Jyväskylän Yliopisto

FYST321 Suhteellisuusteoria ja aikakoneet - työselostus

Antti Hämäläinen
anjuhama@student.jyu.fi

4.8.2014

Abstract

In this report we study the possibility of time travel by the use of wormholes. Most of the text is about the ideas leading towards the wormhole-metric, an exact solution to the Einstein's field equations. We then analyze this special spacetime and the peculiar type of matter occurring by using the tools provided by General relativity. Finally we provide a possible way of turning the wormhole into a time machine allowing travel to the past.

Sisältö

He ran toward her. And when he recognized the man who'd trailed him from the camp, he realized there was no escape out of time, and that that moment he'd been granted to see as a child, and that had obsessed him forever after... was the moment of his own death.

– Chris Markerin elokuvasta *La Jétee* (1962)

Kannen kuva Ingmar Bergmanin elokuvasta *Smultronstället* (1957).

1 Johdanto

Tässä työssä tutkitaan Yleisen suhteellisuusteorian (YST) mukaisen aikakoneen rakentamisen periaatteita lähtien liikkeelle YST:n neliulotteisen avaruusajan niin kutsutusta $3+1$-viipaloinnista, edeten pallosymmetristä avaruusaikaa analysoimalla kohti tietynlaista eksaktia ratkaisua Einsteinin kenttäyhtälöille tavoitteena aikamatkustus *menneisyyteen*. Työn pohjana on kurssilla FYST321 kirjoitetut muistiinpanot. Aikakoneen rakentamisen perustana tulee olemaan madonreikäavaruusaika, esikuvanaan Einsteinin & Rosenin silta. Suuri osa ajasta käytetään madonreiän analysointiin, kiinnittäen huomiota varsinkin madonreikää auki pitävän materian ominaisuuksiin jolloin käyttöön on otettava eksoottisen aineen käsite. Lisäksi tutkitaan madonreiän kulkukelpoisuutta sekä turvallisen matkustamisen ehtoja. Aikakoneen mallia muodostettaessa pyritään fysikaaliseen mielekkyyteen: mikään tunnettu fysiikan teoria ei saa täysin tyrmätä tehtyä analyysiä.

Tässä työssä ei suoriteta eksplisiittisiä uuvuttavia laskuja, mutta ei myöskään tarjota (kovin paljoa) taustatietoa koskien Yleistä suhteellisuusteoriaa tai mitään muutakaan fysiikan teoriaa.

2 Geometria: Kohti madonreikää

Tässä osiossa pyritään lyhyesti motivoimaan aihetta sekä esittelemään madonreikää kuvaavaan avaruusaikageometriaan johtavien päättelyiden ketju. Apuna päättelyssä ovat

- tietynlainen YST:n formulointi joka auttaa sisällyttämään teoriaan tunteen ajankulusta
- pallosymmetrinen avaruusaikageometria (Schwarzschildin avaruusaika)
- Einsteinin-Rosenin silta.

2.1 Avaruusajan $3+1$-viipalointi

Otsikon mukaisella avaruusajan viipaloinnilla tarkoitetaan YST:n neliulotteisen Riemannin avaruusajan jakamista kolmiulotteisten hyperpintojen joukoksi, jota parametrisoi mielivaltaisesti valitun koordinaatin x^4 arvo: jokaiseen koordinaatin x^4 arvoon liitetään 3-ulotteinen (epäeuklidinen) paikanluonteinen hyperpinta jolle indusoitunutta metriikkaa kuvaa metrinen tensori γ_{ij}. Invariantti neliömuoto Q tällaisessa muotoilussa saadaan rakennettua lähtemällä liikkeelle tapahtumasta $\mathcal{A}$ infinitesimaalisen lähellä olevaan tapahtumaan $\mathcal{B}$. Tätä siirtymää kuvaa mielivaltaisesti valitun koordinaatin $\mathrm{d}x^4$ muutos *ajankulkufunktion* $N = N(x^i, t)$ määräämällä tavalla sekä paikanluonteisen hyperpinnan sileä deformaatio siirtymävektorin N^i määräämällä tavalla. Tapahtumavälillä $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ saadaan tällöin invariantiksi neliömuodoksi

$$\begin{aligned} Q &= g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} \\ &= \gamma_{ij}\left(N^i\mathrm{d}x^4 + \mathrm{d}x^i\right)\left(N^i\mathrm{d}x^4 + \mathrm{d}x^i\right) - (N\mathrm{d}x^4)^2 \\ &= \gamma_{ij}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x^j + 2N_i\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^4 + (N_iN^i - N^2)(\mathrm{d}x^4)^2. \end{aligned}$$

Tämän formuloinnin etuna on, että funktioiden $N = N(x^i, x^4)$ ja $N^i = N^i(x^j, x^4)$ sopivalla valinnalla voidaan teoriaan sisällyttää *käytännön aika* ($\sim N$) erotuksena *koordinaattiajalle* x^4 säilyttäen silti YST:n avaruusajan geometria riittävän yleisesti.

2.2 Pallosymmetria

Mielikuvana toivotusta madonreiästä on jonkinnäköinen avaruusajan staattinen geometria, jota kohti voi liikkua ja jonka läpi voi kulkea. Toisena vaatimuksena madonreiälle (ensimmäinen oli ajankulku) asetetaankin pallosymmetria: nimensä mukaisesti madonreikäavaruusajalta odotetaan ominaisuutta joka mahdollistaa mielekkään käsitteen 'läpi kulkemisesta', ideaalitapauksena pallosymmetrinen 'onkalo'. Tämä on lähinnä kosmeettinen seikka, mutta otetaan se lähtökohdaksi. Erityistapauksena $3+1$-viipaloidusta avaruusajasta on *staattinen, pallosymmetrinen avaruusaika* jonka invariantti neliömuoto on

$$Q = \gamma_{rr}\mathrm{d}r^{\,2} + r^2(\mathrm{d}\theta^{\,2} + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^{\,2}) - N^2(r)c^2\mathrm{d}t^{\,2},$$

missä on otettu käyttöön pallokoordinaatit $(x^1, x^2, x^3, x^4) \to (r, \theta, \phi, ct)$, ja missä kahden funktion $\gamma = \gamma(r), N = N(r)$ mielivaltainen valinta säilyttää paikanluonteisten hyperpintojen pallosymmetrisyyden. Asetetaan vielä lisävaatimus *asymptoottiselle laakeudelle*

$$\gamma_{rr}(r) \to 1 \quad \& \quad N^2(r) \to 1,$$

kun $r \to \infty$. Valon vauhti c on lisätty jotta uuden aikakoordinaatin dimensioksi saadaan sekunti. Valitsemalla edellä mainitut funktiot γ ja N sopivasti, päädytään tietynlaiseen pallosymmetriseen avaruusaikageometriaan, *Schwarzschildin avaruusaikaan*, jota kuvaa neliömuoto

$$Q = \frac{\mathrm{d}r^{\,2}}{1 - \frac{r_H}{r}} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^{\,2} + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^{\,2}\right) - \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^{\,2}.$$

Osoittautuu, että tämä geometria on eksakti ratkaisu Einsteinin kenttäyhtälöille *tyhjiössä* ja sisältää *horisontin*: kun $r = r_H$, on $N^2(r) = 0$ vaikka $\mathrm{d}t \neq 0$. Tämän horisontin ylittäminen johtaa väistämättä kaarevuussingulariteetin $r = 0$ kohtaamiseen − tällainen tilanne on vältettävä! Kaiken pahan lisäksi, horisontin voi ylittää vain yhteen suuntaan. Madonreiältä sopisi toivoa kaksisuuntaista liikennettä, joten Schwarzschildin avaruusaika ei meille kelpaa.

2.3 Einsteinin-Rosenin silta

Einsteinin & Rosenin silta on avaruusaikageometria, jonka lähtökohtana on Schwarzschildin avaruusaika josta sopivalla koordinaattimuunnoksella on horisontin sisäpuolinen alue $0 \leq r \leq r_H$ sekä sen sisältämä koordinaattisingulariteetti rajattu pois. Alunperin tällaisen geometrian tarkoituksena oli kuvata massallista sähköisesti neutraalia (tai muokattuna versiona varattua) hiukkasta *geometrisesti* liittämällä koordinaattimuunnoksella saavutettuun siltarakenteeseen geometrinen massa (ja varaus). Siltarakenteen olemassaolo kuitenkin vaati horisontin olemassaolon. Yritetään päästä näistä horisonteista eroon sillä ne estävät kaksisuuntaisen liikenteen. Otetaan madonreikää kuvaavaksi neliömuodoksi

$$Q = \left(1 - \frac{\mu(r)}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^{\,2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^{\,2} + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^{\,2}\right) - e^{2\nu(r)}c^2\mathrm{d}t^{\,2},$$

ja asetetaan vaatimuksia tälle:

1. Jotta kaksisuuntainen liikenne sillan ylitse olisi mahdollista, vaaditaan että ajankulkufunktio $N^2(r) \neq 0$ kaikilla koordinaatin r arvoilla. Siis horisontteja **ei sallita**. Tämän varmistamiseksi määritellään uusi funktio $\nu(r)$ siten, että $N^2(r) = e^{2\nu(r)}$.

2. Madonreiän (sillan) lävitse kulkevan havaitsijan mittaaman kulkuajan on oltava äärellinen: siis $\nu(r)$:n on oltava äärellinen kaikilla r:n arvoilla.

3. Metriikan on oltava ratkaisu Einsteinin kenttäyhtälöille.

4. Alkuperäiset vaatimukset pallosymmetriasta ja asymptoottisesta laakeudesta ovat voimassa.

3 Teoria: Madonreiän sisässä

Tässä osiossa tutkitaan mitä Einsteinin kenttäyhtälöt paljastavat edellä saavutetusta madonreikägeometriasta, esikuvanaan Einsteinin & Rosenin silta. Pitkiä laskuja tai uuvuttavia välivaiheita en kirjoita, mutta annan perusyhtälöt ja relaatiot joita käyttäen tutkimus on edennyt.

3.1 Madonreikäyhtälöt

Jotta päästäisiin käsiksi Einsteinin kenttäyhtälöihin, on annetusta (päättelemällä saadusta) invariantista neliömuodosta $Q = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\,\mu}\mathrm{d}x^{\,\nu}$ laskettava seuraavat suureet vastaavassa järjestyksessä:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right) && \text{Christoffelin symbolit}\\
R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} &= \partial_\gamma\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \partial_\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\epsilon\gamma}\Gamma^{\epsilon}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\epsilon\delta}\Gamma^{\epsilon}_{\beta\gamma} && \text{Riemannin tensori}\\
R_{\alpha\beta} &= R^{\gamma}{}_{\alpha\beta\gamma} && \text{Riccin tensori}\\
R &= g^{\gamma\delta}T_{\gamma\delta} && \text{Riccin skalaari}\\
G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R && \text{Einsteinin tensori.}
\end{aligned}$$

Laskujen helpottamiseksi on viisasta käyttää koordinaattikannan sijasta ei-koordinaattikantaa eli *tetradikantaa* (havaitsijan lepokoordinaatisto). Tetradikannan muodostaa neljä ortonormitettua vektorikenttää $\{E_{\hat{\alpha}}\}_{\hat{\alpha}=1,2,3,4}$, jolloin esimerkiksi Riemannin tensorin komponentit tetradikannassa ovat (koordinaattikannassa ilmoitettujen komponenttien avulla)

$$R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}E^{\hat{\alpha}}_{\alpha}E^{\beta}_{\hat{\beta}}E^{\gamma}_{\hat{\gamma}}E^{\delta}_{\hat{\delta}},$$

missä $E^{\alpha}_{\hat{\alpha}}E^{\hat{\beta}}_{\alpha} = \delta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}$ ja $E^{\hat{\alpha}}_{\alpha}E^{\beta}_{\hat{\alpha}} = \delta^{\beta}_{\alpha}$ (sillä tetradikanta on ortonormitettu: $g_{\alpha\beta}E^{\alpha}_{\hat{\alpha}}E^{\beta}_{\hat{\alpha}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$). Hatutetuilla indekseillä viitataan tästä lähtien kyseiseen tetradikantaan. Einsteinin tensorin tetradikantaisiksi komponenteiksi saadaan tällöin (muutaman sivun laskujen jälkeen)

$$
\begin{aligned}
G_{\hat{1}\hat{1}} &= \frac{\mu}{r^3} - \frac{2}{r}\left(1-\frac{\mu}{r}\right)\nu' \\
G_{\hat{2}\hat{2}} = G_{\hat{3}\hat{3}} &= \frac{r\mu'-\mu}{2r^2} + \left(1-\frac{\mu}{r}\right)\left[-\nu'' - (\nu')^2 + \frac{r\mu'-\mu}{2r(r-\mu)} - \frac{\nu'}{r}\right] \\
G_{\hat{4}\hat{4}} &= -\frac{\mu'}{r^2}.
\end{aligned}
$$

Einsteinin kenttäyhtälöistä

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\frac{8\pi G}{c^2}T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$$

saadaan madonreikää kuvaavat perusyhtälöt kun oletetaan että energia-liikemäärä-jännitystensori on Hawkingin-Ellisin muotoa

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \mathrm{diag}(-\frac{\tau}{c^2}, \frac{p}{c^2}, \frac{p}{c^2}, \rho).$$

Erityisesti siis $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \neq 0$. Tämän selittää Birkhoffin teoreema: ainoa pallosymmetrinen ratkaisu Einsteinin kenttäyhtälöille tyhjiössä on Schwarzschildin ratkaisu. Mutta kuten todettua, tämä ratkaisu sisältää horisontin, eikä siten voi kuvata kulkukelpoista madonreikää. Sijoittamalla energia-liikemäärä-jännitys-tensori kenttäyhtälöön saadaan yhtälöt *poikittaiselle paineelle* p, *radiaaliselle jännitykselle* τ sekä *energiatiheydelle* ρc^2:

$$
\begin{aligned}
\rho c^2 &= \frac{c^4}{8\pi G}\frac{\mu'}{r^2} && \textbf{(E1)} \\
\tau &= \frac{c^4}{8\pi G}\left[\frac{\mu}{r^3} - \frac{2}{r}\nu'\left(1-\frac{\mu}{r}\right)\right] && \textbf{(E2)} \\
p &= \frac{r}{2}\left[\left(\rho c^2 - \tau\right)\nu' - \tau'\right] - \tau. && \textbf{(E3)}
\end{aligned}
$$

Nämä yhtälöt ovat siis yleistä madonreikää kuvaavat yhtälöt. Valitsemalla tietty madonreikämalli (funktioiden $\mu(r), \nu(r)$ eksplisiittinen valinta), saadaan differentiaaliyhtälöt τ:lle, p:lle sekä ρ:lle jolloin voidaan tehdä päätelmiä mallin fysikaalisista ominaisuuksista ja vaatimuksista. Erityisesti ylläolevat yhtälöt siis määräävät madonreiän olemassaolon mahdollistavan materian ominaisuudet.

3.2 Visualisointi

Koska madonreikä kuvaa neliulotteista avaruusaikaa, on sen hahmottaminen 2-ulotteiselle paperille mahdotonta. Riittävän kuvaava visualisointi saadaan kuitenkin aikaan, kun otetaan madonreikäavaruusajan tietyn ajanhetken $t = vakio$ määräämä hyperpinta $\mathcal{H}^3$ ja upotetaan se neliulotteiseen *euklidiseen* avaruuteen jonka koordinaatteina toimivat neliulotteiset sylinterikoordinaatit (z,r,θ,ϕ). $\mathcal{H}^3$ voidaan tällöin ajatella pintana $z = z(r,\theta,\phi)$, jolle koordinaattiakseli z toimii symmetria-akselina ja jonka metriikka yhtyy $\mathcal{H}^3$:n paikanluonteiseen metriikkaan.

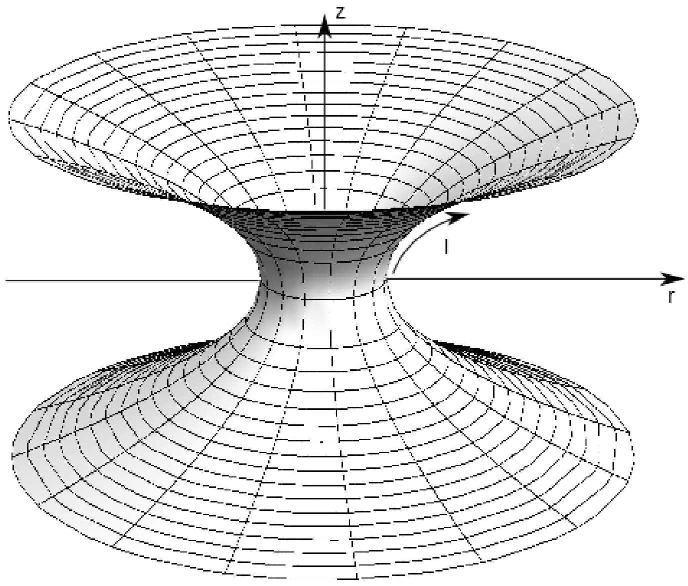

Figure 1: Madonreikävisualisointi valinnalle $\mu(r) = vakio > 0$. z-akseli menee madonreiän keskeltä ja osoittaa suoraan ylöspäin.

Huomaa, että visualisoinnissa kulma θ on typistetty. Kun se otetaan huomioon, korvatuvat kuvassa näkyvät vaakatasossa olevat ympyrän kaaret kaksiulotteisilla pallopinnoilla. Asetetaan visualisoinnin inspiroimana nk. *avautumisehto*: madonreiän kapeimmassa kohdassa eli kaulassa $r = r_K$ on radiaalikoordinaatin saatava minimiarvonsa ja madonreiän on sitä suuremmilla r:n arvoilla avauduttava ulospäin.

3.3 Uusi radiaalikoordinaatti

Visualisointia tehtäessä on hyvä huomata koordinaatin r huono käytettävyys havaitsijan kannalta, sillä se mittaa kohtisuoraa etäisyyttä madonreiän symmetria-akselista. Visualisointi ja madonreikämetriikka antavat vihjettä koordinaattimuunnokseen $r \to l = l(r)$ siten, että

$$\mathrm{d}l = \pm \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - \frac{\mu(r)}{r}}},$$

jolloin neliömuoto Q saa muodon

$$Q = \mathrm{d}l^{\,2} + r^2(l)\left(\mathrm{d}\theta^{\,2} + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^{\,2}\right) - e^{2\nu(l)}c^2\mathrm{d}t^{\,2}.$$

Nyt koordinaatti l, joka saa arvoja $-\infty < l < \infty$, ilmaisee suoraan madonreikää pitkin liikkuvan havaitsijan etäisyyttä madonreiän kaulasta $l = 0$. Tässä madonreiän *muotoa* karakterisoi funktio $r = r(l)$. Madonreikäyhtälöt **E1**,**E2**,**E3** uuden radiaalikoordinatin l

avulla ovat nyt

$$\rho c^2 = \frac{c^4}{8\pi G}\left[-\frac{2r''}{r} + \frac{1-(r')^2}{r^2}\right] \qquad \textbf{(L1)}$$

$$\tau = \frac{c^4}{8\pi G}\left[-\frac{2\nu' r'}{r} + \frac{1-(r')^2}{r^2}\right] \qquad \textbf{(L2)}$$

$$p = \frac{c^4}{8\pi G}\left[\nu'' + (\nu')^2 + \frac{\nu' r' + r''}{r}\right] \qquad \textbf{(L3)},$$

missä siis $r = r(l), \nu = \nu(l)$ ja on merkitty $' \doteq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}$.

3.4 Eksoottinen aine

Ihmetellään näitä uusia yhtälöitä. Kun yhtälöstä **(L1)** vähennettään **(L2)**, saadaan

$$\rho c^2 - \tau = \frac{c^4}{8\pi G}\frac{1}{r}\left(\nu' r' - r''\right).$$

Madonreiän kaulassa, kun $l = 0$, tämä saa muodon

$$\rho(0)c^2 - \tau(0) = \frac{c^4}{8\pi G}\frac{1}{r(0)}\left(\nu'(0)r'(0) - r''(0)\right).$$

Avautumisehto kaulassa sanoo, että $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}|_{l=0} = 0$ (kaula on minimi). Kun lisäksi oletettiin, että madonreikä avautuu ulospäin (kaula on globaali minimi), on oltava $\frac{d^2r}{dl^2}|_{l=0} > 0$. Tästä seuraa

$$\rho(0)c^2 - \tau(0) = -\frac{c^4}{8\pi G}\frac{r''(0)}{r(0)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(0)c^2 < \tau(0)!$$

Madonreiän kaulassa (ja hyvällä olettamuksella myös hieman kaulan ympärillä) on radiaalisen jännityksen oltava suurempi kuin kokonaisenergiatiheys. Tällaisen ominaisuuden omaavaa ainetta kutsutaan *eksoottiseksi.*

Nopeudella $v \to c$ radiaalisesti madonreiän kaulan kohdalla liikkuva havaitsija mittaa massatiheyden $T_{\hat{4}'\hat{4}'} = T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} L^{\hat{\alpha}}_{\hat{4}'} L^{\hat{\beta}}_{\hat{4}'}$, missä L on Lorentz-puskumatriisi jolla siirrytään staattisen havaitsijan koordinaatistosta tasaisella nopeudella v liikkuvaan koordinaatistoon. Pilkulliset indeksit viittaavat siis liikkuvaan koordinaatistoon. Tutkimalla tätä päädytään tulokseen missä liikkuva havaitsija mittaa madonreiän kaulassa energiatiheyden

$$c^2 T_{\hat{4}'\hat{4}'} \to \gamma^2 \left[\rho(0)c^2 - \tau(0)\right] < 0,$$

siis *negatiivisen energiatiheyden!* Tämän analyysin perusteella voidaan eksoottisen aineen käsite koskemaan materiaa jonka energiatiheys on negatiivinen. Tällainen aine kuitenkin rikkoo YST:n klassiselle (normaalille) materialle pätevän *nolla-energiaehdon* $T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta > 0$. Tässä siis k^α on valonluonteinen vektori, jonka määrittelee $g_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = 0$. Voidaankin siis ajatella, että nolla-energiaehdon rikkoutuminen on välttämätön ehto avaruusajan topologian vaihtumiselle triviaalista epätriviaaliksi. (Naiivina mielikuvana kahvikuppi ilman kahvaa. Nollaenergiaehdon rikkoutuminen ”synnyttää kahvan”, eli vaihtoehtoisen reitin kahden pisteen välille, ts. madonreikä.)

Niin toivottomalta kuin ylläoleva tulos kuulostaakin, astuu kvanttikenttäteoria peliin luomaan toivoa. Esimerkiksi puhtaan kvanttielektrodynaamisen efektin, nk. Casimirin ilmiön, on havaittu synnyttävän äärimmäisen pieniä negatiivisia energiatiheyksiä ja täten rikkovan nollaenergiaehtoa. Herääkin siis kysymys, voisiko kvanttifysikaalisten tyhjiön fluktuaatioiden avulla (joihin Casimirin ilmiökin perustuu) muodostaa kulkukelpoisen madonreiän? Ainuttakaan madonreikää ei kuitenkaan ole vielä havaittu, joten kysymys jää toistaiseksi avoimeksi.

4 Käytäntö: Läpi madonreiästä

Tutkitaan seuraavaksi millaisia ehtoja on järkevä asettaa madonreiän kulkukelpoisuutta ajatellen ja lopuksi tarkastellaan kuinka madonreikä muuttuu aikakoneeksi.

4.1 Turvallisesti läpi

Oletetaan että madonreikä saataisiin aikaiseksi. Koska kyseessä on aika-avaruuden geometrinen rakenne, siis gravitaatioon liittyvä ilmiö, on syytä tutkia millaisia gravitaatioefektejä madonreiän läpi matkaava tutkija saattaa kohdata. Otetaan käyttöön YST:n geodeettinen poikkeamayhtälö

$$\frac{\delta^2 \xi^\alpha}{\delta u^2} = R^\alpha{}_{\beta\gamma\epsilon} U^\beta U^\gamma \xi^\epsilon,$$

missä $\xi^\alpha(u)$ on kahden lähekkäisen geodeesin välinen poikkeamavektori ja $U^\alpha(u)$ on tutkittavan geodeesin tangenttivektori. $\frac{\delta}{\delta u}$ on absoluuttinen derivaatta käyrää pitkin. Käyräparametrina on u. Sovelletaan tätä yhtälöä madonreikägeometriaan. Otetaan poikkeamavektoriksi mielivaltainen erotusvektori esimerkiksi ihmiskehon kahden pisteen väliltä ja asettamalla turvallisuusehdoksi

$$\left| \frac{\delta^2 \xi^\alpha}{\delta u^2} \right| \leq g_\oplus \approx 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Siis madonreiän lävitse kulkevan havainnoitsijan kehon kahden pisteen välinen kiihtyvyys ei saa ylittää Maan putoamiskiihtyvyyttä (toki esimerksi astronautit saattaisivat kestää kovempiakin g-voimia). Tämä asettaa rajoituksia geodeettisen poikkeamayhtälön oikealle puolelle, siis Riemannin tensorin komponenteille, jotka voidaan tulkita rajoituksiksi madonreikämetriikan funktiolle $\nu = \nu(r)$ sekä havainnoitsijan nopeudelle v.

4.2 Paluu menneisyyteen

Madonreiän muodostumisen lähes väistämätön seuraamus on aikakoneen syntyminen. Aikakone syntyy lähes väistämättä seuraavien ilmiöiden seurauksena:

- Suppean suhteellisuusteorian aika-dilataatio: toistensa suhteen liikkuvien havaitsijoiden kellot käyvät eri tahtia.

- Yleisen suhteellisuusteorian aika-dilataatio: erisuuruisissa gravitaatiopotentiaaleissa (gravitaatiokentässä eri syvyyksissä) olevien havainnoitsijoiden kellot käyvät eri tahtia.

- Edellä mainittujen ilmiöiden yhteisvaikutuksesta.

Seuraavassa esimerkkijärjestely. Madonreiän suut sijaitsevat syntyhetkellä avaruuden eri pisteissä, mutta lähekkäin. Oletetaan madonreiän olevan kulkukelpoinen siten, että suiden välisen matkan voi kulkea joko madonreiän läpi, tai perinteisesti 'ulkopuolista' avaruutta pitkin. Pidetään nyt toinen suu paikallaan ja pistetään toinen liikkeelle, sanotaan esimerkiksi avaruusaluksen mukana huikeaa nopeutta kauas ensimmäisestä suusta. Palatessaan taas takaisin lähelle ensimmäistä suuta, on suiden välille syntynyt Suppean suhteellisuusteorian mukainen kellonlukemaero $\Delta T > 0$. Itse madonreikä on kuitenkin (toivottavasti) säilynyt muuttumattomana koko prosessin ajan, joten *madonreiän läpi mitattuna* suiden välinen etäisyys on ollut kokoajan vakio. Erityisesti suiden läpi mitattuna siis kellonlukemaeroa ei ole syntynyt. Madonreiän läpi ripeästi astuva havaitsija astuu siis samalla myös ΔT:n verran *menneisyyteen!*

Kysymys siitä, millaisia hirvittäviä paradokseja aikakoneen syntyminen mahdollistaisi, jää täysin filosofien tehtäväksi. Kysymys siitä, onko aikakoneen syntyminen mahdollista, jää tällä erää täysin ilman vastausta. Kiinnostavin ja tärkein ongelma madonreikiä tutkittaessa on aika-avaruuden topologian muutos triviaalista joksikin monimutkaisemmaksi: tällä hetkellä ei ole olemassa valmista teoriaa joka ottaisi kantaa siihen, mikä määrää aika-avaruuden topologian. Luultavasti vastaus saadaan vasta kun gravitaation kvanttiteoria on kehitetty. Tämä maailmanhistorian merkkitapaus näyttää kuitenkin olevan kaikista ponnisteluista huolimatta vielä pelkkä haave.

Kirjallisuuslähteet

Ideoita on haettu lähteestä (1). Työn rakenne seuraa pääasiassa lähdettä (2). Lähde (3) on taannut erittäin syväluotaavaa tukea Yleistä suhteellisuusteoriaa koskevissa aiheissa. Viihdykkeenä on käytetty lähdettä (4).

1. A. Einstein & N. Rosen, *"The particle problem in General relativity"*, Phys.Rev. **48** (1935), sivut 73-77

2. M.S. Morris & K.S. Thorne, *"Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching General relativity"*, American Journal of Physics **56** (1988), sivut 395-412

3. C.W. Misner, K.S. Thorne & J.A. Wheeler, *"Gravitation"*, 1973

4. Carl Sagan, *"Contact (A Novel)"*, 1985