Einsteinin-Hilbertin aktio, hitaan liikkeen raja ja Schwarzschildin ratkaisu

Antti Hämäläinen

13. kesäkuuta 2013

University of Jyväskylä
Department of Physics

Ohjaaja: Kimmo Kainulainen

Sisältö

1 Johdanto

Tässä työssä aion tutustua Albert Einsteinin 1900-luvun alussa kehittämään yleiseen suhteellisuusteoriaan, joka on gravitaatioteorioista ehkäpä, jos ei kaikista hyväksytyin teoria, niin ainakin tunnetuin. Yleisessä suhteellisuusteoriassa gravitaatiota kuvaa metrinen tensori, joka määrää aika-avaruuden rakenteen ja täten vapaan hiukkasen liikkeen pakottaen sen kulkemaan pitkin geodeesia. Materian ja metrisen tensorin toisiinsa kytkevät yhtälöt, eli kenttäyhtälöt, aion johtaa Lagrangen periaatteen mukaisesti etsimällä sopivan aktion stationaariset arvot. Tämän jälkeen tarkistan mitä kenttäyhtälöt tuottavat hitaan liikkeen ja heikon gravitaatiokentän rajalla, toiveena saavuttaa Newtonin gravitaatiolaki. Lopuksi esitän vielä Scwarzschildin ratkaisun kenttäyhtälöille, eli pallosymmetrisen massiivisen kappaleen aiheuttaman gravitaatiokentän tyhjässä avaruudessa kappaleen ulkopuolella.

1.1 Merkintöjä ja määritelmiä

Metriikalle käytän signatuuria $(-+++)$ ja $g_{\mu\nu}$:lla tarkoitan sekä metristä tensoria itseään, että sen yksittäistä komponenttia, ero selviää lauseyhteydestä. Myös viivaelementin pituudesta $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ käytän toisinaan nimitystä metriikka. Käytössä ovat luonnolliset yksiköt. Käytettävänä avaruusajan konnektiona toimii Levi-Civita –konnektio, jonka komponentit koordinaattimuodossa ovat Christoffelin symbolit

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \tag{1.1.1}$$

ja Riemannin tensori

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\beta\nu} - \Gamma^\mu_{\beta\rho}\Gamma^\rho_{\alpha\nu} \tag{1.1.2}$$

on suhteessa Levi-Civita –konnektioon.

2 Einsteinin gravitaatioteoria

2.1 Tyhjiön kenttäyhtälöt

Yleinen suhteellisuusteoria on klassinen kenttäteoria, jolloin sen dynaamisen kentän, eli gravitaatiokentän liikeyhtälöt on mahdollista johtaa variaatioperiaatteen mukaisesti etsimällä stationaarisuusehto aktiointegraalille, toisin sanoen ratkaisemalla $\delta S_G = 0$, missä

$$S_G = \int \mathcal{R}\sqrt{-g}\mathrm{d}x^4 \tag{2.1.1}$$

on gravitaation aktiointegraali, $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ on Riccin skalaari ja $\sqrt{-g}$ säilyttää tilavuuselementin invarianttina. Tämän aktion varioiminen metrisen tensorin komponenttien $g_{\mu\nu}$ suhteen johtaa tyhjiön kenttäyhtälöihin.

Tällaisen aktion valinta voidaan perustella sillä, että aktion halutaan olevan invariantti koordinaattimuunnoksissa, ja sen halutaan sisältävän tietoa aika-avaruuden rakenteesta, eli toisin sanoen sen täytyy sisältää tietoa avaruusajan kaarevuudesta[1], eli olevan yhteydessä Riemannin kaarevuustensoriin. Koska lokaalisti voidaan aina valita koordinaatisto siten, että Christoffelin symbolit häviävät [4, s.266], jolloin siis $\partial_\kappa g_{\alpha\beta} = 0$, täytyy halutun epätriviaalin aktion sisältää vähintään metrisen tensorin toisen kertaluvun osittaisderivaattoja (eli Christoffelin symboleiden derivaattoja), sillä vaikka Christoffelin symbolit olisivatkin nollia, niiden derivaatat eivät välttämättä ole. Riemannin tensoria, joka juurikin sisältää metrisen tensorin toisia osittaisderivaattoja, ei voida koordinaattimuunnoksella hävittää (Riemannin tensori häviää vain jos avaruus on laakea) ja ainoa siitä saatava skalaari on Riccin tensorista kontraktoitu Riccin skalaari (jos Riemannin tensorin määrittelee Levi-Civita –konnektio), jolloin yksinkertaisin mahdollinen ehdokas gravitaation aktiointegraaliksi on juurikin ylläoleva.

Varioimalla aktiointegraalia metrisen tensorin $g_{\mu\nu}$ suhteen saadaan

$$\delta S_G = \int \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g})\mathrm{d}x^4, \tag{2.1.2}$$

missä integrandi varioituna termeittän on

$$\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}) = \underbrace{\delta(g^{\mu\nu})}_{(1)}R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\underbrace{\delta(R_{\mu\nu})}_{(2)}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\underbrace{\delta(\sqrt{-g})}_{(3)}. \tag{2.1.3}$$

Asetetaan lisäehto $\delta(g_{\mu\nu}) = 0$ (eli asymptoottinen laakeus) ja $\delta(\partial_\kappa g_{\mu\nu}) = 0$ (tästä ehdosta lisää jäljempänä) integrointialueen reunalla ja ratkaistaan yllä olevat kolme varioitavaa termiä:

(1) Ensinnäkin, koska $g_{\kappa\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta_\kappa{}^\nu$, on

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(g_{\kappa\lambda}g^{\lambda\nu}) \\ &= \delta(g_{\kappa\lambda})g^{\lambda\nu} + g_{\kappa\lambda}\delta(g^{\lambda\nu}), \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

[1] Tilanne, jossa aika-avaruus on laakea, palautuu suppeaan suhteellisuusteoriaan eikä ota mitään kantaa gravitaatioon. Einstein kuitenkin oletti gravitaation liittyvän juuri avaruusajan kaarevuuteen.

josta siirtämällä toinen termi vasemmalle puolen yhtälöä ja kertomalla puolittain $g^{\mu\kappa}$:lla, saadaan

$$\delta(g^{\mu\nu}) = -g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}\delta(g_{\kappa\lambda}). \tag{2.1.5}$$

(2) Variaation määritelmän mukaan on $\delta\Gamma = \hat{\Gamma} - \Gamma$, missä $\hat{\Gamma}$ on alkuperäisestä hieman muuttunut konnektio (kuitenkin määritelty samassa pisteessä). Kahden konnektion erotus on itsessään tensori, eli $\delta\Gamma$ on tensori, perusteluna seuraava: Olkoon A^μ mielivaltainen vektori. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}\nabla_\nu A^\mu - \hat{\nabla}_\nu A^\mu &= \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\nu}A^\rho - \partial_\nu A^\mu - \hat{\Gamma}^\mu_{\rho\nu}A^\rho \\ &= (\Gamma^\mu_{\rho\nu} - \hat{\Gamma}^\mu_{\rho\nu})A^\rho \\ &= \delta\Gamma^\mu_{\rho\nu}A^\rho,\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

missä tensori $\nabla_\nu A^\mu$ on vektorin A^μ kovariantti derivaatta suhteessa Levi-Civita –konnektioon. Koska lähtökohtana yhtälön vasemmalla puolen on tensori, täytyy oikean puolen myös olla tensori, ja koska A^μ on mielivaltainen, on $\delta\Gamma^\mu_{\rho\nu}$:n oltava tensori. Siirrytään nyt normaalikoordinaatteihin, jolloin $\Gamma \equiv 0$, ja tällöin myös kovariantti derivaatta palautuu (lokaalisti) tavalliseksi osittaiderivaataksi $\nabla_\alpha = \partial_\alpha$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\delta(R_{\mu\nu}) &= \delta(R^\kappa{}_{\mu\kappa\nu}) \\ &= \delta(\partial_\kappa\Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\mu\kappa}) \\ &= \partial_\kappa\delta\Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \partial_\nu\delta\Gamma^\kappa_{\mu\kappa} \\ &= \nabla_\kappa\delta\Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\kappa_{\mu\kappa}.\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Huomataan kuitenkin, että alkuperäisessä yhtälössä tämä variaatio esiintyi yhdessä metrisen tensorin kanssa muodossa $g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})$. Koska $\nabla_\kappa g^{\mu\nu} = 0$ (kun konnektio on Levi-Civita), on

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) &= g^{\mu\nu}\left(\nabla_\kappa\delta\Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\kappa_{\mu\kappa}\right) \\ &= \nabla_\kappa(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\mu\kappa}) \\ &= \partial_\kappa(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\mu\nu}) - \partial_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\mu\kappa}),\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

josta sopivasti muuttamalla summausindeksien nimiä saadaan

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) &= \partial_\nu(g^{\mu\kappa}\delta\Gamma^\nu_{\mu\kappa}) - \partial_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\mu\kappa}) \\ &= \partial_\nu(g^{\mu\kappa}\delta\Gamma^\nu_{\mu\kappa} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\mu\kappa}),\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

joka on kokonaisdivergenssi. Yleistetyn Stokesin lauseen mukaan [4, s.230] tämän termin integraali voidaan muuttaa integraaliksi yli tilavuuselementin reunan, mutta koska olemme vaatineet metrisen tensorin ja sen derivaattojen häviävän integrointialueen reunalla, tämä termi antaa nollan, eikä siten tuo kontribuutiota aktiointegraalin variaatioon. Huomion arvoista on kuitenkin, että vaatimus $\delta(\partial_\kappa g_{\mu\nu}) = 0$ tilavuuselementin reunalla asettaa rajoituksia avaruusajan topologialle ja siten rajoittaa saatujen liikeyhtälöiden yleistä pätevyyttä. Tältä oltaisiin voitu välttyä lisäämällä aktioon nk. Gibbons-Hawking-York –termi, muotoa

$$S = +2 \oint_{\partial \mathcal{V}} \mathrm{d}x^3 \sqrt{|h|} K, \tag{2.1.10}$$

missä h on hyperpinnalle $\partial \mathcal{V}$ indusoitunut metriikka ja K on monistoon upotetun hyperpinnan ulkoisen kaarevuuden jälki. Tämän termin lisääminen aktioon ei muuta kenttäyhtälöitä, mutta kumoaa termit jotka sisältävät metrisen tensorin derivaattoja pintatermissä. Pitäen mielessä että tämä ongelma voidaan ohittaa yksityiskohtaisemmalla tarkastelulla [2], voimme jatkaa siitä mihin jäimme.

(3) Tämän termin laskemiseen käytetään determinantin laskukaavaa kofaktorielementtien avulla

$$g = \sum_{\mu} g_{\mu\nu} \mathrm{Cof}(g)^{\mu\nu}, \tag{2.1.11}$$

missä $\mathrm{Cof}(g)^{\mu\nu}$ on metrisen tensorin elementtiin $g_{\mu\nu}$ liittyvän kofaktorimatriisin determinantti. Tätä käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} \delta g &= \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \delta(g_{\mu\nu}) \\ &= \mathrm{Cof}(g)^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\nu}) = g g^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\nu}), \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

josta edelleen

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta(-g) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{1}{g} (-g) g^{\kappa\lambda} \delta(g_{\kappa\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \delta(g_{\kappa\lambda}). \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Sijoittamalla saadut lausekkeet (1) ja (3) takaisin alkuperäiseen variaatioyhtälöön (toinen termi voidaan unohtaa kuten huomattiin) saadaan

$$\begin{aligned}\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}) &= -\underbrace{g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}R_{\mu\nu}}_{=R^{\kappa\lambda}}\delta(g_{\kappa\lambda})\sqrt{-g}+\underbrace{g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}}_{=\mathcal{R}}\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\kappa\lambda}\delta(g_{\kappa\lambda}) \\ &= \left[\frac{1}{2}Rg^{\kappa\lambda}-R^{\kappa\lambda}\right]\delta(g_{\kappa\lambda})\sqrt{-g} \qquad (2.1.14)\end{aligned}$$

josta vaihtamalla summausindeksit $\mu \leftrightarrow \kappa$ ja $\nu \leftrightarrow \lambda$ ja sijoittamalla integraaliin saadaan

$$\delta S_G = \int \left[\frac{1}{2}\mathcal{R}g^{\mu\nu} - R^{\mu\nu}\right]\delta(g_{\mu\nu})\sqrt{-g}\mathrm{d}x^4. \qquad (2.1.15)$$

Koska $\delta(g_{\mu\nu})$ on mielivaltainen, saadaan ylläolevasta tyhjiön kenttäyhtälöt vaatimalla $\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta S_G = 0$, jolloin siis (laskemalla kaikki indeksit)

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} &= 0, \quad \text{lyhyesti} \\ G_{\mu\nu} &= 0, \qquad (2.1.16)\end{aligned}$$

missä $G_{\mu\nu}$ on *Einsteinin tensori*. Tämä yhtälö kertoo kuitenkin pelkän gravitaatiokentän käytöksesta tyhjiössä[2], joten seuraava askel on tutkia materian ja energian vaikutusta gravitaatiokenttään. Tarkastellaan kuitenkin ensin mitä ominaisuuksia Einsteinin tensorilla on:

- $G_{\mu\nu}$ on symmetrinen, koska metrinen tensori on välttämättä symmetrinen ja Riccin tensorikin on tätä. Perustellaan Riccin tensorin symmetrisyys. Koska Riemannin tensorille pätee syklinen symmetria kolmen alimman indeksin suhteen [1, s.127], saadaan kontraktoimalla α ja γ Riemannin tensorissa $R^{\alpha}{}_{\mu\gamma\nu}$

$$\begin{aligned}R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}+R^{\alpha}{}_{\nu\mu\alpha}+R^{\alpha}{}_{\alpha\nu\mu} &= 0 \\ \Rightarrow R_{\mu\nu}-R_{\nu\mu}+g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta\nu\mu} &= 0, \qquad (2.1.17)\end{aligned}$$

missä on käytetty keskimmäisen termin antisymmetrisyyttä kahden viimeisen indeksin suhteen. Edelleen on ylläolevassa yhtälössä

$$\begin{aligned}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta\nu\mu} &= -g^{\beta\alpha}R_{\beta\alpha\nu\mu} \\ &= -g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta\nu\mu} \\ &= 0, \qquad (2.1.18)\end{aligned}$$

[2] Huomaa kuitenkin, että tämä yhtälö ei pakota tyhjiötä olemaan *laakea*, vaan se vaatisi tiukemman ehdon $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = 0$.

missä ensimmäisellä rivillä on käytetty metrisen tensorin symmetrisyyttä ja $R_{\alpha\beta\nu\mu}$:n antisymmetrisyyttä indeksien α ja β vaihdon suhteen, kun taas toisella rivillä on yksinkertaisesti vaihdettu summausindeksien nimiä. Tuloksena siis yhtälöstä 2.1.17 saadaan

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \tag{2.1.19}$$

- Einsteinin tensorin kovariantti divergenssi on nolla: $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$. Osoitetaan tämä lähtien Bianchin identtisyydestä [1, s.128]

$$\nabla_{\rho} R^{\mu}_{\ \nu\delta\gamma} + \nabla_{\gamma} R^{\mu}_{\ \nu\rho\delta} + \nabla_{\delta} R^{\mu}_{\ \nu\gamma\rho} \ = \ 0 \tag{2.1.20}$$

kontraktoimalla ensin μ ja δ ja nostamalla indeksi ν:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}(\nabla_{\rho} R^{\delta}_{\ \nu\delta\gamma} + \nabla_{\gamma} R^{\delta}_{\ \nu\rho\delta} + \nabla_{\delta} R^{\delta}_{\ \nu\gamma\rho}) &= 0 \\ g^{\mu\nu}(\nabla_{\rho} R_{\nu\gamma} - \nabla_{\gamma} R_{\nu\rho} + \nabla_{\delta} R^{\delta}_{\ \nu\gamma\rho}) &= 0 \\ \nabla_{\rho} R^{\mu}_{\ \gamma} - \nabla_{\gamma} R^{\mu}_{\ \rho} - \nabla_{\delta} R^{\delta\mu}_{\ \ \ \rho\gamma} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

josta saadaan edelleen kontraktoimalla indeksit μ ja γ

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho}\mathcal{R} - \nabla_{\mu} R^{\mu}_{\ \rho} - \nabla_{\delta} R^{\delta}_{\ \rho} &= 0 \\ \nabla^{\mu} R_{\mu\rho} &= \frac{1}{2}\nabla_{\rho}\mathcal{R}. \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

Käyttäen tätä, saadaan

$$\begin{aligned} \nabla^{\mu} G_{\mu\nu} &= \nabla^{\mu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{R}) \\ &= \frac{1}{2}\nabla_{\nu}\mathcal{R} - \frac{1}{2}\underbrace{(\nabla^{\mu} g_{\mu\nu})}_{=0}\mathcal{R} - \frac{1}{2}\underbrace{g_{\mu\nu}\nabla^{\mu}\mathcal{R}}_{=\nabla_{\nu}\mathcal{R}} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

2.2 Gravitaatio ja materia

Lisätään aktiointegraaliin materiaa kuvaava Lagrangen tiheys $\mathcal{L}_M$ ja kerrotaan jälkiviisaasti gravitaatiota kuvaavaa osaa vakiolla $\frac{1}{16\pi G}$, missä G on Newtonin gravitaatiovakio. Tässä materia viittaa metristä tensoria lukuunottamatta kaikkiin kenttiin ja hiukkasiin, erityisesti kvarkkeihin, leptoneihin ja mittabosoneihin, eli käytännössä kyseessä on siis

Standarimallin Lagrangen tiheys. Tällöin aktiointegraali on muotoa

$$\begin{aligned} S &= S_G + S_M \\ &= \int \left[\frac{1}{16\pi G}R + \mathcal{L}_M\right]\sqrt{-g}\mathrm{d}x^4, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

jolloin kokonaisuudessaan edelläolevaa yhtälöä varioimalla ja vaatimalla $\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta S = 0$ saadaan

$$\frac{1}{16\pi G}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right] + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial S_M}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \tag{2.2.2}$$

missä $-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial S_M}{\partial g^{\mu\nu}} \doteq T_{\mu\nu}$ on *energia-impulssitensori.* Merkitsemällä näin, saadaan Einsteinin kenttäyhtälöt

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.2.3}$$

joista nähdään kuinka materia määrää aika-avaruuden metriikan, ja metriikka taas määrää kappaleiden liikkeen (vapaa kappale kulkee kaarevassa avaruusajassa geodeesia pitkin).

Yllä oleva määritelmä energia-impulssitensorille on laskutekninen, ja tälle voidaankin vaihtoehtoisesti antaa täysin fysikaalisen intuition mukainen määritelmä (joka kuitenkin yhtyy ylläolevaan): energia-impulssitensori kuvaa neliliikemäärän (energian ja liikemäärän) virtausta aika-avaruudessa ja sen komponenttien merkitys voidaan ajatella olevan seuraava [1, s.33]

- komponentti T^{00} vastaa neliliikemäärän komponentin $p^0 = E$ vuota suuntaan $x^0 = t$, eli kappaleen lepokoordinaatiston energiatiheyttä
- komponentit $T^{0i} = T^{i0}$ $(i = 1,2,3)$ vastaavat kolmiliikemäärän tiheyttä
- komponentti T^{ij} $(i,j = 1,2,3)$ vastaa kolmiliikemäärän komponentin p^i vuota suunnan x^j määräämän pinnan läpi.

Edellisessä luvussa todettiin että Einsteinin tensori on symmetrinen ja sen kovariantti divergenssi häviää, jolloin samat ominaisuudet pätevät myös energia-impulssitensorille: tämä on energian ja liikemäärän säilymislaki. Määritelmän $-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial S_M}{\partial g^{\mu\nu}} \doteq T_{\mu\nu}$ käyttö on yleensä relevanttia vain äärimmäisen yksityiskohtaisessa tarkastelussa, kuten hiukkasfysiikassa ja usein yksinkertaisissa tapauksissa fysikaalisella intuitiolla järkevästi päättelemällä muodostettu energia-impulssitensori on usein riittävä kuvaamaan systeemiä. Esimerkiksi tähtitieteellisten mittakaavojen systeemejä voidaan hyvin kuvata pölynä (eli täydellisenä nesteenä jolla ei ole painetta): kun tarkastellaan Newtonin gravitaatiota kuvaavaa yhtälöä $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ pölypilvelle, missä $\rho = mn$ ja m on keskimääräinen pölyhiukkasen massa ja n on keskimääräinen hiukkastiheys tilavuutta kohti, huomataan [3, s.78] että kun tarkastellaan pölypilveä koordinaatistosta, joka liikkuu tasaisella nopeudella pölypilven lepokoordinaatiston suhteen, muuntuu ρ tässä koordinaatiston muunnoksessa kuten toisen kertaluvun tensorin (0,0)-komponentti. Hitaan liikkeen rajalla, heikossa gravitaatiokentässä energia-impulssitensorin dominoiva komponentti on siis $T^{00} = \rho =$ lepokoordinaatiston energiatiheys. Samaan tulokseen päästäisiin kohtuuttoman suurella vaivalla jos käytettäisiin annettua energia-impulssitensorin määritelmää systeemille jonka Lagrangen tiheys on $\mathcal{L} = -\rho$ ja asettamalla lopuksi saadussa tensorissa paine $p = 0$.

3 Hitaan liikkeen raja

Newtonin gravitaatiolaki on toimivaksi todettu useimmissa yksinkertaisissa fysikaalisissa sovelluksissa, joten olisi toivottavaa että Einsteinin kenttäyhtälöillä olisi jonkinlainen yhteys tähän. Oletettavaa olisi että Newtonin yhtälöihin päästäisiin kenttäyhtälöistä kun käsitellään matalilla nopeuksilla ($v \ll c = 1$) liikkuvia kappaleita heikossa gravitaatiokentässä. Tutkitaan seuraavaksi tätä.

3.1 Liike gravitaatiokentässä

Vapaan kappaleen liike gravitaatiokentässä noudattaa geodeettista yhtälöä

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \tag{3.1.1}$$

ja hitaassa liikkeessä, kun kappaleen nopeus $v \ll c$, missä $c = 1$, saadaan

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^i}{dt} = \frac{dt}{d\tau}v^i \ll \frac{dt}{d\tau}, \tag{3.1.2}$$

jolloin yhtälöstä 3.1.1 saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} &\approx -\Gamma^\mu_{00}\frac{\partial x^0}{\partial\tau}\frac{\partial x^0}{\partial\tau} \\ &= -\Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Ylläoleville Christoffelin symboleille saadaan, kun oletetaan metrinen tensori diagonaaliseksi ja ajasta riippumattomaksi,

$$\Gamma^{\mu}_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\cancel{\partial_0 g_{\lambda 0}} + \cancel{\partial_0 g_{0\lambda}} - \partial_\lambda g_{00}) = -\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\lambda g_{00}, \tag{3.1.4}$$

jossa heikko gravitaatiokenttä voidaan esittää pienenä häiriönä Minkowskin metriikassa

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{3.1.5}$$

missä $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ja $\eta = \text{diag}(-1,1,1,1)$. Huomataan, että ensimmäiseen kertalukuun häiriössä, on

$$\begin{aligned}(\eta^{\alpha\nu} - h^{\alpha\nu})(\eta_{\mu\alpha} + h_{\mu\alpha}) &= \eta^{\alpha\nu}\eta_{\mu\alpha} + \eta^{\alpha\nu}h_{\mu\alpha} - h^{\alpha\nu}\eta_{\mu\alpha} - h^{\alpha\nu}h_{\mu\alpha} \\ &\approx \delta^{\nu}_{\mu} + h_{\mu}^{\ \nu} - h^{\nu}_{\ \mu} \\ &= \delta^{\nu}_{\mu},\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

jolloin voidaan sanoa

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \tag{3.1.7}$$

Nyt, koska $g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 + h_{00}$, saadaan

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{00} &= -\frac{1}{2}[(\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\partial_\lambda(-1 + h_{00})] \\ &= -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00} - \underbrace{h^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00}}_{\approx 0}) \\ &\approx -\frac{1}{2}\partial^{\mu}h_{00},\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

eli

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\partial^{\mu}h_{00}. \tag{3.1.9}$$

Kuten muistetaan, metrinen tensori oletettiin ajasta riippumattomaksi, jolloin siis $\partial^0 g_{00} = 0$, jolloin $\partial^0 h_{00} = 0$, mistä saadaan

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = \frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\partial^0 h_{00} = 0, \tag{3.1.10}$$

eli $\frac{dt}{d\tau}$ = vakio, hitaassa liikkeessä voimme samaistaa $t = \tau$. Yhtälön 3.1.9 jäljelle jäävistä komponenteista saadaan tällöin

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial^i h_{00}, \tag{3.1.11}$$

joka saadaan ilmaistua vektorimuodossa, samaistamalla $h_{00} = -2\Phi$ ja merkitsemällä $\frac{d^2x^i}{dt^2} \doteq \vec{a}$

$$\vec{a} = \nabla\Phi, \tag{3.1.12}$$

joka on Newtonin yhtälö gravitaatiopontentiaalissa Φ liikkuvalle kappaleelle.

3.2 Newtonin gravitaatiolaki

Lähdetään tarkastelemaan Einsteinin kenttäyhtälöitä 2.2.3. Kertomalla puolittain $g^{\mu\nu}$:lla, eli ottamalla jälki, saadaan ($g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$)

$$\begin{aligned} R - 2\mathcal{R} &= 8\pi G T^{\nu}{}_{\nu} = 8\pi G T \\ \Rightarrow \qquad \mathcal{R} &= -8\pi G T. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Kun lähestytään gravitaation Newtonilaista rajaa, rajoittuu tarkastelu toisistaan hyvin kaukana oleviin, jäykkiin kappaleisiin joita voidaan kuvata pölynä, pistemäisinä hiukkasina avaruudessa siten, että hiukkasten välillä ei johdu lämpöä eikä niistä aiheudu minkäänlaista painetta ympäristöön nähden. Tällöin, kuten kappaleessa 2.2 perusteltiin, on energia-impulssitensorin merkitsevin komponentti $T_{00} = \rho$ ja $T_{\mu\nu} \ll T_{00}$ muille komponenteille. Kenttäyhtälöissä merkitseväksi jää siis (0,0)-komponenttia kuvaava yhtälö

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R} \approx 8\pi G T_{00}, \tag{3.2.2}$$

josta saadaan yhtälöä 3.2.1 käyttäen ensimmäiseen kertalukuun häiriössä

$$\begin{aligned} R_{00} &\approx 8\pi G(T_{00} - \frac{1}{2}\underbrace{g_{00}g^{00}}_{=1}T_{00}) \\ &\approx 4\pi G\rho, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

missä Riccin tensorille on

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^{\mu}{}_{0\mu0} \\ &= \partial_\mu\Gamma^{\mu}_{00} - \partial_0\Gamma^{\mu}_{0\mu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{00} - \Gamma^{\mu}_{0\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu0}. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Tässä selvästi ${R^0}_{000} = 0$ ja koska tarkasteltavana on aikariippumaton metriikka, on myös $\partial_0 \Gamma^{\mu}_{0\mu} = 0$. Lisäksi, koska Christoffelin symboleille pätee heikossa kentässä

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}), \qquad (3.2.5)
\end{aligned}$$

ovat Christoffelin symboleiden tulot $\Gamma\Gamma \sim h^2$, siis toista kertalukua häiriössä (kun oletetaan myös $\partial_\mu h_{\lambda\nu}$ pieneksi), joten ne voidaan unohtaa. Yhtälöstä 3.2.4 jää jäljelle tällöin vain

$$\begin{aligned}
R_{00} &\approx \partial_i \Gamma^{i}_{00} \\
&= \frac{1}{2} \partial_i [g^{i\lambda}(\cancel{\partial_0 h_{\lambda 0}} + \cancel{\partial_0 h_{0\lambda}} - \partial_\lambda h_{00})] \\
&= -\frac{1}{2} \partial_i g^{ij} \partial_j h_{00} \\
&= -\frac{1}{2} \partial_i (\delta^{ij} - h^{ij}) \partial_j h_{00} \\
&\approx -\frac{1}{2} \partial_i \partial_i h_{00} \\
&= \nabla^2 \Phi, \qquad (3.2.6)
\end{aligned}$$

joten tästä ja yhtälöstä 3.2.3 saadaan

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \qquad (3.2.7)$$

eli Newtonin gravitaatiolaki.

4 Schwarzschildin ratkaisu

Nyt kun gravitaatioteoriamme on osoitettu toimivaksi hitaan liikkeen rajalla, voidaan siirtyä tarkastelemaan mitä kenttäyhtälöistä saadaan irti yksinkertaiselle fysikaaliselle systeemille. Otetaan tarkasteltavaksi tyhjä avaruus pallon muotoisen, sähköisesti neutraalin, pyörimättömän kappaleen ulkopuolella, esimerkkinä tähti, musta-aukko tai hyvänä approksimaationa hitaasti pyörivä planeetta.

4.1 Pallosymmetrinen, staattinen metriikka

Otetaan lähtökohdaksi Minkowskin metriikka, tehdään koordinaatistonmuunnos pallokoordinaatteihin

$$\begin{cases} x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{cases} \tag{4.1.1}$$

jolloin viivaelementin pituus on (kun määritellään $\mathrm{d}x^0 = t, \mathrm{d}x^1 = x, \mathrm{d}x^2 = y, \mathrm{d}x^3 = z$)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \\ &= -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &= -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 \mathrm{d}\Omega, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

missä $\mathrm{d}\Omega = \sin^2\theta \mathrm{d}\phi + \mathrm{d}\theta$, joka on samalla 2-ulotteisen pallon viivaelementin pituus. Tehdään seuraava määritelmä:

Määritelmä *Aika-avaruus on pallosymmetrinen jos sen metriikka on invariantti kierroissa. Koska 2-ulotteisen pallon metriikka $\mathrm{d}\Omega = \sin^2\theta \mathrm{d}\phi + \mathrm{d}\theta$ on selvästi rotaatioinvariantti, on riittävä ehto että koordinaateissa (t, r, ϕ, θ) ilmaistu metriikka $\mathrm{d}s^2$ sisältää termin $\mathrm{d}\Omega$ kerrottuna kulmakoordinaateista riippumattomalla funktiolla. Aika-avaruudella siis ei ole ensisijaista suuntaa.*

Vaaditaan metriikalta staattisuus, eli $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0$, sekä pallosymmetrisyys. Tästä saadaan

$$g_{\mu\theta} = g_{\theta\mu} = 0, \qquad \mu \neq \theta \tag{4.1.3}$$

$$g_{\mu\phi} = g_{\phi\mu} = 0, \qquad \mu \neq \phi \tag{4.1.4}$$

ja vaaditaan lisäksi, että metriikka säilyy muuttumattomana muunnoksessa $t \to -t$, jolloin saadaan

$$g_{t\rho} = g_{\rho t} = 0, \tag{4.1.5}$$

sillä vain $\mathrm{d}t^2$ on invariantti tässä muunnoksessa, ristitermejä kuten $\mathrm{d}t\mathrm{d}\rho$ ei voi olla. Jäljelle jää siis vain ainoastaan diagonaalielementit, jolloin viivaelementin pituudeksi saadaan

$$\mathrm{d}s^2 = g_{tt}\mathrm{d}t^2 + g_{\rho\rho}\mathrm{d}\rho^2 + g_{\phi\phi}\mathrm{d}\phi^2 + g_{\theta\theta}\mathrm{d}\theta^2. \tag{4.1.6}$$

Koska haluamme yleistää yhtälöä 4.1.2, voimme kirjoittaa ylläolevan seuraavaan muotoon

$$\mathrm{d}s^2 = -C(\rho)\mathrm{d}t^2 + D(\rho)\mathrm{d}\rho^2 + E(\rho)[\rho^2\mathrm{d}\phi^2 + \rho^2\sin^2\phi\mathrm{d}\theta^2], \tag{4.1.7}$$

missä kulmaosaa kuvaavan termin muoto perustellaan pallosymmetrisyysvaatimuksella. Määritellään tässä uusi radiaalikoordinaatti $r = \rho\sqrt{E(\rho)}$ (oletetaan tietysti että $E(\rho)$ mahdollistaa tämän) sekä uudet funkiot $A(r)$, $B(r)$ siten, että

$$\mathrm{d}s^2 = -A(r)\mathrm{d}t^2 + B(r)\mathrm{d}r^2 + r^2[\mathrm{d}\phi^2 + \sin^2\phi\mathrm{d}\theta^2], \tag{4.1.8}$$

ja edelleen määritellään, tulevia laskuja helpottamaan

$$A(r) = e^{2m(r)} > 0 \tag{4.1.9}$$

$$B(r) = e^{2n(r)} > 0, \tag{4.1.10}$$

missä vaadimme kyseisten funktioiden olevan positiivisia, jotta metriikan signatuuri $(-+++)$ säilyisi. Metrisen tensorin muoto on nyt siis

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2m(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2n(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\phi \end{pmatrix}, \tag{4.1.11}$$

joka on staattinen ja pallosymmetrinen tekemiemme operaatioiden perusteella.

4.2 Metriikan ratkaiseminen kenttäyhtälöitä käyttäen

Seuraava tehtävä on ratkaista funkiot $m(r)$ ja $n(r)$ käyttäen tyhjiön kenttäyhtälöitä 2.1.16, eli ehtoa

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\mu} = 0, \tag{4.2.1}$$

missä Christoffelin symbolit ovat määritelmän 1.1.1 mukaiset. Tässä kuitenkin, kun käytetään muotoa 4.1.11, on $g_{\mu\nu} = 0$ (myös $g^{\mu\nu} = 0$) kaikille $\mu \neq \nu$, ja $g^{\mu\mu} = \frac{1}{g_{\mu\mu}}$, joten 1.1.1 sievenee muotoon

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\alpha}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}).\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Käyttäen ylläolevaa saadaan esimerkiksi komponentti

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{tr} &= \frac{1}{2g_{tt}}(\cancel{\partial_t g_{tr}} + \partial_r g_{tt} - \cancel{\partial_r g_{tr}}) \\
&= \frac{1}{2}e^{-2m(r)}\partial_r e^{2m(r)} \\
&= \partial_r m(r),
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

ja vastaavasti muut komponentit (lyhennetään merkintöjä jättämällä argumentit kirjoittamatta: $m(r) = m, n(r) = n$)

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^r_{tt} = e^{2(m-n)}\partial_r m & \Gamma^r_{rr} = \partial_r n & \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^r_{\phi\phi} = -re^{-2n} & \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r} & \Gamma^r_{\theta\theta} = -re^{-2n}\sin^2\phi \\
\Gamma^\phi_{\theta\theta} = -\sin\phi\cos\phi & \Gamma^\theta_{\phi\theta} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}, &
\end{array} \tag{4.2.4}$$

ja edelleen näistä lasketaan Riccin tensorin komponentit, esimerkiksi

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{tt} - \cancel{\partial_t \Gamma^\alpha_{\alpha t}} + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{tt} - \Gamma^\alpha_{t\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha t} \\
&= \partial_r \Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\theta_{r\theta}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\phi_{r\phi}\Gamma^r_{tt} + \cancel{\Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{tt}} - \cancel{\Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{tt}} - \Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{rt} \\
&= \partial_r e^{2(m-n)}\partial_r m + \partial_r n e^{2(m-n)}\partial_r m + \frac{2}{r}e^{2(m-n)}\partial_r m - e^{2(m-n)}\partial_r m \partial_r m \\
&= e^{2(m-n)}\left[2\partial_r m\partial_r m - 2\partial_r n\partial_r m + \partial_{rr} m + \partial_r m \partial_r n + \frac{2}{r}\partial_r m - \partial_r m \partial_r m\right] \\
&= e^{2(m-n)}\left[\partial_{rr} m + (\partial_r m)^2 - \partial_r n \partial_r m + \frac{2}{r}\partial_r m\right],
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

missä ensimmäisellä rivillä on käytetty stationaarisuusehtoa ja toisella rivillä on avattu summaukset ja jätetty näkyviin vain nollasta eroavat termit, ja lisäksi on merkitty $\partial_{rr} m = \frac{\partial^2 m}{\partial r^2}$. Muut nollasta eroavat komponentit lasketaan vastaavasti, jolloin saadaan siis

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= -\partial_{rr} m - (\partial_r m)^2 + \partial_r n \partial_r m + \tfrac{2}{r}\partial_r n \\
R_{\phi\phi} &= e^{-2n}\left[r(\partial_r n - \partial_r m) - 1\right] + 1 \\
R_{\theta\theta} &= \sin^2\phi\left\{e^{-2n}\left[r(\partial_r n - \partial_r m) - 1\right] + 1\right\} = \sin^2\phi R_{\phi\phi}.
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Ehdosta $R_{\mu\nu} = 0$ saadaan sitten, laskemalla sopivasti yhteen

$$\begin{aligned}
0 &= R_{tt} + e^{2(m-n)}R_{rr} \\
&= e^{2(m-n)}\frac{2}{r}\left(\partial_r m + \partial_r n\right),
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

ja tästä jakamalla pois nollasta eroavat termit ja integroimalla r:n suhteen

$$m + n = C = \text{vakio}. \tag{4.2.8}$$

Haluamme ratkaisumme olevan *asymptoottisesti laakea*, eli $\mathrm{d}s^2 \to -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega$, kun $r \to \infty$, siis

$$\begin{cases} e^{2m(r)} \to 1 \\ e^{2n(r)} \to 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(r) \to 0 \\ n(r) \to 0 \end{cases}, \text{ kun } r \to \infty, \tag{4.2.9}$$

josta saadaan $m + n = 0$, kun $r \to \infty$, eli $C = 0$. Seuraavaksi, ehdosta $R_{\phi\phi} = 0$ saadaan, sijoittamalla $m = -n$

$$\begin{aligned} e^{2m}\left[2r(\partial_r m) + 1\right] &= 1 \\ \partial_r(re^{2m}) &= 1, \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

josta integroimalla puolittain r:n suhteen saadaan

$$\begin{aligned} re^{2m} &= r + R_S \\ e^{2m} &= 1 + \frac{R_S}{r} = -g_{tt}, \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

jolloin myös

$$e^{2n} = e^{-2m} = \left(1 + \frac{R_S}{r}\right)^{-1} = g_{rr} \tag{4.2.12}$$

missä $R_S =$ vakio, jonka selvittämiseksi palautetaan mieleen heikon kentän approksimaatio 3.1.5 sekä samaistus $h_{00} = -2\Phi$, jolloin siis asymptoottisesti, kun $r \gg R_S$, on

$$g_{tt} = -1 - 2\Phi, \tag{4.2.13}$$

missä $\Phi = -\frac{GM}{r}$ on Newtonin gravitaatiopotentiaali pistemäiselle massalle M. Tällöin siis $R_S = -2GM$, jolle annetaan nimi *Schwarzschildin säde*. Tuloksena siis metriikka

$$\mathrm{d}s^2 = -(1 - \frac{2GM}{r})\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{(1 - \frac{2GM}{r})} + r^2[\mathrm{d}\phi^2 + \sin^2\phi\mathrm{d}\theta^2], \tag{4.2.14}$$

missä $-\infty < t < \infty, 0 < \phi < \pi, 0 < \theta < 2\pi$ ja $R_0 < r < \infty$ tai $R_S < r < \infty$, sillä metriikka on validi vain tyhjiössä kappaleen säteen R_0 ulkopuolella, mutta jos $R_0 < R_S$, on metriikka validi vain Schwarzschildin säteen ulkopuolella, koska kun $r \to R_S$, niin $(1 - \frac{2GM}{r})^{-1} \to \infty$, mikä ei vastaa fysikaalista tilannetta. Yleensä edelläolevasta singulaarisuudesta ei kuitenkaan aiheudu ongelmia, sillä perinteisissä fysikaalisissa systeemeissä $R_0 \gg R_S$, jolloin singulaarisuuksia ei esiinny. Objekteja, joiden säde on pienempi kuin Schwarzschildin säde, kutsutaan *mustiksi aukoiksi.* Huomataan myös, että kun $M \to 0$, tai vastaavasti kun $r \to \infty$, palautuu 4.2.14 tavalliseksi Minkowskin metriikaksi, mikä oli odotettavissa.

4.3 Singulaariset pisteet

Metriikassa 4.2.14 esiintyy myös toinen singulaarinen piste kun $r \to 0$. Näiden singulaaristen pisteiden luonne ei kuitenkaan ole päivänselvää, joten tarvitaan keino sen selvittämiseksi. Tensoreista ei voida sanoa milloin ne ”menevät äärettömään”, sillä ne riippuvat täysin valitusta koordinaatistosta, jolloin siis metriikassamme esiintyvät äärettömyydet voivat johtua huonosta koordinaatiston valinnasta. Skalaarit kuitenkin ovat koordinaatistota riippumattomia, joten niitä tutkimalla voidaan selvittää ” todellisten” singulaarisuuksien olemassaolo. Koska Riemannin tensori kuvaa aika-avaruuden kaarevuutta, voidaan siitä saatavia skalaareja tutkimalla selvittää fysikaalisten singulaarisuuksien olemassaolo. Esimerkkinä skalaari [1, s.205]

$$R^{\alpha\beta\delta\gamma}R_{\alpha\beta\delta\gamma} = \frac{48G^2M^2}{r^6}, \tag{4.3.1}$$

josta nähdään selvästi, että $r = 0$ on todellinen singulaarinen piste, kun taas $r = R_S$ on vain koordinaattisingulaarisuus, josta päästään eroon sopivalla koordinaattimuunnoksella.

Viitteet

[1] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.* Benjamin Cummings, 2003.

[2] Ethan Dyer and Kurt Hinterbichler. Boundary terms, variational principles, and higher derivative modified gravity. *Phys. Rev. D*, 79:024028, Jan 2009.

[3] I. R. Kenyon. *General relativity.* Oxford Science Publications. Oxford University Press on Demand, 1990.

[4] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics.* Institute of Physics Pub., 2003. Bristol, UK: Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics).