У векторов $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{j}_x, \vec{j}_y$ и $\vec{\rho}_1$ или $\vec{\rho}_4$ селеноцентрическая долгота λ заменяется на $\pi - \lambda$. У векторов \vec{i}_n, \vec{j}_n селеноцентрические долгота λ и широта φ заменяются соответственно на $2\pi - \lambda$ и $-\varphi$.

Отметим, что указанное свойство следует из снесения векторов \vec{U}_1, \vec{U}_4 со сферы действия Луны в центр Луны, поэтому при учете конечности размеров сферы действия Луны [1], [2] оно выполняется лишь приближенно.

При отображении геоцентрической траектории относительно плоскости орбиты Луны у $\vec{V}_{\text{сф}}$ (2.1) меняет знак только третья компонента $U_i \sin \alpha$. Решением поставленной выше задачи является следующий выбор ортов ориентации гиперболы и орбиты ИСЛ и векторов $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_4$ в системе $x_c y_c z_c$: $\vec{i}_x (+ + -)$, $\vec{i}_y (+ + -)$, $\vec{i}_n (- - +)$, $\vec{j}_x (+ + -)$, $\vec{j}_y (+ + -)$, $\vec{j}_n (- - +)$, $\vec{\rho}_1$ или $\vec{\rho}_4 (+ + -)$. У векторов $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{j}_x$ и $\vec{\rho}$ заменяется φ на $-\varphi$; у векторов \vec{i}_n, \vec{j}_n заменяется λ на $\pi + \lambda$. Новый вектор $\vec{V}_{\text{сф}}^{\circ}$ в осях $\vec{j}_x, \vec{j}_y, \vec{j}_n$ имеет компоненты $\vec{V}_{\text{сф}}^{\circ} (+ + -)$.

При изменении направления движения по орбите ИСЛ или при переходе от выхода к сходу (или наоборот) $\vec{V}_{\text{сф}}$ и $\cos \beta$ меняют знаки. Для неизменности параметров оптимальной гиперболы необходимо следующее изменение ортов ее ориентации и орбиты ИСЛ в системе $x_c y_c z_c$: $\vec{i}_x (+ + +)$, $\vec{i}_y (- - -)$, $\vec{i}_n (- - -)$, $\vec{j}_x (+ + +)$, $\vec{j}_y (- - -)$, $\vec{j}_n (- - -)$. Радиус-вектор $\vec{\rho}$ точки выхода или схода остается неизменным; ϑ и τ заменяются соответственно на $-\vartheta$ и $-\tau$. При изменении знака селеноцентрического вектора параметры λ и φ заменяются соответственно на $\pi + \lambda$ и $-\varphi$. Новый вектор $\vec{V}_{\text{сф}}^{\circ}$ в осях $\vec{j}_x, \vec{j}_y, \vec{j}_n$ имеет компоненты $\vec{V}_{\text{сф}}^{\circ} (- + +)$.

В заключение заметим, что соотношения (2.14) или (3.1) при подстановке в них $\cos \beta_{\text{opt}}$ дают явную зависимость $\min \Delta V(a, \sigma, \tau)$ от $\vec{V}_{\text{сф}}$, что может быть использовано для определения дуги перелета Земля — Луна или Луна — Земля из условия $\min \Delta V$. В част-

{ $\vec{V}_{\text{сф}}$ }

ности, из этого условия совместно с (1.1) можно определить оптимальный перелет Земля — Луна.

Результаты настоящей работы, касающиеся оптимизации движения аппарата в пределах сферы действия, могут быть использованы для расчета оптимального планетоцентрического движения при условии, что движение на гелиоцентрических участках определено независимо от планетоцентрического. Соотношения (2.14) и (3.1) при $\cos \beta = \cos \beta_{\text{орт}}$ могут быть использованы для оптимизации межпланетных перелетов с выходом на произвольно ориентированные орбиты ИС планет аналогично тому, как это сделано в [5] для случая совпадения плоскости орбиты ИС с плоскостью, содержащей планетоцентрические скорости аппарата на сфере действия планеты.

* * *

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров В. А. О траекториях возврата от Луны к Земле. «Космические исследования», т. V, вып. 4, 484—493, 1967.
2. Егоров В. А. О влиянии разброса начальных данных на траектории возврата от Луны к Земле. «Космические исследования», т. VII, вып. 1, 3—17, 1969.
3. Ильин В. А. Синтез траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли. Журнал вычислительной математики и математич. физики, т. 7, № 2, 367—388, 1967.
4. Бэттин Р. Наведение в космосе. М., «Машиностроение», 1966.
5. Ильин В. А. К расчету траекторий перелета космических аппаратов между компланарными круговыми орбитами в ньютоновском гравитационном поле. «Космические исследования», т. II, вып. 5, 698—712, 1964.
6. Вождаев В. С. Доклад на III Чтениях, посвященных разработке научного наследия К. Э. Циолковского. Калуга, сентябрь 1968 г.

Рукопись поступила 1/VII 1969 г.