确值时收敛速度较快. 但当初始值离根的精确值较远时,迭代法往往不收敛,如图 4.22 所示.

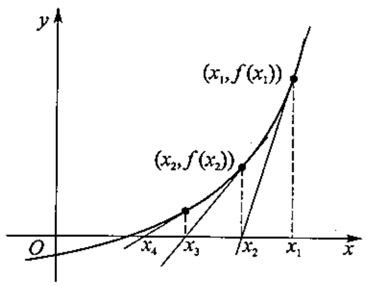

图 4.21 牛顿迭代过程

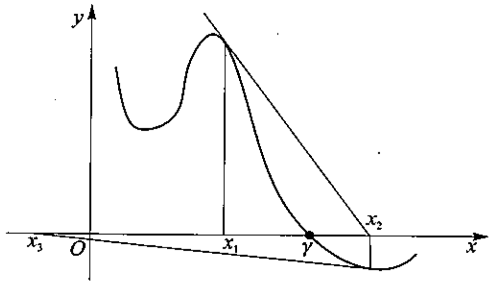

图 4.22 牛顿迭代法不收敛的情况

例 34 求方程 $\cos x=x$ 的根,精确到小数点后 6 位数字.

解 将方程变形为

$$\cos x-x=0.$$

令 $f(x)=\cos x-x$,则 $f'(x)=-\sin x-1$,代入式(4.9)可得

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\cos x_n-x_n}{-\sin x_n-1}=x_n+\frac{\cos x_n-x_n}{\sin x_n+1}.$$

为了寻找一个适当的初始值 x_0,由曲线 $y=\cos x$,$y=x$ 的交点的横坐标 $x=1$ 作为初始值 x_0,即令 $x_0=1$. 这样由式(4.9)可得

$$x_1\approx 0.750\ 363\ 87,$$
$$x_2\approx 0.739\ 112\ 89,$$
$$x_3\approx 0.739\ 085\ 13,$$
$$x_4\approx 0.739\ 085\ 13.$$

若取 $x_0=0.75$,则由式(4.9)可得

$$x_1\approx 0.739\ 111\ 14,$$
$$x_2\approx 0.739\ 085\ 13,$$
$$x_3\approx 0.739\ 085\ 13.$$

可以看出来,使用第二种初始值 x_0,计算步骤更少. 所以用牛顿迭代法时,要注意初始值 x_0 的选取. 选取合适的初始值 x_0,可以提高计算的效率.

习题 4.6(7)

1. 使用牛顿迭代法求下列根式的估计值,结果精确到小数点后 8 位.

(1) $\sqrt[3]{30}$; (2) $\sqrt[7]{1\ 000}$.

2. 使用牛顿迭代法估计下列方程的所有的根,结果精确到小数点后 6 位.

(1) $x^4=1+x$; (2) $e^x=3-2x$; (3) $\cos x=\sqrt{x}$; (4) $\tan x=\sqrt{1-x^2}$; (5) $\sqrt{x+3}=x^2$.

3. 方程 $x^3-3x+6=0$,为什么以 $x_1=1$ 作为初始估计值时牛顿迭代法会失效?

4. 粮仓由一个高 30 米的圆柱体和一个半球形屋顶组成. 要使粮仓容积达到 15 000 米³(包括屋顶部分),则粮仓的半径应该是多少?

第 5 章 不定积分

5.1 不定积分的背景、定义及性质

5.1.1 不定积分的引入

在前面导数内容的学习中,我们学会了如何由物体从 0 到 t 时刻走过的路程函数 $s(t)$ 来求时刻 t 的速度 $v(t)$. $v(t)$ 可以通过对 $s(t)$ 求导得到,即

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

现在我们的问题是:如果物体在任意时刻的速度 $v(t)$ 是已知的,如何求出前 t 时刻物体所走过的路程?

要解决上述问题,实际上是去找这样一个函数 $s(t)$,使得其导数为已知的函数 $v(t)$. 如果这样的函数 $s(t)$ 存在,则称之为函数 $v(t)$ 的一个原函数.

下面给出原函数的数学定义.

定义 1 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的一个函数. 如果存在一个函数 $F(x)$,使得

$$F'(x)=f(x)$$

对所有 $x\in I$ 成立,则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个**原函数**.

注:由导数的性质可知,如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则对任意常数 C,$F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数;反过来,如果 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数,则 $[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$,故存在常数 C,使得

$$F(x)=G(x)+C.$$

因此,我们把 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的全体原函数,或者叫不定积分.

定义 2 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的一个函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数,则称 $F(x)+C$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**不定积分**,记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,\quad \forall C\in\mathbf{R}.$$

其中 $f(x)$ 称为**被积函数**,x 为**积分变量**,$\int$ 为**积分号**.

注:函数的不定积分计算和求导计算互为逆运算:对函数 $f(x)$ 求不定积分可得到原函数,而对原函数作求导计算即得 $f(x)$ 的表达式.

利用求导公式,可得到如下的基本积分公式:

(1) $\int k\mathrm{d}x=kx+C$;

(2) $\int x^\alpha\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad \alpha\in R,\alpha\neq-1$;

(3) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;

(4) $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$;

(5) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 1$;

(6) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$;

(7) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$;

(8) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$;

(9) $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$;

(10) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$;

(11) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$;

(12) $\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \arctan x + C$;

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$.

其中 C 为常数.

5.1.2 不定积分的性质

在不定积分的定义中,假设 $f(x)$ 的原函数存在,从而可以写出 $f(x)$ 的不定积分. 那么,是不是所有函数都有原函数呢? 答案是否定的. 下面的定理给出了不定积分存在的充分条件.

定理 1(原函数存在定理) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,则存在可导函数 $F(x)$,使得 $F'(x) = f(x)$ 对所有 $x \in I$ 成立.

由不定积分的定义容易推导出如下线性运算性质:

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上都存在原函数,则对于任意的实数 a,b,有

$$\int [af(x) \pm bg(x)]\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x \pm b\int g(x)\mathrm{d}x.$$

例 1 求下列函数的不定积分.

(1) $f(x) = \sec^2 x + \frac{2}{x}$;

(2) $f(x) = (1+\sqrt{x})^2$;

(3) $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin x}$.

解 利用不定积分的线性性质,并借助基本积分公式,可以求得所给函数的不定积分.

(1) $\int \left(\sec^2 x + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \int \sec^2 x \mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \tan x + 2\ln|x| + C$.

(2) $\int (1+\sqrt{x})^2 \mathrm{d}x = \int (1 + 2\sqrt{x} + x)\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x + 2\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + \int x\mathrm{d}x$

$$= x + 2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C = x + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$$

(3) $\int \frac{\sin(2x)}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int 2\cos x \mathrm{d}x = 2\int \cos x \mathrm{d}x = 2\sin x + C$.

例 2 设有一个静止的质点,零时刻在外力的影响下开始做直线运动. 假设知道时刻 t 的运动速度可以表示为函数 $v(t) = t^2 + 2t + 3$,求质点在前 t 时刻所走的路程.

解 设质点经过时刻 t 所走的路程为 $s(t)$,则 $s(t)$ 为 $v(t)$ 的一个原函数. 因为

$$\int v(t)\mathrm{d}t = \int (t^2 + 2t + 3)\mathrm{d}t = \int t^2 \mathrm{d}t + 2\int t\mathrm{d}t + \int 3\mathrm{d}t$$

$$= \frac{t^3}{3} + 2\cdot\frac{t^2}{2} + 3t + C = \frac{t^3}{3} + t^2 + 3t + C,$$

故存在一个常数 C,使得

$$s(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 + 3t + C.$$

由题意可知,$s(0) = 0$,将其代入上式,求得 $C = 0$.

因此,质点在 t 时间段内走过的路程为 $s(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 + 3t$.

习题 5.1

1. 通过求导验证下列等式.

(1) $\int x\sin x \mathrm{d}x = \sin x - x\cos x + C$;

(2) $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\mathrm{d}x = \ln|x^2+x| + C$.

2. 计算不定积分.

(1) $\int (1+x)(2+x^2)\mathrm{d}x$; (2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$; (3) $\int (2x + \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; (5) $\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$; (6) $\int \frac{1-\cos^2 x}{\sin x}\mathrm{d}x$.

3. 设曲线 $y = f(x)$ 经过点 $(1,1)$,且曲线上任意一点处的斜率等于该点横坐标的平方,求曲线方程.

5.2 换元法

在上一节中,我们借助不定积分的性质和基本积分公式,结合函数的初等变换来求解函数的不定积分. 那么,是不是所有的函数都可以通过这种方法求解不定积分呢?

例如,利用基本积分公式 $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$,是否能得到

$$\int \sin(2x)\mathrm{d}x = -\cos(2x) + C?$$

上述答案是错误的. 这是因为,由复合函数的求导法则,可以验证 $[-\cos(2x)+C]'=2\sin(2x)\neq\sin(2x)$,即 $-\cos(2x)+C$ 不是 $\sin(2x)$ 的原函数. 因此,直接套用公式的方法在这里失效. 事实上,大多数的函数(即使是初等函数)都需要引进积分的一些方法和技巧来进行求解. 下面先来介绍不定积分计算中常用的换元法.

5.2.1 第一类换元法

复合函数求导法则告诉我们,对于复合函数 $F(g(x))$,若 $F'(x)=f(x)$,则 $[F(g(x))]'=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$. 由于不定积分和求导运算互为逆运算,故得到

$$F(g(x))+C=\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x.$$

令 $u=g(x)$,则 $F(g(x))+C=F(u)+C=\int F'(u)\mathrm{d}u=\int f(u)\mathrm{d}u$,所以有

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u.$$

这就是不定积分的第一类换元法.

定理 1(第一类换元公式) 如果 $u=g(x)$ 是一个值域在区间 I 上的可导函数,且 $f(x)$ 在区间 I 上连续,则

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u.$$

注: 换元公式的实质是将一个相对复杂的积分简化为基本的积分计算,其途径是将原始的积分变量 x 转换为另一个变量 u,而 u 是与 x 有关的函数.

有了换元公式,就能够解决更多的函数求不定积分的问题.

例 1 计算不定积分 $\int \sin 2x\mathrm{d}x$.

解 方法 1:

令 $u=2x$,则 $\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$. 所以,

$$\int\sin 2x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\sin u\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\cos u+C=-\frac{1}{2}\cos 2x+C.$$

方法 2:

令 $u=\sin x$,则 $\mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x$. 所以,

$$\int\sin 2x\mathrm{d}x=\int 2\sin x\cdot\cos x\mathrm{d}x=\int 2u\mathrm{d}u=u^2+C=\sin^2x+C.$$

方法 3:

$$\int\sin 2x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\sin 2x\mathrm{d}(2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C.$$

注 1: $-\frac{1}{2}\cos 2x+C=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2x)+C=\sin^2x+\left(C-\frac{1}{2}\right)$,设 $C-\frac{1}{2}=C_1$,则方法 1 的结果可变成方法 2 的结果形式.

注 2: 方法 3 的解法也称为**凑微分法**,本小节的很多例题都可以用这种方法求解.

例 2 计算不定积分 $\int\frac{1}{(3x+1)^2}\mathrm{d}x$.

解 令 $u=3x+1$,则 $\mathrm{d}u=3\mathrm{d}x$.

$$\int\frac{1}{(3x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{3}=\frac{1}{3}\int u^{-2}\mathrm{d}u=-\frac{1}{3u}+C=-\frac{1}{3(3x+1)}+C.$$

例 3 计算 $\int\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x, a\neq 0$.

解 因为 $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$,故

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x+a}\mathrm{d}x\right).$$

令 $u=x-a$,则 $\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\ln|u|+C=\ln|x-a|+C_1$. 类似可求得

$$\int\frac{1}{x+a}\mathrm{d}x=\ln|x+a|+C_2.$$

令 $C=C_1+C_2$,则 $\int\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C_1+C_2\right)=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$

例 4 计算 $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$.

解 令 $u=x^2$, $\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$,故 $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{e^u}{2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int e^u\mathrm{d}u=\frac{e^u}{2}+C=\frac{e^{x^2}}{2}+C.$

例 5 计算 $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 $u=1-x^2\Rightarrow\mathrm{d}u=-2x\mathrm{d}x$.

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int-\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}=-\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{u}+C=-\sqrt{1-x^2}+C.$$

例 6 计算 $\int x^2\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$.

解 由 $u=1+x$ 可知 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$, $x=u-1$. 因此

$$\begin{aligned}&\int x^2\sqrt{1+x}\mathrm{d}x\\&=\int(u-1)^2\sqrt{u}\mathrm{d}u\\&=\int\left(u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C\\&=\frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

例 7 计算 $\int\frac{1}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{1+(x-1)^2}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{1+(x-1)^2}\\&=\arctan(x-1)+C.\end{aligned}$$

例 8 计算 $\int \tan x\mathrm{d}x$.

解 因为 $\int \tan x\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$,所以引入 $u=\cos x,\mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x$,

$$\int \tan x\mathrm{d}x=-\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C=\ln|\sec x|+C.$$

类似地,可以求得 $\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$.

例 9 计算 $\int \cos^3 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \cos^3 x\mathrm{d}x=\int \cos^2 x\cdot\cos x\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2 x)\cos x\mathrm{d}x$.

将 $u=\sin x,\mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x$ 代入,上述积分变为

$$\int(1-u^2)\mathrm{d}u=u-\frac{u^3}{3}+C=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

例 10 计算 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x\\&=\int\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos^2 2x}{4}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\left(\frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $u=2x$,则 $\int\frac{\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos u}{4}\mathrm{d}u=\frac{\sin u}{4}+C_1=\frac{\sin 2x}{4}+C_1$.

类似可得,$\int\frac{\cos 4x}{8}\mathrm{d}x=\frac{\sin 4x}{32}+C_2$.

因此,$\int \sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$.

例 11 计算 $\int \sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x=\int \sin^2 x\cos^2 x\cdot\sin x\mathrm{d}x=\int(1-\cos^2 x)\cos^2 x\cdot\sin x\mathrm{d}x$.

令 $u=\cos x$,则
$$\begin{aligned}\text{上式}&=-\int(1-u^2)u^2\mathrm{d}u\\&=-\int(u^2-u^4)\mathrm{d}u\\&=-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+C\\&=-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+C.\end{aligned}$$

注:对于 $\int \sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$ 型积分,求解步骤为:若 m 为奇数,则采用 $u=\cos x$ 换元,并利用

公式 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ 对被积函数进行转换;若 n 为奇数,则可采用 $u=\sin x$ 换元;若 m 和 n 都是偶数,则先利用公式 $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ 将被积函数转换成关于 $\cos^k 2x$ 的线性组合的方式,然后根据 k 的奇偶性进一步换元.

关于 $\int \tan^m x\sec^n x\mathrm{d}x$ 型的积分,根据 m 和 n 的奇偶性,也能得到此类积分的一般算法.先来看两个例子.

例 12 计算 $\int \tan^3 x\sec x\mathrm{d}x$.

解 令 $u=\sec x$,则 $\mathrm{d}u=\sec x\tan x\mathrm{d}x$.由于 $\tan^2 x=\sec^2 x-1$,所以
$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\sec x\mathrm{d}x&=\int \tan^2 x\tan x\sec x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\tan x\sec x\mathrm{d}x\\&=\int(u^2-1)\mathrm{d}u\\&=\frac{u^3}{3}-u+C=\frac{\sec^3 x}{3}-\sec x+C.\end{aligned}$$

例 13 计算 $\int \sec^4 x\tan x\mathrm{d}x$.

解 令 $u=\tan x$,则 $\mathrm{d}u=\sec^2 x\mathrm{d}x$,
$$\begin{aligned}\int \sec^4 x\tan x\mathrm{d}x&=\int \sec^2 x\cdot\tan x\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x\\&=\int(1+\tan^2 x)\cdot\tan x\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x\\&=\int(1+u^2)u\mathrm{d}u\\&=\int(u+u^3)\mathrm{d}u\\&=\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{4}+C\\&=\frac{\tan^2 x}{2}+\frac{\tan^4 x}{4}+C.\end{aligned}$$

注:对于 $\int \tan^m x\sec^n x\mathrm{d}x$ 型积分,求解步骤为:若 m 为奇数,则采用 $u=\sec x$ 换元,并利用公式 $\tan^2 x=\sec^2 x-1$ 对被积函数进行转换;若 n 为偶数,则可采用 $u=\tan x$ 换元,并利用公式 $\sec^2 x=\tan^2 x+1$ 对被积函数进行转换.

例 14 计算 $\int \sin x\cos 2x\mathrm{d}x$.

解 因为 $\sin x\cos 2x=\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)$,故原积分可写为
$$\frac{1}{2}\int \sin 3x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x+C.$$

注:对于 $\int \sin mx\sin nx\mathrm{d}x$,$\int \sin mx\cos nx\mathrm{d}x$ 或 $\int \cos mx\cos nx\mathrm{d}x$ 型积分,可以先通过积化和差公式将被积函数进行转换,然后再通过换元得到不定积分.

5.2.2 第二类换元法

第一换元法又称为"凑微分法",其实质是通过凑出中间变量 $u=g(x)$,从而有 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u$ 的形式,然后利用右端积分求出左端积分. 反过来,如果通过等式 $x=\varphi(u)$ 将积分 $\int f(u)\mathrm{d}u$ 转化成 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的形式再进行积分计算,则这种方法称为第二类换元法.

定理 2(第二类换元公式) 设函数 $x=\varphi(u)$ 在区间 I 内单调且有连续导数,$\varphi'(u)\neq 0$. 记 $J=\{x \mid x=\varphi(u), u\in I\}$,且函数 $f(x)$ 在 J 上连续,则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u\right]\Big|_{u=\varphi^{-1}(x)},$$

其中 $\varphi^{-1}(x)$ 为 $\varphi(x)$ 的反函数.

注:第二类换元法中最常用的是三角函数换元. 具体来说,如果被积函数含有形如 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的式子,则可采用 $x=a\sin u, -\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$ 进行换元,$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos u$;如果被积函数含有形如 $\sqrt{a^2+x^2}$ 的式子,则可采用 $x=a\tan u, -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$ 进行换元,$\sqrt{a^2+x^2}=a\sec u$;如果被积函数含有形如 $\sqrt{x^2-a^2}$ 的式子,则可采用 $x=a\sec u, 0\leqslant u<\frac{\pi}{2}$ 或 $\pi\leqslant u<\frac{3\pi}{2}$ 进行换元,$\sqrt{a^2+x^2}=a|\sec u|$.

下面我们就来看一些有关此类换元的例子.

例 15 求 $\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=\sin u, -\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$,则

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 u}=\sqrt{\cos^2 u}=\cos u, \mathrm{d}x=\cos u\mathrm{d}u$,所求积分化为

$$\begin{aligned}\int\cos u\cdot\cos u\mathrm{d}u&=\int\cos^2 u\mathrm{d}u\\&=\int\frac{1+\cos 2u}{2}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2u)\mathrm{d}u\\&=\frac{u}{2}+\frac{1}{4}\sin 2u+C\\&=\frac{u}{2}+\frac{1}{2}\sin u\cos u+C.\end{aligned}$$

由于 $x=\sin u, -\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以 $u=\arcsin x$,且 $\cos u=\sqrt{1-x^2}$. 于是所求积分 $=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$.

例 16 计算 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=a\tan u, -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$,则

$$\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(1+\tan^2 u)}=\sqrt{a^2\sec^2 u}=a\sec u, \mathrm{d}x=a\sec^2 u\mathrm{d}u,$$

原积分化为

$$\int\frac{1}{a\sec u}a\sec^2 u\mathrm{d}u=\int\sec u\mathrm{d}u.$$

因为 $\sec u=\frac{1}{\cos u}=\frac{\sin^2 u+\cos^2 u}{\cos u}=\frac{\sin^2 u}{\cos u}+\cos u$,所以

$$\int\sec u\mathrm{d}u=\int\frac{\sin^2 u}{\cos u}\mathrm{d}u+\int\cos u\mathrm{d}u.$$

而 $\int\frac{\sin^2 u}{\cos u}\mathrm{d}u=\int\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}\cdot\cos u\mathrm{d}u$,则采用第一类换元 $t=\sin u$ 可将此积分化为

$$\begin{aligned}\int\frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t&=\int\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)\mathrm{d}t=\int\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t+\int\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t-\int\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln|1+t|+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right|+C.\end{aligned}$$

我们借助如图 5.1 所示的辅助三角形来计算 $\sin u$ 的表达式.

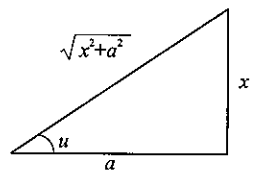

图 5.1

因为 $\tan u=\frac{x}{a}, -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$,所以由图像可知,$\sin u=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$,所求积分为

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}\right|+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}\right|+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{x^2+a^2}+x)^2}{(\sqrt{x^2+a^2}-x)(\sqrt{x^2+a^2}+x)}\right|+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{x^2+a^2}+x)^2}{a^2}\right|+C\\&=\ln|\sqrt{x^2+a^2}+x|+C-\ln|a|\\&=\ln|\sqrt{x^2+a^2}+x|+C_1.\end{aligned}$$

注:类似于计算 $\int\sec u\mathrm{d}u$ 的方法,可以得到 $\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$.

例 17 计算 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x, a>0$.

解 令 $x=a\sec u$,其中 $0<u<\frac{\pi}{2}$ 或 $\pi<u<\frac{3\pi}{2}$,对应的 x 的范围分别是 $x>a$ 和 $x<-a$.

我们先来讨论 $x>a$ 的情况.此时

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{a\sqrt{\sec^2 u-1}}a\tan u\sec u\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{1}{a\tan u}a\tan u\sec u\mathrm{d}u \\ &= \int \sec u\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right|+C=\ln|\sec u+\tan u|+C.\end{aligned}$$

借助图 5.2 中的辅助三角形可知 $\sin u=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$,上式化为

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}}\right|+C=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C_1.$$

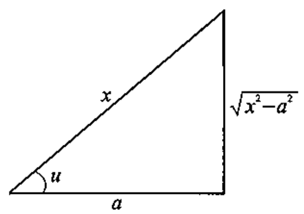

图 5.2

若 $x<-a$,则令 $t=-x\Rightarrow t>a$,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\mathrm{d}t=-\ln|t+\sqrt{t^2-a^2}|+C_2 \\ &= -\ln|x-\sqrt{x^2-a^2}|+C_2 \\ &= \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\right|+C_2 \\ &= \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C_3.\end{aligned}$$

综上所述,$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=-\int \frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\mathrm{d}t=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$.

例 18 求 $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{(x+1)^2+1}$,所以令 $x+1=\tan u$,$-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$,原积分化为

$$\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\int \tan u\sec u\cdot\sec^2 u\mathrm{d}u=\int \tan u\sec^3 u\mathrm{d}u.$$

借助换元 $t=\sec u$,有

$$\int \tan u\sec^3 u\mathrm{d}u=\int t^2\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\sec^3 u}{3}+C=\frac{(\sqrt{1+\tan^2 u})^3}{3}+C=\frac{(x^2+2x+2)^{\frac{3}{2}}}{3}+C.$$

例 19 计算 $\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x$.

解 $\sqrt{9-4x^2}=3\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}$,故令 $\frac{2x}{3}=\sin u$,$-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$,所求积分化为

$$\int \frac{\frac{3\sin u}{2}}{3\cos u}\frac{3\cos u}{2}\mathrm{d}u=\int \frac{3}{4}\sin u\mathrm{d}u=-\frac{3}{4}\cos u+C.$$

借助辅助三角形可求得 $\cos u=\frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}$,因此所求积分为 $-\frac{\sqrt{9-4x^2}}{4}+C$.

有些积分也可通过非三角函数形式的第二类换元法来求得.

例 20 求 $\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x, a>0$.

解 令 $x=au$,则

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\arctan u+C=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

例 21 计算 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x, a>0$.

解 令 $x=au$,则

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u=\arcsin u+C=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

现在,我们将本节计算出的一些基本函数的不定积分添加到基本积分表中:

(14) $\int \tan x\mathrm{d}x=\ln|\sec x|+C$;

(15) $\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$;

(16) $\int \sec u\mathrm{d}u=\ln|\sec u+\tan u|+C$;

(17) $\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$;

(18) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$;

(19) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$;

(20) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$;

(21) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C$.

其中 C 为常数.

习题 5.2

1. 利用所给的换元法求不定积分.

(1) $\int x(1+x^2)^{10}\mathrm{d}x, u=1+x^2$；　(2) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x, u=\sqrt{x}$；

(3) $\int e^{\tan x}\sec^2 x\mathrm{d}x, u=\tan x$；　(4) $\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}\mathrm{d}x, u=\sqrt{x^3+x}$.

2. 采用合适的换元法求下列不定积分.

(1) $\int \frac{x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x$；　(2) $\int x\sin x^2\mathrm{d}x$；　(3) $\int \frac{1}{(3-2x)^2}\mathrm{d}x$；

(4) $\int (x-2)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$；　(5) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x$；　(6) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$；　(8) $\int \sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$；　(9) $\int \sin^5 x\cos^3 x\mathrm{d}x$；

(10) $\int \tan^3 x\sec^2 x\mathrm{d}x$；　(11) $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$　(12) $\int \frac{x+1}{\sqrt{4+x^2}}\mathrm{d}x$；

(13) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}\mathrm{d}x$；　(14) $\int x\sqrt{x^2-4x+5}\mathrm{d}x$.

5.3 分部积分法

上一节中介绍的换元法，使可求积分的范围扩大了很多，但仍有很多不定积分如 $\int \arcsin x\mathrm{d}x$, $\int \ln x\mathrm{d}x$ 等无法用前面的技巧得到，因此在本节将介绍用于不定积分计算的分部积分法.

设函数 $u(x)$，$v(x)$ 具有连续的一阶导数，根据求导的四则运算法则，有

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

我们知道，积分可看作是求导的逆运算，因此 $u(x)v(x)$ 可看作 $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ 的原函数，用积分表示即为

$$u(x)v(x)=\int[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]\mathrm{d}x=\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x+\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

上式也可写成如下形式：

$$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x, \tag{5.1}$$

或简写为微分形式

$$\int v\mathrm{d}u=uv-\int u\mathrm{d}v. \tag{5.2}$$

式(5.1)和式(5.2)称为不定积分的**分部积分公式**.

分部积分法的实质是将一个较难求解的不定积分 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 转化为求解一个相对容

易的积分 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$. 应用此方法的重点是将被积函数进行适当的分解，表示为 $u'(x)v(x)$ 的形式. 所谓"适当的"，这里主要是指两个方面：一是要求 $u'(x)$ 的原函数可求；二是 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 比 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 更容易计算. 一般来说，选择作为 $v(x)$ 的函数优先级为：反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数和三角函数. 例如，若被积函数为对数函数和三角函数的乘积，则将对数函数设为 $v(x)$，令三角函数为 $u'(x)$，然后代入分部积分公式进行计算.

例 1　计算 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解　因为被积函数是三角函数 $\cos x$ 和幂函数 x 的乘积，因此根据优先性原则，令 $u'(x)=\cos x$，$v(x)=x$，被积函数写成 $u'(x)v(x)$. $v'(x)=1$，取 $u'(x)$ 的原函数 $u(x)=\sin x$，利用分部积分公式(5.1)，有

$$\begin{aligned}\int x\cos x\mathrm{d}x &= u(x)v(x)-\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x\\ &= x\sin x-\int \sin x\cdot 1\mathrm{d}x\\ &= x\sin x+\cos x+C,\end{aligned}$$

或利用分部积分公式(5.2)化为

$$uv-\int u\mathrm{d}v=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C.$$

注：如果将 $u'(x)=x$，$v(x)=\cos x$ 代入分部积分公式，我们发现

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\cos x+\int\frac{x^2}{2}\sin x\mathrm{d}x,$$

而 $\int\frac{x^2}{2}\sin x\mathrm{d}x$ 比所求积分更难求出来，所以仍然无法求出原来的积分. 由此可以看出，$u'(x)$ 和 $v(x)$ 的选择有时是分部积分法成功与否的关键.

例 2　计算 $\int x^2e^x\mathrm{d}x$.

解　被积函数是指数函数和幂函数的乘积，因此我们令 $u'(x)=e^x$，$v(x)=x^2$. 取 $u(x)=e^x$，$v'(x)=2x$，原积分化为

$$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=x^2e^x-\int 2xe^x\mathrm{d}x.$$

对于积分 $\int 2xe^x\mathrm{d}x$，再次应用分部积分公式，此时选择 $u'(x)=e^x$，$v(x)=2x$，则 $u(x)=e^x$，$v'(x)=2$，且

$$\int 2xe^x\mathrm{d}x=2xe^x-\int 2e^x\mathrm{d}x.$$

此时所求积分可写成

$$\begin{aligned}&x^2e^x-\left(2xe^x-\int 2e^x\mathrm{d}x\right)\\ &=x^2e^x-2xe^x+\int 2e^x\mathrm{d}x\\ &=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C\end{aligned}$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

例 3 计算 $\int \ln x \mathrm{d}x$.

解 首先,将被积函数写成 $\ln x \cdot 1$,并令 $u'(x)=1, v(x)=\ln x$,则 $u(x)=x, v'(x)=\frac{1}{x}$,

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$$

例 4 求 $\int \arctan x \mathrm{d}x$.

解 和上一题目类似,令 $u'(x)=1, v(x)=\arctan x$,则 $u(x)=x, v'(x)=\frac{1}{1+x^2}$,且

$$\int \arctan x \mathrm{d}x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

积分 $\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 可以通过换元 $u = 1+x^2$ 得到

$$\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

因此,所求积分为 $\int \arctan x \mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1$,其中 $C_1 = -C$.

例 5 计算 $\int e^x \sin x \mathrm{d}x$.

解 取 $u'(x)=e^x, v(x)=\sin x$,则 $u(x)=e^x, v'(x)=\cos x$,

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x.$$

我们发现,经过分部积分,求 $e^x \sin x$ 的不定积分化为求 $e^x \cos x$ 的不定积分,因此可对 $\int e^x \cos x \mathrm{d}x$ 再次应用分部积分. 此时,取 $u'(x)=e^x, v(x)=\cos x$,

$$\int e^x \cos \mathrm{d}x = e^x \cos x + \int e^x \sin x \mathrm{d}x,$$

所求积分可写成如下形式:

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \mathrm{d}x.$$

从中可解得

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C.$$

注 1:实际上,在最后对关于所求积分的方程进行求解时,解的形式中没有任意常数 C,即我们解出的只是被积函数的一个原函数. 结合不定积分的定义,需要在解的表达式后面加上这个常数 C.

注 2:用类似的方法可以求出 $e^x \cos x$ 的不定积分.

习题 5.3

1. 求下列不定积分.

(1) $\int x\arctan x \mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$; (3) $\int x^3\cos(2x)\mathrm{d}x$;

(4) $\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$; (5) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$; (6) $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$;

(7) $\int e^{3x}\sin^2 x\mathrm{d}x$; (8) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

2. 设 n 为正整数,求积分 $\int \ln^n x\mathrm{d}x$.

3. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x^2},求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

5.4 几种特殊函数的不定积分*

前面已经介绍了计算不定积分的常用方法——换元法和分部积分法,本节介绍有理函数的积分,此类积分的计算可以遵循一定的规律. 另外,还介绍其他几种三角函数和无理函数的积分,它们都可以通过换元化为有理函数的积分形式.

5.4.1 有理函数的不定积分

所谓**有理函数**,是指形如 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的函数,其中 $P(x), Q(x)$ 为实系数多项式,且两者没有公因式. 特别地,如果分子 $P(x)$ 的次数大于分母 $Q(x)$ 的次数,则称 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为**真分式**,否则称之为**假分式**. 利用多项式的除法,可以将一个假分式表示为一个多项式和一个真分式之和的形式.

例 1 将 $\frac{x^4+2x+3}{x^2+1}$ 化成多项式和真分式的和的形式.

解 此处用到多项式的除法,其方法和一般除法类似:将 x^4+2x+3 看作被除数,x^2+1 看作除数,然后列竖式.

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad x^2-1 \\ \hline x^2+1 & x^4 + \quad\quad 2x+3 \\ & x^4+x^2 \\ \hline & \quad -x^2+2x+3 \\ & \quad -x^2 \quad\quad -1 \\ \hline & \quad\quad\quad 2x+4 \end{array}$$

计算结果商为 x^2-1,余数为 $2x+4$,因此所对应的有理函数 $\frac{x^4+2x+3}{x^2+1}$ 可分解为多项式 x^2-1 和真分式 $\frac{2x+4}{x^2+1}$ 的和.

因此,研究有理函数的积分实际上只需要研究真分式的积分即可,多项式部分利用基本积分表和积分的四则运算法则即可.

由代数学上的基本定理可知,对于任何一个多项式 $Q(x)$,都可以分解为形如 $(ax+b)^m$ 或者 $(px^2+qx+r)^n$ 的简单分式乘积的形式,其中 m,n 为正整数,$q^2-4pr<0$.

下面根据有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的分母因式分解后的形式来研究不定积分.

第一种情况：$Q(x)$可分解为不同线性因子的乘积形式，即

$$Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n).$$

此时，可以将$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$表示为

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_n}{a_nx+b_n},$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 均为实数. 上式右端各分式称为部分分式.

根据不定积分的性质，把对有理函数的积分转化为对各个部分分式的积分. 通过第一类换元，可以得到

$$\int\frac{A_i}{a_ix+b_i}\mathrm{d}x=\frac{A_i}{a_i}\ln|a_ix+b_i|+C_i.$$

可以看出，对上述有理函数$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$积分的关键，是将它写成部分分式和的形式. 各个部分分式的分母通过对 $Q(x)$进行因式分解就可以得到，那么如何求解 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 呢？可以通过下面的例子来研究，我们把这种方法称为待定系数法.

例 2 求$\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

解 因为 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$，被积函数的部分分式展开为

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}.$$

对上式右端通分后可得

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{x^2-5x+6}=\frac{(A+B)x-(3A+2B)}{x^2-5x+6}.$$

比较左右两端函数分子 x 的各次幂的系数，得到

$$\begin{cases}A+B=1,\\3A+2B=1.\end{cases}$$

求解上述方程组得 $A=-1,B=2$. 故

$$\int\frac{x-1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x=\int\frac{-1}{x-2}\mathrm{d}x+\int\frac{2}{x-3}\mathrm{d}x=-\ln|x-2|+2\ln|x-3|+C.$$

注：也可以通过如下方式求解待定系数 A 和 B：因为 $x-1=A(x-3)+B(x-2)$对所有 x 都成立，则将 $x=2$ 代入得 $A=-1$，将 $x=3$ 代入得 $B=2$.

第二种情况：$Q(x)=(a_1x+b_1)^{r_1}(a_2x+b_2)^{r_2}\cdots(a_nx+b_n)^{r_n}$，即分解式中线性因子 a_ix+b_i 出现 r_i 次.

此时对应于因子$(a_ix+b_i)^{r_i}$的部分分式分解为

$$\frac{A_1}{a_ix+b_i}+\frac{A_2}{(a_ix+b_i)^2}+\cdots+\frac{A_{r_i}}{(a_ix+b_i)^{r_i}},$$

有理函数$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$可写成各因子对应的部分分式展开的和形式，A_k 通过待定系数法得到. 计算积分时各个部分分式利用分母因式换元 $u=ax+b$ 来得到相应的不定积分.

例 3 求$\displaystyle\int\frac{x^4}{x^3-x^2-x+1}\mathrm{d}x$.

解 被积函数写成如下多项式和真分式之和的形式：

$$\frac{x^4}{x^3-x^2-x+1}=x+1+\frac{2x^2-1}{x^3-x^2-x+1}.$$

对真分式的分母进行因式分解得 $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$，故

$$\begin{aligned}\frac{2x^2-1}{x^3-x^2-x+1}&=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}\\&=\frac{A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}\\&=\frac{(A+C)x^2+(B-2C)x+(B+C-A)}{(x-1)^2(x+1)}.\end{aligned}$$

比较等式两端分子有

$$\begin{cases}A+C=2\\B-2C=0\\B+C-A=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{7}{4},\\B=\dfrac{1}{2},\\C=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4}{x^3-x^2-x+1}\mathrm{d}x&=\int(x+1)\mathrm{d}x+\int\frac{7}{4(x-1)}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{2(x-1)^2}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{4(x+1)}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}+x+\frac{7}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln|x+1|+C.\end{aligned}$$

第三种情况：$Q(x)$的因式分解表达式中含有二次函数 px^2+qx+r，其中 $q^2-4pr<0$，且各二次项不重复.

此时有理函数部分分式展开中对应于二次项 px^2+qx+r 的部分为

$$\frac{Ax+B}{px^2+qx+r}.$$

对这部分进行不定积分计算时，一般先将分母进行配方. 不妨设 $p>0$，则

$$px^2+qx+r=p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2+r-\frac{q^2}{4p}.$$

利用换元 $u=x+\dfrac{q}{2p}$将被积函数化为

$$\frac{Au+B-\dfrac{Aq}{2p}}{pu^2+r-\dfrac{q^2}{4p}}=\frac{Au}{pu^2+r-\dfrac{q^2}{4p}}+\frac{B-\dfrac{Aq}{2p}}{p}\cdot\frac{1}{u^2+\dfrac{r}{p}-\dfrac{q^2}{4p^2}}.$$

对上式右端第一部分，可以进行换元 $v=pu^2+r-\dfrac{q^2}{4p}$得到原函数；对第二部分，可以利用基本积分表中的(20)直接得到.

例 4 求$\displaystyle\int\frac{x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\frac{x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}&=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\\&=\frac{(A+B)x^2+(A+B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2+x+1)},\end{aligned}$$

因此，$\begin{cases}A+B=0,\\A+B+C=1,\\A+C=2.\end{cases}$

求解上述方程组可知，$A=C=1,B=-1$.

因为 $\int\frac{-x+1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{-x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$，经过换元 $u=x+\frac{1}{2}$，并借助基本积分表，此积分化为

$$\int\frac{-u+\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{2u}{u^2+\frac{3}{4}}du+\frac{3}{2}\int\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}du$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}u}{2}+C_1$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+C_1.$$

因为 $\int\frac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+C_2$，则原积分为

$$\int\frac{x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$$
$$=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{-x+1}{x^2+x+1}dx$$
$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+C,$$

其中 $C=C_1+C_2$.

第四种情况：$Q(x)$ 进行因式分解后，含有因子 $(px^2+qx+r)^n$，$q^2-4pr<0$，$n\geqslant 2$ 为正整数.

对应于此因子的部分分式展开形如

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r}+\frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(px^2+qx+r)^n}.$$

计算不定积分时与第三种情况类似，首先对分母进行配方后换元，使得部分分式变为 $\frac{Bu}{(pu^2+A)^i}+\frac{C}{(u^2+a^2)^i}$ 的形式. 对第一部分分式采用换元 $v=pu^2+A$，对第二部分分式采用换元 $u=a\tan t$，分别得到原函数.

例 5 计算不定积分 $\int\frac{2x+3}{x(x^2+1)^2}dx$.

解 $\frac{2x+3}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A}{x(x^2+1)^2}.$$

比较上式两端分子多项式中 x 各幂次的系数可得

$$\frac{2x+3}{x(x^2+1)^2}=\frac{3}{x}+\frac{-3x}{x^2+1}+\frac{-3x+2}{(x^2+1)^2}.$$

右端第一个分式积分为 $\int\frac{3}{x}dx=3\ln|x|+C_1$. 令 $u=x^2+1$，得第二个分式的不定积分

$$\int\frac{-3x}{x^2+1}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{du}{u}=-\frac{3}{2}\ln|u|+C_2=-\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+C_2.$$

而第三个分式中

$$\int\frac{-3x}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{du}{u^2}=\frac{3}{2u}+C_3=\frac{3}{2(x^2+1)}+C_3.$$

令 $x=\tan t,-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，有

$$\int\frac{2}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{dt}{\sec^2 t}=\int\cos^2 t\,dt=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2t}{2}\right)dt$$
$$=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C_4=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{1+x^2}+C_4.$$

因此，原积分为

$$3\ln|x|-\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+\frac{3}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{1+x^2}+C,$$

其中 $C=C_1+C_2+C_3+C_4$.

5.4.2 三角函数的积分

前面已经介绍了求解三角函数不定积分的几种方法，选择适当的三角函数换元或者采用分部积分，就可以将原积分进行简化. 但这些方法没有规律性，如何进行换元具有一定的技巧性，因此实际应用起来有时不是很方便. 下面介绍另外一种三角函数换元方法，可用于三角函数有理表达式的积分计算. 所谓三角函数的有理表达式，即是由 $\sin x$，$\cos x$ 经过有限次的四则运算所构成的函数，例如 $\sin x\cos^2 x$，$\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$ 等.

令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\begin{cases}\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\\\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\\dx=\frac{2}{1+u^2}du.\end{cases}$$

这样三角有理式的不定积分就转换为有理函数的不定积分，此换元公式称为**万能公式**.

例 6 计算 $\int\frac{\cos x}{1+\sin x+\cos x}dx$.

解 令 $u=\tan\frac{x}{2}$，

$$\int\frac{\cos x}{1+\sin x+\cos x}dx=\int\frac{1-u^2}{(1+u)(1+u^2)}du=\int\frac{1-u}{1+u^2}du$$
$$=\int\frac{1}{1+u^2}du-\int\frac{u}{1+u^2}du$$

$$= \arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$$

$$= \frac{x}{2} + \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C.$$

注:虽然万能公式总可以将三角函数的积分转换为有理函数的积分形式,但有时候有理函数的积分很麻烦,因此,对于具体的问题来说,此方法不一定是最佳选择. 一般情况下,我们还是优先选择前几节介绍的换元或分部积分来得到结果.

例 7 计算 $\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

解 如果利用万能公式,则积分化为

$$\int \frac{2(1+2u-u^2)(1+u^2)}{(1-u^2)^3}\mathrm{d}u = \int \frac{2(1+2u-u^2)(1+u^2)}{(1-u)^3(1+u)^3}\mathrm{d}u.$$

我们需要将被积函数分解成 6 个部分分式和的形式,利用解方程组的方法求 6 个待定系数.

实际上,利用一般的换元法来求解更加简单:

$$\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x = \int\left(\sec^2 x + \frac{\sin x}{\cos^3 x}\right)\mathrm{d}x,$$

其中 $\int \sec^2 x\mathrm{d}x$ 利用基本积分表即可,$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$ 利用 $u = \cos x$ 换元转换为 $-\int \frac{1}{u^3}\mathrm{d}u$. 所以,

$$\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x = \tan x + \frac{1}{2\cos^2 x} + C.$$

5.4.3 可化成有理函数的无理函数的积分

如果被积函数中含有根式,则可以通过换元去掉根号,将原积分化为有理函数的积分. 下面通过具体例子加以说明.

例 8 计算 $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{x+4}}\mathrm{d}x$.

解 令 $u=\sqrt{x+4}$,则 $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x+4}}$,原积分化为

$$\int \frac{2(u^4-8u^2+15)}{u^2-4}\mathrm{d}u = \int(2u^2-8)\mathrm{d}u - \int\frac{1}{u^2-4}\mathrm{d}u,$$

计算可得

$$\int(2u^2-8)\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^3 - 8u + C_1,$$

$$\int\frac{1}{u^2-4}\mathrm{d}u = \int\frac{1}{(u-2)(u+2)}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{1}{u-2}\mathrm{d}u - \frac{1}{4}\int\frac{1}{u+2}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{4}\ln|u-2| - \frac{1}{4}\ln|u+2| + C_2$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C_2.$$

将 u 用 $\sqrt{x+4}$ 替换得到原不定积分为

$$\frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} - 8\sqrt{x+4} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C.$$

例 9 求 $\int\sqrt{\frac{1-x}{2+x}}\mathrm{d}x$.

解 令 $u=\sqrt{\frac{1-x}{2+x}}$,则 $x=\frac{1-2u^2}{1+u^2}$,$\mathrm{d}x=\frac{-6u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u$.

原积分化为

$$\int\frac{-6u^2}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u = \int\frac{-6}{1+u^2}\mathrm{d}u + \int\frac{6}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u$$

$$= \int\frac{-6}{1+u^2}\mathrm{d}u + \int 6\cos^2 t\mathrm{d}t \quad (u = \tan t)$$

$$= \int\frac{-6}{1+u^2}\mathrm{d}u + \int(3+3\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= -6\arctan u + 3t + \frac{3}{2}\sin 2t + C$$

$$= -6\arctan\sqrt{\frac{1-x}{2+x}} + 3\arctan\sqrt{\frac{1-x}{2+x}} + \sqrt{(1-x)(2+x)} + C$$

$$= -3\arctan\sqrt{\frac{1-x}{2+x}} + \sqrt{(1-x)(2+x)} + C.$$

至此,我们已经学习了计算不定积分的一些常用方法,那么这些方法是不是适用于所有函数呢? 例如,能不能求解 $\int e^{x^2}\mathrm{d}x$? 答案是否定的. 实际上,大多数函数的不定积分是不能通过前述方法求出来的,即无法用初等函数将原函数表示出来. 对于这样的函数,可以改用幂函数的形式来表示不定积分,或是采用近似方法进行计算.

习题 5.4

1. 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{x-1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$; (2) $\int\frac{x^3+1}{x^3+2x+1}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{2}{x^3+2x^2+2x}\mathrm{d}x$; (4) $\int\frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

2. 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$; (2) $\int\frac{1+\cos t}{1-2\cos t}\mathrm{d}t$; (3) $\int\frac{2}{\sin x+\sin 2x}\mathrm{d}x$;

(4) $\int\csc^2 x\cot^2 x\mathrm{d}x$; (5) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$; (6) $\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.