FUNKTIOT JA ARVIOINTI

ANTTI KÄENMÄKI

”Olen, siis ajattelen”

Friedrich Nietzsche (1882)

3. huhtikuuta 2024

Sisällys

Alkulause

Luentomoniste pyrkii kokoamaan esitetystä materiaalista kattavan ja ehkä myös hieman tarvittavaa laajemman kuvan, jolloin opiskelussa voidaan keskittyä yksittäisten aiheiden tarkempaan pohtimiseen. Monisteen marginaaleista löytyy linkit luentovideoihin, jotka pyrkivät käymään sisällön oleelliset asiat läpi ja rakentamaan monisteelle selkeän rungon. Tavoitteena on ollut rakentaa kokonaisuus, joka antaa vahvan pohjan analyysin opiskeluun.

Vaikka matemaattinen sisältö monisteessa on standardi, niin materiaalin valittu esitystapa noudattelee kirjoittajan omaa näkemystä. Kirjoitustyössä hyödyksi on ollut Martti Pesosen ja Pekka Smolanderin luentomoniste *Matematiikan johdantokurssi* vuodelta 2018. Monistetta kirjoittaessa on kiinnitetty erityistä huomiota matematiikan hyvään esittämiseen.

1. Mitä analyysi on?

Analyysi on matematiikan osa-alue, joka käsittelee jatkuvaa muutosta ja tämän tutkimiseen kehitettyjä menetelmiä. Usein sillä tarkoitetaan reaali- ja kompleksilukujen ja funktioiden äärettömien pienten muutosten tarkastelua. Analyysi on kehittynyt differentiaali- ja integraalilaskennasta, joka kattaa analyysin peruskäsitteet ja -menetelmät. Sen tuloksia käytetään kaikilla fysikaalisten tieteiden aloilla, tietojenkäsittelytieteessä, tilastotieteessä, lääketieteessä ja taloustieteessä. Analyysi kehitettiin, sillä jatkuviin muutoksiin ja äärettömyyteen liittyvien tulosten empiirinen perusteleminen osoittautui mahdottomaksi.

Matemaattiset ilmiöt voidaan, matematiikan historiallista jakoa aritmetiikkaan ja geometriaan mukaillen, jakaa karkeasti kahteen luokkaan, diskreetteihin ja jatkuviin. Diskreettejä ilmiöitä voidaan kuvata luonnollisten lukujen avulla kun taas jatkuvien ilmiöiden kuvaamiseen tarvitaan reaalilukuja. Tällaisten lukujen, joiden desimaaliesitys jatkuu äärettömän pitkään, olemuksen ymmärtäminen on analyysin lähtökohta. Matemaattisia objekteja ei konkreettisesti ole olemassa, vaikka monet ilmiöt niitä läheisesti muistuttavatkin. Esimerkiksi luonnolliset luvut eivät ole fyysisiä objekteja, vaan ne ovat käsitteitä luotu kuvaamaan lukumääriä. Reaaliluvut tarjoavat vastaavasti tyydyttäviä malleja monenlaisille ilmiöille, vaikka fyysisessä maailmassa mittaamiseen riittääkin aina äärellinen määrä desimaaleja. Äärettömän pitkillä desimaaliesityksillä ei sinänsä ole konkreettista hyötyä, vaan deduktiiviset rakenteet, joita ne ilmentävät ja mahdollistavat, ovat käyttökelpoisia.

Differentiaali- ja integraalilaskennan kehittivät toisistaan riippumatta Leibniz[1] vuonna 1684 julkaistussa artikkelissa *Nova Methodus pro Maximis et Minimis* ja Newton[2] vuonna 1687 julkaistussa kirjassa *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. He esittelivät töissään yllättävän tuloksen, analyysin peruslauseen, joka nykyterminologian mukaan antaa reaalifunktion määräämälle pinta-alalle laskukaavan sen antiderivaatan avulla. Lauseen mukaan derivointi ja integrointi ovat siten toistensa käänteisoperaatioita. Vaikka differentiaali- ja integraalilaskennan tulokset fysikaalisten ilmiöiden kuvaamisessa olivat välittömästi käyttökelpoisia,

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)
[2] Isaac Newton (1643–1727)

niin kehitetty teoria ei silti ollut vielä vakaalla pohjalla. Leibniz ja Newton molemmat käyttivät hyväkseen käsitettä infinitesimaali, jolla tarkoitettiin nollasta eroavaa arvoa lähempänä nollaa kuin mikä tahansa reaaliluku. Vaikka kukaan ei epäillyt tulosten oikeellisuutta, niin esitetty teoriapohja herätti yleistä tyytymättömyyttä. Anglikaanipappi Berkley[3] julkaisikin vuonna 1734 pamfletin *The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*, jossa hän esitti sille painavaa kritiikkiä.

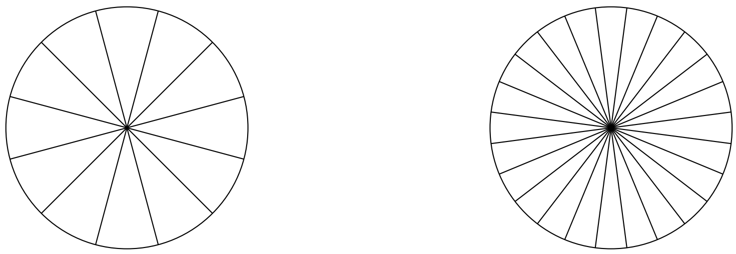
Bolzano[4] oli muiden tapaan epäilevä infinitesimaalien käytöstä. Hän esitteli täsmällisen määritelmän funktion jatkuvuudelle vuonna 1816 ja oli myös ensimmäinen, joka ymmärsi reaalilukujen täydellisyyden. Näiden avulla hän onnistui täsmällisesti osoittamaan lauseen 4.2 väitteen: jos jatkuva funktio saa kahdella reaaliluvulla erimerkkiset arvot, niin sillä on lukujen välissä nollakohta. Lause todentaa intuitiivisen tulkinnan, jonka mukaan jatkuvan reaalifunktion kuvaaja voidaan piirtää nostamatta kynää paperista. Bolzano joutui elämään poliittisesti ja matemaattisesti eristyksissä, joten hänen työnsä tuli muun matemaattisen yhteisön tietoisuuteen vasta hänen kuolemansa jälkeen. Tästä syystä analyysin seuraavat merkittävät kehittäjät Cauchy[5] ja Weierstrass[6], jota myös kutsutaan modernin analyysin isäksi, joutuivat pieneltä osin tekemään päällekkäistä työtä.

Haasteet analyysin teoriapohjan kehittämisessä liittyivät kysymyksiin äärettömän suuriksi tai äärettömän pieniksi muodostuvien määrien merkityksestä. Zenonin[7] paradoksin mukaan Akhilleus ei voi koskaan tavoittaa kilpikonnaa, sillä takaa-ajoasemassa olevan Akhilleuksen täytyy ensiksi juosta siihen kohtaan, josta häntä pakeneva kilpikonna aloitti oman juoksunsa. Jos kuvattua prosessia toistetaan vain äärellisen monta kertaa, niin näin todellakin on – Akhilleus ei pääse kilpikonnan edelle. Mutta mitä useamman kerran prosessia toistetaan, niin sitä lyhyemmäksi kilpikonnan etumatka jää, kun Akhilleus ehtii kohtaan mistä kilpikonna aloitti siihen toistoon liittyvän juoksunsa. Koska Akhilleus kuitenkin pääsee jossain vaiheessa kilpikonnan ohi, niin äärettömän monta kertaa toistettu prosessi vastaa todellista

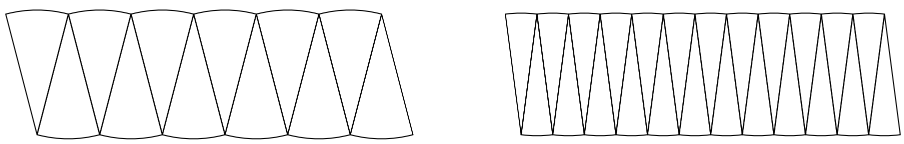
[3]George Berkeley (1685–1753)
[4]Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848)
[5]Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)
[6]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)
[7]Zenon Elealainen (n. 495–430 eaa.)

kilpailutilannetta, nimittäin sitä, missä Akhilleus on päässyt kilpikonnan rinnalle. Tämä siitä huolimatta, että mitään prosessia ei tietenkään käytännössä voida toistaa äärettömän montaa kertaa.

Noin vuonna 250 eaa. Arkhimedes[8] selvitti tutkielmassaan *Kuklou metrēsis* ympyrän pinta-alan. Ympyrän kehän suhdetta halkaisijaan merkitään symbolilla π. Koska r-säteisen ympyrän halkaisija on $2r$, niin sen kehän pituus on näin ollen $2\pi r$. Pinta-alan laskemiseksi Arkhimedes ositti ympyrän samankokoisiin



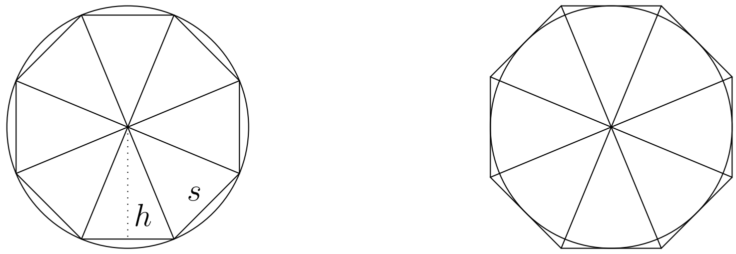
sektoreihin eli jakoi sen kuin piirakan yllä olevan kuvan mukaisesti. Tämän jälkeen hän järjesti sektorit alla olevan kuvan mukaisesti uudelleen ja teki havainnon, että



mitä kapeampiin sektoreihin ympyrän osittaa, niin sitä paremmin ne uudelleen järjestettynä muistuttavat suorakaidetta. Koska arvioivan suorakaiteen korkeus on noin r ja leveys noin puolet ympyrän kehän pituudesta eli πr, niin r-säteisen ympyrän pinta-alan täytyy olla noin πr^2. Sen osoittamiseksi, että pinta-ala on täsmälleen πr^2, täytyy vielä paremmin ymmärtää prosessi, jossa sektorit valitaan kapeammiksi ja kapeammiksi.

Arkhimedes arvioi ympyrän pinta-alaa Eudoksoksen[9] kehittämällä tyhjennysmenetelmällä alhaalta ja ylhäältä tarkemmin ja tarkemmin, ja sitä kautta onnistui laskemaan sen tarkan arvon. Hänen ajatuksenaan oli tarkastella mahdollisimman suurta säännöllistä monikulmiota, joka sisältyy ympyrään, sekä mahdollisimman pientä säännöllistä monikulmiota, joka sisältää ympyrän. Oheinen kuva havainnol-

[8]Arkhimedes Syrakusalainen (n. 287–212 eaa.)
[9]Eudoksos Knidoslainen (n. 400–350 eaa.)



listaa tätä kahdeksankulmioiden avulla. Koska monikulmioiden pinta-alat voidaan laskea alkeisgeometrian keinoin, niin ympyrän pinta-alalle saadaan alaraja ja yläraja. Käyttämällä tarkastelussa useampikulmaisia monikulmioita saadaan pinta-alalle tarkempia ja tarkempia arvioita. Näin saadaan osoitettua, että r-säteisen ympyrän pinta-ala A on täsmälleen πr^2. Jos nimittäin olisi $\pi r^2 < A$, niin ympyrän sisälle löydetään n-kulmainen säännöllinen monikulmio, jonka pinta-ala M arvioi ympyrän pinta-alaa A niin hyvin, että $\pi r^2 < M < A$. Kyseinen monikulmio koostuu n monesta tasakylkisestä kolmiosta, jonka kyljen pituus on r, kannan pituus on s ja kantaa vastaavan korkeusjanan pituus on $h < r$. Koska monikulmion reunajanojen eli em. kolmioiden kantojen pituuksien yhteenlaskettu pituus on korkeintaan ympyrän kehän pituus eli $ns < 2\pi r$, niin monikulmion pinta-alalle saadaan arvio $M = n\frac{sh}{2} < \pi r^2$, mikä on ristiriita. Koska vastaavasti myös oletus $A < \pi r^2$ johtaa ristiriitaan, niin päättely osoittaa, että r-säteisen ympyrän pinta-ala on πr^2.

Yksikköympyrän pinta-ala on Arkhimedeen tuloksen mukaan π, joten tyhjennysmenetelmä antaa myös keinon luvun π arvioimiseen. Arkhimedes onnistui käsin laskemaan, että $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$. Tarkastelemalla edellä n-kulmaisia säännöllisiä monikulmioita saadaan trigonometriaan vedoten pinta-alalle arvio $\frac{n}{2}\sin(\frac{360°}{n}) < \pi < n\tan(\frac{180°}{n})$. Kahdeksankulmioiden tapauksessa saadaan siis arvio $2{,}82842712 < \pi < 3{,}31370850$ ja jos $n = 1\,000$, niin $3{,}14157198 < \pi < 3{,}14160299$. Esimerkissä 2.18 esitellään menetelmä arvioida lukua $\sqrt{2}$ alhaalta ja ylhäältä tarkemmin ja tarkemmin, ja osoitetaan arvio $1{,}414213 < \sqrt{2} < 1{,}414214$.

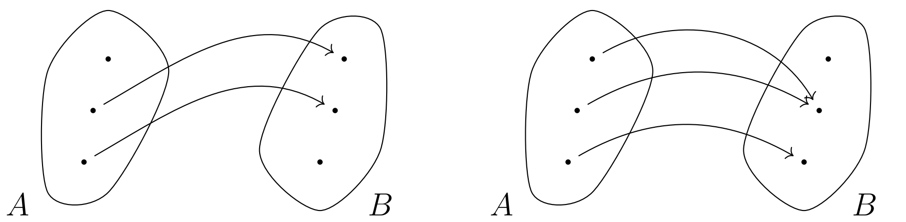
Tämän luentomonisteen sisällöllisenä tavoitteena on selvittää analyysissa tarvittavia peruskäsitteitä ja -menetelmiä. Lisäksi tavoitteena on oppia lukemaan todistuksia sujuvasti tarvittaessa samalla täydentäen mahdollisia puuttuvia yksityiskohtia sekä rakentamaan mallin avulla omia. Lukijalta oletetaan todistustekniikoiden ymmärtämistä ja joukko-opin perusteiden hallintaa.

2. Kuvaus ja käänteiskuvaus

2.1. **Reaalifunktio.** Joukkojen A ja B *karteesinen tulo* on joukko

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ ja } y \in B\}. \tag{2.1}$$

Jos $n \in \mathbb{N}$ ja $A_1, \ldots, A_{n+1}$ ovat joukkoja, niin joukkojen $A_1, \ldots, A_{n+1}$ karteesinen tulo määritellään rekursiivisesti asettamalla $A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1} = (A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}$. Joukon A *potenssi* A^n on n-kertainen karteesinen tulo $A \times \cdots \times A$. Karteesisen tulon $A \times B$ osajoukkoa $R \subset A \times B$ kutsutaan *relaatioksi* joukolta A joukolle B ja jos $(x, y) \in R$, niin sanotaan, että $x \in A$ on *relaatiossa* R alkion $y \in B$ kanssa. Oheiset kuvat havainnollistavat kahta joukon $A \times B$ relaatiota, kun

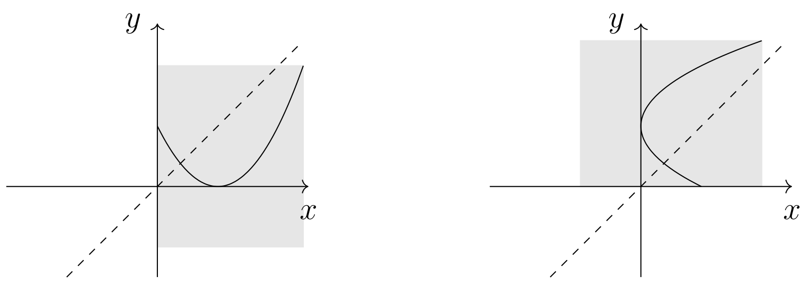


A ja B ovat molemmat kolmen alkion joukkoja. Niissä on nuolilla ilmaistu mitkä joukon A alkiot ovat relaatiossa minkäkin joukon B alkion kanssa.

Relaation $R \subset A \times B$ *käänteisrelaatio* on joukko

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in R\} \subset B \times A. \tag{2.2}$$

Käänteisrelaatio on siis relaatio joukolta B joukolle A. Karteesinen tulo $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ on *taso* ja sen esittämiseksi käytetään usein *xy*-



koordinaatistoa. Oheiset kuvat havainnollistavat xy-koordinaatistolla relaatiota $h = \{(x, y) \in [0, 1+\sqrt{2}] \times [-1, 2] : y = x^2 - 2x + 1\}$ joukolta $[0, 1+\sqrt{2}]$ joukolle $[-1, 2]$

sekä sen käänteisrelaatiota $h^{-1} \subset [-1,2]\times[0,1+\sqrt{2}]$, joka siis saadaan geometrisesti peilaamalla relaatio h suoran $y = x$, ts. tason joukon $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$, suhteen.

Jos $C \subset A$, niin sanotaan, että joukon C *kuvajoukko* relaatiossa $R \subset A \times B$ on

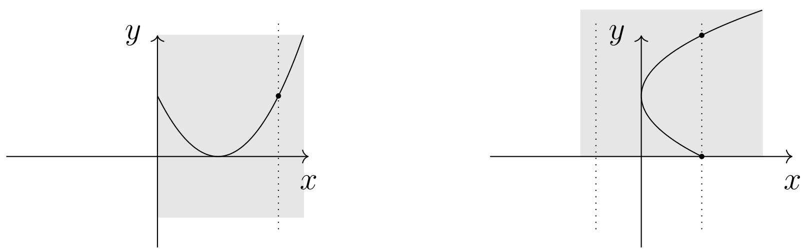
$$R(C) = \{y \in B : (x,y) \in R \text{ jollakin } x \in C\} \subset B. \tag{2.3}$$

Sanotaan, että relaatio $R \subset A \times B$ on *kaikkialla määritelty*, jos jokaiselle $x \in A$ on olemassa $y \in B$ siten, että $(x,y) \in R$. Relaatio R on siis kaikkialla määritelty täsmälleen silloin, kun

$$A \subset R^{-1}(B). \tag{2.4}$$

Esimerkiksi edellä tarkasteltu relaatio h on kaikkialla määritelty. Huomataan, että joukon B kuvajoukko käänteisrelaatiossa R^{-1} sisältyy kuvajoukon määritelmän eli kohdan (2.3) mukaan aina joukkoon A eli $R^{-1}(B) \subset A$ riippumatta siitä onko R kaikkialla määritelty. Edelleen sanotaan, että relaatio R on *yksiarvoinen*, jos jokaisella $x \in A$ ja $y, z \in B$ ehdoista $(x,y) \in R$ ja $(x,z) \in R$ seuraa $y = z$. Toisin sanoen, relaatio $R \subset A \times B$ on kaikkialla määritelty, jos jokainen joukon A alkio on relaatiossa ainakin yhden joukon B alkion kanssa, ja yksiarvoinen, jos jokainen joukon A alkio on relaatiossa korkeintaan yhden joukon B alkion kanssa. Huomataan, että edellä tarkasteltu relaatio h on myös yksiarvoinen.

Relaatio $f \subset A \times B$ on *kuvaus* tai *funktio*, jos se on kaikkialla määritelty ja yksiarvoinen. Kuvausta f joukolta A joukolle B merkitään $f\colon A \to B$ ja sanotaan, että A on kuvauksen *lähtöjoukko* ja B *maalijoukko*. Jos $A, B \subset \mathbb{R}$, niin kuvausta $f\colon A \to B$ kutsutaan *reaalifunktioksi*. Oheiset kuvat perustelevat, että edellä



tarkasteltu relaatio h on reaalifunktio, mutta sen käänteisrelaatio h^{-1} ei ole kaikkialla määritelty eikä yksiarvoinen, eikä siten kuvaus. Relaatio $f \subset A \times B$ on siis kuvaus täsmälleen silloin, kun jokaiselle lähtöjoukon alkiolle $x \in A$ on olemassa yksikäsitteinen maalijoukon alkio $y \in B$, jonka kanssa x on relaatiossa. Tällöin käytetään merkintää $f(x) = y$ ja sanotaan, että $f(x)$ on *lähtöpisteen x kuvapiste* kuvauksessa f. Näin ollen kuvaus voidaan myös määritellä "sääntönä" ilmoittamalla kuinka kuvapiste määräytyy kullekin lähtöjoukon alkiolle. Esimerkiksi "säännöllä"

$$h\colon [0, 1+\sqrt{2}] \to [-1, 2], \quad h(x) = x^2 - 2x + 1,$$

tarkoitetaan edellä tarkasteltua reaalifunktiota h. Tässä yhteydessä relaatiota $h \subset [0, 1+\sqrt{2}] \times [-1, 2]$ on tapana kutsua kuvauksen $h\colon [0, 1+\sqrt{2}] \to [-1, 2]$ *kuvaajaksi*. Kuvaukset f ja g ovat *samat*, $f = g$, jos niillä on samat lähtö- ja maalijoukot sekä samat kuvapisteet. Jos siis $f\colon A \to B$ ja $g\colon C \to D$ ovat kuvauksia siten, että $B = D$ ja $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in A = C$, niin $f = g$. Edelleen, jos on olemassa $c \in B$ siten, että $f(x) = c$ kaikilla $x \in A$, niin merkitään $f \equiv c$ ja kutsutaan tällaista kuvausta *vakiokuvaukseksi*.

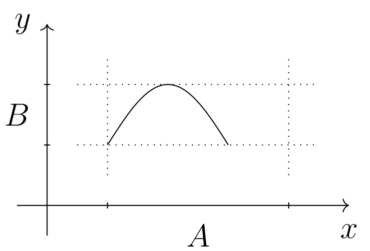
Esimerkki 2.1. (1) Olkoot $A = [1, 4]$ ja $B = [1, 2]$. Tällöin relaatio

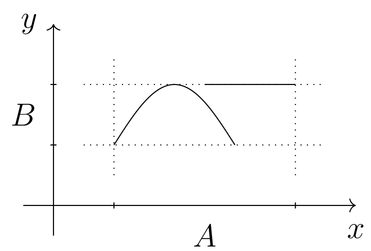
$$\{(x, \sin(\tfrac{1}{2}(x-1)\pi) + 1) : x \in [1, 3]\} \subset A \times B$$

on yksiarvoinen, mutta ei ole kaikkialla määritelty, sillä alkio $4 \in A$ ei ole relaatiossa minkään joukon B alkion kanssa. Relaatio

$$\{(x, \sin(\tfrac{1}{2}(x-1)\pi) + 1) : x \in [1, 3]\} \cup ([\tfrac{5}{2}, 4] \times \{2\}) \subset A \times B$$

on kaikkialla määritelty, mutta ei ole yksiarvoinen, sillä alkio $3 \in A$ on relaatiossa alkioiden $1 \in B$ ja $2 \in B$ kanssa. Näin ollen kumpikaan relaatioista ei ole kuvaus





joukolta A joukolle B. Oheiset kuvat havainnollistavat määriteltyjä relaatioita.

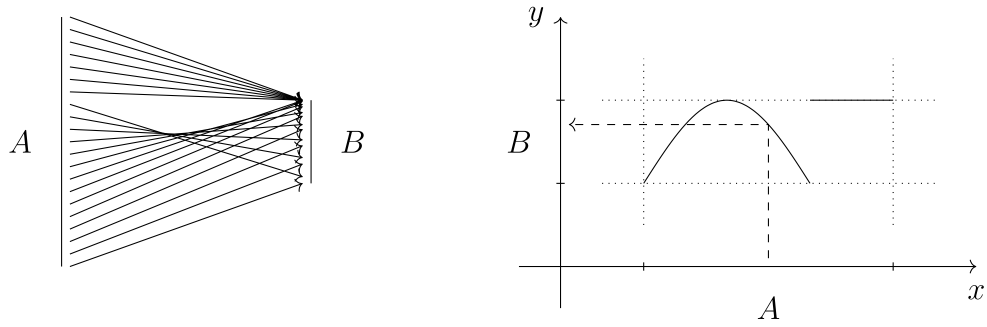
(2) Olkoot $A = [1, 4]$ ja $B = [1, 2]$. Tällöin relaatio

$$f = \{(x, \sin(\tfrac{1}{2}(x-1)\pi) + 1) : x \in [1, 3]\} \cup ((3, 4] \times \{2\}) \subset A \times B$$

on kaikkialla määritelty ja yksiarvoinen. Näin ollen f on kuvaus joukolta A joukolle B. Reaalifunktio $f\colon A \to B$ oltaisiin voitu määritellä myös asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{2}(x-1)\pi) + 1, & \text{jos } 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2, & \text{jos } 3 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

Oheiset kuvat havainnollistavat kuinka f kuvaa alkioita joukosta A joukkoon B. Vasemmanpuoleisessa kuvassa on nuolilla ilmaistu mitkä joukon A alkiot ovat



relaatiossa minkäkin joukon B alkion kanssa. Alkion $x \in A$ kuvapisteen $f(x) \in B$ määräytymistä kuvauksessa f voidaan helposti havainnollistaa xy-koordinaatistossa oikeanpuoleisen kuvan mukaisesti.

Relaation kuvajoukon määritelmän eli kohdan (2.3) mukaan joukon $C \subset A$ *kuvajoukko* kuvauksessa $f\colon A \to B$ on joukko

$$f(C) = \{f(x) \in B : x \in C\} \subset B. \tag{2.5}$$

Jos $A' \subset A$ ja $f(A') \subset B' \subset B$, niin kuvausta $g\colon A' \to B'$, jolle $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in A'$, kutsutaan kuvauksen $f\colon A \to B$ *rajoittumaksi*. Jos f on annettu eikä ole tarpeen korostaa maalijoukkoa B', niin rajoittumakuvausta g voidaan lyhyemmin merkitä rajoittumamerkinnällä $f|_{A'}$. Joukon $D \subset B$ *alkukuva* kuvauksessa f on joukon D kuvajoukko käänteisrelaatiossa f^{-1} eli

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\} \subset A. \tag{2.6}$$

Koska kuvaus on kaikkialla määritelty, niin kohdan (2.4) avulla huomataan, että maalijoukon alkukuva on koko lähtöjoukko, ts. $f^{-1}(B) = A$.

Luentovideo 1

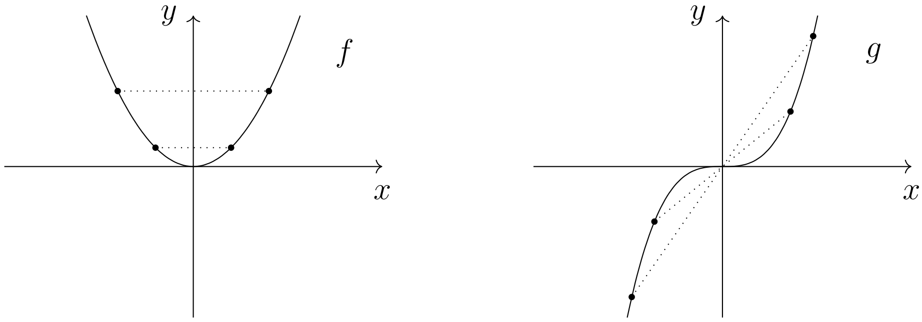
2.2. **Parillinen ja pariton reaalifunktio.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Sanotaan, että reaalifunktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on *parillinen*, jos

$$f(-x) = f(x)$$

kaikilla $x \in A$, ja *pariton*, jos

$$f(-x) = -f(x)$$

kaikilla $x \in A$. Huomautetaan, että määritelmät sisältävät vaatimuksen myös lähtöjoukolle A: jos alkio x sisältyy joukkoon A, niin myös sen vastaluvun $-x$ tulee sisältyä joukkoon A. Sanotaankin, että joukko A on tällöin *symmetrinen origon suhteen* eli joukko $A \cap (-\infty, 0]$ on joukon $A \cap [0, \infty)$ peilikuva, ts. $A \cap (-\infty, 0] = \{-x \in \mathbb{R} : x \in A \cap [0, \infty)\}$. Myös parilliset ja parittomat kuvaukset ovat symmetrisiä: parillinen reaalifunktio on symmetrinen y-akselin suhteen ja



pariton reaalifunktio origon suhteen. Oheiset kuvat havainnollistavat parillisen reaalifunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ja parittoman reaalifunktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$, symmetrisyyttä.

Lause 2.2. *Jos reaalifunktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on parillinen ja pariton, niin $f \equiv 0$.*

Todistus. Jos reaalifunktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on pariton, niin $f(x) = -f(-x)$ kaikilla $x \in A$. Jos se taas on parillinen, niin $-f(-x) = -f(x)$ kaikilla $x \in A$. Yhdistämällä nämä havainnot nähdään, että $f(x) = -f(x)$ kaikilla $x \in A$. Näin ollen $2f(x) = 0$ eli $f(x) = 0$ kaikilla $x \in A$. $\square$

Reaalifunktioiden $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ *summa* $f+g$, *erotus* $f-g$ ja *tulo* fg määritellään asettamalla

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x),\\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x),\\ (fg)(x) &= f(x)g(x)\end{aligned}$$

kaikille $x \in A$. Vastaavasti *osamäärä* f/g määritellään asettamalla

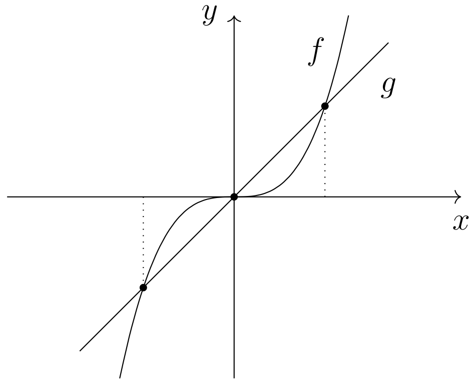
$$\Big(\frac{f}{g}\Big)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

kaikille niille $x \in A$, joilla $g(x) \neq 0$. Huomataan, että summa, erotus ja tulo ovat reaalifunktioita $A \to \mathbb{R}$ ja osamäärä $A' \to \mathbb{R}$, missä $A' = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$.

Lause 2.3. *Jos $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ ovat reaalifunktioita ja $x \in A$, niin $f(x) = g(x)$ täsmälleen silloin, kun $(f-g)(x) = 0$. Erityisesti $f = g$ täsmälleen silloin, kun $f - g \equiv 0$.*

Todistus. Jos $x \in A$, niin ehto $f(x) = g(x)$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $f(x) - g(x) = 0$, mikä taas reaalifunktioiden erotuksen määritelmän mukaan tarkoittaa sitä, että $(f-g)(x) = 0$. $\square$

Esimerkki 2.4. Tarkastellaan reaalifunktiota $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 - x$, ja selvitetään millä reaaliluvuilla x pätee $h(x) = 0$. Jos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, niin $h = f - g$. Lauseen 2.3 mukaan ehto $h(x) = 0$ toteutuu täsmälleen

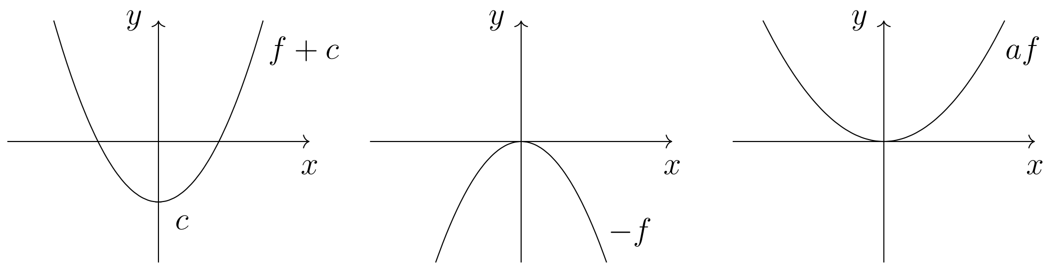


silloin, kun $f(x) = g(x)$ eli kun kuvauksilla f ja g on samat kuvapisteet. Näin ollen reaaliluvut x, joille $h(x) = 0$, löytyvät oheisen kuvan mukaisesti reaalifunktioiden f ja g kuvaajien yhtymäkohtien avulla. Toki ehdon $h(x) = 0$ toteuttavat pisteet olisi voinut selvittää myös suoraan huomaamalla, että $0 = h(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$ täsmälleen silloin, kun $x = 0$, $x = 1$ tai $x = -1$.

Reaalifunktioiden summan ja tulon erikoistapauksina voidaan määritellä siirto, peilaus ja skaalaus. Jos siis $f\colon A \to \mathbb{R}$ on reaalifunktio, $c \in \mathbb{R}$ ja $a > 0$, niin kuvauksen f *siirto y-akselin suuntaan* luvun c verran on $f + c$, *peilaus x-akselin suhteen* on $-f$ ja *skaalaus* luvulla a on af. Ne on määritelty asettamalla

$$(f + c)(x) = f(x) + c,$$
$$(-f)(x) = -f(x),$$
$$(af)(x) = af(x)$$

kaikille $x \in A$. Huomataan, että nämä ovat kaikki reaalifunktioita $A \to \mathbb{R}$. Jos



esimerkiksi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, sekä $c = -1$ ja $a = \frac{1}{2}$, niin oheiset kuvat havainnollistavat siirtoa $f + c$, peilausta $-f$ ja skaalausta af näillä valinnoilla.

Lause 2.5. *(1) Kahden parillisen reaalifunktion summa ja erotus ovat parillisia.*

(2) Kahden parittoman reaalifunktion summa ja erotus ovat parittomia.

Todistus. Osoitetaan kohta (1) ja jätetään kohta (2) harjoitustehtäväksi. Jos $A \subset \mathbb{R}$ ja $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ ovat parillisia reaalifunktioita, niin

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

ja vastaavasti $(f - g)(-x) = (f - g)(x)$ kaikilla $x \in A$. Näin ollen $f + g$ ja $f - g$ ovat parillisia reaalifunktioita. $\square$

Vaikka reaalifunktiot eivät yleensä ole parillisia eikä parittomia, niin jokainen origon suhteen symmetrisellä joukolla määritelty reaalifunktio voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla parillisen ja parittoman reaalifunktion summana.

Lause 2.6. *Jos $A \subset \mathbb{R}$ on origon suhteen symmetrinen joukko ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ on reaalifunktio, niin on olemassa yksikäsitteiset reaalifunktiot $g, h\colon A \to \mathbb{R}$ siten, että g on parillinen, h on pariton ja $f = g + h$.*

Todistus. Määritellään reaalifunktiot $g, h\colon A \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \\ h(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{aligned}$$

kaikille $x \in A$. Tällöin

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x), \\ h(-x) &= \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x) \end{aligned}$$

kaikilla $x \in A$ eli g on parillinen ja h on pariton. Lisäksi

$$(g + h)(x) = g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

kaikilla $x \in A$ eli $f = g + h$.

Osoitetaan vielä, että esitys on yksikäsitteinen. Jos $g_1, g_2\colon A \to \mathbb{R}$ ovat parillisia reaalifunktioita ja $h_1, h_2\colon A \to \mathbb{R}$ parittomia reaalifunktioita siten, että $g_1 + h_1 = f = g_2 + h_2$, niin

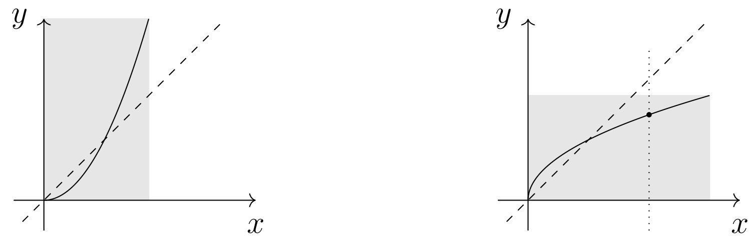
$$g_1 - g_2 = h_2 - h_1,$$

missä lauseen 2.5 mukaan $g_1 - g_2$ on kahden parillisen reaalifunktion erotuksena parillinen ja $h_2 - h_1$ on kahden parittoman reaalifunktion erotuksena pariton. Koska kuvaukset $g_1 - g_2$ ja $h_2 - h_1$ ovat samat, niin molemmat ovat yhtäaikaa parillisia ja parittomia. Näin ollen lauseen 2.2 nojalla $g_1 - g_2 \equiv 0$ ja $h_2 - h_1 \equiv 0$. Siispä lauseen 2.3 mukaan kuvaukset g_1 ja g_2 ovat samat kuten myös kuvaukset h_1 ja h_2. □

2.3. **Bijektio.** Sanotaan, että kuvaus $f\colon A \to B$ on *surjektio*, jos sen käänteisrelaatio $f^{-1} \subset B \times A$ on kaikkialla määritelty, ja *injektio*, jos f^{-1} on yksiarvoinen. Jos

Luentovideo 2

kuvaus on surjektio ja injektio, niin sanotaan, että se on *bijektio*. Jos käänteisrelaatio f^{-1} on kuvaus, niin sanotaan, että kuvauksella f on *käänteiskuvaus* $f^{-1}\colon B \to A$. Oheisessa kuvassa vasemmalla on reaalifunktio $f\colon [0, \sqrt{3}] \to [0, 3]$, $f(x) = x^2$,



eli relaatio $f = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \sqrt{3}]\} \subset [0, \sqrt{3}] \times [0, 3]$ ja oikealla sen käänteisrelaatio $f^{-1} \subset [0, 3] \times [0, \sqrt{3}]$. Koska kuvasta katsoen f^{-1} näyttäisi selvästi olevan kaikkialla määritelty ja yksiarvoinen, niin f on surjektio ja injektio. Siispä f on bijektio ja sillä on käänteiskuvaus $f^{-1}\colon [0, 3] \to [0, \sqrt{3}]$.

Lause 2.7. *Kuvauksella f on käänteiskuvaus täsmälleen silloin, kun f on bijektio.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $f\colon A \to B$ on bijektio. Koska f on tällöin surjektio ja injektio, niin sen käänteisrelaatio $f^{-1} \subset B \times A$ on kaikkialla määritelty ja yksiarvoinen. Siispä f^{-1} on kuvaus $f^{-1}\colon B \to A$.

Oletetaan sitten, että käänteisrelaatio $f^{-1} \subset B \times A$ on kuvaus $f^{-1}\colon B \to A$. Koska f^{-1} on tällöin kaikkialla määritelty ja yksiarvoinen, niin $f\colon A \to B$ on surjektio ja injektio ja siten bijektio. $\square$

Seuraava lause esittelee surjektiivisuudelle yhtäpitäviä ehtoja kuvauksen ominaisuuksien avulla.

Lause 2.8. *Jos $f\colon A \to B$ on kuvaus, niin seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät:*

(1) f on surjektio,
(2) joukon $\{y\}$ alkukuvassa $f^{-1}(\{y\})$ on vähintään yksi alkio kaikilla $y \in B$,
(3) $f(A) \supset B$,
(4) $f(A) = B$.

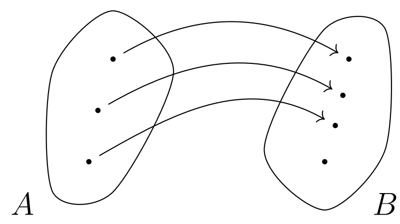
Todistus. Osoitetaan, että kohdasta (1) seuraa kohta (2). Olkoon $y \in B$. Koska kohdan (1) mukaan f on surjektio, niin sen käänteisrelaatio $f^{-1} \subset B \times A$ on kaikkialla määritelty. Siten y on relaatiossa f^{-1} ainakin yhden joukon A alkion kanssa. Koska alkukuva $f^{-1}(\{y\})$ on määritelmänsä eli kohdan (2.6) mukaan joukon $\{y\}$ kuvajoukko käänteisrelaatiossa f^{-1}, niin alkukuvassa $f^{-1}(\{y\})$ on näin ollen vähintään yksi alkio. Siispä kohta (2) on voimassa.

Osoitetaan, että kohdasta (2) seuraa kohta (3). Olkoon $y \in B$ ja huomataan, että kohdan (2) mukaan alkukuvassa $f^{-1}(\{y\})$ on vähintään yksi alkio. Alkukuvan määritelmän eli kohdan (2.6) mukaan on siis olemassa $x \in A$ siten, että $f(x) \in \{y\}$ eli $f(x) = y$. Näin ollen $B \subset f(A)$ ja kohta (3) pätee.

Osoitetaan, että kohdasta (3) seuraa kohta (4). Kohdan (3) mukaan $f(A) \supset B$ ja kuvajoukon määritelmän eli kohdan (2.5) mukaan kuvaukselle $f\colon A \to B$ pätee $f(A) \subset B$. Siispä kohta (4) on voimassa.

Osoitetaan, että kohdasta (4) seuraa kohta (1). Kohdan (4) mukaan $f(A) = B$. Koska käänteisrelaation käänteisrelaatio on relaatio itse, niin $(f^{-1})^{-1}(A) = B$. Siispä käänteisrelaatio $f^{-1} \subset B \times A$ on kohdan (2.4) nojalla kaikkialla määritelty ja f on surjektio. Tämä kohdassa (1) pitikin osoittaa. $\square$

Oheisessa kuvassa on havainnollistettu kuvausta joukolta A joukolle B, joka ei lauseen 2.8 kohdan (3) mukaan ole surjektio, sillä joukon B alin alkio ei sisälly



lähtöjoukon A kuvajoukkoon. Huomataan myös, että lauseen 2.8 kohdan (4) nojalla injektiivisen kuvauksen $f\colon A \to B$ rajoittuma $f\colon A \to f(A)$ on bijektio ja siten lauseen 2.7 mukaan on olemassa käänteiskuvaus $f^{-1}\colon f(A) \to A$. Esitellään seuraavassa lauseessa injektiivisyydelle yhtäpitäviä ehtoja kuvauksen ominaisuuksien avulla.

Lause 2.9. *Jos $f\colon A \to B$ on kuvaus, niin seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät:*

(1) f on injektio,

(2) joukon $\{y\}$ alkukuvassa $f^{-1}(\{y\})$ on korkeintaan yksi alkio kaikilla $y \in B$,

(3) jokaisella $x, x' \in A$ ehdosta $x \neq x'$ seuraa $f(x) \neq f(x')$,

(4) jokaisella $x, x' \in A$ ehdosta $f(x) = f(x')$ seuraa $x = x'$.

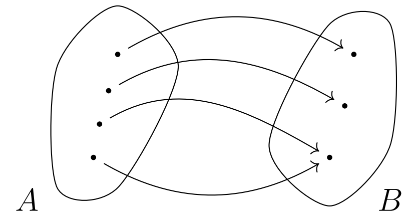
Todistus. Osoitetaan, että kohdasta (1) seuraa kohta (2). Olkoon $y \in B$. Koska kohdan (1) mukaan f on injektio, niin sen käänteisrelaatio $f^{-1} \subset B \times A$ on yksiarvoinen. Siten y on relaatiossa f^{-1} korkeintaan yhden joukon A alkion kanssa. Koska alkukuva $f^{-1}(\{y\})$ on määritelmänsä eli kohdan (2.6) mukaan joukon $\{y\}$ kuvajoukko käänteisrelaatiossa f^{-1}, niin alkukuvassa $f^{-1}(\{y\})$ on näin ollen korkeintaan yksi alkio. Siispä kohta (2) on voimassa.

Osoitetaan, että kohdasta (2) seuraa kohta (3). Olkoon siis $x, x' \in A$ siten, että $x \neq x'$. Huomataan, että alkukuva $f^{-1}(\{f(x)\})$ määritelmänsä eli kohdan (2.6) mukaan sisältää ainakin alkion x. Koska kohdan (2) mukaan joukon $\{f(x)\}$ alkukuvassa $f^{-1}(\{f(x)\})$ on korkeintaan yksi alkio, niin alkukuva $f^{-1}(\{f(x)\})$ ei sisällä muita alkioita kuin alkion x. Erityisesti $x' \notin f^{-1}(\{f(x)\})$ mikä alkukuvan määritelmän eli kohdan (2.6) mukaan tarkoittaa sitä, että $f(x') \notin \{f(x)\}$ eli $f(x') \neq f(x)$. Siispä kohta (3) pätee.

Osoitetaan, että kohdasta (3) seuraa kohta (4). Olkoon siis $x, x' \in A$ siten, että $f(x) = f(x')$. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että $x \neq x'$. Tällöin kohdan (3) nojalla $f(x) \neq f(x')$, mikä on ristiriita. Siispä $x = x'$ ja kohta (4) on voimassa.

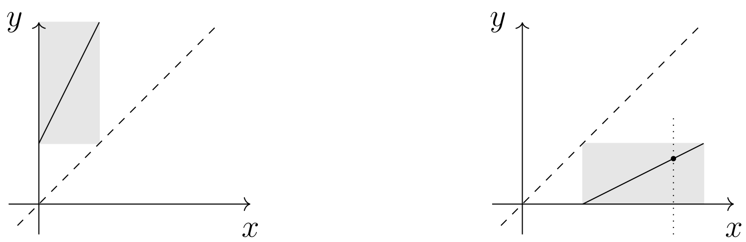
Osoitetaan, että kohdasta (4) seuraa kohta (1). Halutaan siis osoittaa, että kuvauksen f käänteisrelaatio $f^{-1} \subset B \times A$ on yksiarvoinen. Olkoon siis $y \in B$ ja $x, x' \in A$ siten, että $(y, x) \in f^{-1}$ ja $(y, x') \in f^{-1}$. Koska käänteisrelaation määritelmän eli kohdan (2.2) mukaan $(x, y) \in f$ ja $(x', y) \in f$ eli $f(x) = y$ ja $f(x') = y$, niin $f(x) = f(x')$. Näin ollen kohdan (4) nojalla $x = x'$ ja f^{-1} on yksiarvoinen. $\square$

Oheisessa kuvassa on havainnollistettu kuvausta joukolta A joukolle B, joka



ei lauseen 2.9 kohdan (2) mukaan ole injektio, sillä joukon B alimman alkion alkukuvassa on kaksi alkiota.

Esimerkki 2.10. Oheisessa kuvassa vasemmalla on kuvaus $f\colon [0,1] \to [1,3]$, $f(x) = 2x+1$, ja oikealla sen käänteisrelaatio f^{-1}. Koska kuvasta katsoen f^{-1} näyttäisi



selvästi olevan kaikkialla määritelty ja yksiarvoinen, niin f on surjektio ja injektio eli bijektio. Vaikka kuvasta katsoen tämä näyttää selvältä, niin todistetaan f bijektioksi lauseiden 2.8 ja 2.9 avulla tarkasti.

Osoitetaan f ensin surjektioksi lauseen 2.8 kohdan (3) avulla. Olkoon siis $y \in [1,3]$ ja etsitään $x \in [0,1]$, jolle $f(x) = y$. Valitaan $x = \frac{1}{2}(y-1)$ ja huomataan, että koska $1 \leqslant y \leqslant 3$, niin $0 \leqslant \frac{1}{2}(y-1) \leqslant 1$ ja siten $x \in [0,1]$. Tällä valinnalla pätee $f(x) = f(\frac{1}{2}(y-1)) = 2 \cdot \frac{1}{2}(y-1) + 1 = y$. Näin ollen kuvajoukon määritelmän eli kohdan (2.5) mukaan $[1,3] \subset f([0,1])$ ja f on surjektio.

Osoitetaan f sitten injektioksi lauseen 2.9 kohdan (4) avulla. Olkoot siis $x, x' \in [0,1]$ siten, että $f(x) = f(x')$. Koska tällöin $2x+1 = f(x) = f(x') = 2x'+1$, niin $2x = 2x'$ ja edelleen $x = x'$. Siispä f on injektio.

Seuraavan lauseen mukaan bijektio $f\colon A \to B$ antaa yksi-yhteen vastaavuuden joukon A ja joukon B alkioiden välille.

Lause 2.11. *Jos* $f\colon A \to B$ *on bijektio, niin sillä on bijektiivinen käänteiskuvaus* $f^{-1}\colon B \to A$ *siten, että*

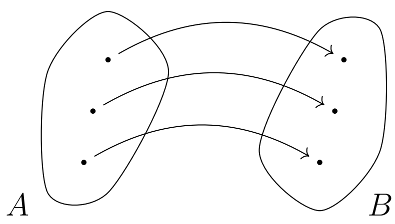
$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \textit{ja} \qquad f(f^{-1}(y)) = y$$

kaikilla $x \in A$ *ja* $y \in B$.

Todistus. Koska $f\colon A \to B$ on bijektio, niin lauseen 2.7 mukaan sillä on käänteiskuvaus $f^{-1}\colon B \to A$. Koska käänteiskuvauksen f^{-1} käänteisrelaatio on f, joka on kuvauksena kaikkialla määritelty ja yksiarvoinen, niin $f^{-1}\colon B \to A$ on surjektio ja injektio eli bijektio.

Osoitetaan sitten, että väitetyt yhtälöt ovat voimassa. Olkoon $x \in A$ ja näytetään, että $f^{-1}(f(x)) = x$. Kuvajoukon määritelmän eli kohdan (2.5) mukaan $f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(\{f(x)\})$. Toisaalta, alkukuvan määritelmän eli kohdan (2.6) mukaan myös $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$. Siten kuvauksen f injektiivisyyden ja lauseen 2.9 kohdan (2) nojalla $f^{-1}(f(x)) = x$. Olkoon sitten $y \in B$ ja näytetään, että $f(f^{-1}(y)) = y$. Koska f on surjektio, niin lauseen 2.8 kohdan (3) mukaan on olemassa $x \in A$ siten, että $f(x) = y$. Näin ollen ensimmäisen yhtälön nojalla $x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$, joten $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$. □

Oheisessa kuvassa on havainnollistettu bijektiota juokolta A joukolle B. Nähdään,



että kuvan tilanteessa lähtö- ja kuvapisteet ovat selvästi yksi-yhteen vastaavuudessa aivan kuten lauseen 2.11 mukaan pitää ollakin. Näytetään vielä kääntäen, että yksi-yhteen vastaavuuden löytäminen osoittaa kuvauksen bijektioksi.

Lause 2.12. *Jos* $f\colon A \to B$ *on kuvaus ja on olemassa kuvaus* $g\colon B \to A$ *siten, että*

$$g(f(x)) = x \qquad \textit{ja} \qquad f(g(y)) = y$$

kaikilla $x \in A$ *ja* $y \in B$, *niin* f *on bijektio ja* g *on kuvauksen* f *bijektiivinen käänteiskuvaus.*

Todistus. Oletetaan, että on olemassa lauseen yhtälöt toteuttava kuvaus $g\colon B \to A$. Jos $y \in B$, niin alkiolle $g(y) \in A$ pätee jälkimmäisen yhtälön nojalla $f(g(y)) = y$. Näin ollen $B \subset f(A)$ ja lauseen 2.8 kohdan (3) nojalla f on surjektio. Olkoon sitten $x, x' \in A$ siten, että $f(x) = f(x')$. Koska ensimmäisen yhtälön nojalla $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$, niin lauseen 2.9 kohdan (4) mukaan f on injektio.

Koska f on bijektio, niin lauseen 2.11 mukaan sillä on bijektiivinen käänteiskuvaus $f^{-1}\colon B \to A$, jolle $f^{-1}(f(x)) = x$ kaikilla $x \in A$. Olkoon $y \in B$, jolloin kuvauksen f surjektiivisuuden ja lauseen 2.8 kohdan (3) nojalla on olemassa $x \in A$ siten, että $f(x) = y$. Koska ensimmäisen yhtälön mukaan $g(y) = g(f(x)) = x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$, niin kuvauksilla g ja f^{-1} on samat kuvapisteet. Siten $g = f^{-1}$ eli g on kuvauksen f käänteiskuvaus. □

Edellinen lause antaa menetelmän käänteiskuvauksen määrittämiseksi. Oletetaan, että kuvaus $f\colon A \to B$ on määritelty antamalla jokaiselle pisteelle x kuvapiste $f(x)$. Jos on mahdollista ratkaista x yhtälöstä $y = f(x)$, ts. löytää kuvaus $g\colon f(A) \to A$ siten, että $x = g(y)$, niin tällöin $g(f(x)) = g(y) = x$ kaikilla $x \in A$ ja $f(g(y)) = f(x) = y$ kaikilla $y \in f(A)$. Näin ollen lauseen 2.12 nojalla g on rajoittuman $f\colon A \to f(A)$ käänteiskuvaus.

Esimerkki 2.13. Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

kaikille $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Merkitään $y = f(x)$, jolloin $x = y(1+x) = y + yx$ eli $y = x - yx = x(1-y)$. Jos $y = 1$, niin edellinen yhtälö saa muodon $1 = y = x(1-y) = 0$, mikä on mahdotonta. Näin ollen $1 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$. Jos taas $y \neq 1$, niin $x = y/(1-y)$. Siispä $f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ja lauseen 2.12 nojalla rajoittuman $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ käänteiskuvaus on $f^{-1}\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, jolle

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$$

kaikilla $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Luentovideo 3

2.4. Monotoninen reaalifunktio. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Sanotaan, että reaalifunktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on

(1) *kasvava*, jos jokaiselle $x, x' \in A$ ehdosta $x < x'$ seuraa $f(x) \leqslant f(x')$,
(2) *vähenevä*, jos jokaiselle $x, x' \in A$ ehdosta $x < x'$ seuraa $f(x) \geqslant f(x')$,
(3) *monotoninen*, jos se on kasvava tai vähenevä,
(4) *aidosti kasvava*, jos jokaiselle $x, x' \in A$ ehdosta $x < x'$ seuraa $f(x) < f(x')$,
(5) *aidosti vähenevä*, jos jokaiselle $x, x' \in A$ ehdosta $x < x'$ seuraa $f(x) > f(x')$,
(6) *aidosti monotoninen*, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

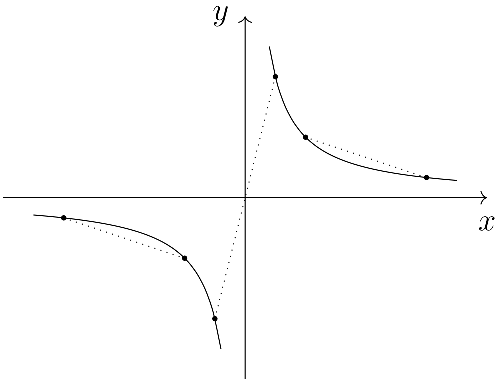
Sanotaan myös, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ on (aidosti) monotoninen joukossa $A' \subset A$, jos rajoittuma $f|_{A'}$ on (aidosti) monotoninen.

Esimerkki 2.14. (1) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, missä $c \in \mathbb{R}$. Koska $f(x) = c = f(x')$ kaikilla $x, x' \in \mathbb{R}$, niin f on kasvava ja vähenevä.

(2) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = qx$, missä $q > 0$. Jos $x, x' \in \mathbb{R}$ siten, että $x < x'$, niin selvästi myös $f(x) = qx < qx' = f(x')$. Näin ollen f on aidosti kasvava.

(3) Olkoon $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Jos $x, x' \in [0, \infty)$ siten, että $x < x'$, niin selvästi myös $f(x) = x^2 < x'^2 = f(x')$. Näin ollen f on aidosti kasvava.

(4) Olkoon $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Jos $x, x' \in (0, \infty)$ siten, että $x < x'$, niin selvästi $\frac{1}{x} > \frac{1}{x'}$. Näin ollen f on aidosti vähenevä. Huomataan kuitenkin, että



kuvaus $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, ei ole vähenevä, sillä esimerkiksi $\frac{1}{-2} < \frac{1}{2}$, vaikka $-2 < 2$. Oheinen kuva havainnollistaa tilannetta.

Aidosti monotonisuuden määrittelevä ehto on yhtäpitävyys.

Lause 2.15. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Jos $x, x' \in A$ ja reaalifunktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on*

(1) *aidosti kasvava, niin $x < x'$ täsmälleen silloin, kun $f(x) < f(x')$,*
(2) *aidosti vähenevä, niin $x < x'$ täsmälleen silloin, kun $f(x) > f(x')$.*

Todistus. Osoitetaan kohta (1) ja jätetään kohta (2) harjoitustehtäväksi. Koska se, että ehdosta $x < x'$ seuraa $f(x) < f(x')$ on aidosti kasvavuuden määritelmä, niin riittää osoittaa, että ehdosta $f(x) < f(x')$ seuraa $x < x'$. Tehdään tälle käänteinen suora todistus ja oletetaan vastoin väitettä, että $x \geqslant x'$. Tällöin joko $x = x'$ tai $x' < x$. Jos $x = x'$, niin $f(x) = f(x')$ mikä on ristiriita. Jos taas $x' < x$, niin aidosti kasvavuuden määritelmän mukaan $f(x') < f(x)$ mikä on myös ristiriita. $\square$

Esimerkki 2.16. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aidosti vähenevä reaalifunktio. Ratkaistaan epäyhtälö

$$f\Big(\frac{5x-3}{4}\Big) < f\Big(\frac{x-2}{2}\Big).$$

Huomataan, että lauseen 2.15 kohdan (2) mukaan epäyhtälö on yhtäpitävä sen kanssa, että $\frac{1}{4}(5x-3) > \frac{1}{2}(x-2)$ eli $5x - 3 > 2x - 4$. Näin ollen epäyhtälö on voimassa täsmälleen silloin, kun $x > -\frac{1}{3}$. Huomautetaan vielä, että ratkaisu löydettiin vaikka kuvausta f ei oltu eksplisiittisesti määritelty.

Lauseen 2.15 avulla voidaan osoittaa helposti, että $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku.

Lause 2.17. *Reaaliluku $\sqrt{2}$ on irrationaalinen.*

Todistus. Muistetaan, että $\sqrt{2}$ on määritelmänsä mukaan se positiivinen reaaliluku, joka itsellään kerrottuna on 2. Jos siis $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, niin $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 = 2$. Esimerkin 2.14 kohdassa (3) todettiin, että f on aidosti kasvava. Koska $f(1) = 1 < 2 < 4 = f(2)$ ja $2 = f(\sqrt{2})$, niin lauseen 2.15 kohdan (1) nojalla pätee $1 < \sqrt{2} < 2$ ja siten $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$.

Tehdään antiteesti ja oletetaan, että $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Tällöin on olemassa $m \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Näin ollen $\sqrt{2}n \in \mathbb{Z}$. Olkoon $q \in \mathbb{N}$ pienin luonnollinen luku, jolle $\sqrt{2}q \in \mathbb{Z}$. Merkitään $p = (\sqrt{2}-1)q$ ja huomataan, että tällöin

$$p = \sqrt{2}q - q \in \mathbb{Z}$$

ja koska $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, niin esimerkin 2.14 kohdan (2) mukaan $0 < (\sqrt{2} - 1)q < q$. Siispä $p \in \mathbb{N}$ ja $p < q$. Koska

$$\sqrt{2}p = (2 - \sqrt{2})q = 2q - \sqrt{2}q \in \mathbb{Z},$$

niin ollaan löydetty lukua $q \in \mathbb{N}$ aidosti pienempi luku $p \in \mathbb{N}$ siten, että $\sqrt{2}p \in \mathbb{Z}$. Tämä on ristiriita luvun $q \in \mathbb{N}$ valinnan kanssa. $\square$

Esimerkki 2.18. Miksi on olemassa positiivinen reaaliluku x, jolle $x^2 = 2$? Geometrisesti tämä on ilmiselvää, sillä suorakulmaisen kolmion, jonka kateettien pituudet ovat 1, hypotenuusan pituus on Pythagoraan lauseen mukaan x. Voidaanko irrationaalilukujen olemassaolo perustella vetoamatta geometriaan? Esimerkin 2.14 kohdassa (3) todettiin, että $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, on aidosti kasvava. Koska $f(1{,}4) = 1{,}96 < 2 < 2{,}25 = f(1{,}5)$ ja $2 = f(x)$, niin lauseen 2.15 kohdan (1) nojalla pätee $1{,}4 < x < 1{,}5$. Samaan tapaan päätellään, että koska

$$\begin{gathered}
f(1{,}41) = 1{,}9881 < 2 < 2{,}0164 = f(1{,}42),\\
f(1{,}414) = 1{,}999396 < 2 < 2{,}002225 = f(1{,}415),\\
f(1{,}4142) = 1{,}99996164 < 2 < 2{,}00024449 = f(1{,}4143),\\
f(1{,}41421) = 1{,}9999899241 < 2 < 2{,}0000182084 = f(1{,}41422),\\
f(1{,}414213) = 1{,}99999840937 < 2 < 2{,}0000012378 = f(1{,}414214),
\end{gathered}$$

niin vastaavasti

$$\begin{gathered}
1{,}41 < x < 1{,}42,\\
1{,}414 < x < 1{,}415,\\
1{,}4142 < x < 1{,}4143,\\
1{,}41421 < x < 1{,}41422,\\
1{,}414213 < x < 1{,}414214.
\end{gathered}$$

Näin jatkamalla saadaan luvulle x tarkempia ja tarkempia arvioita. Näyttäisi siis siltä, että mille tahansa $n \in \mathbb{N}$ löydetään avoin reaalilukuväli, jonka pituus on 10^{-n} ja joka sisältää luvun x. Voisiko luvun x määritellä jonkinlaisen rajankäynnin avulla?

Lause 2.19. *Aidosti monotoninen reaalifunktio on injektio.*

Todistus. Oletetaan, että reaalifunktio $f\colon A \to \mathbb{R}$, missä $A \subset \mathbb{R}$, on aidosti monotoninen. Olkoon $x, x' \in A$ siten, että $x \neq x'$. Koska nyt joko $x < x'$ tai $x' < x$, niin merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $x < x'$. Jos f on aidosti kasvava, niin tällöin $f(x) < f(x')$ ja erityisesti $f(x) \neq f(x')$. Näin ollen lauseen 2.9 kohdan (3) mukaan f on injektio. Jos taas f on aidosti vähenevä, niin $f(x) > f(x')$ ja siten $f(x) \neq f(x')$. Tässäkin tapauksessa f nähdään injektioksi lauseen 2.9 kohdan (3) avulla. $\square$

Esimerkki 2.20. Olkoon $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ siten, että

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{jos } n = 1, \\ n-1, & \text{jos } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \end{cases}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska jokaisella $m, n \in \mathbb{N}$ ehdosta $1 < m < n$ seuraa $f(1) \leqslant f(m) = m - 1 < n - 1 = f(n)$, niin f on kasvava. Valitsemalla $m = 1$ ja $n = 2$ nähdään, että $m \neq n$, mutta $f(m) = m = 1 = n - 1 = f(n)$. Näin ollen lauseen 2.9 kohdan (3) mukaan f ei ole injektio. Siispä monotoninen reaalifunktio ei välttämättä ole injektio. Esimerkin 2.14 kohdan (1) vakiofunktio antaa monotonisen reaalifunktion injektiivisyydelle vielä yksinkertaisemman vastaesimerkin.

Lauseen 2.19 mukaan aidosti monotoniselle reaalifunktiolle löydetään käänteiskuvaus tarvittaessa maalijoukkoa rajoittamalla.

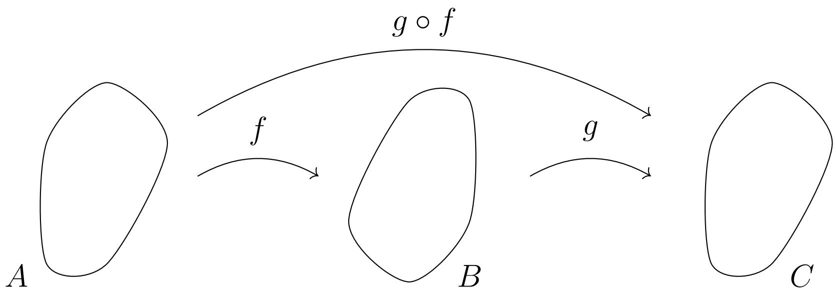
Lause 2.21. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Jos reaalifunktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on*

(1) aidosti kasvava, niin rajoittumalla $f\colon A \to f(A)$ on aidosti kasvava käänteiskuvaus $f^{-1}\colon f(A) \to A$,
(2) aidosti vähenevä, niin rajoittumalla $f\colon A \to f(A)$ on aidosti vähenevä käänteiskuvaus $f^{-1}\colon f(A) \to A$.

Todistus. Osoitetaan kohta (1) ja jätetään kohta (2) harjoitustehtäväksi. Koska reaalifunktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava, niin se on lauseen 2.19 mukaan injektio. Näin ollen rajoittuma $f\colon A \to f(A)$ on lauseen 2.8 kohdan (4) nojalla bijektio ja lauseen 2.7 mukaan sillä on käänteiskuvaus $f^{-1}\colon f(A) \to A$. Osoitetaan vielä, että f^{-1} on aidosti kasvava. Olkoon siis $y, y' \in f(A)$ siten, että $y < y'$. Koska $y, y' \in f(A)$, niin on olemassa $x, x' \in A$ siten, että $f(x) = y$ ja $f(x') = y'$. Näin ollen ehto $y < y'$ voidaan kirjoittaa muodossa $f(x) < f(x')$, josta lauseen 2.15 kohdan (1) mukaan seuraa $x < x'$. Koska lauseen 2.11 mukaan $x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$ ja $x' = f^{-1}(f(x')) = f^{-1}(y')$, niin ehto $x < x'$ voidaan kirjoittaa muodossa $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Näin ollen f^{-1} on aidosti kasvava. $\square$

Luentovideo 4

2.5. **Yhdistetty kuvaus.** Jos A, B ja C ovat joukkoja, niin kuvausten $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ *yhdistetty kuvaus* on kuvaus $g \circ f\colon A \to C$, jolle $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ kaikilla $x \in A$. Jos $f\colon A \to B'$ ja $g\colon B \to C$ ovat kuvauksia siten, että $f(A) \subset B$, niin yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon A \to C$ määritellään rajoittumien $f\colon A \to f(A)$ ja $g\colon f(A) \to C$ yhdisteenä.



Esimerkki 2.22. (1) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ on siten, että $f(x) = -1$, niin $1 - x = -(1 + x)$ eli $2 = 0$ mikä on ristiriita. Näin ollen $f(x) \neq -1$ kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ eli $-1 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$. Koska

$$(f \circ f)(x) = \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)} = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \frac{1 + x - (1 - x)}{1 + x + (1 - x)} = \frac{2x}{x} = x$$

kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, niin lauseen 2.12 mukaan rajoittumafunktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ käänteiskuvaus on rajoittuma f itse.

(2) Selvitetään mitä kuvaukset $g \circ f$ ja $f \circ g$ ovat, kun

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x - 1,$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 - 2.$$

Yhdistetyn kuvauksen määritelmän mukaan $g \circ f$ ja $f \circ g$ ovat kuvauksia $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(3x-1) = (3x-1)^2 - 2 = 9x^2 - 6x - 1, \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2-2) = 3(x^2-2) - 1 = 3x^2 - 7 \end{aligned} \tag{2.7}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Huomataan erityisesti, että $g \circ f \neq f \circ g$.

(3) Selvitetään minkälaisia kuvauksia $f \circ (g \circ f)$ ja $(f \circ g) \circ f$ ovat kohdan (2) kuvauksille f ja g. Kuvausten määritelmien ja kohdan (2.7) mukaan

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ f))(x) &= f((g \circ f)(x)) = f(9x^2 - 6x - 1) \\ &= 3(9x^2 - 6x - 1) - 1 = 27x^2 - 18x - 4 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ f)(x) &= (f \circ g)(f(x)) = (f \circ g)(3x-1) \\ &= 3(3x-1)^2 - 7 = 3(9x^2 - 6x + 1) - 7 = 27x^2 - 18x - 4 \end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen $f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f$.

Huomautetaan, että esimerkin 2.22 kohta (2) näyttää, että kuvausten yhdistäminen ei ole *vaihdannainen* operaatio, ts. ei välttämättä päde, että $g \circ f = f \circ g$. Kohdan (3) havainto taas pätee yleisesti: jos A, B, C ja D ovat joukkoja sekä $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ ja $h \colon C \to D$ kuvauksia, niin

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x) \end{aligned}$$

kaikilla $x \in A$. Sanotaankin, että kuvausten yhdistäminen on *liitännäinen* operaatio, ts. aina pätee $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ kunhan ao. yhdisteet ovat määriteltyjä. Näin ollen useamman kuvauksen yhdistettä voidaan merkitä ilman sulkeita $h \circ g \circ f$.

Lause 2.23. *Olkoot A, B ja C joukkoja sekä $f \colon A \to B$ ja $g \colon B \to C$ kuvauksia. Jos f ja g ovat*

(1) surjektioita, niin $g \circ f \colon A \to C$ on surjektio,

(2) injektioita, niin $g \circ f \colon A \to C$ on injektio,

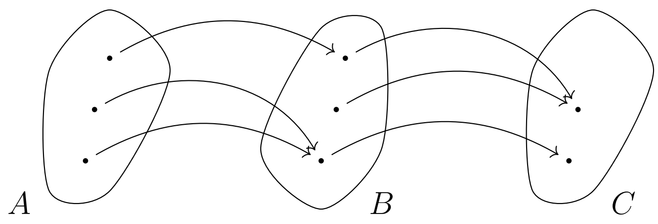
(3) bijektioita, niin $g \circ f \colon A \to C$ on bijektio.

Todistus. Osoitetaan ensin kohta (1). Oletetaan, että f ja g ovat surjektioita. Lauseen 2.8 kohdan (3) mukaan riittää osoittaa, että $C \subset (g \circ f)(A)$. Olkoon siis $z \in C$. Koska g on surjektio, niin lauseen 2.8 kohdan (3) mukaan $C \subset g(B)$ ja on olemassa $y \in B$, jolle $g(y) = z$. Vastaavasti koska f on surjektio, niin on olemassa $x \in A$ siten, että $f(x) = y$. Näin ollen alkiolle $x \in A$ pätee $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Siten $C \subset (g \circ f)(A)$ ja $g \circ f$ on surjektio.

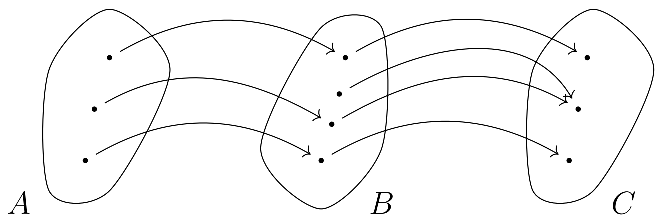
Osoitetaan sitten kohta (2). Oletetaan, että f ja g ovat injektioita ja osoitetaan $g \circ f$ injektioksi vetoamalla lauseen 2.9 kohtaan (4). Jos $x, y \in A$ siten, että $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ eli $g(f(x)) = g(f(y))$, niin kuvauksen g injektiivisyyden perusteella $f(x) = f(y)$ ja siten $x = y$ kuvauksen f injektiivisyyden perusteella. Siis $g \circ f$ on injektio.

Osoitetaan lopuksi kohta (3). Koska bijektiivinen kuvaus on surjektio ja injektio, niin väite seuraa suoraan kohdista (1) ja (2). $\square$

Huomautetaan, että lauseen 2.23 väitteet eivät käänny. Havainnollistetaan ensimmäisessä kuvassa tilannetta, missä yhdistetty kuvaus on surjektio, vaikka toinen



yhdistettävistä kuvauksista ei ole surjektio. Toisessa kuvassa taas havainnollistetaan



tilannetta, missä yhdistetty kuvaus on injektio, vaikka toinen yhdistettävistä kuvauksista ei ole injektio.

Osoitetaan seuraavaksi, että bijektiivisyyden lisäksi myös aidosti monotonisuus säilyy kuvauksia yhdistämällä.

Lause 2.24. *Olkoot* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *ja* $g\colon B \to \mathbb{R}$ *reaalifunktioita siten, että* $f(A) \subset B$.

(1) Jos f *ja* g *ovat molemmat aidosti kasvavia tai aidosti väheneviä, niin* $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}$ *on aidosti kasvava.*

(2) Jos toinen kuvauksista f *ja* g *on aidosti kasvava ja toinen aidosti vähenevä, niin* $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}$ *on aidosti vähenevä.*

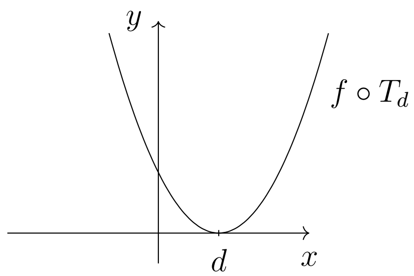
Todistus. Osoitetaan kohta (1) ja jätetään kohta (2) harjoitustehtäväksi. Oletetaan ensin, että f ja g ovat aidosti kasvavia. Jos $x, x' \in A$ siten, että $x < x'$, niin kuvauksen f aidon kasvavuuden nojalla $f(x) < f(x')$ ja näin ollen $(g \circ f)(x) = g(f(x)) < g(f(x')) = (g \circ f)(x')$ kuvauksen g aidon kasvavuuden mukaan. Siispä $g \circ f$ on aidosti kasvava.

Oletetaan sitten, että f ja g ovat aidosti väheneviä. Jos $x, x' \in A$ siten, että $x < x'$, niin kuvauksen f aidon vähenevyyden nojalla $f(x) > f(x')$ ja näin ollen $(g \circ f)(x) = g(f(x)) < g(f(x')) = (g \circ f)(x')$ kuvauksen g aidon vähenevyyden mukaan. Siispä $g \circ f$ on aidosti kasvava. □

Jos $f\colon A \to \mathbb{R}$ on reaalifunktio, niin kuvausten yhdistämisen avulla voidaan määritellä funktiolle f siirto x-akselin suuntaan. Olkoot $d \in \mathbb{R}$, $A_d = \{x + d \in \mathbb{R} : x \in A\}$ ja $T_d\colon A_d \to A$ kuvaus, jolle $T_d(x) = x - d$ kaikilla $x \in A_d$. Tällöin yhdistetty kuvaus $f \circ T_d\colon A_d \to \mathbb{R}$, jolle

$$(f \circ T_d)(x) = f(x - d)$$

kaikilla $x \in A_d$, on kuvauksen f *siirto x-akselin suuntaan* luvun d verran. Jos



esimerkiksi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ja $d = 1$, niin oheinen kuva havainnollistaa siirtoa $f \circ T_d$ näillä valinnoilla.

3. Joukon alkioiden lukumäärä

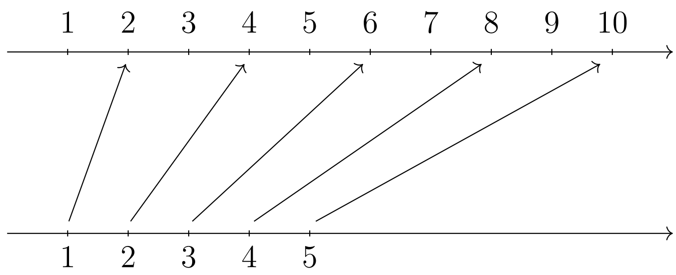
Jos A on joukko ja $N \subset \mathbb{N}$ on epätyhjä, niin kuvausta $x\colon N \to A$ kutsutaan joukon A *jonoksi*. Kuvapistettä $x(n)$, kun $n \in N$, merkitään symbolilla x_n ja sitä kutsutaan *jonon alkioksi*. Jonolle $x\colon N \to A$ käytetään myös merkintää $(x_n)_{n\in N}$. Jos esimerkiksi $N = \{1, \ldots, k\}$, niin jono $(x_n)_{n\in N} = (x_1, \ldots, x_k)$ on karteesisen tulon A^k alkio ja jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alkiot voidaan luetella luonnollisten lukujen avulla $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Jos lisäksi $M \subset \mathbb{N}$ on epätyhjä ja jono $n\colon M \to N$ on aidosti kasvava eli toteuttaa $n(k) > n(l)$ kaikille $k, l \in M$, joilla $k > l$, niin yhdistettyä kuvausta $x \circ n\colon M \to A$ sanotaan jonon x *osajonoksi*. Jonon $(x_n)_{n\in N}$ osajonolle käytetään usein merkintää $(x_{n_k})_{k\in M}$.

Luentovideo 5

3.1. **Äärelliset joukot.**

Äärellinen joukko on joukko, jossa on äärellinen määrä alkioita. Esimerkiksi viiden alkion joukko $\{n \in \mathbb{N} : n \leqslant 11 \text{ on parillinen}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ on äärellinen. Vaikka intuitiivisesti tämä on itsestään selvä asia, niin määritellään joukon äärellisyys täsmällisesti.

Määritellään ensin joukon A alkioiden *lukumäärä* $\#A$. Jos $A = \emptyset$, niin asetetaan $\#A = 0$. Jos taas on olemassa bijektiivinen jono $x\colon \{1, \ldots, n\} \to A$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, jolloin $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, niin asetetaan $\#A = n$. Muissa tapauksissa merkitään $\#A = \infty$. Sanotaan, että joukko A on *äärellinen*, jos sen alkioiden lukumäärä on lukumääräluku ja *n-alkioinen*, jos $\#A = n \in \mathbb{N}_0$. Jos joukko ei ole äärellinen, niin



sanotaan, että se on *ääretön*. Oheinen kuva perustelee määritelmän avulla, että joukon $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ alkioiden lukumäärä on 5.

Esimerkki 3.1. Pienet lapset laskevat usein sormillaan. Vaikka he tuskin ovat kuulleet bijektiivisistä kuvauksista, niin he käyttävät laskiessaan edellä annettua määritelmää: sormet ovat yksi yhteen vastaavuudessa kymmenen ensimmäisen luonnollisen luvun kanssa ja sormilla laskemisen idea on muodostaa bijektio sormien ja laskettavien objektien välille.

Lause 3.2. *Jos A ja B ovat epätyhjiä joukkoja ja on olemassa bijektio $g\colon A \to B$, niin $\#A = \#B$.*

Todistus. Jos A ja B ovat molemmat äärettömiä, niin $\#A = \infty = \#B$. Voidaan siis olettaa, että toinen joukoista on äärellinen. Jos A on äärellinen, niin määritelmän mukaan on olemassa bijektio $f\colon \{1, \ldots, n\} \to A$, missä $n = \#A \in \mathbb{N}$. Koska lauseen 2.23 kohdan (3) mukaan kuvaus $g \circ f\colon \{1, \ldots, n\} \to B$ on bijektio, niin myös $\#B = n$. Jos taas B on äärellinen, niin on olemassa bijektio $f\colon \{1, \ldots, n\} \to B$, missä $n = \#B \in \mathbb{N}$. Tällöin lauseen 2.11 ja lauseen 2.23 kohdan (3) mukaan kuvaus $g^{-1} \circ f\colon \{1, \ldots, n\} \to A$ on bijektio, joten myös $\#A = n$. □

Sanotaan, että joukot A ja B ovat *erilliset*, jos $A \cap B = \emptyset$. Jos $n \in \mathbb{N}$, niin joukot $A_1, \ldots, A_n$ ovat *keskenään erillisiä*, jos A_i ja A_j ovat erilliset kaikilla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, joilla $i \neq j$. Seuraava *summaperiaate* osoittaa lukumäärän *additiivisuuden* keskenään erillisille joukoille.

Lause 3.3 (Summaperiaate)**.** *Jos $n \in \mathbb{N}$ ja joukot $A_1, \ldots, A_n$ ovat äärellisiä ja keskenään erillisiä, niin*

$$\#(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \#A_1 + \cdots + \#A_n.$$

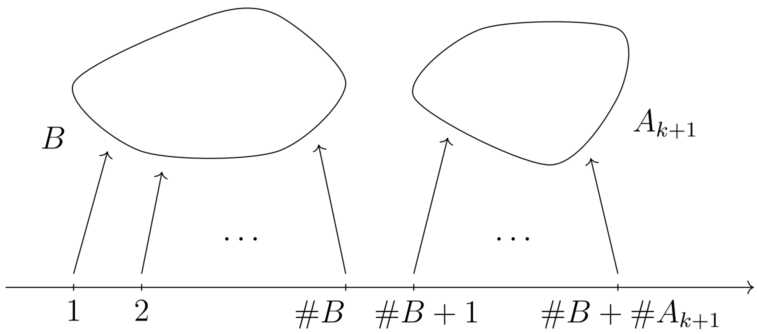
Todistus. Osoitetaan väite induktiolla. Huomataan, että väite tapauksessa $n = 1$ on triviaalisti totta. Tehdään induktio-oletus eli kiinnitetään luonnollinen luku k ja oletetaan, että kaikilla keskenään erillisillä äärellisillä joukoilla $A_1, \ldots, A_k$ pätee $\#(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \#A_1 + \cdots + \#A_k$.

Olkoot $A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}$ keskenään erillisiä äärellisiä joukkoja. Merkitään $B = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ ja huomataan, että induktio-oletuksen nojalla $\#B = \#A_1 + \cdots + \#A_k$. Voidaan olettaa, että $B \neq \emptyset \neq A_{k+1}$, sillä muuten ei ole mitään todistettavaa. Koska B ja A_{k+1} ovat äärellisiä joukkoja, niin on olemassa bijektiot $f\colon \{1, \ldots, \#B\} \to B$ ja $g\colon \{1, \ldots, \#A_{k+1}\} \to A_{k+1}$. Määritellään kuvaus $h\colon \{1, \ldots, \#B, \#B + 1, \ldots, \#B +$

$\#A_{k+1}\} \to B \cup A_{k+1}$ asettamalla

$$h(n) = \begin{cases} f(n), & \text{jos } n \in \{1, \dots, \#B\}, \\ g(n - \#B), & \text{jos } n \in \{\#B + 1, \dots, \#B + \#A_{k+1}\}, \end{cases}$$

kaikille $n \in \{1, \dots, \#B, \#B + 1, \dots, \#B + \#A_{k+1}\}$. Huomataan, että kuvaus h on joukolla $\{1, \dots, \#B\}$ sama kuin kuvaus f ja joukolla $\{\#B + 1, \dots, \#B + \#A_{k+1}\}$



sama kuin kuvaus g siirrettynä x-akselin suunnassa luvun $\#B$ verran. Oheinen kuva havainnollistaa kuvausta h.

Osoitetaan, että h on bijektio. Näytetään se ensin lauseen 2.8 kohdan (3) avulla surjektioksi. Jos $x \in B \cup A_{k+1}$, niin $x \in B$ tai $x \in A_{k+1}$. Jos $x \in B$, niin kuvauksen f surjektiivisuuden nojalla on olemassa $n \in \{1, \dots, \#B\}$ siten, että $x = f(n) = h(n)$. Jos taas $x \in A_{k+1}$, niin vedotaan vastaavasti kuvauksen g surjektiivisuuteen. Näin ollen h on surjektio. Osoitetaan injektiivisyys lauseen 2.9 kohdan (3) avulla. Olkoon siis $m, n \in \{1, \dots, \#B, \#B + 1, \dots, \#B + \#A_{k+1}\}$ siten, että $m \neq n$. Koska f ja g ovat injektioita, niin voidaan olettaa, että $m \in \{1, \dots, \#B\}$ ja $n \in \{\#B + 1, \dots, \#B + \#A_{k+1}\}$. Näin ollen $h(m) = f(m) \in B$ ja $h(n) = g(n - \#B) \in A_{k+1}$. Koska keskenään erillisyyden nojalla $A_i \cap A_{k+1} = \emptyset$ kaikilla $i \in \{1, \dots, k\}$, niin myös $B \cap A_{k+1} = \emptyset$. Näin ollen $h(m) \neq h(n)$ ja siten h on injektio.

Koska kuvaus h on bijektio, niin $\#(B \cup A_{k+1}) = \#B + \#A_{k+1}$ ja siten induktio-oletuksen mukaan $\#(A_1 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}) = \#(B \cup A_{k+1}) = \#B + \#A_{k+1} = \#A_1 + \dots + \#A_k + \#A_{k+1}$. Induktioperiaatteen mukaan väite on nyt todistettu. $\square$

Summaperiaatteen lisäksi toinen keskeinen periaate on *tuloperiaate*.

Lause 3.4 (Tuloperiaate)**.** *Jos $n \in \mathbb{N}$ ja joukot $A_1, \dots, A_n$ ovat äärellisiä, niin*

$$\#(A_1 \times \cdots \times A_n) = \#A_1 \cdots \#A_n.$$

Todistus. Osoitetaan väite tapauksessa $n = 2$ ja jätetään yleinen tapaus harjoitustehtäväksi. Voidaan olettaa, että $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$, sillä muuten ei ole mitään todistettavaa. Merkitään $A_1 = \{x_1, \dots, x_p\}$ ja $A_2 = \{y_1, \dots, y_q\}$, missä $p = \#A_1$ ja $q = \#A_2$. Tällöin karteesisen tulon määritelmän eli kohdan (2.1) mukaan

$$A_1 \times A_2 = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q} \{(x_i, y_j)\}.$$

Koska yhdisteen joukot ovat erillisiä eli $(x_{i_1}, y_{j_1}) \neq (x_{i_2}, y_{j_2})$ aina kun $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, niin summaperiaatteen eli lauseen 3.3 nojalla

$$\#(A_1 \times A_2) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \#\{(x_i, y_j)\} = pq = \#A_1 \cdot \#A_2,$$

mikä pitikin osoittaa. □

Esimerkki 3.5. (1) Oletetaan, että rakennuksessa on etupuolella kaksi ulko-ovea ja takapuolella kolme. Tällöin rakennukseen voi mennä sisään etupuolelta ja poistua takapuolelle tuloperiaatteen mukaan kuudella eri tavalla.

(2) Kirjahyllyssä on viisi ranskankielistä, seitsemän englanninkielistä ja kymmenen suomenkielistä kirjaa. Kuinka monella tavalla sieltä voidaan valita kaksi eri kielistä kirjaa? Olkoon R ranskankielisten kirjojen joukko, E englanninkielisten ja S suomenkielisten. Tällöin $\#R = 5$, $\#E = 7$ ja $\#S = 10$. Sallitut valinnat ovat siis joukon $(R \times E) \cup (R \times S) \cup (E \times S)$ alkiot. Summa- ja tuloperiaatteiden eli lauseiden 3.3 ja 3.4 mukaan kaksi eri kielistä kirjaa voidaan valita

$$\begin{aligned} \#((R \times E) \cup (R \times S) \cup (E \times S)) &= \#R \cdot \#E + \#R \cdot \#S + \#E \cdot \#S \\ &= 5 \cdot 7 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 10 = 35 + 50 + 70 = 155 \end{aligned}$$

eri tavalla.

Joukon A *potenssijoukko* $\mathcal{P}(A) = \{A' : A' \subset A\}$ on joukon A osajoukkojen muodostama kokoelma. Jos esimerkiksi $A = \{1, 2, 3\}$, niin potenssijoukossa

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

on kahdeksan alkiota. Edelleen jos A ja B ovat joukkoja sekä $x \in A$ ja $y \in B$, niin $\{x\}, \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Näin ollen järjestetty pari (x, y), joka Kuratowskin määritelmän mukaan on joukko $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, on kokoelman $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ alkio. Siispä $A \times B \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

Lause 3.6 (Cantorin lause)**.** *Jos joukko A on äärellinen, niin*

$$\#A < \#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}.$$

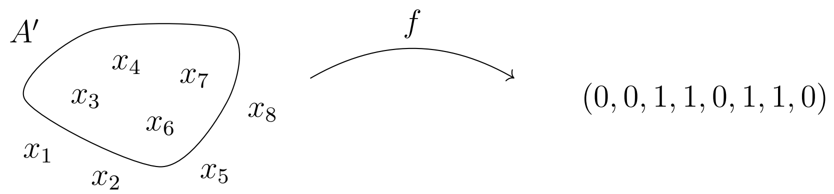
Todistus. Koska helpolla induktiotodistuksella nähdään, että $n < 2^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$, niin epäyhtälö $\#A < 2^{\#A}$ on voimassa. Riittää siis osoittaa, että $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$. Jos $A = \emptyset$, niin $\#\mathcal{P}(A) = \#\{\emptyset\} = 1 = 2^0 = 2^{\#A}$. Näin ollen voidaan olettaa, että A on epätyhjä. Merkitään $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, missä $n = \#A$. Määritellään kuvaus $f \colon \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}^n$ asettamalla

$$f(A') = (i_1, \ldots, i_n) \in \{0, 1\}^n$$

kaikille $A' \in \mathcal{P}(A)$, missä

$$i_j = \begin{cases} 1, & \text{jos } x_j \in A', \\ 0, & \text{jos } x_j \notin A' \end{cases}$$

kaikilla $j \in \{1, \ldots, n\}$. Oheinen kuva havainnollistaa alkion $A' = \{x_3, x_4, x_6, x_7\}$



kuvautumista kuvauksessa f, kun $n = 8$.

Jos $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0, 1\}^n$, niin joukolle $A' = \{x_j \in A : j \text{ on siten, että } i_j = 1\}$ pätee $f(A') = (i_1, \ldots, i_n)$. Näin ollen f on lauseen 2.8 kohdan (3) mukaan surjektio. Oletetaan sitten, että $A', A'' \in \mathcal{P}(A)$ ovat siten, että $A' \neq A''$. Tällöin $A' \setminus A'' \neq \emptyset$

tai $A'' \setminus A' \neq \emptyset$. Jos $A' \setminus A'' \neq \emptyset$, niin on olemassa j siten, että $x_j \in A'$ ja $x_j \notin A''$. Näin ollen $f(A') = (i_1, \ldots, i_j, \ldots, i_n) \neq (i'_1, \ldots, i'_j, \ldots, i'_n) = f(A'')$, sillä kuvauksen määritelmän mukaan $i_j = 1$ ja $i'_j = 0$. Tapaus $A'' \setminus A' \neq \emptyset$ päätellään vastaavasti. Siispä f on lauseen 2.9 kohdan (3) mukaan injektio. Koska f on bijektio, niin lauseen 3.2 mukaan $\#\mathcal{P}(A) = \#\{0,1\}^n$. Siten tuloperiaatteen eli lauseen 3.4 nojalla

$$\#\mathcal{P}(A) = \#\{0,1\}^n = (\#\{0,1\})^n = 2^{\#A}$$

mikä pitikin osoittaa. $\square$

3.2. **Äärettömät joukot.** Äärettömiä joukkoja voidaan tarkastella samalla ajatuksella kuin äärellisiä joukkoja, vaikka niiden kokoja ei voidakaan vertailla lukumäärän avulla. Sanotaan, että epätyhjät joukot A ja B ovat *yhtä mahtavat*, jos on olemassa bijektio $f\colon A \to B$. Tällöin merkitään $A \approx B$. Huomataan, että yhtä mahtavilla äärellisillä joukoilla on lauseen 3.2 mukaan sama lukumäärä. Jos taas on olemassa injektio $f\colon A \to B$, niin merkitään $A \preccurlyeq B$ ja sanotaan, että B on *mahtavampi kuin* A.

Luentovideo 6

Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on ääretön joukko. Sanotaan, että joukko A on *numeroituva*, jos $A \preccurlyeq \mathbb{N}$. Tällaiselle joukolle on siis olemassa injektiivinen kuvaus $f\colon A \to \mathbb{N}$. Tämän rajoittuma $f\colon A \to f(A)$ on lauseen 2.8 kohdan (4) mukaan bijektio. Koska $f(A) \subset \mathbb{N}$, niin lauseen 2.11 avulla nähdään, että rajoittuman käänteiskuvaus $f^{-1}\colon f(A) \to A$ on bijektiivinen jono. Näin ollen numeroituva joukko on joukko, jonka alkiot voidaan luetella luonnollisten lukujen avulla, ts. niistä voidaan muodostaa jono. Jos joukko ei ole numeroituva, niin sanotaan, että se on *ylinumeroituva*. Esimerkiksi luonnollisten lukujen joukko ja jokainen äärellinen joukko ovat suoraan määritelmän mukaan numeroituvia. Harjoitustehtävinä on osoittaa, että myös kokonaislukujen ja rationaalilukujen joukot $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q}$ ovat numeroituvia. Myöhemmin tullaan todistamaan, että reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva.

Esimerkki 3.7. (1) Hilbert[10] esitti vuonna 1924 luennollaan ajatuksen hotellista, jossa on äärettömän monta huonetta. Vaikka hotellin kaikki huoneet olisivat täynnä, niin sinne voidaan silti majoittaa uusia vieraita. Tämä onnistuu pyytämällä vierasta huoneessa 1 siirtymään huoneeseen 2, huoneen 2 vierasta siirtymään huoneeseen 3

[10]David Hilbert (1862–1943)

ja niin edelleen. Näin saadaan jokainen hotellin vieras siirrettyä uuteen huoneeseen ja huone 1 tyhjäksi uutta vierasta varten. Toisin sanoen, määrittelemällä bijektio $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ asettamalla $f(n) = n+1$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ nähdään, että $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Siispä joukot $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ ovat numeroituvia ja yhtä mahtavat.

(2) Hilbertin hotellissa uusien vieraiden määrä voi myös olla ääretön. Jos $E = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ on parillinen}\}$ on parillisten luonnollisten lukujen joukko, niin määrittelemällä bijektio $f\colon \mathbb{N} \to E$ asettamalla $f(n) = 2n$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ nähdään, että $\mathbb{N}$ ja E ovat yhtä mahtavat. Hotellin omistaja voi siis ottaa numeroituvasti äärettömän määrän uusia vieraita siirtämällä jokaisen vieraan huoneesta n huoneeseen $2n$ vapauttaen äärettömän määrän huoneita, nimittäin kaikki parittomat huoneet.

Valinta-aksiooman mukaan mistä tahansa kokoelmasta epätyhjiä joukkoja voi muodostaa joukon valitsemalla alkion jokaisesta kokoelman joukosta. Jos siis I on indeksijoukko ja $\{A_i\}_{i \in I}$ on kokoelma epätyhjiä joukkoja, niin valinta-aksiooma olettaa, että on olemassa kuvaus $f\colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ siten, että $f(i) \in A_i$ kaikilla $i \in I$. Sen lisäksi, että Russellin[11] seuraava esimerkki valaisee valinta-aksioomaa, se myös havainnollistaa mahdollisia eteen tulevia hankaluuksia äärettömien joukkojen tarkasteluissa. Äärettömän monesta kenkäparista voidaan muodostaa vasemman jalan kenkien joukko ilman valinta-aksioomaa. Vaikka pitää tehdä äärettömän monta valintaa, niin siihen on täsmällinen sääntö. Mutta jos kenkäparien sijasta onkin äärettömän monta sukkaparia, ja tehtävänä on muodostaa joukko, jossa on yksi sukka kustakin parista, niin tarvitaan valinta-aksioomaa. Koska kussakin sukkaparissa sukat ovat samanlaisia, niin sukkien valintaan ei ole täsmällistä valintasääntöä. Huomautetaan vielä, että jos sukkapareja on äärellinen määrä, niin valinta voidaan tehdä induktiivisesti vetoamatta valinta-aksioomaan.

Jos A on äärellinen joukko, jossa on vähintään kaksi alkiota, niin tuloperiaatteen eli lauseen 3.4 mukaan $\#A < (\#A)^2 = \#(A^2)$ ja siten lauseen 3.2 nojalla joukkojen A ja A^2 välillä ei ole bijektiota eikä ne siten ole yhtä mahtavat. Seuraava lause näyttää, että äärettömien joukkojen kanssa tilanne on erilainen.

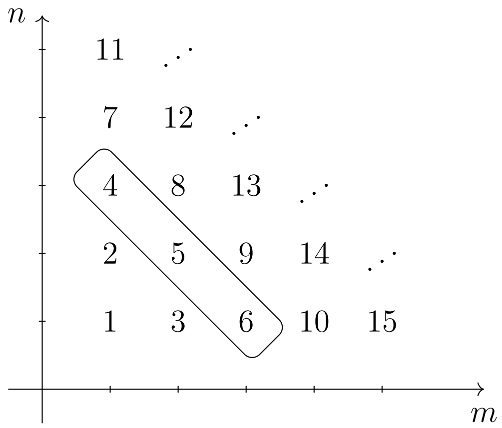
Lause 3.8. *Joukot $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{N}^2$ ovat yhtä mahtavat.*

[11] Bertrand Arthur William Russell (1872–1970)

Todistus. Väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että kuvaus $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, jolle

$$f(m,n)=\frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}+m$$

kaikilla $m,n\in\mathbb{N}$, on bijektio. Merkitään $p=m+n-2\in\mathbb{N}_0$, jolloin $f(m,n)=\frac{1}{2}p(p+1)+m$, ja huomataan, että $f(1,1)=1$, $f(1,2)=2$, $f(2,1)=3$, $f(1,3)=4$,



$f(2,2)=5$, $f(3,1)=6$, $f(1,4)=7$ ja niin edelleen. Oheinen kuva havainnollistaa kuvausta f.

Osoitetaan lauseen 2.8 kohdan (3) avulla, että f on surjektio. Olkoon siis $k\in\mathbb{N}$. Koska aritmeettisen sarjan summakaavan mukaan

$$1+2+3+\cdots+p=\frac{p(p+1)}{2}$$

kaikille $p\in\mathbb{N}$, niin voidaan valita $p\in\mathbb{N}_0$ siten, että

$$\frac{p(p+1)}{2}<k\leqslant\frac{(p+1)(p+2)}{2}=\frac{p(p+1)}{2}+p+1. \tag{3.1}$$

Huomataan, että luku $p+1$ kertoo monennellako diagonaalilla origosta laskien luku k sijaitsee. Jos esimerkiksi $k\in\{4,5,6\}$, niin lukua $p+1=3$ vastaava diagonaali on ympyröity kuvaan. Asetetaan $m=k-\frac{1}{2}p(p+1)$ ja $n=p-m+2$. Tällöin

$$f(m,n)=\frac{p(p+1)}{2}+m=k$$

ja f on surjektio.

Osoitetaan sitten lauseen 2.9 kohdan (3) avulla, että f on injektio. Olkoon siis $(m,n),(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ siten, että $(m,n)\neq(k,l)$. Jos $m+n=k+l$, niin $m\neq k$ ja

$f(m,n) = \frac{1}{2}p(p+1) + m \neq \frac{1}{2}p(p+1) + k = f(k,l)$, missä $p = m+n-2 = k+l-2$. Voidaan siis olettaa, että $m+n \neq k+l$. Merkitään $p = m+n-2$ ja $p' = k+l-1$. Koska $p \neq p'$, niin $p < p'$ tai $p' < p$. Tarvittaessa merkintöjä vaihtamalla voidaan olettaa, että $p < p'$. Tällöin kohdan (3.1) nojalla

$$\frac{p(p+1)}{2} + p < \frac{p'(p'+1)}{2}. \tag{3.2}$$

Koska $m = p - n + 2 \leqslant p + 1$, niin kohdan (3.2) mukaan

$$\begin{aligned} f(m,n) = \frac{p(p+1)}{2} + m &\leqslant \frac{p(p+1)}{2} + p + 1 \\ < \frac{p'(p'+1)}{2} + 1 &\leqslant \frac{p'(p'+1)}{2} + k = f(k,l) \end{aligned}$$

ja f on injektio. $\square$

Todetaan vielä lopuksi, että Tarskin[12] vuonna 1924 todistaman lauseen mukaan valinta-aksiooma on yhtäpitävä sen kanssa, että $A \approx A^2$ kaikilla äärettömillä joukoilla A. Aiemmin oli jo tunnettua, että väitetty yhtämahtavuus seuraa valinta-aksioomasta, joten Tarskin todistuksessa oli kyse implikaatiosta toiseen suuntaan. Tarski tarjosi tulostaan julkaistavaksi *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* -lehdessä, mutta Fréchet[13] ja Lebesgue[14] hylkäsivät sen. Tarinan mukaan Fréchet perusteli hylkäyksen sillä, että implikaatiota kahden tunnetun tosiasian välillä ei voida pitää uutena tuloksena ja Lebesgue sillä, että implikaatio kahden epätoden väitelauseen välillä ei ole kiinnostava.

4. Alkeisfunktioista

Luentovideo 7

4.1. **Potenssi- ja juurifunktiot.** Jos $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin tunnetusti reaaliluvun x n:s *potenssi* x^n on lyhennysmerkintä, jolla esitetään luvun x n kertaa toistuva kertolasku. Lukua x kutsutaan tässä *kantaluvuksi* ja lukua n *eksponentiksi*. Täsmällisesti x^n määritellään asettamalla $x^1 = x$ ja rekursiivisesti $x^{n+1} = x^n x$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Asetetaan myös $x^0 = 1$ kaikille $x \in \mathbb{R}$. Potenssin määritelmän avulla tulon tekijöitä tarkastelemalla saadaan johdettua seuraavat laskusäännöt:

[12]Alfred Tarski (1901–1983)
[13]Maurice René Fréchet (1878–1973)
[14]Henri Léon Lebesgue (1875–1941)

Lause 4.1. *Jos $x, y \in \mathbb{R}$ ja $m, n \in \mathbb{N}$, niin*

(1) $x^m x^n = x^{m+n}$,

(2) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ *aina kun* $x \neq 0$ *ja* $m > n$,

(3) $(x^m)^n = x^{mn}$,

(4) $x^n y^n = (xy)^n$,

(5) $\frac{x^n}{y^n} = (\frac{x}{y})^n$ *aina kun* $y \neq 0$.

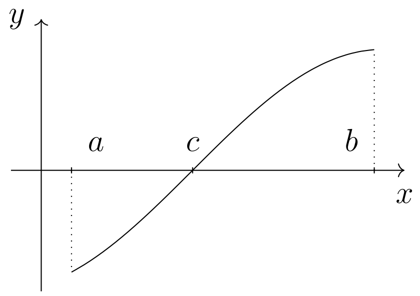
Todistus. Väitteet seuraavat suoraan potenssin määritelmästä. Esimerkiksi kohta (2) pitää paikkansa, sillä kohdan (1) nojalla $\frac{x^m}{x^n} = \frac{x^n x^{m-n}}{x^n} = x^{m-n}$. □

Koska sovittiin, että $x^0 = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin $\frac{x^n}{x^n} = 1 = x^0 = x^{n-n}$ ja lauseen kohta (2) pätee myös kun $m = n$. Jotta kohta (2) pätisi myös kun $m < n$, niin täytyisi olla $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Määritellään siis $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ kaikille $x \neq 0$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin tulon tekijöitä jälleen tarkastelemalla nähdään, että lauseen kohta (1) on voimassa kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}$ ja siten myös kohta (2), sillä kohdan (1) nojalla $x^{m-n} = x^m x^{-n} = x^m \frac{1}{x^n} = \frac{x^m}{x^n}$ kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}$. Vastaavasti nähdään, että muutkin kohdat ovat voimassa kaikille $m, n \in \mathbb{Z}$. Koska luonnollisena pidetyt laskusäännöt ovat voimassa, niin potenssin x^{-n} määritelmä negatiivisille kokonaislukueksponenteille on järkevä.

Voitaisiinko potenssi määritellä myös rationaalilukueksponenteille? Jos $x \geqslant 0$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin laskusääntöjen eli lauseen 4.1 kohtaa (3) tarkastellen näyttäisi luonnolliselta asettaa $x^{\frac{1}{n}}$ luvuksi, jonka n:s potenssi on x itse eli $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$. Mutta mistä tiedetään, että tällainen luku $x^{\frac{1}{n}}$ on olemassa? Kun $n = 2$, niin tätä kysymystä ollaan jo pohdittu esimerkissä 2.18. Geometrisesti tarkastellen luvun $x^{\frac{1}{2}}$ eli neliöjuuren $\sqrt{x}$ olemassaolo vaikuttaa ilmeiseltä, mutta kuinka se perustellaan analyyttisesti? Jos ajatellaan luvun $x \geqslant 0$ potenssiin korotus x^n reaalifunktioksi $f_n \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_n(x) = x^n$, niin riittää osoittaa, että f_n on bijektio. Tällöin nimittäin lauseen 2.11 mukaan sillä on käänteisfunktio f_n^{-1} siten, että luvun $f_n^{-1}(x)$ n:s potenssi on $f_n^{-1}(x)^n = f_n(f_n^{-1}(x)) = x$. Luvuksi $x^{\frac{1}{n}}$ voidaan näin ollen valita $f_n^{-1}(x)$. Bijektiivisyyden osoittamiseksi tarvitaan Bolzanon[15] lausetta, joka on ilmeinen toteamus jatkuville reaalifunktioille. Intuitiivisesti reaalifunktion jatkuvuus tarkoittaa sitä, että funktion kuvaaja voidaan piirtää nostamatta kynää paperista.

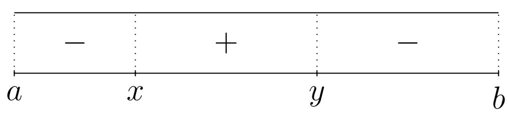
[15] Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848)

Lause 4.2 (Bolzanon lause)**.** *Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ ja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva reaalifunktio siten, että $f(a) < 0 < f(b)$. Tällöin on olemassa $c \in [a, b]$ siten, että $f(c) = 0$.*



Bolzanon lauseen todistus sivuutetaan, sillä sitä varten täytyy ymmärtää reaalilukujen ominaisuuksia hieman tarkemmin ja työskennellä jatkuvuuden täsmällisen määritelmän kanssa. Todistus perustuu reaalilukujen täydellisyyteen eli tietynlaiseen rajankäyntiominaisuuteen, jota jo hahmoteltiin esimerkissä 2.18.

Esimerkki 4.3. Bolzanon lauseen avulla saadaan yhden pisteen avulla selvitettyä reaalifunktion kuvapisteen merkki useammassa pisteessä. Oletetaan, että jatkuvalla reaalifunktiolla $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on esimerkiksi täsmälleen kaksi nollakohtaa, ts. on olemassa yksikäsitteiset luvut $x, y \in [a, b]$ siten, että $a < x < y < b$ ja $f(x) = 0 = f(y)$. Jos tällöin $f(z_1) < 0$ jollakin $z_1 \in [a, x)$, $f(z_2) > 0$ jollakin $z_2 \in (x, y)$ ja

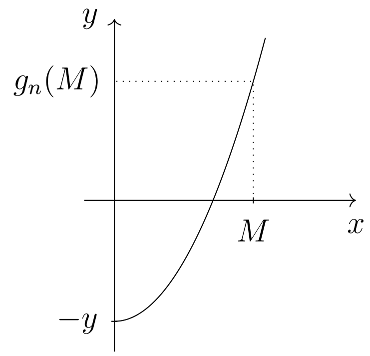


$f(z_3) < 0$ jollakin $z_3 \in (y, b]$, niin $f(z) < 0$ kaikilla $z \in [a, x)$, $f(z) > 0$ kaikilla $z \in (x, y)$ ja $f(z) < 0$ kaikilla $z \in (y, b]$. Tämä nähdään helposti olettamalla vastoin väitettä, että esimerkiksi välillä (x, y) kuvapisteitä olisi kummankin merkkisiä. Tällöin on olemassa pisteet $c, d \in (x, y)$ siten, että $c < d$ ja joko $f(c) < 0 < f(d)$ tai $f(c) > 0 > f(d)$. Tarkastelemalla kuvauksen f sijasta tarvittaessa kuvausta $-f$ riittää käsitellä tapaus $f(c) < 0 < f(d)$. Tällä oletuksella lauseen 4.2 nojalla on olemassa $z \in (c, d)$ siten, että $f(z) = 0$. Tämä ei ole mahdollista, sillä oletuksen mukaan funktiolla f on täsmälleen kaksi nollakohtaa. Bolzanon lause siis antaa keinon tarkastella jatkuvan reaalifunktion käyttäytymistä ”merkkiputken” avulla.

Lause 4.4. *Jos $n \in \mathbb{N}$, niin reaalifunktio $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, on aidosti kasvava ja $f_n([0,\infty)) = [0,\infty)$. Lisäksi rajoittuma $f_n\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ on bijektio.*

Todistus. Olkoot $n \in \mathbb{N}$ ja $x, y \in [0,\infty)$ siten, että $x < y$. Koska $f_n(x) = x^n < y^n = f_n(y)$, niin f_n on aidosti kasvava. Näin ollen lauseen 2.19 mukaan $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ on injektio.

Koska positiivisen luvun potenssi on positiivinen, niin $f_n([0,\infty)) \subset [0,\infty)$. Näin ollen lauseen 2.8 kohdan (3) nojalla riittää osoittaa, että $[0,\infty) \subset f_n([0,\infty))$. Olkoon siis $y \in [0,\infty)$. Koska $f_n(0) = 0$, niin voidaan olettaa, että $y > 0$. Määritellään reaalifunktio $g_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ asettamalla $g_n(x) = f_n(x) - y$ kaikille $x \in [0,\infty)$. Oheinen kuva havainnollistaa kuvausta g_n. Huomataan, että luku $f_n(x) = x^n$



saadaan niin suureksi kuin halutaan valitsemalla vain $x \geqslant 0$ riittävän suureksi. Näin ollen on olemassa $M \in (0,\infty)$ siten, että $f_n(M) > y$. Huomataan myös, että rajoittuma $g_n\colon [0,M] \to \mathbb{R}$ on ilmeisesti jatkuva ja $g_n(0) = -y < 0 < f_n(M) - y = g_n(M)$. Siten Bolzanon lauseen eli lauseen 4.2 mukaan on olemassa $c \in [0,M]$ siten, että $g_n(c) = 0$ eli $f_n(c) = y$. Näin ollen $y \in f_n([0,\infty))$ ja $[0,\infty) \subset f_n([0,\infty))$. $\square$

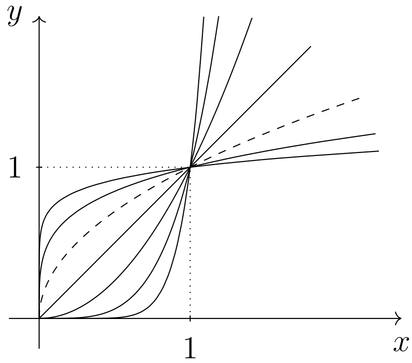
Jos siis $x \geqslant 0$, niin lauseiden 4.4 ja 2.11 nojalla luvun $f_n^{-1}(x)$ n:s potenssi on $f_n^{-1}(x)^n = f_n(f_n^{-1}(x)) = x$ ja $x^{\frac{1}{n}}$ voidaan siten määritellä luvuksi $f_n^{-1}(x)$. Reaalilukua $x^{\frac{1}{n}} \geqslant 0$ kutsutaan myös luvun $x \geqslant 0$ n:nneksi *juureksi* ja sille usein käytetään merkintää $\sqrt[n]{x}$. Lukua $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$ sanotaan *neliöjuureksi* ja lukua $\sqrt[3]{x}$ *kuutiojuureksi*. Koska n:s juuri on kuvauksena n:nnen potenssin käänteiskuvaus, niin lauseen 2.11 mukaan

$$y = x^n \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{y} \tag{4.1}$$

kaikilla $x, y \geqslant 0$ ja $n \in \mathbb{N}$. Huomataan myös, että koska lauseen 4.4 nojalla n:s potenssi f_n on aidosti kasvava, niin lauseen 2.21 kohdan (1) mukaan myös n:s juuri f_n^{-1} on aidosti kasvava. Näin ollen lauseen 2.15 kohdan (1) mukaan

$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad x < y \quad \Leftrightarrow \quad x^n < y^n \tag{4.2}$$

aina kun $x, y \geqslant 0$. Oheinen kuva havainnollistaa reaalifunktioiden $f_q\colon [0,\infty) \to$



$[0,\infty)$, $f_q(x) = x^q$, kuvaajia kun $q \in \{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\}$. Kuvaaja valinnalla $q = \frac{1}{2}$ on korostettu katkoviivalla.

Jos $q \in \mathbb{Q}$, niin on olemassa $m \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$ siten, että $q = \frac{m}{n}$. Jos $x > 0$, niin asettamalla $x^q = x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ saadaan potenssin määritelmä laajennettua rationaalilukueksponenteille siten, että edellä mainitut laskutoimitukset ovat voimassa. Tämän toteaminen jätetään harjoitustehtäväksi. Voidaan osoittaa, että rationaaliluvut ovat reaalilukujen joukossa tiheässä eli että mitä tahansa irrationaalilukua voidaan arvioida mielivaltaisen tarkasti rationaaliluvuilla. Tämän havainnon avulla potenssin määritelmä saadaan reaalilukujen täydellisyyden avulla laajennettua myös reaalilukueksponenteille. Jos siis $x > 0$ ja $r \in \mathbb{R}$, niin potenssi x^r voidaan määritellä niin, että lauseessa 4.1 esitellyt laskutoimitukset ovat voimassa:

Lause 4.5. *Jos $x, y > 0$ ja $r, s \in \mathbb{R}$, niin*

(1) $x^r x^s = x^{r+s}$,
(2) $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$,
(3) $(x^r)^s = x^{rs}$,
(4) $x^r y^r = (xy)^r$,
(5) $\frac{x^r}{y^r} = (\frac{x}{y})^r$.

Sivuutetaan lauseen todistus ja todetaan, että oletusta rajoittua positiivisiin reaalilukuihin ei yleisesti voida välttää: jos laskusäännöt olisivat voimassa myös negatiivisille kantaluvuille, niin lauseen 4.5 kohtien (4) ja (1) nojalla pätisi

$$1 = 1^{\frac{1}{2}} = ((-1)(-1))^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = (-1)^1 = -1, \tag{4.3}$$

mikä on tietysti ristiriita. Myöskään nollaa ei ole soveliasta korottaa rationaalipotenssiin: jos eksponentti olisi negatiivinen, niin päädyttäisiin jakamaan nollalla. Seuraavan lauseen avulla nähdään, että joissain tilanteissa määritelmä voidaan kuitenkin laajentaa negatiivisille kantaluvuille:

Lause 4.6. *Jos $n \in \mathbb{N}$ on pariton, niin reaalifunktio $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, on aidosti kasvava bijektio.*

Todistus. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ pariton ja $k \in \mathbb{N}_0$ siten, että $n = 2k+1$. Potenssin laskusääntöjen eli lauseen 4.1 kohtien (1) ja (3) mukaan $f_n(-x) = (-x)^n = (-x)^{2k+1} = (-x)^{2k}(-x)^1 = ((-x)^2)^k(-x) = (x^2)^k(-x) = x^{2k}(-x) = -x^{2k}x^1 = -x^{2k+1} = -x^n = -f_n(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen f_n on pariton eli erityisesti $f_n(x) = -f_n(-x)$ kaikilla $x \in (-\infty, 0]$. Lauseen 4.4 nojalla f_n on aidosti kasvava joukossa $[0, \infty)$. Jos $x, x' \in (-\infty, 0]$ siten, että $x < x'$, niin $-x, -x' \in [0, \infty)$ siten, että $-x' < -x$ ja $f_n(-x') < f_n(-x)$. Siispä $f_n(x) = -f_n(-x) < -f_n(-x') = f_n(x')$ ja f_n on aidosti kasvava myös joukossa $(-\infty, 0]$. Koska lauseen 4.4 mukaan rajoittuma $f_n \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ on lisäksi bijektio, niin parittomuuden mukaan myös rajoittuma $f_n \colon (-\infty, 0] \to (-\infty, 0]$ on bijektio. Siispä $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on bijektio. $\square$

Jos siis $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$ on pariton, niin lauseiden 4.6 ja 2.11 nojalla luvun $f_n^{-1}(x)$ n:s potenssi on $f_n^{-1}(x)^n = f_n(f_n^{-1}(x)) = x$ ja $x^{\frac{1}{n}}$ voidaan siten määritellä luvuksi $f_n^{-1}(x)$. Esimerkiksi $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$, sillä $(-2)^3 = -8$. Jos siis $n \in \mathbb{N}$ on pariton, niin lauseen 2.11 mukaan

$$y = x^n \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{y} \tag{4.4}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ ja lauseiden 2.21 ja 2.15 kohtien (1) mukaan

$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad x < y \quad \Leftrightarrow \quad x^n < y^n \tag{4.5}$$

aina kun $x, y \in \mathbb{R}$. Huomataan vielä, että jos $n \in \mathbb{N}$ on parillinen, niin $(-1)^n = 1$ ja kohdan (4.1) mukaan

$$y = x^n \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \sqrt[n]{y} \tag{4.6}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $y \geqslant 0$.

Esimerkki 4.7. (1) Ratkaistaan epäyhtälö

$$(x^2 + 2)^{\frac{1}{4}} > (x^2 + 3x)^{\frac{1}{4}}.$$

Neljäs juuri on määritelty vain ei-negatiivisille kantaluvuille. Siksi vaaditaan, että $x^2 + 3x = x(x + 3) \geqslant 0$ eli $x \leqslant -3$ tai $x \geqslant 0$. Huomataan myös, että kohdan (4.2) mukaan

$$\begin{aligned} (x^2 + 2)^{\frac{1}{4}} > (x^2 + 3x)^{\frac{1}{4}} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 2 > x^2 + 3x \\ &\Leftrightarrow \quad x < \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Näin ollen epäyhtälö pätee luvulla x täsmälleen silloin, kun $x \leqslant -3$ tai $0 \leqslant x < \frac{2}{3}$.

(2) Olkoon $f \colon \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt[5]{\frac{3x}{x+2}},$$

ja selvitetään onko reaalifunktiolla f tai sen sopivalla rajoittumalla käänteiskuvausta. Huomataan, että kohdan (4.4) mukaan

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt[5]{\frac{3x}{x+2}} = y \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3x}{x+2} = y^5 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x = y^5(x+2) \\ &\Leftrightarrow \quad x(3 - y^5) = 2y^5 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{2y^5}{3 - y^5} \end{aligned}$$

kunhan $x \neq -2$ ja $y \neq \sqrt[5]{3}$. Näin ollen kuvaukselle $g \colon \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[5]{3}\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

$$g(y) = \frac{2y^5}{3 - y^5},$$

pätee $g(f(x)) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ja $f(g(y)) = y$ kaikilla $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt[5]{3}\}$. Siispä lauseen 2.12 mukaan reaalifunktio $g\colon \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[5]{3}\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ on rajoittuman $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[5]{3}\}$ käänteiskuvaus.

(3) Huomataan, että $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3}$, on parillinen reaalifunktio. Se ei ole injektio, sillä esimerkiksi $f(-\sqrt{3}) = 0 = f(\sqrt{3})$. Etsitään mahdollisimman laaja väli $A \subset \mathbb{R}$ siten, että rajoittuma $f\colon A \to f(A)$ on bijektio. Määritellään $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla $g(x) = x^2 - 3$ ja $h(x) = \sqrt[3]{x}$ kaikille $x \in \mathbb{R}$, jolloin

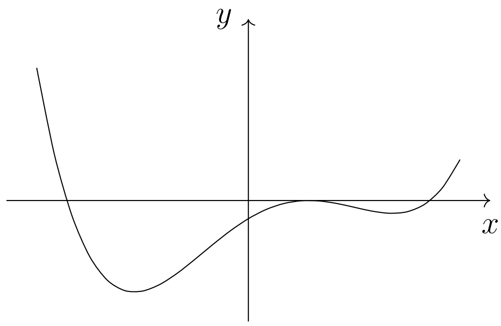
$$(h \circ g)(x) = h(x^2 - 3) = \sqrt[3]{x^2 - 3} = f(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Huomataan, että h on aidosti kasvava, g on aidosti kasvava joukossa $[0, \infty)$ ja g on aidosti vähenevä joukossa $(-\infty, 0]$. Lisäksi $g([0, \infty)) = [-3, \infty) = g((-\infty, 0])$ ja $h([-3, \infty)) = [-\sqrt[3]{3}, \infty)$. Lauseen 2.24 nojalla rajoittumat $h \circ g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ja $h \circ g\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ ovat aidosti monotonisia ja siten lauseen 2.19 mukaan injektioita. Siispä rajoittumat $f\colon [0, \infty) \to [-\sqrt[3]{3}, \infty)$ ja $f\colon (-\infty, 0] \to [-\sqrt[3]{3}, \infty)$ ovat lauseen 2.8 nojalla bijektioita.

4.2. **Polynomit.** Jos $n \in \mathbb{N}$, niin astetta n oleva *polynomi* on reaalifunktio $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle Luentovideo 8

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$, missä $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ja $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ovat polynomin *kertoimet*. Jos $n = 0$, niin vakiokuvausta $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = a_0$, sanotaan nolla-asteiseksi polynomiksi. Sallitaan tässä tilanteessa myös se, että vakio a_0 voi olla 0. Oheinen



kuva havainnollistaa erästä neljännen asteen polynomia.

Algebran peruslauseen eli lauseen 6.8 mukaan millä tahansa polynomilla on *nollakohta* – jos ei reaalinen, niin sitten kompleksinen. Kompleksilukuihin tutustutaan luvussa 6. Toisin sanoen, jokaiselle polynomille P on olemassa reaali- tai kompleksiluku x_0 siten, että $P(x_0) = 0$. Polynomin nollakohtia kutsutaan myös *juuriksi*. Osoitetaan nyt, että n asteisella polynomilla on korkeintaan n reaalista juurta. Tätä varten tarvitaan seuraavaa lausetta.

Lause 4.8. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astetta n oleva polynomi. Jos $x_0 \in \mathbb{R}$ on polynomin P nollakohta, niin on olemassa astetta $n-1$ oleva polynomi Q siten, että*

$$P(x) = (x - x_0)Q(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. Osoitetaan ensin induktiolla, että jos $x, y \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= (x-y)\sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j}y^j \\ &= (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \end{aligned} \tag{4.7}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska $x^1 - y^1 = (x-y)\cdot 1$, niin alkuaskel on voimassa. Tehdään induktio-oletus eli kiinnitetään luonnollinen luku k ja oletetaan, että $x^k - y^k = (x-y)\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}y^j$. Koska tällöin

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} &= y^k(x-y) + x(x^k - y^k) \\ &= y^k(x-y) + x(x-y)\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}y^j \\ &= (x-y)\left(y^k + x\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}y^j\right) \\ &= (x-y)\left(x^0y^k + \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-j}y^j\right) \\ &= (x-y)\sum_{j=0}^{k} x^{k-j}y^j, \end{aligned}$$

niin induktioperiaatteen mukaan väite (4.7) on voimassa kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomi siten, että

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$, missä $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ja $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jos x_0 on polynomin P nollakohta, niin merkitsemällä

$$Q_{k-1}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} x_0^j$$

kaikille $x \in \mathbb{R}$ ja $k \in \{1, \ldots, n\}$ nähdään, että Q_{k-1} on astetta $k-1$ oleva polynomi ja kohdan (4.7) mukaan

$$x^k - x_0^k = (x - x_0) Q_{k-1}(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $k \in \{1, \ldots, n\}$. Näin ollen

$$\begin{aligned} P(x) = P(x) - P(x_0) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k = \sum_{k=1}^{n} a_k (x^k - x_0^k) \\ &= (x - x_0) \sum_{k=1}^{n} a_k Q_{k-1}(x) = (x - x_0) Q(x), \end{aligned}$$

missä $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k Q_{k-1}(x)$, on astetta $n-1$ oleva polynomi. $\square$

Lause 4.9. *Jos polynomin aste on $n \in \mathbb{N}$, niin sillä on korkeintaan n reaalista juurta.*

Todistus. Tehdään induktiotodistus. Jos P on polynomi, jonka aste on 1, niin on olemassa $a_0 \in \mathbb{R}$ ja $a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ siten, että $P(x) = a_1 x + a_0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Reaaliluku x_0 on nollakohta täsmälleen silloin, kun $a_1 x_0 + a_0 = 0$ eli $x_0 = -a_0/a_1$. Näin ollen 1-asteisella polynomilla on täsmälleen yksi reaalinen juuri ja alkuaskel on voimassa.

Tehdään induktio-oletus eli kiinnitetään luonnollinen luku k ja oletetaan, että jokaisella k-asteisella polynomilla on korkeintaan k reaalista juurta. Olkoon P polynomi, jonka aste on $k+1$. Jos polynomilla P ei ole reaalisia juuria, niin ei ole mitään todistettavaa. Voidaan siis olettaa, että on olemassa $x_0 \in \mathbb{R}$ siten, että $P(x_0) = 0$. Näin ollen lauseen 4.8 mukaan on olemassa k-asteinen polynomi Q

siten, että

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) \tag{4.8}$$

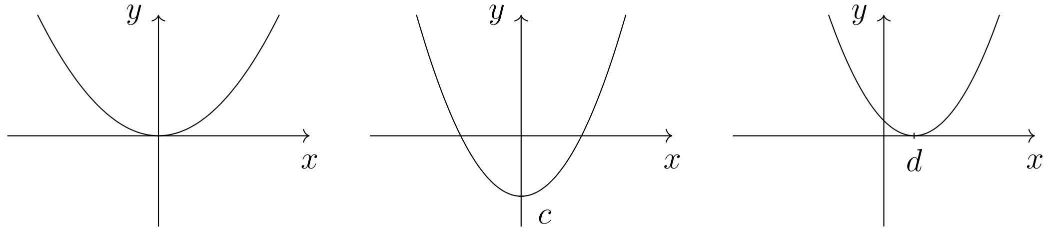
kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koska induktio-oletuksen nojalla polynomilla Q on korkeintaan k reaalista juurta, niin esityksen (4.8) mukaan niitä on polynomilla P korkeintaan $k+1$. Induktioperiaatteen mukaan väite on siis voimassa kaikilla luonnollisilla luvuilla n. □

Jos $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on toisen asteen polynomi, ts.

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$, missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$, niin kuvausta P kutsutaan *paraabeliksi*. Jos $d \in \mathbb{R}$ ja $T_d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T_d(x) = x - d$, niin paraabelin $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x^2$,

(1) skaalaus tai peilaus x-akselin suhteen on $aQ\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(aQ)(x) = ax^2$,
(2) y-akselin suuntainen siirto on $Q + c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(Q + c)(x) = x^2 + c$,
(3) x-akselin suuntainen siirto on $Q \circ T_d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(Q \circ T_d)(x) = (x - d)^2$.



Huomataan, että kukin erikoistapaus on symmetrinen jonkin y-akselin suuntaisen suoran suhteen. Sanotaan, että tämän suoran ja paraabelin leikkauspiste on paraabelin *huippu*. Kuvan tilanteissa huiput ovat pisteissä $(0,0)$, $(0,c)$ ja $(d,0)$. Seuraavan lauseen mukaan mikä tahansa paraabeli saadaan skaalauksen, peilauksen ja molempien akselien suuntaisten siirtojen avulla paraabelista Q.

Lause 4.10. *Jos $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$, missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$, niin*

$$P(x) = (a(Q \circ T_d) + c')(x) = a(x - d)^2 + c'$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja paraabelilla P on huippu pisteessä (d, c'), missä $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x^2$, ja $T_d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T_d(x) = x - d$, sekä $d = -\frac{b}{2a}$ ja $c' = -\frac{b^2}{4a} + c$.

Todistus. Suoralla laskulla nähdään, että

$$\begin{aligned} P(x) = ax^2 + bx + c &= a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\Big) \\ &= a\Big(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \Big(\frac{b}{2a}\Big)^2 - \Big(\frac{b}{2a}\Big)^2 + \frac{c}{a}\Big) \\ &= a\Big(\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \Big(\frac{b}{2a}\Big)^2 + \frac{c}{a}\Big) \\ &= a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Paraabelin P huippu on siten pisteessä $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c)$. □

Lauseen 4.10 avulla paraabelin käyttäytymistä voidaan hahmotella sen huipun sekä paraabelin ja koordinaattiakselien leikkauspisteiden avulla. Paraabeli P leikkaa y-akselin pisteessä $(0, P(0)) = (0, c)$. Lauseen 4.9 mukaan toisen asteen polynomilla on korkeintaan kaksi reaalista nollakohtaa. Jos $x_0 \in \mathbb{R}$ on paraabelin P nollakohta, niin P leikkaa x-akselin pisteessä $(x_0, 0)$. Selvitetään toisen asteen polynomin nollakohdat seuraavassa lauseessa.

Lause 4.11. *Olkoon $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$, missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Tällöin $x_0 \in \mathbb{R}$ on paraabelin P nollakohta täsmälleen silloin, kun $b^2 - 4ac \geqslant 0$ sekä lisäksi*

$$x_0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{tai} \qquad x_0 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Todistus. Lauseen 4.10 ja kohdan (4.6) mukaan

$$\begin{aligned} P(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \end{aligned}$$

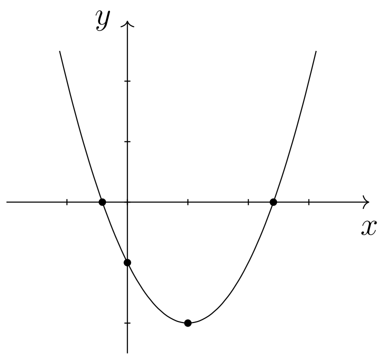
mistä väite seuraa suoraan. □

Lauseen 4.11 nojalla toisen asteen polynomin $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$, reaalisten nollakohtien lukumäärä määräytyy seuraavasti:

(1) Jos $b^2 - 4ac > 0$, niin paraabelilla P on kaksi reaalista juurta.
(2) Jos $b^2 - 4ac = 0$, niin paraabelilla P on yksi reaalinen juuri.
(3) Jos $b^2 - 4ac < 0$, niin paraabelilla P ei ole reaalisia juuria.

Lukua $b^2 - 4ac$ kutsutaan paraabelin P *diskriminantiksi*.

Esimerkki 4.12. Hahmotellaan paraabelin $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 - 2x - 1$, kuvaajaa. Koska $P(0) = -1$, niin kuvaaja kulkee pisteen $(0, -1)$ kautta. Lauseen 4.10 nojalla $P(x) = (x-1)^2 - 2$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja paraabelin huippu on pisteessä $(3, -2)$. Lauseen 4.11 mukaan kuvaaja kulkee myös pisteiden $(1 + \sqrt{2}, 0)$ ja $(1 - \sqrt{2}, 0)$ kautta. Koska paraabelissa P termin x^2 kerroin on 1, niin lauseen 4.10 mukaan P



saadaan molempien akselien suuntaisten siirtojen avulla paraabelista $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x^2$. Oheinen kuva havainnollistaa paraabelia P.

Toisen asteen polynomin nollakohtien ratkaiseminen on vanha ongelma. Babylonialaiset savitaulut ajalta 2 000 eaa. osoittavat, että suorakaiteen sivuihin ja pinta-alaan liittyviä ongelmia on osattu ratkaista jo tänä aikana. Jos suorakaiteen sivujen pituudet ovat a ja b, niin se, että suorakaiteen piiri on $2p$ ja pinta-ala on q eli

$$a + b = p \qquad \text{ja} \qquad ab = q$$

on yhtäpitävä sen kanssa, että a ja b ovat polynomin

$$P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad P(x) = x^2 - px + q,$$

nollakohdat. Puhtaana matemaattisena ongelmana nollakohdat onnistui selvittämään Brahmagupta[16] teoksessaan *Brahmasphutasiddhanta* noin vuonna 628. Hänen ratkaisunsa oli kuitenkin osittainen. Täydellisen ratkaisun reaalijuurille esitti al-Khwarizmi[17] teoksessaan *al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wal-muqabala* vuonna 820. Hän selvitti nollakohdat neliöimällä eli onnistui esittämään polynomin kuten lauseessa 4.10. Sana "algebra" on tullut kirjan otsikossa esiintyvästä sanasta "al-jabr", joka tarkoittaa palauttamista.

Tarkastellaan seuraavaksi kolmannen asteen polynomeja. Cardano[18] julkaisi del Ferron[19] löytämän seuraavassa lauseessa esitetyn ratkaisun tietyille kolmannen asteen polynomien nollakohdille kirjassaan *Ars Magna* vuonna 1545.

Lause 4.13 (Cardanon kaava)**.** *Olkoon* $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = x^3 + px + q$, *missä* $p, q \in \mathbb{R}$. *Jos* $4p^3 + 27q^2 > 0$ *ja*

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

niin $x_0 \in \mathbb{R}$ *on polynomin* P *nollakohta.*

Todistus. Jos $p = 0$, niin lauseen 4.6 mukaan $x_0 = \sqrt[3]{-q} \in \mathbb{R}$ ja väite pitää selvästi paikkansa. Voidaan siis olettaa, että $p \neq 0$. Sijoittamalla polynomin P lausekkeeseen $x = z - \frac{p}{3z}$, missä $z \neq 0$, saadaan

$$\begin{aligned} x^3 + px + q &= \Big(z - \frac{p}{3z}\Big)^3 + p\Big(z - \frac{p}{3z}\Big) + q \\ &= z^3 - 3z^2\Big(\frac{p}{3z}\Big) + 3z\Big(\frac{p}{3z}\Big)^2 - \Big(\frac{p}{3z}\Big)^3 + p\Big(z - \frac{p}{3z}\Big) + q \\ &= z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q. \end{aligned}$$

Huomataan, että jos

$$(z^3)^2 + q(z^3) - \frac{p^3}{27} = 0, \tag{4.9}$$

[16]Brahmagupta (n. 598–668)
[17]Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (n. 780–850)
[18]Gerolamo Cardano (1501–1576)
[19]Scipione del Ferro (1465–1526)

niin $z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$ ja $P(z - \frac{p}{3z}) = 0$. Eli jos z_0^3 on yhtälön (4.9) ratkaisu, niin $x_0 = z_0 - \frac{p}{3z_0}$ on polynomin P nollakohta. Koska oletuksen nojalla $4p^3 + 27q^2 > 0$, niin lauseen 4.11 mukaan yhtälöllä (4.9) on kaksi reaalista ratkaisua,

$$z_0^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{ja} \qquad z_1^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Koska

$$z_0^3 z_1^3 = \Big(-\frac{q}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\Big) = -\frac{p^3}{27} = \Big(-\frac{p}{3}\Big)^3 \neq 0,$$

niin $z_0 \neq 0$ ja siten myös $z_1 = -\frac{p}{3z_0}$. Näin ollen polynomin P eräs reaalinen nollakohta x_0 on kohdan (4.4) mukaan

$$x_0 = z_0 - \frac{p}{3z_0} = z_0 + z_1 = \sqrt[3]{z_0^3} + \sqrt[3]{z_1^3},$$

kuten väitettiin. □

Muistetaan, että lauseen 4.9 mukaan kolmannen asteen polynomilla on korkeintaan kolme reaalista juurta. Cardanon kaava antaa tietyllä oletuksella lausekkeen yhdelle reaalijuurelle. Loppujen nollakohtien selvittäminen voidaan esimerkiksi palauttaa lauseen 4.8 avulla toisen asteen polynomin juurien määrittämiseen eli lauseeseen 4.11.

Cardanon kaavan avulla voidaan tarkastella yleisempiäkin kolmannen asteen polynomeja. Olkoon $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, missä $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ ja $a_3 \neq 0$. Nollakohtien selvittämiseksi polynomin P lauseke voidaan jakaa nollasta eroavalla luvulla a_3, jolloin saadaan ratkaistavaksi yhtälö $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, missä $a = \frac{a_2}{a_3}$, $b = \frac{a_1}{a_3}$ ja $c = \frac{a_0}{a_3}$. Sijoittamalla tähän $x = y - \frac{a}{3}$ saadaan

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \Big(y - \frac{a}{3}\Big)^3 + a\Big(y - \frac{a}{3}\Big)^2 + b\Big(y - \frac{a}{3}\Big) + c \\ &= \Big(y - \frac{a}{3}\Big)\Big(y^2 - \frac{a}{3}y - \frac{2a^2}{9} + b\Big) + c \qquad (4.10) \\ &= y^3 + \Big(b - \frac{a^2}{3}\Big)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \end{aligned}$$

ja polynomin P nollakohdat voidaan laskea yhtälön $y^3 + py + q = 0$ avulla, missä $p = (3b - a^2)/3$ ja $q = (2a^3 - 9ab + 27c)/27$. Jos siis y_0 toteuttaa yhtälön $y^3 + py + q = 0$, niin $x_0 = y_0 - \frac{a}{3}$ toteuttaa yhtälön $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Esimerkki 4.14. Etsitään yhtälölle $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ reaalinen ratkaisu Cardanon kaavan avulla. Kohdan (4.10) mukaisesti sijoittamalla $x = y + \frac{1}{3}$ nähdään, että yhtälön juuret saadaan lisäämällä luku $\frac{1}{3}$ yhtälön $y^3 + \frac{2}{3}y - \frac{20}{27} = 0$ juuriin. Koska $4(\frac{2}{3})^3 + 27(-\frac{20}{27})^2 > 0$, niin Cardanon kaavan eli lauseen 4.13 mukaan jälkimmäisen yhtälön eräs reaalinen juuri on

$$y_0 = \frac{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}}{3} = \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt{3})^3} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{3})^3}}{3} = \frac{2}{3}.$$

Näin ollen $x_0 = y_0 + \frac{1}{3} = 1$ on alkuperäisen yhtälön eräs reaalijuuri.

Ensimmäisen, toisen, kolmannen ja neljännen asteen polynomien nollakohdat voidaan ratkaista suljetussa muodossa. Tämä tarkoittaa sitä, että luku x_0, jolle $P(x_0) = 0$, voidaan esittää polynomin P kertoimien avulla vain äärellistä määrää peruslaskutoimituksia hyväksi käyttäen. Neljännen asteen polynomin ratkaisukaava on sen verran hankala, että sillä ei käytännössä ole juurikaan merkitystä. Sovelluksissa polynomien nollakohtia arvioidaan kuitenkin numeerisilla menetelmillä. Nollakohtien ratkaisemisessa numeeriset menetelmät ovat itse asiassa välttämättömiä, sillä norjalainen 22-vuotias Abel[20] osoitti vuonna 1824, että viidennen tai sitä korkeampiasteisten polynomien nollakohtia ei yleisesti voida esittää suljetussa muodossa. Esimerkiksi polynomin $x^5 - x - 1$ nollakohta $x = 1{,}1673\ldots$ on tällainen. Lauseen oli esittänyt Ruffini[21] jo vuonna 1799, mutta hänen todistuksensa oli puutteellinen. Tästä huolimatta tulosta kutsutaan Abelin-Ruffinin lauseeksi.

Luentovideo 9

4.3. **Eksponentti- ja logaritmifunktiot.** Vuonna 1683 Bernoulli[22] tarkasteli sijoittamiseen liittyvää ongelmaa. Jos sijoitusinstrumentti tuplaa sijoitetun rahamäärän joka kymmenes vuosi, niin rahamäärä on kahdessakymmenessä vuodessa nelinkertainen, kolmessakymmenessä kahdeksankertainen ja $10n$ vuoden jälkeen 2^n-kertainen. Se, että rahamäärä tuplaantuu joka kymmenes vuosi tarkoittaa toisin sanoen 100 % kasvua kymmenessä vuodessa. Koska $1{,}072^{10} \approx 2$, niin noin 7,2 % vuotuinen kasvu antaa 100 % kasvun kymmenessä vuodessa. Bernoulli pohti asiaa toisin päin: jos 100 % kasvu jaetaan 10 % vuotuiseksi kasvuksi kymmenen vuoden

[20] Niels Henrik Abel (1802–1829)
[21] Paolo Ruffini (1765–1822)
[22] Jacob Bernoulli (1655–1705)

ajalle, niin kuinka suuri kokonaiskasvu on kymmenessä vuodessa? Jos rahamäärä on yksi euro, niin 10 % vuotuinen kasvu kasvattaa sen kymmenessä vuodessa $(1+\frac{1}{10})^{10} = 1{,}1^{10} \approx 2{,}59$ euroon. Vastaavasti jos korko lasketaan kymmenen vuoden ajan kuukausittain eli tarkastellaan 120 kuukautta ja $\frac{100\,\%}{120} \approx 0{,}833$ % kuukausittaista kasvua, niin yksi euro kasvaa $(1+\frac{1}{120})^{120} \approx 1{,}00833^{120} \approx 2{,}706$ euroon. Jos taas korko lasketaan päivittäin, niin yksi euro kasvaa kymmenessä vuodessa tällöin $(1+\frac{1}{3650})^{3650} \approx 2{,}718$ euroon. Voidaan osoittaa, että jos luonnollinen luku n kasvaa rajatta, niin $(1+\frac{1}{n})^n$ lähestyy *Neperin lukua* $e = 2{,}71828183\ldots$. Merkintä e kunnioittaa Euleria[23], joka käytti merkintää ensimmäisen kerran vuonna 1731 kirjeessään Goldbachille[24], ja luvun nimi Napieria[25], joka esitteli logaritmin vuonna 1614 kirjassaan *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*.

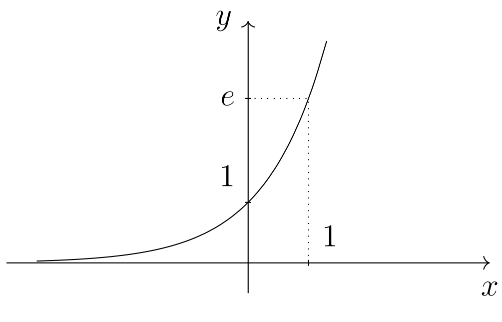
Sanotaan, että reaalifunktio $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$, on *eksponenttifunktio*. Eksponenttifunktiolle on potenssin laskusääntöjen eli lauseen 4.5 nojalla voimassa seuraavat laskusäännöt:

Lause 4.15. *Jos $x, y \in \mathbb{R}$, niin*

(1) $e^{x+y} = e^x e^y$,
(2) $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$,
(3) $(e^x)^y = e^{xy}$.

Todistus. Väitteet seuraavat suoraan lauseesta 4.5. □

Oheinen kuva havainnollistaa eksponenttifunktion kuvaajaa. Huomataan, että



[23]Leonhard Euler (1707–1783)
[24]Christian Goldbach (1690–1764)
[25]John Napier (1550–1617)

$e^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Erityisesti pätee, että $0 < e^x < 1$ kaikilla $x < 0$, $e^0 = 1$ ja $e^x > 1$ kaikilla $x > 0$.

Lause 4.16. *Reaalifunktio* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $\exp(x) = e^x$*, on aidosti kasvava ja* $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$*. Lisäksi rajoittuma* $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *on bijektio.*

Todistus. Todistus noudattelee lauseen 4.4 todistusta. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$ siten, että $x < y$. Koska $e^{y-x} > 1$, niin eksponenttifunktion laskusääntöjen eli lauseen 4.15 kohdan (1) nojalla $\exp(x) = e^x < e^{y-x}e^x = e^{y-x+x} = e^y = \exp(y)$ ja siten exp on aidosti kasvava. Näin ollen lauseen 2.19 mukaan $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on injektio.

Koska $e^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin $\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$. Näin ollen lauseen 2.8 kohdan (3) nojalla riittää osoittaa, että $(0, \infty) \subset \exp(\mathbb{R})$. Olkoon siis $y \in (0, \infty)$. Määritellään reaalifunktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla $g(x) = \exp(x) - y$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Huomataan, että luku $\exp(x) = e^x$ saadaan niin suureksi kuin halutaan valitsemalla vain $x > 0$ riittävän suureksi. Vastaavasti $\exp(x) > 0$ saadaan niin lähelle nollaa kuin halutaan valitsemalla $x < 0$ riittävän pieneksi. Näin ollen on olemassa $M \in (0, \infty)$ siten, että $\exp(-M) < y < \exp(M)$. Huomataan myös, että rajoittuma $g\colon [-M, M] \to \mathbb{R}$ on ilmeisesti jatkuva ja $g(-M) = \exp(-M) - y < 0 < \exp(M) - y = g(M)$. Siten Bolzanon lauseen eli lauseen 4.2 mukaan on olemassa $c \in [-M, M]$ siten, että $g(c) = 0$ eli $\exp(c) = y$. Näin ollen $y \in \exp(\mathbb{R})$ ja $(0, \infty) \subset \exp(\mathbb{R})$. □

Lauseiden 4.16 ja 2.7 mukaan eksponenttifunktiolla $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ on käänteiskuvaus $\exp^{-1}\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Käänteiskuvaukselle $\exp^{-1}$ käytetään merkintää log ja sitä kutsutaan *luonnolliseksi logaritmiksi*. Luonnolliselle logaritmille käytetään myös merkintää ln. Lauseen 2.11 mukaan

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log(y) \tag{4.11}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $y > 0$. Huomataan, että koska lauseen 4.16 mukaan eksponenttifunktio $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ on aidosti kasvava bijektio, niin lauseen 2.21 kohdan (1) ja lauseen 2.11 mukaan myös logaritmi $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava bijektio. Erityisesti pätee, että $\log(x) < 0$ kaikilla $0 < x < 1$, $\log(1) = 0$ ja $\log(x) > 0$ kaikilla $x > 1$. Kohdan (4.11) ja eksponenttifunktion laskusääntöjen eli lauseen 4.15 avulla nähdään suoraan, että logaritmille on voimassa seuraavat laskusäännöt:

Lause 4.17. *Jos $x, y > 0$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin*

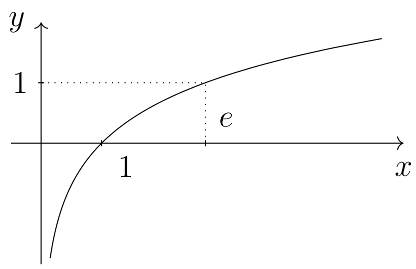
(1) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$,

(2) $\log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$.

(3) $\log(x^c) = c\log(x)$,

Todistus. Väitteet seuraavat suoraan lauseesta 4.15. Esimerkiksi kohta (1) saadaan seuraavasti: Merkitsemällä $z = \log(x)$ ja $w = \log(y)$ nähdään kohdan (4.11) nojalla, että $x = e^z$, $y = e^w$ ja $z + w = \log(e^{z+w})$. Siten lauseen 4.15 kohdan (1) mukaan $\log(x) + \log(y) = z + w = \log(e^{z+w}) = \log(e^z e^w) = \log(xy)$. □

Oheinen kuva havainnollistaa logaritmifunktiota.



Jos $a > 0$, niin sanotaan, että reaalifunktio $\exp_a\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $\exp_a(x) = a^x$, on *a-kantainen eksponenttifunktio*. Eksponenttifunktio exp on siten e-kantainen eksponentti. Kohdan (4.11) nojalla luvulle $b = \log(a)$ pätee $a = e^b = e^{\log(a)}$. Näin ollen eksponentin laskusääntöjen eli lauseen 4.15 kohdan (3) mukaan

$$\exp_a(x) = a^x = (e^{\log(a)})^x = e^{x\log(a)} = \exp(x\log(a)) \tag{4.12}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Määritellään *a-kantainen logaritmi* $\log_a\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \tag{4.13}$$

kaikille $x > 0$. Koska kohtien (4.13), (4.12) ja (4.11) mukaan

$$\exp_a(\log_a(x)) = \exp_a\Big(\frac{\log(x)}{\log(a)}\Big) = \exp\Big(\frac{\log(x)}{\log(a)}\log(a)\Big) = \exp(\log(x)) = x$$

kaikilla $x > 0$ ja vastaavasti

$$\log_a(\exp_a(x)) = \log_a(\exp(x\log(a))) = \frac{\log(\exp(x\log(a)))}{\log(a)} = \frac{x\log(a)}{\log(a)} = x$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin lauseen 2.12 nojalla a-kantainen logaritmi $\log_a$ on a-kantaisen eksponenttifunktion $\exp_a$ käänteiskuvaus.

Merkinnällä log tarkoitetaan tekniikan alalla usein 10-kantaista logaritmia $\log_{10}$ ja informaatioteoriassa 2-kantaista logaritmia $\log_2$. Tämä on perusteltua, sillä tällöin logaritmi kertoo kuinka monta kertaa luvun esityksessä kantalukua on kerrottu itsellään. Esimerkiksi $1\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10$ ja $\log_{10}(1\,000) = 3$. Tuloperiaatteen eli lauseen 3.4 mukaan 8-bittisellä binääriluvulla eli tavulla voidaan esittää $2^8 = 256$ eri lukua. Kääntäen 2^8 eri luvun esittämiseksi binääriluvuilla tarvitaan $\log_2(2^8) = 8$ joukon $\{0, 1\}$ alkiota eli bittiä. Miksi sitten e-kantaista logaritmia kutsutaan "luonnolliseksi" ja miksi eksponenttifunktio määritellään Neperin luvun avulla? Huomataan, että joissain tilanteissa luvun e määritelmä auttaa laskennallisesti: jos $n \in \mathbb{N}$ on hyvin suuri, esimerkiksi $n = 100$, niin $(1 + \frac{1}{100})^{100} \approx e$ ja siten esimerkiksi

$$\log(1{,}01) = \log\Big(1 + \frac{1}{100}\Big) = \frac{1}{100}\log\Big(\Big(1 + \frac{1}{100}\Big)^{100}\Big) \approx \frac{1}{100}\log(e) = 0{,}01.$$

Peruste luonnollisuudelle saadaan kuitenkin matemaattisten tulosten kautta. Eksponenttifunktio mahdollisesti vakiolla kerrottuna on ainoa reaalifunktio, jonka derivaatta on funktio itse. Lisäksi luonnollisen logaritmin derivaatta on reaalifunktio $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Analyysin peruslauseen mukaan tämä tarkoittaa sitä, että välillä $[1, c]$ funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala on $\log(c)$. Itse asiassa luonnollinen logaritmi voitaisiin määritellä tämän ominaisuuden avulla ja eksponenttifunkio sen jälkeen luonnollisen logaritmin käänteisfunktioksi. Neperin luku e tulee tällöin määritellyksi tämän käänteisfunktion arvoksi pisteessä 1 eli positiiviseksi luvuksi x, jolle $\log(x) = 1$.

Esimerkki 4.18. (1) Ratkaistaan yhtälö $2^{x^2-1} - \frac{1}{2}3^{2x} = 0$. Koska

$$\begin{aligned} 2^{x^2-1} - \tfrac{1}{2}3^{2x} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2 \cdot 2^{x^2-1} = 3^{2x} \\ &\Leftrightarrow \quad 2^{x^2} = 3^{2x} \\ &\Leftrightarrow \quad \log(2^{x^2}) = \log(3^{2x}) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 \log(2) = 2x \log(3) \\ &\Leftrightarrow \quad x(x\log(2) - 2\log(3)) = 0, \end{aligned}$$

niin reaaliluku x toteuttaa yhtälön täsmälleen silloin, kun $x = 0$ tai $x = 2\log_2(3)$.

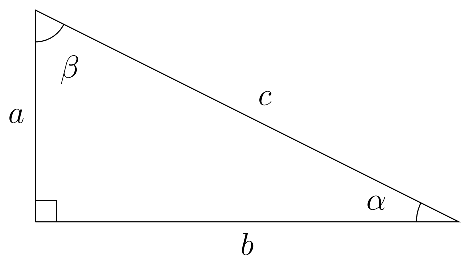
(2) Ratkaistaan epäyhtälö $2^{x^2-1} - \frac{1}{2}3^{2x} < 0$. Merkitään $f(x) = 2^{x^2-1} - \frac{1}{2}3^{2x}$ kaikille $x \in \mathbb{R}$. Kohdassa (1) huomattiin, että $f(x) = 0$ täsmälleen silloin, kun $x = 0$ tai $x = 2\log_2(3)$. Koska $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on ilmeisesti jatkuva, niin todetaan Bolzanon lauseen eli lauseen 4.2 avulla, että f säilyttää merkkinsä kullakin välillä $(-\infty, 0)$, $(0, 2\log_2(3))$ ja $(2\log_2(3), \infty)$. Koska $f(-1) = 2^0 - \frac{1}{2}3^{-2} = 1 - \frac{1}{18} > 0$,

$+$	$-$	$+$
	0	$2\log_2(3)$

$f(1) = 2^0 - \frac{1}{2}3^2 = 1 - \frac{9}{2} < 0$ ja $f(4) = 2^{4^2-1} - \frac{1}{2}3^{2\cdot 4} = 2^{15} - \frac{1}{2}3^8 = 32\,768 - \frac{6\,561}{2} > 0$, niin reaaliluku x toteuttaa epäyhtälön täsmälleen silloin, kun $0 < x < 2\log_2(3)$.

Luentovideo 10

4.4. **Trigonometriset ja arkusfunktiot.** Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista suorakulmaista kolmiota, jossa terävät kulmat ovat α ja β sekä kulman α vas-



takkaisen kateetin pituus on a, kulman β vastakkaisen kateetin pituus on b ja hypotenuusan pituus on c. Tällöin kulman $0° < \alpha < 90°$ *sini* ja *kosini* ovat luvut

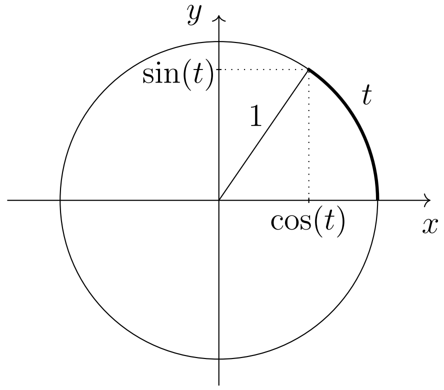
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad \text{ja} \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

ja *tangentti* on luku

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Näin saadaan määriteltyä kolme kuvausta, ns. *trigonometriset funktiot*, joukolta $(0°, 90°)$ joukolle $\mathbb{R}$. Huomataan myös, että koska kateettien pituudet ovat korkeintaan hypotenuusan pituus eli $a < c$ ja $b < c$, niin $0 < \sin(\alpha) < 1$ ja $0 < \cos(\alpha) < 1$ kaikilla $\alpha \in (0°, 90°)$. Kuinka trigonometriset funktiot määritellään kaikille kulmille?

Tarkastellaan yksikköympyrän kehää $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Koska luku $\pi \approx 3{,}14159265\ldots$ on määritelmänsä mukaan ympyrän kehän suhde halkaisijaan, niin kehän S^1 pituus on 2π. Lähdetään liikkeelle positiiviselta x-akselilta pisteestä

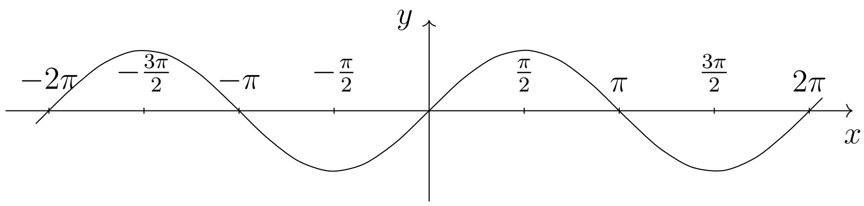


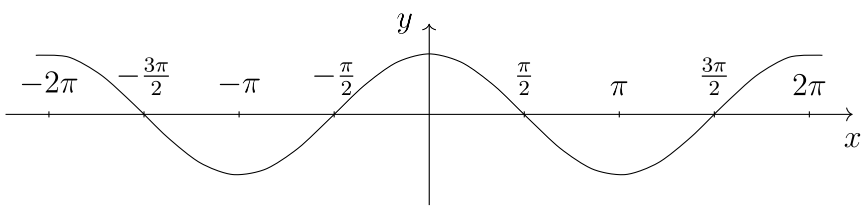
$(1,0)$ ja kuljetaan vastapäivään t:n pituinen matka. Näin saavutaan pisteeseen $(x,y) \in S^1$ ja merkitään

$$\sin(t) = y \qquad \text{ja} \qquad \cos(t) = x. \tag{4.14}$$

Oheinen kuva havainnollistaa tilannetta. Jos kuljetaan myötäpäivään, niin merkitään kuljettua matkaa negatiivisella luvulla $t < 0$ ja määritellään $\sin(t)$ ja $\cos(t)$ kuten edellä.

Tällä tavalla geometriaan vetoamalla saadaan $\sin(t)$ ja $\cos(t)$ määriteltyä kaikille $t \in \mathbb{R}$. Ilman geometriaa sin ja cos voidaan määritellä yhtäpitävästi potenssisarjojen avulla. Huomataan, että $-1 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ ja $-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Oheiset



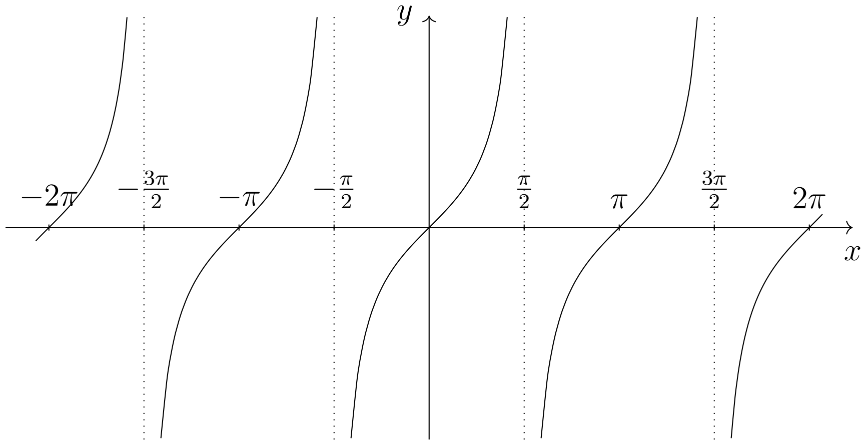


kuvat havainnollistavat reaalifunktioita $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ ja $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$. Luvun

$t \in \mathbb{R}$ tangentti määritellään asettamalla

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \tag{4.15}$$

aina kun $\cos(t) \neq 0$ eli kun $t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Oheinen kuva havainnollistaa



reaalifunktiota $\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$.

Jos ajatellaan kulma $0° < \alpha < 90°$ yksikköympyrän kehällä S^1 kuljettuna matkana $t = 2\pi\frac{\alpha}{360°}$, niin annetut määritelmät yhtyvät eli $\sin(\alpha) = \sin(t)$, $\cos(\alpha) = \cos(t)$ ja $\tan(\alpha) = \tan(t)$. Sanotaankin, että kulman α suuruus *radiaaneina* on kulmaa vastaavan kaaren pituus t yksikköympyrän kehällä kiertosuuntaa vastaavalla merkillä varustettuna. Huomataan myös, että jokaista radiaania t vastaa täsmälleen yksi kehän piste $(x, y) \in S^1$ ja jokaista kehän pistettä $(x, y) \in S^1$ vastaa ääretön määrä radiaaneja $t + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Seuraavat laskusäännöt seuraavat suoraan trigonometristen funktioiden määritelmistä:

Lause 4.19. *Jos* $t \in \mathbb{R}$, *niin*

(1) $\sin(-t) = -\sin(t)$,
(2) $\cos(-t) = \cos(t)$,
(3) $\tan(-t) = -\tan(t)$ *aina kun* $\cos(t) \neq 0$.

Todistus. Väitteet seuraavat suoraan kohdista (4.14) ja (4.15). $\square$

Lauseen mukaan $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ ja $\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ ovat parittomia reaalifunktioita ja $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ on parillinen. Tässä $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ on tangentin määritelmän eli kohdan (4.15) mukaan laajin mahdollinen tangentin lähtöjoukko.

Trigonometristen funktioiden määritelmistä saadaan myös suoraan:

Lause 4.20. *Jos $t \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}$, niin*

(1) $\sin(t + n2\pi) = \sin(t)$,
(2) $\cos(t + n2\pi) = \cos(t)$,
(3) $\tan(t + n\pi) = \tan(t)$ *aina kun* $\cos(t) \neq 0$,
(4) $\sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos(t)$,
(5) $\cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin(t)$.

Todistus. Väitteet seuraavat suoraan kohdista (4.14) ja (4.15) muistaen, että yksikköympyrän kehän S^1 pituus on 2π. □

Lauseiden 4.19 ja 4.20 väitteet on myös helppo nähdä geometrisesti edellä esitetyistä reaalifunktioiden sin, cos ja tan kuvaajista. Trigonometristen funktioiden yhteydessä potenssiin korottaminen on tapana esittää seuraavasti: esimerkiksi luvulle $(\sin(t))^2$ käytetään merkintää $\sin^2(t)$. Kosinin ja tangentin kanssa toimitaan vastaavasti. Koska yhdistetylle kuvaukselle $f \circ f$ käytetään usein merkintää f^2, niin merkintöjen kanssa on syytä olla tarkkana, sillä $\sin^2(t) = (\sin(t))^2 \neq \sin(\sin(t)) = (\sin \circ \sin)(t)$ lähes kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

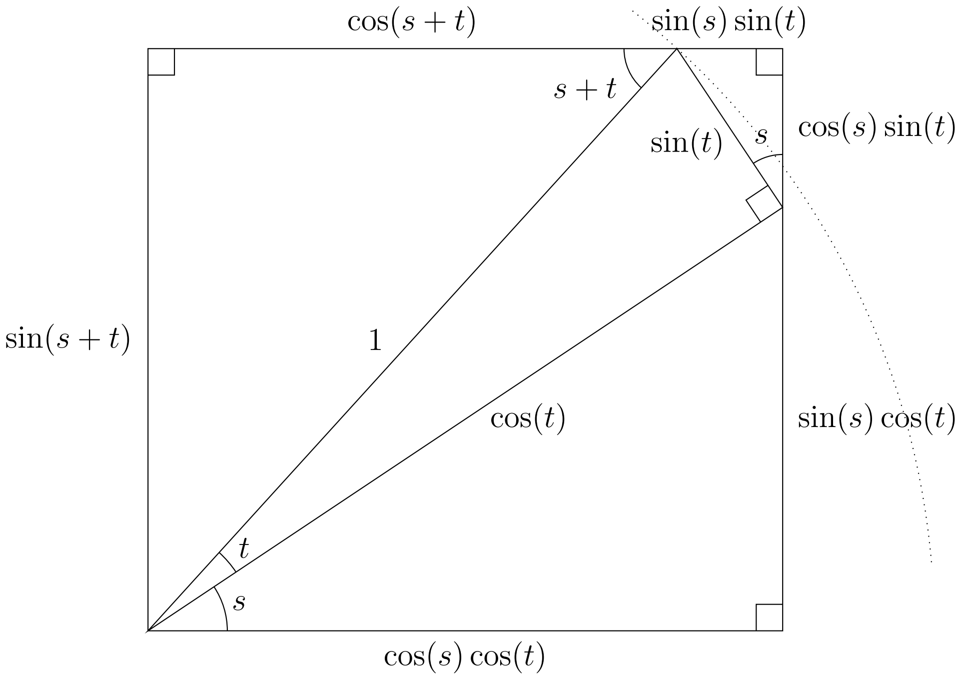
Lause 4.21. *Jos $t \in \mathbb{R}$, niin* $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Todistus. Väite seuraa suoraan kohdasta (4.14) ja Pythagoraan lauseesta. □

Edellisen lauseen mukaan tason $\mathbb{R}^2$ piste $(\cos(t), \sin(t))$ on ympyrän kehällä S^1 kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Lause 4.22. *Jos $s, t \in \mathbb{R}$, niin*

(1) $\sin(s + t) = \cos(s)\sin(t) + \sin(s)\cos(t)$,
(2) $\cos(s + t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)$.



Todistus. Oheinen kuva perustelee summakaavat. □

Edellä esiteltyjä laskusääntöjä yhdistelemällä saadaan helposti muodostettua uusia. Esimerkiksi lauseista 4.22 ja 4.21 seuraa suoraan, että

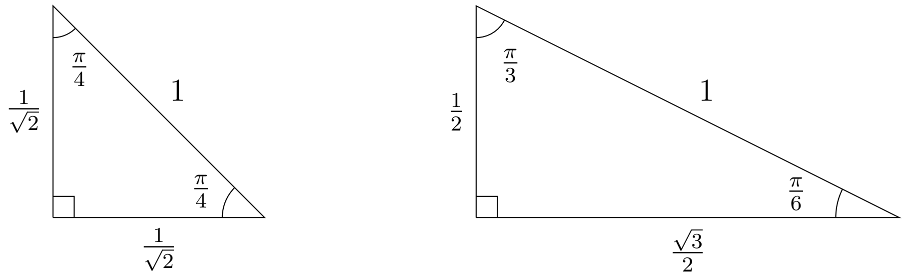
$$\begin{aligned} \sin(2t) &= 2\sin(t)\cos(t), \\ \cos(2t) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t) \end{aligned} \tag{4.16}$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Huomaa myös, että lause 4.20 saadaan lauseen 4.22 seurauksena. Lisäksi esimerkiksi

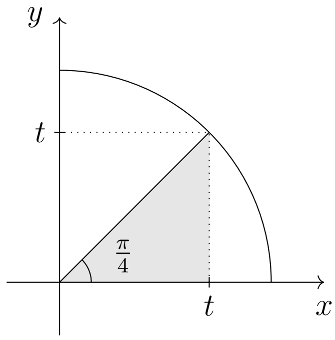
$$\sin(t + \pi) = \cos(t)\sin(\pi) + \sin(t)\cos(\pi) = -\sin(t),$$
$$\cos(t + \pi) = \cos(t)\cos(\pi) - \sin(t)\sin(\pi) = -\cos(t)$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Seuraava lause perustelee tutut "muistikolmiot":

Lause 4.23. *(1)* $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{\pi}{4})$,
(2) $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3})$,
(3) $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{\pi}{6})$.

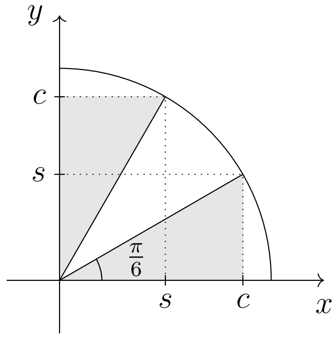


Todistus. Osoitetaan ensin kohta (1). Koska neljännesympyrän kehän pituus on $\frac{\pi}{2}$, niin neljännesympyrä puolittamalla syntyy oheisen kuvan mukaisesti kaksi



suorakulmaista kolmiota, joiden terävien kärkien kulmat ovat radiaaneissa $\frac{\pi}{4}$. Näin ollen sinin ja kosinin määritelmien mukaan $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$. Merkitään tätä lukua t:llä ja huomataan, että Pythagoraan lauseen mukaan $t^2 + t^2 = 1$ eli $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ kuten väitettiin.

Osoitetaan sitten kohdat (2) ja (3). Jakamalla neljännesympyrä nyt kolmeen yhtä suureen osaan syntyy oheisen kuvan mukaisesti kaksi suorakulmaista kolmiota,



joiden terävät kulmat ovat radiaaneissa $\frac{\pi}{6}$ ja $\frac{\pi}{3}$. Huomataan, että sinin ja kosinin määritelmien mukaan $\sin(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3})$ ja $\cos(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{3})$. Merkitään $s = \sin(\frac{\pi}{6})$ ja $c = \cos(\frac{\pi}{6})$ ja huomataan, että kohdan (4.16) mukaan

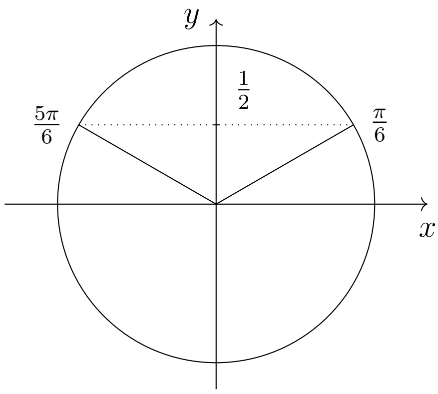
$$\begin{aligned} c &= \sin(\tfrac{\pi}{3}) = 2\sin(\tfrac{\pi}{6})\cos(\tfrac{\pi}{6}) = 2sc, \\ s &= \cos(\tfrac{\pi}{3}) = 2\cos^2(\tfrac{\pi}{6}) - 1 = 2c^2 - 1. \end{aligned}$$

Näin ollen $s = \frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{2} = 2c^2 - 1$ eli $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ kuten väitettiin. □

Esimerkki 4.24. (1) Ratkaistaan yhtälö $2\sin(2t) = 1$. Koska

$$2\sin(2t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2t) = \tfrac{1}{2},$$

niin lauseen 4.23 kohdan (2) ja oheisen kuvan avulla nähdään, että t toteuttaa



yhtälön täsmälleen silloin, kun

$$\begin{cases} 2t = \frac{\pi}{6} + n2\pi, \\ 2t = \pi - \frac{\pi}{6} + n2\pi, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z},$$

eli

$$\begin{cases} t = \frac{\pi}{12} + n\pi, \\ t = \frac{5\pi}{12} + n\pi, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

(2) Ratkaistaan yhtälö $\tan(3t) = \tan(t)$. Ottamalla huomioon yhtälö ja tangentin määrittelyalue, pitää seuraavat kolme ehtoa olla yhtäaikaa voimassa:

$$\begin{cases} 3t = t + n\pi, \\ 3t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \\ t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z},$$

eli

$$\begin{cases} t = n\frac{\pi}{2}, \\ t \neq \frac{\pi}{6} + n\frac{\pi}{3}, & n \in \mathbb{Z}. \\ t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \end{cases}$$

Näin ollen t toteuttaa yhtälön täsmälleen silloin, kun $t = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

(3) Ratkaistaan yhtälö $\cos(t) + \sin(t) = 1$. Huomataan, että jos $t \in \mathbb{R}$ toteuttaa ao. yhtälön, niin se toteuttaa myös yhtälön $(\cos(t) + \sin(t))^2 = 1$. Kääntäen ei välttämättä päde, sillä voi olla $\cos(t) + \sin(t) = -1$. Mutta jos $t \in \mathbb{R}$ ei toteuta yhtälöä $(\cos(t) + \sin(t))^2 = 1$, niin se ei myöskään toteuta alkuperäistä yhtälöä. Näin ollen yhtälön $\cos(t) + \sin(t) = 1$ mahdolliset ratkaisut löytyvät yhtälön $(\cos(t) + \sin(t))^2 = 1$ ratkaisuista. Koska lauseen 4.21 ja kohdan (4.16) nojalla

$$\begin{aligned} (\cos(t) + \sin(t))^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2(t) + 2\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin(2t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2t = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad t = n\tfrac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

niin kokeilemalla nähdään, että t toteuttaa yhtälön $\cos(t) + \sin(t) = 1$ täsmälleen silloin, kun $t = 2n\pi$ tai $t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Lauseen 4.20 kohtien (1)–(3) mukaan trigonometriset funktiot eivät ole injektioita. Näin ollen niillä ei ole käänteiskuvauksia ellei lähtöjoukkoja onnistuta rajoittamaan sopivasti.

Lause 4.25. *(1) Rajoittuma* $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ *on aidosti kasvava bijektio,*

(2) Rajoittuma $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ *on aidosti vähenevä bijektio,*

(3) Rajoittuma $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *on aidosti kasvava bijektio.*

Todistus. Osoitetaan kohta (1) ja jätetään kohdat (2) ja (3) harjoitustehtäväksi. Todistus noudattelee lauseiden 4.4 ja 4.16 todistuksia. Olkoot $s, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ siten, että $s < t$. Koska sinin määritelmän eli kohdan (4.14) mukaan $\sin(s) < \sin(t)$, niin sin on aidosti kasvava välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Näin ollen lauseen 2.19 mukaan $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ on injektio.

Koska $-1 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, niin $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \subset [-1, 1]$. Näin ollen lauseen 2.8 kohdan (3) nojalla riittää osoittaa, että $[-1, 1] \subset \sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$. Olkoon siis $y \in [-1, 1]$. Koska $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ ja $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, niin voidaan olettaa, että $-1 < y < 1$. Määritellään reaalifunktio $g\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ asettamalla $g(t) = \sin(t) - y$ kaikille $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Koska g on ilmeisesti jatkuva ja $g(-\frac{\pi}{2}) = -1 - y < 0 < 1 - y = g(\frac{\pi}{2})$, niin Bolzanon lauseen eli lauseen 4.2 mukaan on olemassa $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ siten, että $g(c) = 0$ eli $\sin(c) = y$. Näin ollen $y \in \sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ ja $[-1, 1] \subset \sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$. $\square$

Lauseiden 2.11 ja 2.21 mukaan lauseessa 4.25 mainituille kuvauksille on olemassa aidosti monotoniset käänteiskuvaukset *arkussini* $\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *arkuskosini* $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ ja *arkustangentti* $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, joille pätee

$$y = \sin(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \arcsin(y)$$

kaikilla $y \in [-1, 1]$ ja $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$y = \cos(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \arccos(y)$$

kaikilla $y \in [-1, 1]$ ja $t \in [0, \pi]$, ja

$$y = \tan(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \arctan(y) \tag{4.17}$$

kaikilla $y \in \mathbb{R}$ ja $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Esimerkki 4.26. (1) Selvitetään mikä luku $\arcsin(\frac{1}{2})$ on. Merkitään $t = \arcsin(\frac{1}{2})$, jolloin

$$t = \arcsin(\tfrac{1}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(t) = \tfrac{1}{2}.$$

Koska käänteiskuvauksen arcsin määritelmän mukaan $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, niin lauseen 4.23 mukaan $t = \frac{\pi}{6}$.

(2) Selvitetään mikä luku $\cos(\arcsin(y))$ on, kun $y \in [-1, 1]$. Koska määritelmänsä mukaan $\arcsin(y) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, niin $\cos(\arcsin(y)) \geqslant 0$. Näin ollen, koska lauseen 4.21 mukaan $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))} = \sqrt{1 - y^2}.$$

4.5. **Hyperboliset ja areafunktiot.** Vaikka hyberboliset funktiot muistuttavat useilta ominaisuuksiltaan trigonometrisia funktioita, niin ne määritellään eksponenttifunktion avulla. *Hyperbolinen sini* on reaalifunktio $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

Luentovideo 11

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{4.18}$$

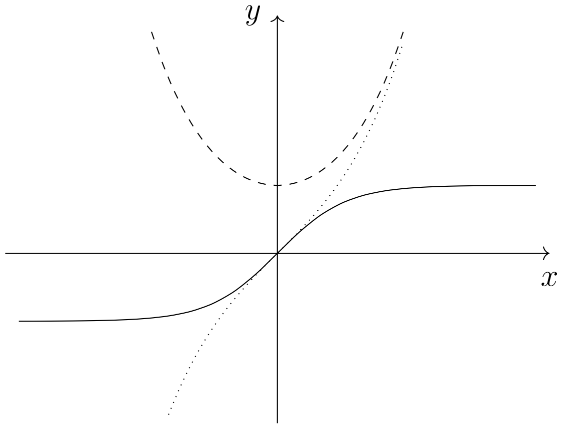
kaikilla $x \in \mathbb{R}$, *hyperbolinen kosini* on reaalifunktio $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{4.19}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja *hyperbolinen tangentti* on reaalifunktio $\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{4.20}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Oheinen kuva havainnollistaa hyperbolisia funktioita. Huomataan, että seuraavat laskusäännöt seuraavat suoraan hyperbolisten funktioiden määritelmistä:



Lause 4.27. *Jos $x \in \mathbb{R}$, niin*

(1) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$,
(2) $\cosh(-x) = \cosh(x)$,
(3) $\tanh(-x) = -\tanh(x)$.

Todistus. Väitteet seuraavat suoraan kohdista (4.18), (4.19) ja (4.20). □

Lauseen mukaan sinh ja tanh ovat parittomia reaalifunktioita ja cosh on parillinen. Muistetaan, että lauseen 2.6 mukaan eksponenttifunkiolle $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on olemassa yksikäsitteiset reaalifunktiot $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että g on parillinen, h on pariton ja $\exp = g + h$. Koska $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin nyt nähdään, että $g = \cosh$ ja $h = \sinh$. Seuraava laskusääntö seuraa suoralla laskulla:

Lause 4.28. *Jos $x \in \mathbb{R}$, niin $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.*

Todistus. Koska

$$\sinh^2(x) = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

ja

$$\cosh^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4},$$

niin väite seuraa. □

Lauseen nojalla tason $\mathbb{R}^2$ piste $(\cosh(t), \sinh(t))$ on hyperbelillä $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Myös seuraavat summakaavat nähdään suoralla laskulla:

Lause 4.29. *Jos $x, y \in \mathbb{R}$, niin*

(1) $\sinh(x + y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$,
(2) $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

Todistus. Osoitetaan kohta (1) ja jätetään kohta (2) harjoitustehtäväksi. Koska

$$\cosh(x)\sinh(y) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}$$

ja

$$\sinh(x)\cosh(y) = \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4},$$

niin $\cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \sinh(x + y)$. □

Edellä esiteltyjä laskusääntöjä yhdistelemällä saadaan helposti muodostettua uusia. Myös hyperbolisille funktioille on olemassa käänteiskuvaukset:

Lause 4.30. *(1) Hyperbolinen sini* $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *on bijektio ja sen käänteiskuvaus on areahyperbolinen sini* $\operatorname{ar}\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, jolle*

$$\operatorname{ar}\sinh(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

kaikille $x \in \mathbb{R}$.

(2) Hyperbolisen kosinin rajoittuma $\cosh\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$ *on bijektio ja sen käänteiskuvaus on areahyperbolinen kosini* $\operatorname{ar}\cosh\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$*, jolle*

$$\operatorname{ar}\cosh(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

kaikille $x \in [1,\infty)$.

(3) Hyperbolisen tangentin rajoittuma $\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$ *on bijektio ja sen käänteiskuvaus on areahyperbolinen tangentti* $\operatorname{ar}\tanh\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$*, jolle*

$$\operatorname{ar}\tanh(x) = \tfrac{1}{2}\log\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)$$

kaikille $x \in (-1,1)$.

Todistus. Osoitetaan kohta (1) ja jätetään kohdat (2) ja (3) harjoitustehtäväksi. Koska lauseen 4.11 nojalla

$$\begin{aligned} y = \sinh(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad ye^x = \frac{(e^x)^2 - 1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \end{aligned}$$

ja $e^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin kohtaan (4.11) vedoten

$$y = \sinh(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \operatorname{ar}\sinh(y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Näin ollen

$$\operatorname{ar}\sinh(\sinh(x)) = x \qquad \text{ja} \qquad \sinh(\operatorname{ar}\sinh(y)) = y$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ ja väite seuraa lauseesta 2.12. □

5. Arvioinnista

Arviointi on yksi tärkeimmistä matematiikassa käytetyistä työvälineistä. Matematiikassa arvioinnilla ei tarkoiteta likiarvojen laskemista tai karkeiden arvauksien tekemistä, vaan perusteltuja ja oikeaksi todistettavia epäyhtälöitä.

Luentovideo 12

Esimerkki 5.1. (1) Onko

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \cdots + \frac{1}{200} < \frac{1}{2}?$$

Ei ole, sillä

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{200} \geqslant \frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \cdots + \frac{1}{200} = 100 \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{2}.$$

(2) Olkoot $a, b, c \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ siten, että $abc > 200$. Arvioidaan summaa $a + b + c$. Kirjanpidon helpottamiseksi voidaan olettaa, että $a \leqslant b \leqslant c$. Triviaalisti havaitaan, että

$$3 = 1 + 1 + 1 \leqslant a + b + c \leqslant 10 + 10 + 10 = 30.$$

Ylärajaa ei voi parantaa. Voiko alarajaa? Koska $200 < abc \leqslant a \cdot 10 \cdot 10 = 100a$, niin $a > 2$ eli $a \geqslant 3$. Näin ollen

$$a + b + c \geqslant a + a + a \geqslant 3 + 3 + 3 = 9.$$

Edelleen, koska $200 < abc \leqslant b \cdot b \cdot 10 = 10b^2$, niin $b^2 > 20$ ja $b \geqslant 5$. Näin ollen

$$a + b + c \geqslant a + b + b \geqslant 3 + 5 + 5 = 13.$$

Edelleen, koska $200 < abc \leqslant c \cdot c \cdot c = c^3$ ja $5^3 = 125 < 200 < 216 = 6^3$, niin $c > \sqrt[3]{200}$ ja $c \geqslant 6$. Näin ollen

$$a + b + c \geqslant 3 + 5 + 6 = 14.$$

Siispä $a + b + c \in \{14, 15, \ldots, 30\}$.

Luentovideo 13

5.1. **Itseisarvo ja kolmioepäyhtälö.** Monet tärkeimmistä matematiikassa tarvittavista epäyhtälöistä liittyvät luvun itseisarvon arvioimiseen. Reaaliluvun $x \in \mathbb{R}$ *itseisarvo* on

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Geometrisesti tulkittuna $|x|$ on reaaliluvun x etäisyys nollasta lukusuoralla. Jos $a \geqslant 0$, niin tulkinnan mukaan ehdon $|x| \leqslant a$ toteuttavat ne reaaliluvut, joiden etäisyys nollasta on pienempää tai yhtäsuurta kuin a eli $-a \leqslant x \leqslant a$. Myös suoraan määritelmästä nähdään, että nämä luvut toteuttavat ehdon. Itse asiassa

$$\begin{aligned} |x| < a \quad &\Leftrightarrow \quad -a < x < a, \\ |x| = a \quad &\Leftrightarrow \quad x = -a \text{ tai } x = a, \\ |x| > a \quad &\Leftrightarrow \quad x < -a \text{ tai } x > a. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Huomataan, että $|x-y| = x-y$, jos $x \geqslant y$, ja $|x-y| = y-x$, jos $y > x$. Näin ollen $|x-y|$ on reaalilukujen x ja y välinen etäisyys.

Esimerkki 5.2. (1) Epäyhtälön $|x-2| < \frac{1}{2}$ toteuttavat ne reaaliluvut, joiden etäisyys luvusta 2 on pienempi kuin $\frac{1}{2}$, eli luvut $x \in \mathbb{R}$, joille $1{,}5 < x < 2{,}5$.

(2) Mitkä luvut $x \in \mathbb{R}$ toteuttavat ehdon $|x-2| > |x+1|$? Geometrisen tulkinnan mukaan ehdon toteuttavat ne reaaliluvut, joiden etäisyys luvusta 2 on enemmän kuin etäisyys luvusta -1 eli reaaliluvut, jotka ovat lähempänä lukua -1 kuin lukua 2. Näin ollen ehdon toteuttavat luvut $x \in \mathbb{R}$, joille $x < \frac{1}{2}$. Myös suoraan laskien päästään samaan tulokseen:

$$|x-2| > |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad x-2 > |x+1| \text{ tai } x-2 < -|x+1|.$$

Tässä oikean puolen ehdon ensimmäinen epäyhtälö on mahdoton, sillä

$$|x+1| < x-2 \quad \Leftrightarrow \quad -(x-2) < x+1 < x-2.$$

Vasemman puolen epäyhtälö taas antaa kohdan (5.1) avulla

$$\begin{aligned} |x+1| < -(x-2) \quad &\Leftrightarrow \quad x-2 < x+1 < -(x-2) \\ &\Leftrightarrow \quad x+1 < -(x-2) \\ &\Leftrightarrow \quad 2x < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x < \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

(3) Millä reaaliluvuilla x pätee $|x-1| < \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$? Selvästi $x = 1$ toteuttaa ehdon, sillä $|1-1| = 0 < \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Osoitetaan, että mikään muu luku ei kelpaa. Olkoon $x \neq 1$ ja valitaan

$$\varepsilon = \frac{|x-1|}{2} > 0.$$

On siis olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että

$$|x-1| \geqslant \varepsilon.$$

Näin ollen kysytty ehto ei päde reaaliluvulle $x \neq 1$.

(4) Osoitetaan, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\left| \frac{2n+3}{n+5} - 2 \right| < \varepsilon \tag{5.2}$$

kaikilla $n \geqslant n_0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska

$$\left| \frac{2n+3}{n+5} - 2 \right| = \left| \frac{2n+3-2n-10}{n+5} \right| = \left| \frac{-7}{n+5} \right| = \frac{7}{n+5} < \frac{7}{n}$$

ja

$$\frac{7}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{7}{\varepsilon},$$

niin valitsemalla $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $n_0 > \frac{7}{\varepsilon}$ nähdään, että (5.2) pätee kaikilla $n \geqslant n_0$. Tässä tilanteessa usein sanotaan, että $\frac{2n+3}{n+5}$ on mielivaltaisen lähellä lukua 2 kaikilla riittävän suurilla n.

Seuraavassa lauseessa esiteltävän *kolmioepäyhtälön* avulla voidaan summan itseisarvoa arvioida ”ylöspäin” summassa esiintyvien termien itseisarvojen summalla. Kolmioepäyhtälö on yksinkertaisuudestaan huolimatta yksi matemaattisen analyysin tärkeimmistä työkaluista.

Lause 5.3 (Kolmioepäyhtälö)**.** *Jos $x, y \in \mathbb{R}$, niin*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \qquad \text{ja} \qquad |x-y| \leqslant |x| + |y|.$$

Todistus. Koska itseisarvon määritelmän nojalla on joko $x = |x|$ tai $x = -|x|$, niin

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

Edelleen, koska myös

$$-|y| \leqslant y \leqslant |y|,$$

niin laskemalla yhteen saadaan

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|.$$

Näin ollen kohdan (5.1) mukaan

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|,$$

mikä osoittaa ensimmäisen väitteen. Koska itseisarvon määritelmän mukaan $|-y| = |y|$, niin jälkimmäinen väite seuraa ensimmäisestä, sillä $|x-y| = |x+(-y)| \leqslant |x| + |-y| = |x| + |y|$. □

Kolmioepäyhtälöä käytetään usein seuraavassa muodossa:

Lause 5.4 (Kolmioepäyhtälö)**.** *Jos $x, y \in \mathbb{R}$, niin*

$$|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|$$

kaikilla $z \in \mathbb{R}$.

Todistus. Jos $x, y, z \in \mathbb{R}$, niin lauseen 5.3 mukaan

$$|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leqslant |x-z| + |z-y|,$$

mikä pitikin osoittaa. □

Esimerkki 5.5. (1) Arvioidaan lukua $|\frac{1}{x} - \sin(x)|$ "ylhäältä", kun tiedetään, että $x \geqslant \frac{1}{2}$. Kolmioepäyhtälön eli lauseen 5.3 mukaan

$$|\tfrac{1}{x} - \sin(x)| \leqslant |\tfrac{1}{x}| + |\sin(x)| \leqslant \tfrac{1}{x} + 1 \leqslant 2 + 1 = 3,$$

sillä $|\sin(x)| \leqslant 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Kolmioepäyhtälöllä voidaan siis arvioida summia termeittäin.

(2) Esimerkin 5.2 kohdan (4) mukaan jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\left| \frac{2n+3}{n+5} - 2 \right| < \varepsilon$$

kaikilla $n \geqslant n_0$. Oletetaan, että reaalilukujono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toteuttaa vastaavan ehdon: jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_1 \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - 2| < \varepsilon$ kaikilla $n \geqslant n_1$. Tällöin kolmioepäyhtälön eli lauseen 5.4 mukaan jokaiselle $\varepsilon > 0$ pätee

$$\left| \frac{2n+3}{n+5} - x_n \right| \leqslant \left| \frac{2n+3}{n+5} - 2 \right| + |x_n - 2| < 2\varepsilon$$

kaikilla $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$.

Summan itseisarvolle voidaan osoittaa arvio myös ”alaspäin”. Vaikka arvio on seuraus kolmioepäyhtälöstä, niin sitä kutsutaan *käänteiseksi kolmioepäyhtälöksi*.

Lause 5.6 (Käänteinen kolmioepäyhtälö)**.** *Jos $x, y \in \mathbb{R}$, niin*

$$||x| - |y|| \leqslant |x + y| \qquad ja \qquad ||x| - |y|| \leqslant |x - y|.$$

Todistus. Jos $x, y \in \mathbb{R}$, niin kolmioepäyhtälön eli lauseen 5.3 mukaan

$$|x| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| + |y|$$

ja

$$|y| = |(y - x) + x| \leqslant |y - x| + |x| = |x - y| + |x|.$$

Koska tällöin

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|$$

ja

$$-|x - y| \leqslant |x| - |y|,$$

niin kohdan (5.1) nojalla nähdään, että

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|.$$

Jälkimmäinen väite seuraa ensimmäisestä kuten lauseen 5.3 todistuksessa. □

Osoitetaan, että itseisarvo toimii hyvin yhteen tulon ja käänteisluvun kanssa.

Lause 5.7. *Jos $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $x, y \in \mathbb{R}$, niin*

$$\left|\tfrac{1}{w}\right| = \tfrac{1}{|w|} \qquad ja \qquad |xy| = |x||y|.$$

Todistus. Huomataan, että $|z|, z^2 \geqslant 0$ ja siten itseisarvon määritelmän mukaan $z^2 = |z|^2$ kaikilla $z \in \mathbb{R}$. Olkoot $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $x, y \in \mathbb{R}$. Koska nyt lauseen 4.1 kohtien (4) ja (5) mukaan

$$\left|\tfrac{1}{w}\right|^2 = \left(\tfrac{1}{w}\right)^2 = \tfrac{1}{w^2} = \tfrac{1}{|w|^2} = \left(\tfrac{1}{|w|}\right)^2$$

ja

$$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x||y|)^2,$$

niin kohdan (4.1) mukaan $|\frac{1}{w}| = \frac{1}{|w|}$ ja $|xy| = |x||y|$. □

5.2. **Kolmioepäyhtälö tasossa.** Jos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, niin merkitään

Luentovideo 14

$$|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{5.3}$$

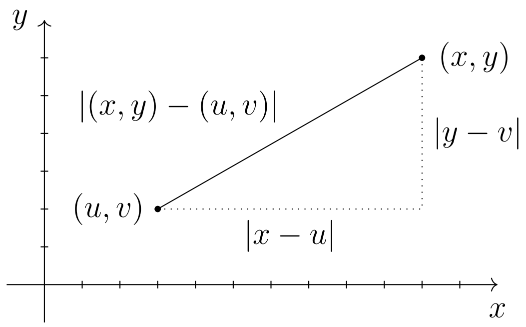
Pythagoraan lauseen mukaan $|(x, y)|$ on tason pisteen (x, y) etäisyys origosta $(0, 0)$. Reaalilukua $|(x, y)| \geqslant 0$ kutsutaan pisteen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *normiksi*. Määritellään reaaliluvulle $\lambda \in \mathbb{R}$ ja tason pisteille $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ *summa*, *pistetulo* ja *reaaliluvulla kertominen* asettamalla

$$\begin{aligned}(x, y) + (u, v) &= (x + u, y + v) \in \mathbb{R}^2,\\ (x, y) \cdot (u, v) &= xu + yv \in \mathbb{R},\\ \lambda(x, y) &= (\lambda x, \lambda y) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Tällöin

$$|(x, y) - (u, v)| = |(x - u, y - v)| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

on tason pisteiden (x, y) ja (u, v) etäisyys toisistaan. Osoitetaan seuraavaksi, että



kolmioepäyhtälö pätee myös tason etäisyydelle. Sitä varten tarvitaan Cauchy[26]-Schwarzin[27] epäyhtälöä.

Lause 5.8 (Cauchy-Schwarzin epäyhtälö)**.** *Jos* $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$*, niin*

$$|(x, y) \cdot (u, v)| \leqslant |(x, y)||(u, v)|.$$

Todistus. Huomataan, että jos $(x, y) = (0, 0)$, niin $(x, y) \cdot (u, v) = 0$ eikä ole mitään todistamista. Voidaan siis olettaa, että $x \neq 0$ tai $y \neq 0$. Määritellään $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

[26] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

[27] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921)

asettamalla

$$\begin{aligned} P(t) &= (xt+u)^2 + (yt+v)^2 \\ &= (x^2+y^2)t^2 + 2(xu+yv)t + u^2 + v^2 \end{aligned}$$

kaikille $t \in \mathbb{R}$. Huomataan, että paraabelin P kerroin x^2+y^2 on aidosti positiivinen, $x^2+y^2 > 0$. Koska P on positiivinen eli $P(t) \geqslant 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, niin erityisesti paraabelin huipun (d, c') y-koordinaatti $c' = P(d)$ on positiivinen. Lauseen 4.10 mukaan siis

$$c' = -\frac{2^2(xu+yv)^2}{4(x^2+y^2)} + u^2 + v^2 \geqslant 0.$$

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että paraabelin P diskriminantti on negatiivinen eli

$$2^2(xu+yv)^2 - 4(x^2+y^2)(u^2+v^2) \leqslant 0.$$

Näin ollen

$$|(x,y)\cdot(u,v)|^2 = (xu+yv)^2 \leqslant (x^2+y^2)(u^2+v^2) = |(x,y)|^2|(u,v)|^2$$

ja väite pätee kohdan (4.2) nojalla. □

Lauseen 5.8 todistusta mukaillen nähdään, että minkä tahansa positiivisen paraabelin diskriminantti on negatiivinen. Lauseen 4.11 mukaan tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että positiivisella paraabelilla P on korkeintaan yksi reaalinen nollakohta.

Lause 5.9 (Kolmioepäyhtälö)**.** *Jos* $(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$*, niin*

$$|(x,y)+(u,v)| \leqslant |(x,y)| + |(u,v)| \quad \text{ja} \quad |(x,y)-(u,v)| \leqslant |(x,y)| + |(u,v)|.$$

Todistus. Koska $w \leqslant |w|$ kaikilla $w \in \mathbb{R}$, niin Cauchy-Schwarzin epäyhtälön eli lauseen 5.8 mukaan

$$\begin{aligned} |(x,y)+(u,v)|^2 &= (x+u)^2 + (y+v)^2 \\ &\leqslant x^2 + y^2 + 2|xu+yv| + u^2 + v^2 \\ &= |(x,y)|^2 + 2|(x,y)\cdot(u,v)| + |(u,v)|^2 \\ &\leqslant |(x,y)|^2 + 2|(x,y)||(u,v)| + |(u,v)|^2 \\ &= (|(x,y)| + |(u,v)|)^2 \end{aligned}$$

ja ensimmäinen väite pätee kohdan (4.2) nojalla. Jälkimmäinen väite seuraa ensimmäisestä, sillä $|(x, y) - (u, v)| = |(x, y) + (-u, -v)| \leqslant |(x, y)| + |(-u, -v)| = |(x, y)| + |(u, v)|$. $\square$

Lause 5.10 (Kolmioepäyhtälö)**.** *Jos* $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$*, niin*

$$|(x, y) - (u, v)| \leqslant |(x, y) - (z, w)| + |(z, w) - (u, v)|$$

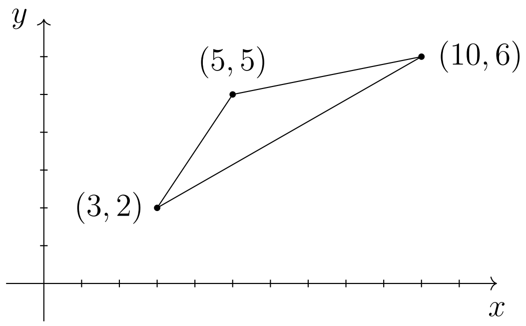
kaikilla $(z, w) \in \mathbb{R}^2$*.*

Todistus. Jos $(x, y), (u, v), (z, w) \in \mathbb{R}^2$, niin kolmioepäyhtälön eli lauseen 5.9 mukaan

$$\begin{aligned} |(x, y) - (u, v)| &= |(x, y) - (z, w) + (z, w) - (u, v)| \\ &\leqslant |(x, y) - (z, w)| + |(z, w) - (u, v)|, \end{aligned}$$

mikä pitikin osoittaa. $\square$

Mitä kolmioepäyhtälö tarkoittaa geometrisesti? Tarkastellaan kahta tason pistettä, esimerkiksi pisteitä $(3, 2)$ ja $(10, 6)$. Lauseen 5.10 mukaan matka vain kasvaa, jos kuljetaan pisteestä $(3, 2)$ pisteeseen $(10, 6)$ jonkun kolmannen pisteen, esimerkiksi pisteen $(5, 5)$ kautta. Oheinen kuva havainnollistaa tilannetta. Etäisyys tasossa



voidaan määritellä monella muullakin tavalla. Esimerkiksi kaupungissa pisteestä toiseen ei aina pääse linnuntietä, vaan on kierrettävä edessä olevat talot. Tällöin pisteen etäisyydeksi toisesta ei ole järkevää määritellä matkan pituutta linnuntietä pitkin, vaan määritellä se lyhimmän mahdollisen, talot kiertävän reitin pituudeksi. Vastaavasti junalla matkustaen etäisyydet tulee määrittää rataverkkoa pitkin. Kolmioepäyhtälö on hyvä testi annetun etäisyyden ”järkevyydelle”.

Lauseen 4.9 mukaan n:nnen asteen polynomilla on korkeintaan n reaalista nollakohtaa. Lause ei kuitenkaan sano mitään nollakohtien olemassaolosta. Tarkastellaan esimerkiksi polynomia $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 + 1$. Jotta polynomilla P olisi nollakohta eli yhtälöllä $x^2 = -1$ olisi ratkaisu, niin pitäisi pystyä ottamaan negatiivisesta luvusta -1 neliöjuuri. Näin ei voida kuitenkaan tehdä, sillä kohdan (4.3) perusteella neliöjuuren määrittäminen negatiivisille luvuille aiheuttaa välittömiä ongelmia. Kutsutaankin symbolista merkintää $\sqrt{-1}$ imaginaariyksiköksi ja määritellään sen avulla kompleksiluvut reaalilukujen laajennukseksi.

Aikaisin havainto negatiivisen luvun neliöjuuresta on ensimmäiseltä vuosisadalta Heronin[28] teoksesta *Stereometrica*, missä hän katkaistun pyramidin korkeutta selvittäessään päätyi lukuun $\sqrt{-63}$. Vaikka laskun lopputulos tietysti tarkoittaa sitä, että laskussa käytetyillä mitoilla olevaa pyramidia ei ole olemassa, niin Heron ilmeisesti tulkitsi luvun negatiivisuuden merkkivirheeksi ja ilmoitti korkeudeksi $\sqrt{63}$. Alkusysäys kompleksilukujen tutkimiseen saatiin kolmannen ja neljännen asteen polynomien nollakohtien selvittämisestä. Esimerkiksi Cardanon kaavan mukaan polynomin $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = x^3 - x$, nollakohta on

$$x_0 = \frac{(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}.$$

Tullaan näkemään, että yhtälön $x^3 = \sqrt{-1}$ ratkaisut ovat $-\sqrt{-1}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2}$ ja $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2}$. Sijoittamalla ratkaisuja nollakohdan lausekkeeseen luvun $(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ paikalle löydetään juuret 0, -1 ja 1. Huomautetaan, että kyseinen polynomi P voidaan kirjoittaa muodossa $P(x) = x^3 + px + q$, missä $p = -1$ ja $q = 0$, ja siten lauseen 4.13 oletus $-4 = 4p^3 + 27q^2 > 0$ ei ole voimassa. Voidaan kuitenkin osoittaa, että Cardanon kaava pätee ilman tätä oletusta. Jos

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad \text{ja} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

[28] Heron Aleksandrialainen (n. 10–70)

missä kuutiojuurten arvot on valittu siten, että $uv = -\frac{p}{3}$, niin $x^3 + px + q = 0$ täsmälleen silloin, kun

$$x = u + v, \qquad x = wu + w^2 v \qquad \text{tai} \qquad x = w^2 u + wv,$$

missä $w = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{-1}}{2}$ ja $w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{-1}}{2}$. Näin ollen, jos $4p^3 + 27q^2 > 0$, niin yhtälöllä $x^3 + px + q = 0$ on yksi reaalinen ja kaksi kompleksista ratkaisua, ja jos $4p^3 + 27q^2 < 0$, niin osoittautuu, että reaalisia ratkaisuja on kolme. Itse asiassa voidaan osoittaa, että kolmen reaalijuuren tapauksessa yhtäkään juurta ei voida esittää suljetussa muodossa ilman kompleksilukuja. Toisen asteen polynomin tarkastelu ei vielä antanut riittävää motivaatiota selvittää kuinka negatiivisen luvun neliöjuureen pitää suhtautua: lauseeseen 4.11 nojautuen on ollut helppo tyytyä ajatukseen, että joskus nollakohtia ei yksinkertaisesti vain ole olemassa. Cardanon kaava kolmen reaalijuuren tapauksessa antoi lopulta motivaation ymmärtää kuinka negatiivisen luvun neliöjuuri pitää tulkita.

Laskusäännöt kompleksiluvuille esitteli Bombelli[29] kirjassaan *L'Algebra* vuonna 1572. Vaikka termin "imaginaari" esitteli Descartes[30] vuonna 1637 ja merkinnän i imaginaariyksikölle otti systemaattisesti käyttöön Euler[31] kirjassaan *Vollständige Anleitung zur Algebra* vuonna 1770 välttääkseen ongelmallisen lausekkeen $\sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)}$ esiintymisen, niin imaginaariluvun käsite on peräisin Bombellilta.

6.1. **Kompleksiluvut tason pisteinä.** Määritellään tason pisteille $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ *summa* ja *tulo* asettamalla

Luentovideo 15

$$\begin{aligned} (x, y) + (u, v) &= (x + u, y + v) \in \mathbb{R}^2, \\ (x, y)(u, v) &= (xu - yv, xv + yu) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Muistetaan, että $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$, joten pisteiden *erotus* on $(x, y) - (u, v) = (x, y) + (-u, -v)$.

[29]Rafael Bombelli (1526–1572)
[30]René Descartes (1596–1650)
[31]Leonhard Euler (1707–1783)

Lause 6.1. *Tason yhteen- ja kertolasku ovat vaihdannaisia eli*

$$(x,y)+(u,v)=(u,v)+(x,y),$$
$$(x,y)(u,v)=(u,v)(x,y)$$

kaikilla $(x,y),(u,v)\in\mathbb{R}^2$ *ja liitännäisiä eli*

$$(x,y)+((u,v)+(z,w))=((u,v)+(x,y))+(z,w),$$
$$(x,y)((u,v)(z,w))=((u,v)(x,y))(z,w)$$

kaikilla $(x,y),(u,v),(z,w)\in\mathbb{R}^2$*. Lisäksi osittelulait ovat voimassa eli*

$$(x,y)((u,v)+(z,w))=(x,y)(u,v)+(x,y)(z,w),$$
$$((u,v)+(z,w))(x,y)=(u,v)(x,y)+(z,w)(x,y)$$

kaikilla $(x,y),(u,v),(z,w)\in\mathbb{R}^2$*.*

Todistus. Vaihdannaisuuden ja yhteenlaskun liitännäisyyden toteaminen on triviaalia. Kertolaskun liitännäisyyden sekä osittelulakien osoittaminen on harjoitustehtävä. □

Sanotaan, että *kompleksilukujen joukko* $\mathbb{C}$ on taso $\mathbb{R}^2$ varustettuna edellä määritellyillä laskutoimituksilla. Tulkitsemalla reaaliluku x kompleksitason pisteeksi $(x,0)$, nähdään, että $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. Huomataan myös, että kohdassa (6.1) määritellyt laskutoimitukset laajentavat reaalilukujen summan ja tulon kompleksiluvuille. Merkitään $i=(0,1)$ ja kutsutaan sitä *imaginaariyksiköksi*. Tällöin tulon määritelmän eli kohdan (6.1) mukaan

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

ja nähdään, että kompleksiluvut i ja $-i$ ovat yhtälön $x^2+1=0$ ratkaisuja. Koska

$$x+iy=(x,0)+(0,1)(y,0)=(x,0)+(0,y)=(x,y)$$

kaikille $x,y\in\mathbb{R}$, niin jokaiselle kompleksiluvulle $z\in\mathbb{C}$ on olemassa $x,y\in\mathbb{R}$ siten, että $z=x+iy$. Tätä esitystä sanotaan kompleksiluvun *normaalimuodoksi*. Jos

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ ja $w = u + iv \in \mathbb{C}$, niin summan ja tulon määritelmien mukaan

$$\begin{aligned} z + w &= (x + u) + i(y + v) = x + u + i(y + v), \\ zw &= (xu - yv) + i(xv + yu) = xu + i(xv + yu) + i^2 yv. \end{aligned}$$

Näin ollen kompleksiluvuilla voidaan laskea normaalimuodossa käyttämällä reaalilukujen laskusääntöjä ottaen lisäksi huomioon, että $i^2 = -1$. Sanotaan, että kompleksiluvun $z = x + iy$ *reaaliosa* on $\mathrm{Re}(z) = x$ ja *imaginaariosa* on $\mathrm{Im}(z) = y$. Kaksi kompleksilukua ovat siis samat, jos niillä on sama reaaliosa ja sama imaginaariosa. Kompleksilukujen yhteydessä tason x-akselia kutsutaan usein *reaaliakseliksi* ja y-akselia *imaginaariakseliksi*.

Esimerkki 6.2. Olkoon $z = (-2, 4) \in \mathbb{R}^2$ ja $w = (3, -2) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin $z = -2 + 4i$ ja $w = 3 - 2i$ sekä

$$\begin{aligned} z + w &= (-2 + 4i) + (3 - 2i) = 1 + 2i, \\ zw &= (-2 + 4i)(3 - 2i) = -6 + 4i + 12i - 8i^2 = 2 + 16i. \end{aligned}$$

Kohdassa (5.3) tason pisteelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eli kompleksiluvulle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ määriteltiin normi asettamalla

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Luku $|z| \geqslant 0$ on kompleksitason pisteen z etäisyys origosta. Kompleksilukujen yhteydessä reaalilukua $|z|$ kutsutaan luvun $z \in \mathbb{C}$ *moduliksi* tai *itseisarvoksi*. Moduli $|z - w|$ on kompleksitason pisteiden z ja w etäisyys toisistaan. Sanotaan, että kompleksiluvun $z = x + iy$ *liittoluku* eli *kompleksikonjugaatti* on kompleksiluku $\overline{z} = x - iy$. Tason pisteenä $\overline{z}$ siis saadaan peilaamalla z reaaliakselin suhteen. Huomataan, että $|\overline{z}| = |z|$ ja

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{6.2}$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Nollasta eroavan luvun z käänteisluku on luku w, jolle $zw = 1$. Kohdan (6.2) mukaan

$$z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1,$$

joten kompleksiluvun $z \neq 0$ *käänteisluku* on

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}. \tag{6.3}$$

Toisin sanoen, käänteisluku z^{-1} määräytyy geometrisesti peilaamalla z ensin reaaliakselin suhteen ja sitten skaalaamalla etäisyys origoon luvulla $|z|^{-2}$. Huomataan myös, että

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = z^{-1}$$

kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja siten

$$\frac{w}{z} = wz^{-1} = \frac{w\overline{z}}{|z|^2}$$

kaikille $w \in \mathbb{C}$ ja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Esimerkki 6.3. (1) Jos $z = 2 - i$, niin

$$z^{-1} = \frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i}{2^2 - i^2} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

(2) Jos $z = 3 + i$ ja $w = 1 - i$, niin

$$\frac{z}{w} = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+i+i^2}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i.$$

Lauseen 6.1 mukaan kompleksilukujen yhteen- ja kertolasku ovat vaihdannaisia ja liitännäisiä sekä ne toteuttavat osittelulait. Huomataan lisäksi, että jokaiselle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ on yhteenlaskun suhteen triviaalisti olemassa vasta-alkio $-z = -x - iy \in \mathbb{C}$, jolle $z + (-z) = 0$. Kohdan (6.3) nojalla jokaiselle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on kertolaskun suhteen olemassa käänteisluku $z^{-1} \in \mathbb{C}$, jolle $zz^{-1} = 1$. Sanotaankin, että kompleksiluvut muodostavat *kunnan*. Tämä tarkoittaa sitä, että kompleksilukujen laskutoimitukset noudattavat samoja periaatteita kuin reaalilukujen laskutoimitukset. Reaaliluvuilla on kuitenkin ominaisuus, jota kompleksiluvuilla ei ole. Ne nimittäin muodostavat *järjestetyn kunnan*, sillä tavallinen pienempi tai yhtäsuuri kuin -järjestys $\leqslant$ toimii laskutoimitusten kanssa hyvin yhteen: jokaisella $x, y, c \in \mathbb{R}$

(1) ehdosta $x \leqslant y$ seuraa $x + c \leqslant y + c$,
(2) ehdoista $0 \leqslant x$ ja $0 \leqslant y$ seuraa $0 \leqslant xy$.

Kompleksiluvuille ei ole mahdollista määritellä järjestystä, joka toimisi laskutoimitusten kanssa hyvin yhteen.

Seuraava lause esittelee laskusääntöjä liittoluvulle ja modulille:

Lause 6.4. *Jos $z, w \in \mathbb{C}$, niin*

(1) $\overline{\overline{z}} = z$,

(2) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(3) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,

(4) $z\overline{z} = |z|^2$,

(5) $\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}$ *aina kun* $z \neq 0$,

(6) $|z+w| \leqslant |z| + |w|$,

(7) $|zw| = |z||w|$,

(8) $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ *aina kun* $z \neq 0$.

(9) $-|z| \leqslant \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) \leqslant |z|$,

(10) $-|z| \leqslant \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}) \leqslant |z|$,

Todistus. Osoitetaan ensin kohta (3). Jos $z = x + iy$ ja $w = u + iv$, niin tulon määritelmän eli kohdan (6.1) mukaan $zw = (x+iy)(u+iv) = xu - yv + i(xv + yu)$ ja siten

$$\overline{zw} = xu - yv - i(xv + yu).$$

Toisaalta, koska

$$\overline{z}\,\overline{w} = (x - iy)(u - iv) = xu - yv - i(xv + yu),$$

niin väite pätee.

Tarkastellaan vielä kohtaa (6) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäväksi. Koska pisteelle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ moduli $|z|$ on tason pisteen (x, y) etäisyys origosta eli $|z| = |(x, y)|$, niin lauseen 5.9 mukaan kolmioepäyhtälö pätee modulille. Todistetaan tämä kuitenkin vielä käyttäen hyväksi lauseen muita kohtia: jos $z, w \in \mathbb{C}$, niin

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leqslant |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

ja väite seuraa kohdasta (4.2). □

6.2. **Napakoordinaattiesitys.** Sinin ja kosinin määritelmien eli kohdan (4.14) mukaan jokaista radiaania $t \in (-\pi, \pi]$ vastaa täsmälleen yksi yksikköympyrän kehän $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ piste $(\cos(t), \sin(t)) \in S^1$. Toisaalta, jokaiselle pisteelle $(x, y) \in S^1$ on yksikäsitteinen välin $(-\pi, \pi]$ kiertokulma positiiviselta x-akselilta vastapäivään – nimittäin radiaani $t \in (-\pi, \pi]$, jolle $\sin(t) = y$ ja $\cos(t) = x$. Näin ollen, muistaen tangentin ja arkustangentin määritelmät eli kohdat (4.15) ja

Luentovideo 16

(4.17) nähdään, että kuvaus $\arg\colon S^1 \to (-\pi, \pi]$, jolle

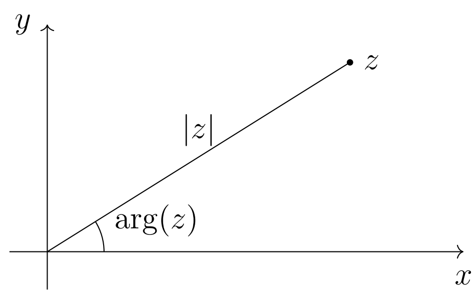
$$\arg(x,y) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}), & \text{jos } x > 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi, & \text{jos } x < 0 \text{ ja } y \geqslant 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi, & \text{jos } x < 0 \text{ ja } y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{jos } x = 0 \text{ ja } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{jos } x = 0 \text{ ja } y < 0 \end{cases}$$

kaikille $(x, y) \in S^1$, on bijektio. Huomataan, että $\arg(x, y)$ voitaisiin yhtä lailla määritellä kaikille $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Näin määriteltynä arg ei kuitenkaan ole bijektio, sillä $\arg(\lambda(x, y)) = \arg(x, y)$ kaikilla $\lambda > 0$. Merkintöjä helpottaakseen voidaan silti kirjoittaa $\arg(x, y)$ kaikille $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ merkinnän $\arg(\frac{(x,y)}{|(x,y)|})$ sijasta.

Koska mikä tahansa nollasta eroava kompleksitason piste $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ voidaan esittää muodossa $z = |z|w$, missä $w = \frac{z}{|z|} \in S^1$ on yksikköympyrän kehän piste, niin jokainen $z = x + iy \neq 0$ voidaan kirjoittaa kahden parametrin, $r > 0$ ja $t \in (-\pi, \pi]$, avulla yksikäsitteisesti *napakoordinaateissa* eli muodossa

$$z = r(\cos(t) + i \sin(t)),$$

missä $r = |z|$ on pisteen z etäisyys origosta ja $t = \arg(z)$ on pisteen z *argumentti*. Oheinen kuva havainnollistaa pisteen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ napakoordinaattiesitystä.



Esimerkki 6.5. (1) Jos $z = 2 + 2i$ ja $w = -2 + 2i$, niin

$$\arg(z) = \arctan(1) = \tfrac{\pi}{4}, \qquad \arg(\overline{z}) = \arctan(-1) = -\tfrac{\pi}{4},$$
$$\arg(w) = \arctan(-1) + \pi = \tfrac{3\pi}{4}, \qquad \arg(\overline{w}) = \arctan(1) - \pi = -\tfrac{3\pi}{4}.$$

(2) Jos $z = 2 + i$, niin $|z| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$ ja $\arg(z) = \arctan(\frac{1}{2}) \approx 0{,}46364761$. Näin ollen z voidaan esittää napakoordinaateissa muodossa

$$z = \sqrt{5}(\cos(\arctan(\tfrac{1}{2})) + i \sin(\arctan(\tfrac{1}{2}))).$$

Jos $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, niin pelkästään tulon määritelmää eli kohtaa (6.1) hyväksi käyttäen on hankala nähdä miten

$$z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$$

määräytyy geometrisesti pisteestä z. Esitetään z napakoordinaateissa eli valitaan $r = |z| > 0$ ja $t = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$, jolloin $z = r(\cos(t) + i \sin(t))$. Trigonometristen funktioiden laskusääntöjen eli lauseen 4.22 mukaan

$$\begin{aligned} z^2 &= r^2(\cos(t) + i \sin(t))^2 \\ &= r^2(\cos^2(t) - \sin^2(t) + 2i \sin(t)\cos(t)) = r^2(\cos(2t) + i \sin(2t)), \end{aligned}$$

joten z^2 määräytyy geometrisesti korottamalla pisteen z moduli toiseen ja tuplaamalla sen argumentti. De Moivre[32] esitti vuonna 1722 kaavat, joiden avulla saadaan johdettua seuraava lause. Kaavojen avulla saadaan n:s potenssi z^n määrättyä geometrisesti pisteestä z sekä myös selvitettyä minkä tahansa reaali- tai kompleksiluvun neliöjuuri trigonometrisia funktioita hyväksi käyttäen.

Lause 6.6 (de Moivren kaava)**.** *Jos $t \in \mathbb{R}$, niin*

$$(\cos(t) + i \sin(t))^n = \cos(nt) + i \sin(nt)$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Todistus. Osoitetaan väite ensin induktiolla kaikille $n \in \mathbb{N}$. Jos $n = 1$, niin väite on selvästi voimassa. Tehdään induktio-oletus eli kiinnitetään luonnollinen luku k ja oletetaan, että

$$(\cos(t) + i \sin(t))^k = \cos(kt) + i \sin(kt)$$

[32]Abraham de Moivre (1667–1754)

Koska induktio-oletuksen ja trigonometristen funktioiden laskusääntöjen eli lauseen 4.22 mukaan

$$\begin{aligned}(\cos(t) + i\sin(t))^{k+1} &= (\cos(t) + i\sin(t))^k(\cos(t) + i\sin(t))\\ &= (\cos(kt) + i\sin(kt))(\cos(t) + i\sin(t))\\ &= \cos(kt)\cos(t) - \sin(kt)\sin(t)\\ &\qquad + i(\cos(kt)\sin(t) + \sin(kt)\cos(t))\\ &= \cos((k+1)t) + i\sin((k+1)t),\end{aligned}$$

niin myös induktioväite on voimassa. Siispä induktioperiaatteen mukaan väite pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska $\cos(0 \cdot t) + i\sin(0 \cdot t) = 1 + 0 \cdot i = 1 = (\cos(t) + i\sin(t))^0$, niin väite pätee myös kun $n = 0$. Huomataan, että $z^{-n} = (z^n)^{-1}$ ja siten kohdan (6.3) ja trigonometristen funktioiden laskusääntöjen eli lauseen 4.21 mukaan

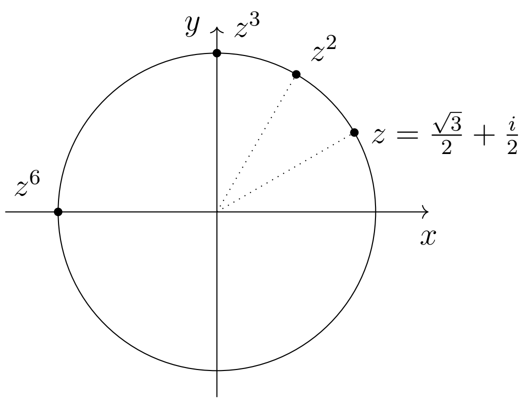
$$\begin{aligned}(\cos(t) + i\sin(t))^{-n} &= ((\cos(t) + i\sin(t))^n)^{-1} = (\cos(nt) + i\sin(nt))^{-1}\\ &= \frac{\cos(nt) - i\sin(nt)}{\cos^2(nt) + \sin^2(nt)} = \cos(-nt) + i\sin(-nt)\end{aligned}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. □

Esimerkki 6.7. (1) Jos $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, niin $|z| = 1$ ja $\arg(z) = \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$. Näin ollen

$$z = \cos(\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6})$$

ja de Moivren kaavan eli lauseen 6.6 mukaan, kuten oheisessa kuvassa,



$$\begin{aligned} z^2 &= \cos(\tfrac{\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{\pi}{3}), \\ z^3 &= \cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2}), \\ z^6 &= \cos(\pi) + i\sin(\pi). \end{aligned}$$

Koska $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ eli $\arg(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\pi}{3}$, $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ ja $\tan(\pi) = 0$ eli $\arg(-1) = \pi$, niin

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\Big)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ &\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\Big)^3 = i, \\ &\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\Big)^6 = -1. \end{aligned}$$

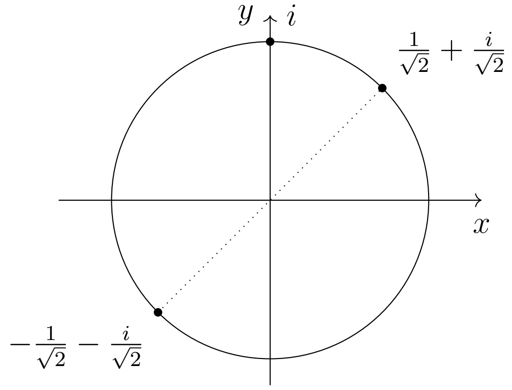
(2) Jos $z \in \mathbb{C}$, niin positiivisten reaalilukujen rationaalipotenssin määritelmää mukaillen $z^{\frac{1}{2}}$ on mikä tahansa kompleksiluku w, jolle $w^2 = z$. Jos esimerkiksi

$$z = i = \cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2}),$$

niin de Moivren kaavan eli lauseen 6.6 mukaan

$$\begin{aligned} \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\Big)^2 &= (\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4}))^2 = \cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2}) = i, \\ \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\Big)^2 &= (\cos(-\tfrac{3\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{3\pi}{4}))^2 = \cos(-\tfrac{3\pi}{2}) + i\sin(-\tfrac{3\pi}{2}) = i. \end{aligned}$$

Siispä $\sqrt{i} = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})$. Oheinen kuva havainnollistaa tilannetta.



6.3. **Algebran peruslause.** Jos $n \in \mathbb{N}$ ja $a_n, a_0 \in \mathbb{C}$ siten, että $a_n \neq 0$, niin esimerkin 6.7 kohtaa (2) mukaillen saadaan ratkaistua yhtälö $z^n = \frac{a_0}{a_n}$ eli yhtälö $a_n z^n - a_0 = 0$. Sanotaan, että astetta n oleva *kompleksinen polynomi* on kuvaus $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, jolle

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$, missä $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ ja $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ovat polynomin kertoimet. Esimerkkiä mukaillen saadaan siis selvitettyä kompleksisen polynomin $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(z) = a_n z^n - a_0$, nollakohdat. Algebran peruslause yleistää tämän havainnon. Sen mukaan millä tahansa kompleksisella polynomilla on nollakohta. Tuloksen arveltiin pitävän paikkansa jo 1600-luvun alussa. Lauseen onnistui lopulta todistamaan pariisilainen kirjakauppias ja amatöörimatemaatikko Argand[33] vuonna 1806.

Lause 6.8 (Algebran peruslause)**.** *Jos P on kompleksinen polynomi, niin on olemassa $z_0 \in \mathbb{C}$ siten, että $P(z_0) = 0$.*

Algebran peruslauseeseen palataan myöhemmin kompleksianalyysin kurssilla. Todetaan, että jos lauseen 4.8 todistuksessa vaihdetaan reaaliluvut kompleksiluvuiksi, niin saadaan seuraava lause:

Lause 6.9. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja P astetta n oleva kompleksinen polynomi. Jos $z_0 \in \mathbb{C}$ on polynomin P nollakohta, niin on olemassa astetta $n-1$ oleva polynomi Q siten, että*

$$P(z) = (z - z_0)Q(z)$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

Sanotaan, että polynomin P nollakohta on *k-kertainen*, jos on olemassa polynomi Q siten, että $P(z) = (z - z_0)^k Q(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Esimerkiksi polynomille $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 - 4x + 4$, pätee $P(x) = (x-2)^2$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Polynomin P ainoa nollakohta 2 on siten kaksinkertainen ja sanotaankin, että kertaluvun mukaan laskien P:llä on kaksi nollakohtaa. Seuraava lause näyttää, että n-asteisella kompleksisella polynomilla on kertaluvun mukaan laskien täsmälleen n nollakohtaa.

[33] Jean-Robert Argand (1768–1822)

Lause 6.10. *Jos P on astetta $n \in \mathbb{N}$ oleva kompleksinen polynomi, niin on olemassa $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ siten, että $P(z_1) = \cdots = P(z_n) = 0$ ja*

$$P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

Todistus. Osoitetaan väite induktiolla. Koska $P(z) = a_1 z + a_0 = 0$ täsmälleen silloin, kun $z = -\frac{a_0}{a_1}$, niin alkuaskel on voimassa. Tehdään induktio-oletus eli kiinnitetään k ja oletetaan, että jokaiselle k-asteiselle kompleksiselle polynomille Q on olemassa $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ siten, että $Q(z_1) = \cdots = Q(z_k) = 0$ ja

$$Q(z) = a_k(z - z_1) \cdots (z - z_k)$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Olkoon P astetta $k + 1$ oleva kompleksinen polynomi. Algebran peruslauseen eli lauseen 6.8 mukaan on olemassa $z_0 \in \mathbb{C}$ siten, että $P(z_0) = 0$. Näin ollen lauseen 6.9 nojalla on olemassa astetta k oleva polynomi Q siten, että

$$P(z) = (z - z_0)Q(z)$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Koska polynomi Q on astetta k, niin induktio-oletuksen mukaan on olemassa $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ siten, että $Q(z) = a_k(z - z_1) \cdots (z - z_k)$. Näin ollen

$$P(z) = a_k(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_k)$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Koska $P(z_0) = P(z_1) = \cdots = P(z_k) = 0$, niin induktioväite on voimassa. Siten induktioperiaatteen mukaan väite pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Henkilöhakemisto

Hakemisto