

函数的脾气

谈到一个人，常常能用几句话简单地概括他的特征（feature）。是高个子还是矮个子？胖子还是瘦子？圆脸还是长方脸？爱动还是爱静？沉稳还是活泼？上学还是工作？

拿到一个函数，也常常从几个方面看看它的总特征。知道了总特征，会方便我们更细致地了解它。

通常从这几个方面问它：

第一，有界（bounded）还是无界（unbounded）？比如： $\sin x$ 、 $\cos x$ 是有界的，它上不超过 1，下不小于（less than）-1。 x^2 有下界而无上界， $\tan x$ 没有上界，也没有下界。

第二，有没有单调性（monotonicity）？像 $f(x)=x^3$ ， $f(x)=x+1$ ， x 越大， $f(x)$ 也越大，这样的函数称为单调递增（increase progressively）函数。反过来， x 变大时， $f(x)$ 变小，这就是单调递减（decrease progressively）函数。常见的函数把定义域分成几段后，每段总是单调的。

第三，有没有周期性（periodicity）？如果 $T \neq 0$ ，使 $f(x+T) \equiv f(x)$ ， T 就叫做 $f(x)$ 的一个周期。通常说的周期，是指函数的最小正周期。例如， $f(x)=\sin x$ ，周期是 2π ； $f(x)=\tan x$ ，周期是 π 。知道了 $f(x)$ 是周期函数，只要研究它一个周期的性质就够了。

第四，有没有奇偶性（odevity）？若 $f(x) = f(-x)$ ，叫偶函数。 $f(-x) = -f(x)$ ，叫奇函数。 x 的绝对值、 x^2 、 x^4 、 $\cos x$ ，是偶函数。 x ， x^3 ， x^5 ， $\sin x$ ，是奇函数。对于奇函数或偶函数，只要研究 $x \geq 0$ 的情形就够了。一个函数可以既不是奇的，也不是偶的，但是它总能表示成奇函数与偶函数之和。因为任意的 $f(x)$ ， $1/2[f(x) + f(-x)]$ 总是偶的， $1/2[f(x) - f(-x)]$ 总是奇的，而 $f(x) = 1/2[f(x) - f(-x)] + 1/2[f(x) + f(-x)]$ 非奇亦（also）非偶。

在初等（primary）函数里，对于一次函数 $f(x)=ax+b$ ，当 $a>0$ 时递增， $a<0$ 时递减。幂函数（power function） $f(x)=x^k$ ，当 k 是整数时，不是奇函数就是偶函数。 e^x 和 $\ln x$ 都是递增的。三角函数都是周期函数，而且不是奇的就是偶的。

根据课文内容回答问题

- 1、我们可以从哪四个方面了解一个函数？
- 2、什么情况下函数总是单调的？
- 3、知道一个函数的周期性有什么作用？
- 4、试对 $f(x)=\sin x$ 的性质进行分析。
 - (1) 是否有界？若有界，上下界各是多少？
 - (2) 是否是周期函数，周期是多少？
 - (3) 分区间对其单调性进行说明。（只分析一个周期）
 - (4) 是奇函数还是偶函数？