第3章　极限与连续

3.1　数列的极限

3.1.1　极限的引入

假设我们有一条1米长的绳子和一把剪刀，第一次我们把绳子剪掉一半，绳子还剩下$\frac{1}{2}$米；第二次我们把剩下的绳子再剪掉一半，则剩下的部分长度为$\frac{1}{2}$米$\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}$米；第三次我们将剩下的绳子再剪去一半，此时剩下$\frac{1}{2}$米$\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2^3}$米……

问题：如果这个过程无限进行下去，那么最后会剩下多少绳子？

因为每次剪完后绳子的长度都比上一次减半，绳子的长度越来越短，因此可以猜测，若剪绳子的过程一直进行下去，则绳子的长度趋于零．下面我们利用图像可以更清楚地看出结论．

我们可以将第n次剪完后剩下的绳子长度记为a_n，则$a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{2^2}, a_3=\frac{1}{2^3}, \cdots, a_n=\frac{1}{2^n}$．图3.1给出以$n$为横坐标、$a_n$的值为纵坐标绘制的数列$\{a_n\}$的图像．从图像可以看出，点$(n,a_n)$随着$n$的增大向横轴无限接近，即$a_n$的值无限接近于零，也就是剩下的绳长无限接近于零．

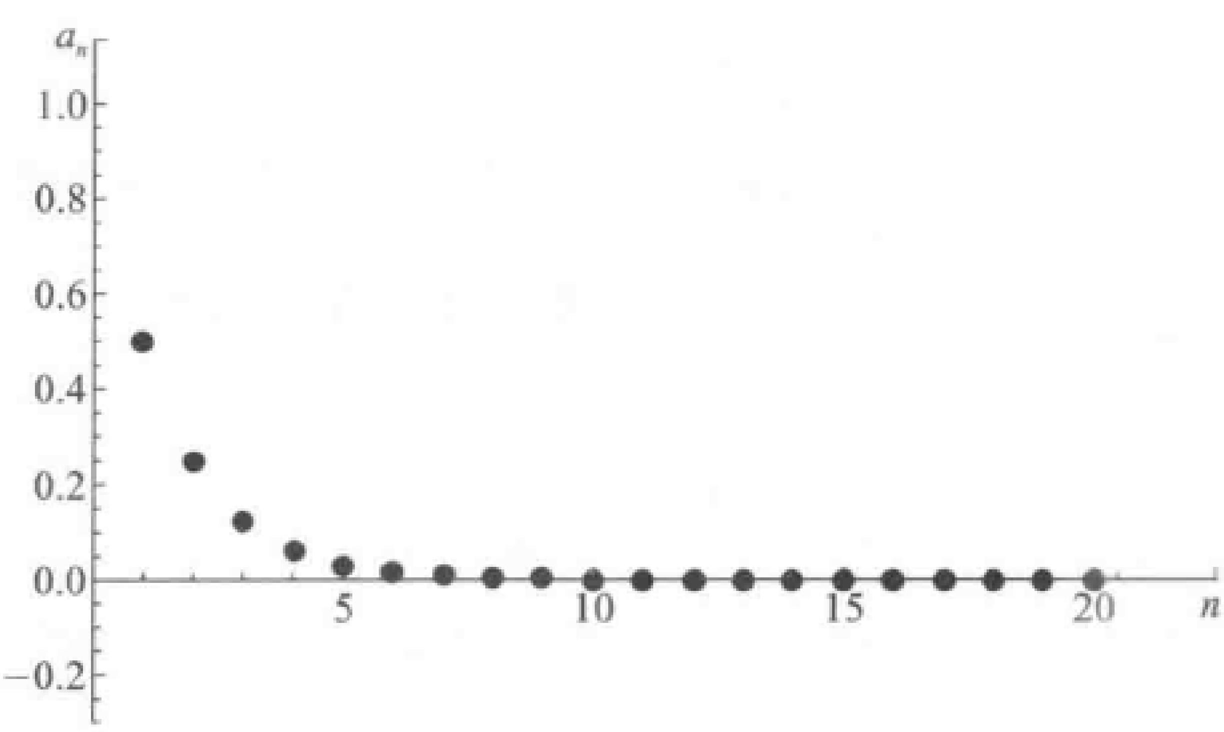

图3.1

由此我们引入极限的精确定义．

3.1.2　数列极限的定义

定义1　由无穷多个数按照某种规律依次排成$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$的一串数称为是一个**数列**，记为$\{a_n\}$，其中第$n$项$a_n$称为该数列的**通项**或**一般项**．

例如，在剪绳子例子中，$\{a_n\}=\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$构成一个数列；由$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$所构成的数列通项

为$\frac{1}{n}$,此数列可记为$\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

注:并不是所有的数列都能把通项表示为 n 的表达式. 例如数列

$$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$$

的通项就不能显示地表示出来,但是我们可以用如下递推关系来表示此数列:

$$a_1=\sqrt{2},\quad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}.$$

从剪绳子的例子可以看出,当 n 无限增加时,数列$\{a_n\}$的通项无限接近于零. 此时 0 称为此数列的极限,记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 那么如何用严格的数学语言来描述极限这一概念呢? 下面我们给出数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义.

定义 2 给定数列$\{a_n\}$和常数 a,如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N>0$,使得当 $n>N$时,$|a_n-a|<\varepsilon$ 恒成立,则称数列$\{a_n\}$是**收敛**的,a 称为数列$\{a_n\}$的极限,记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 或 $a_n\to a(n\to\infty)$. 不收敛的数列称为是**发散数列**.

例如,对于数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$,其通项随着 n 的增大而减小. 我们取 $\varepsilon=\frac{1}{100}$,则当 $n>100$ 时,即有$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$;若取 $\varepsilon=\frac{1}{10\,000}$,则当 $n>10\,000$ 时,有$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$. 实际上,无论多么小的正数 ε,都能找到一个正整数 $N>\frac{1}{\varepsilon}$,当 $n>N$ 时,$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

根据此定义,还可以很容易地验证:如果 a 为常数,则$\lim\limits_{n\to\infty}a=a$.

数列极限的几何解释为:如果数列$\{a_n\}$的极限是 a,则无论取多么小的邻域$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$,都存在正整数 N,使得 $n>N$ 时,a_n 都落在$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内;换句话说,落在此邻域外的点 a_n 只有有限个.

例如,数列$(-1)^n$ 是发散的. 这是因为此数列只取到 1 和 -1 两个值. 对于 $a=\pm1$,取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$,则在邻域$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$外面有此数列的无穷多个点;对于其他实数 a,总可以将 $\varepsilon>0$ 取到足够小,使得$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$不包含$\pm1$,此时邻域外也有数列的无穷多个点,从而此数列不收敛于任意实数值.

例 1 证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,|q|<1$.

证明 (1) 当 $q=0$ 时,该数列为常数 0,因此极限为 0.

(2) 当 $q\neq0$ 时,任给 $\varepsilon>0$,若$|q^n-0|<\varepsilon$,则 $n>\log_{|q|}\varepsilon$,因此取正整数 $N>\log_{|q|}\varepsilon$ 即满足数列极限的定义.

3.1.3 数列极限的性质与运算

定义 3 对于数列$\{a_n\}$,如果存在一个数 A,使得对所有的 n 都有 $a_n\leqslant A(a_n\geqslant A)$,则称此数列有**上界(下界)**;如果数列$\{a_n\}$既有上界又有下界,则称此数列**有界**.

对于收敛数列,有如下性质:

定理 1(极限唯一性) 收敛数列的极限是唯一的.

定理 2(有界性) 收敛数列是有界的.

定理 3(保号性) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0(<0)$,则存在正整数 N,当 $n>N$ 时,$a_n>0(<0)$;若

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a, a_n\geqslant 0(\leqslant 0)$，则 $a\geqslant 0(\leqslant 0)$.

定理 4(保序性)　若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$，且 $a<b$，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$a_n<b_n$；若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$，且 $a_n<b_n$，则 $a\leqslant b$.

例 2　设 $a_n\geqslant 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

证明　由保号性的性质可知，$a\geqslant 0$.

若 $a=0$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ 可知，对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$|a_n-0|<\varepsilon^2$，所以 $|\sqrt{a_n}-0|<\varepsilon$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=0$.

若 $a>0$，对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$|a_n-0|<\sqrt{a}\varepsilon$，所以 $\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right|=\left|\dfrac{a_n-a}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right|\leqslant\left|\dfrac{a_n-a}{\sqrt{a}}\right|<\varepsilon$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

定义 4　设 $\{a_n\}$ 是一个数列，正整数列 $n_1<n_2<n_3<\cdots$，则数列 $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3},\cdots$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的**子列**.

定理 5(数列极限与子列极限的一致性)　若数列 $\{a_n\}$ 的极限为 a，则它的任意子列的极限也为 a.

利用上述性质，可以证明数列极限不存在，即如果一个数列的两个子列有不同极限，则此数列是发散的.

例 3　证明数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

证明　此数列的奇数项子列的通项为 -1，偶数项子列的通项为 1，它们收敛于本身，极限值不同，所以数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

定理 6(数列极限的四则运算)

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$，则数列 $\{a_n\pm b_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$，则数列 $\{a_nb_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=ab$. 特别地，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，$c$ 为常数，则数列 $\{ca_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n=c\lim\limits_{n\to\infty} a_n=ca$.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=b\neq 0$，则数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}$.

例 4　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+3}{2n^2+1}$.

解　分子分母同除以 n^2，得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{2n^2+1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}}\\
&=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}\\
&=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1+0+0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

除了利用定义和四则运算外，还可以用如下的命题来计算数列的极限.

定理 7(夹逼定理) 假设存在正整数 N，当 $n>N$ 时，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$满足 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

例 5 设 $a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 由于$\frac{n}{n^2+n}=\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{n^2+n}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$，而

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

例 6 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明 令 $h_n=\sqrt[n]{n}-1\geqslant0$，则

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

故当 $n>1$ 时，$0\leqslant h_n\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1-\frac{1}{n}}=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(h_n+1)=1$.

例 7 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$，$a>0$.

解 若 $a\geqslant1$，则当 $n>a$ 时，$1\leqslant\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{n}$，由夹逼定理可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. 当 $a<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1$.

综上所述，当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

定理 8(单调有界定理) 若数列$\{a_n\}$单调上升且有上界(或单调下降且有下界)，则该数列收敛.

例 8 设数列$\{a_n\}$的通项为 $a_n=\frac{1}{n!}$，证明此数列收敛.

证明 因为 $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}=a_n\cdot\frac{1}{n+1}\leqslant a_n$，所以数列$\{a_n\}$是单调上升数列，且 $a_n=\frac{1}{n!}\leqslant 1$，此数列有上界. 由单调有界定理可知，此数列收敛.

例 9 设数列$\{a_n\}$满足递推关系 $a_1>1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$，证明此数列收敛，并求该数列的极限.

解 因为 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=1$，所以

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}\leqslant 0,\qquad a_{n+1}\leqslant a_n.$$

此数列单调下降且有下界，故此数列收敛，设其极限为 a. 在递推公式两端令 $n\to\infty$，得

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right).$$

解得 $a=\pm 1$.

由极限的保号性可知，数列极限为正，因此极限值为 $a=1$.

例 10　证明数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$极限存在且相等，其中 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$b_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

证明　(1) 显然数列$\{b_n\}$是单调上升数列，且

$$b_n\leqslant 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}\leqslant 1+\frac{1}{\frac{1}{2}}=3,$$

由单调有界收敛定理可知$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 收敛.

(2) 下证数列$\{a_n\}$单调性. 由于

$$\begin{aligned}a_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\&=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&\leqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\\&\quad\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\\&=a_{n+1},\end{aligned}$$

所以数列$\{a_n\}$单调递增.

再证此数列有上界. 因为

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&\leqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}=b_n\leqslant 3.\end{aligned}$$

故数列$\{a_n\}$有上界 3，于是此数列收敛，设其极限为 a. 由上述不等式和极限的保序性可知 $a\leqslant b$.

另一方面，若 $m\leqslant n$，则

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&\geqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right),\end{aligned}$$

两边取 $n\to\infty$，则有 $a\geqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}=b_m$.

在上面的不等式两端令 $m\to\infty$,得到 $a\geqslant b$. 综上所述,$a=b$,两数列极限相等.

需要指出的是,上述两个数列的极限实际上是自然对数的底 e.

习题 3.1

1. 求下列数列的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^2}{(n+2)^2}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}}$; (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$.

2. 证明数列收敛并求其极限值.

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_1<1, a_{n+1}=a_n(2-a_n)$;

(2) 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$.

3.2 函数的极限

3.2.1 函数极限的定义

在上一节中,我们研究了数列的极限. 数列极限描述了 $n\to\infty$ 时,数列 $\{a_n\}$ 的变化趋势. 与此类似,当自变量趋于某一定值或无穷大时,函数值有时也有确定的变化趋势,即函数极限.

例如,从函数 $y=2x+1$ 的图像(见图 3.2)可以看出,当自变量 x 的值接近 0 时,函数值接近 1;并且当 x 距离零点足够近时,我们可以使函数值与 1 的差任意小. 此时称 1 为函数 $y=2x+1$ 当 $x\to 0$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)=1$,它表示函数值当 $x\to 0$ 时的变化趋势.

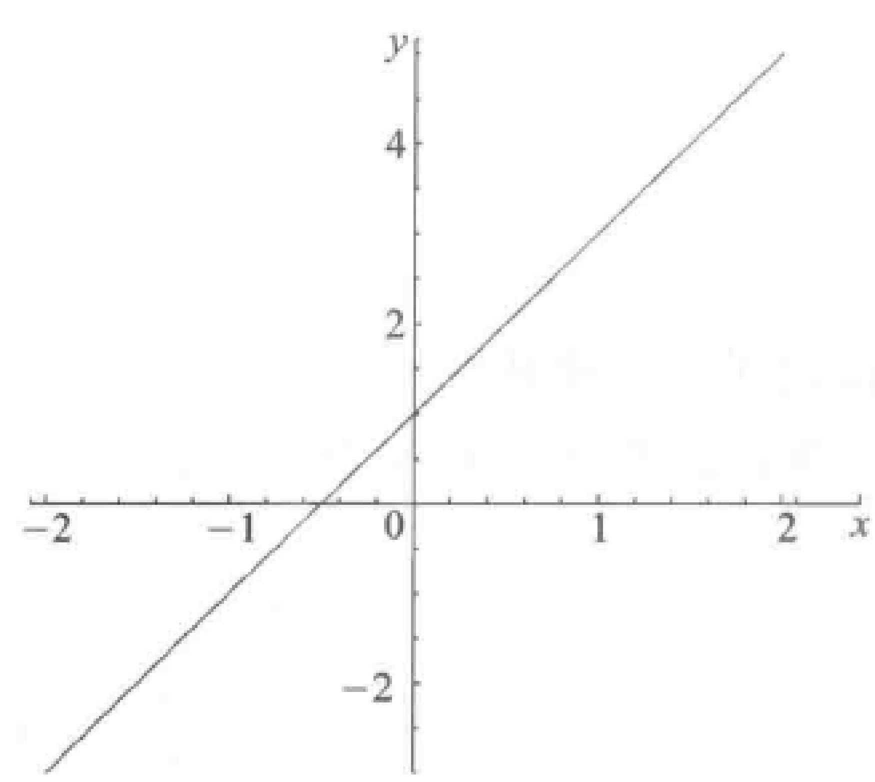

图 3.2

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义,A 为常数. 若对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的所有 x,都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

注:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与函数是否在 $x=x_0$ 有定义或函数在 x_0 点的值无关. 例如,对函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\neq 0\\ 0\end{cases}$,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1\neq f(0)$,如图 3.3 所示. 而函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义,但从其图像(见图 3.4)容易看出,$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

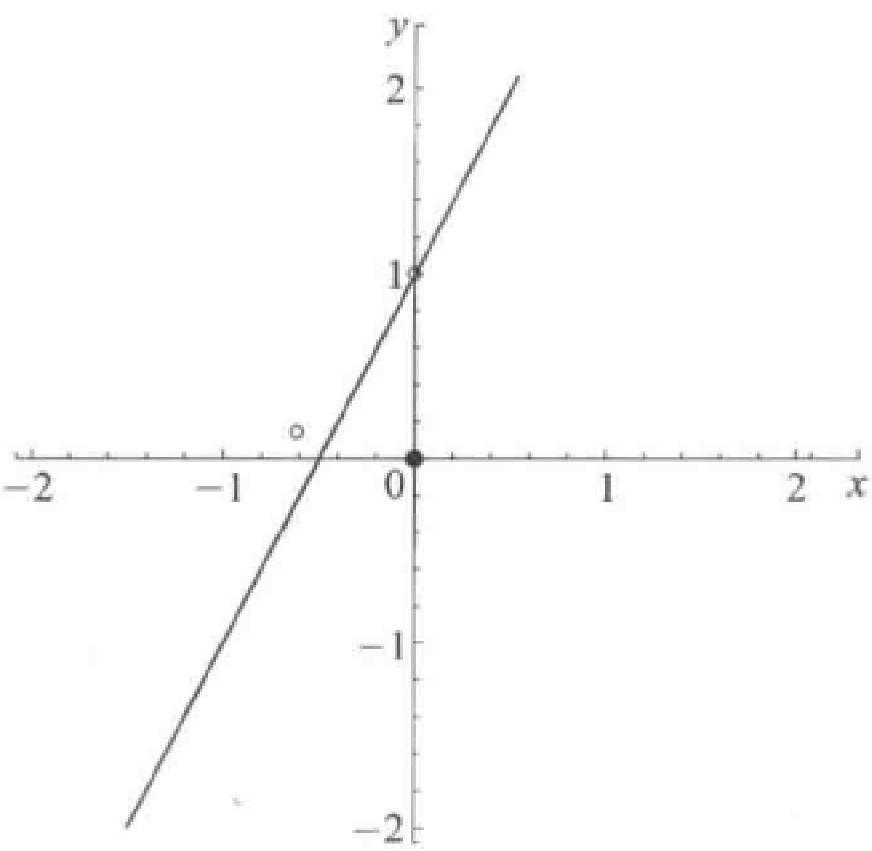

图 3.3

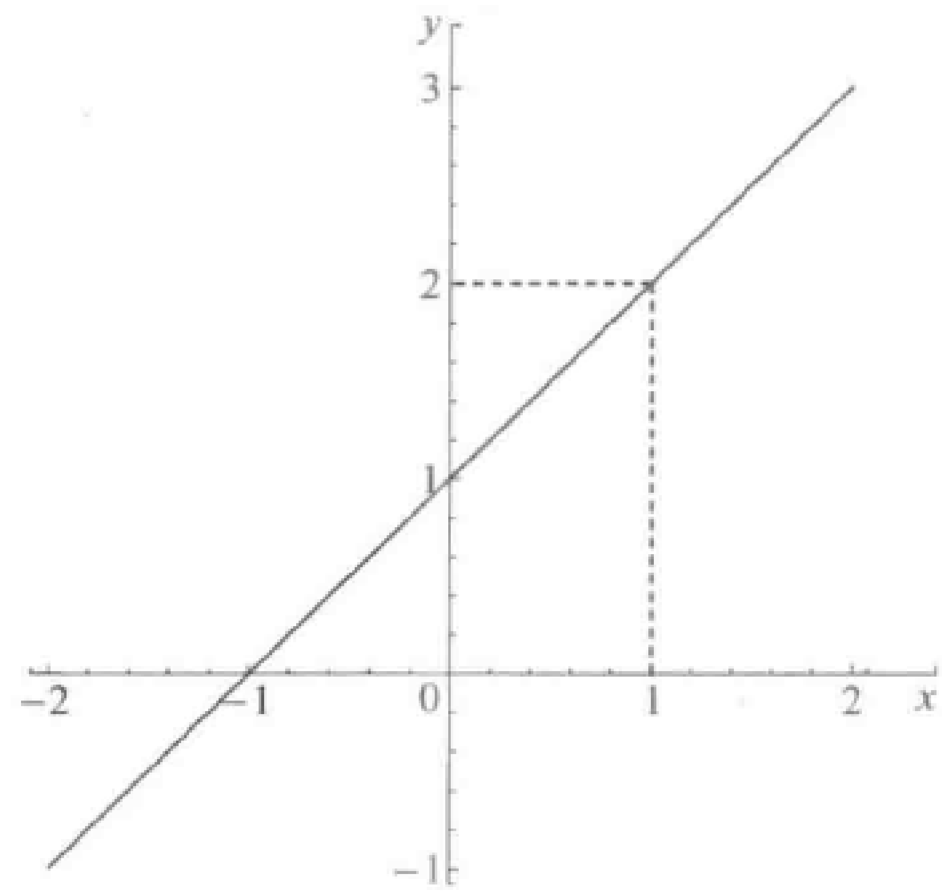

图 3.4

函数定义的几何解释如下(见图 3.5)：当$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$时，则对任意小的$\varepsilon>0$，都存在区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，使得此区间上除去$x=x_0$之外的函数值都落在带状区域$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$上. 反过来，如果存在某个$\varepsilon>0$，对于任意实数$A$和任意小的区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，此区间上总有一点$x\neq x_0$，使得函数值落在以$A$为中心、宽度为$2\varepsilon$的带状区域$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$外面，则函数在$x=x_0$处无极限.

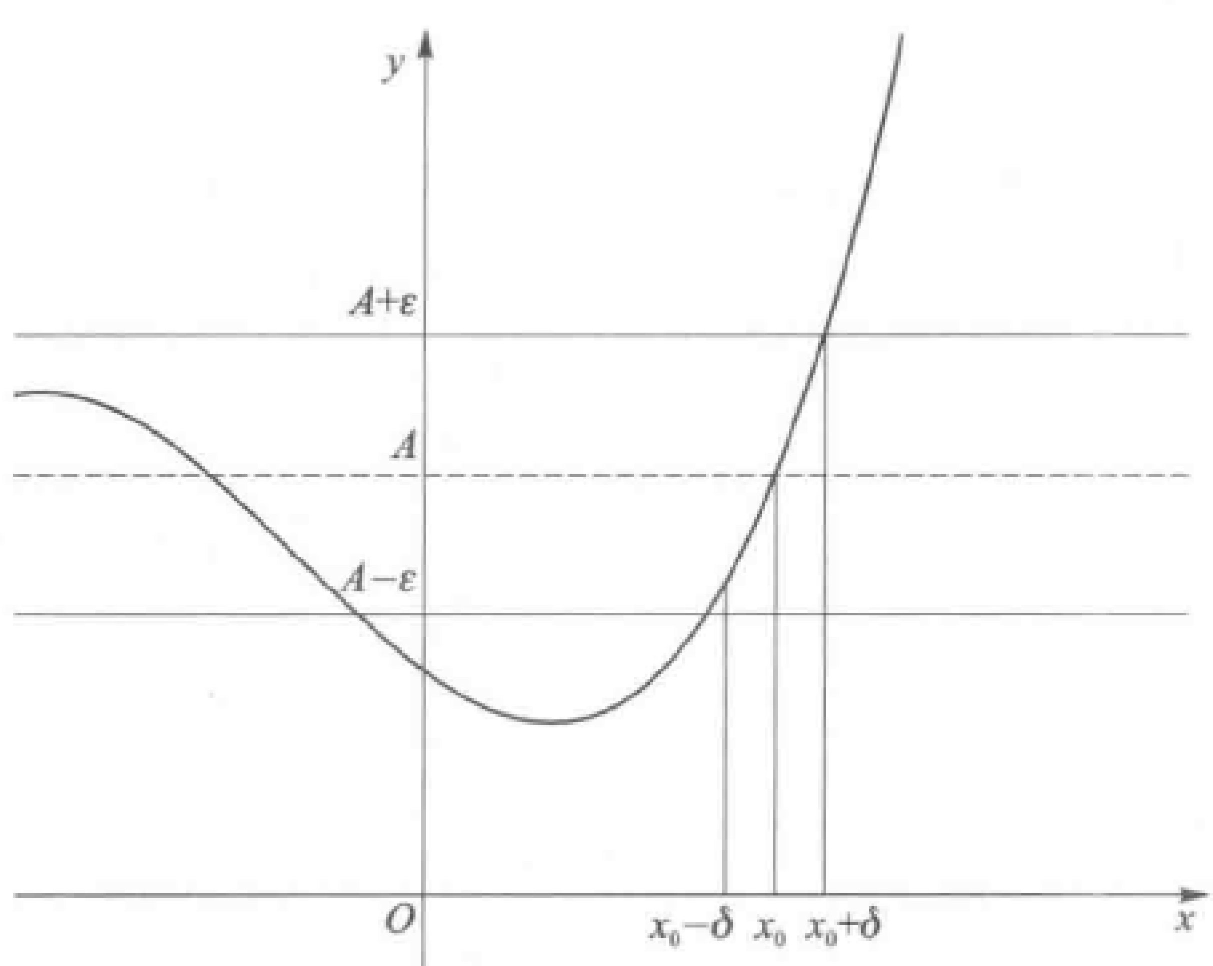

图 3.5

例如，对于函数$y=\sin\dfrac{1}{x}$，显然函数在$x=0$处无定义，而函数在原点附近的图像如图 3.6 所示. 从图像可以看出，函数值在$[-1,1]$之间无穷振荡，并且当x距离零点越接近时，振动频率越大. 若取$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，则无论取多么小的区间$(-\delta,\delta)$，都无法使此区间上除去原点的所有函数值都落在宽度为 1 的带状区域内，所以$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

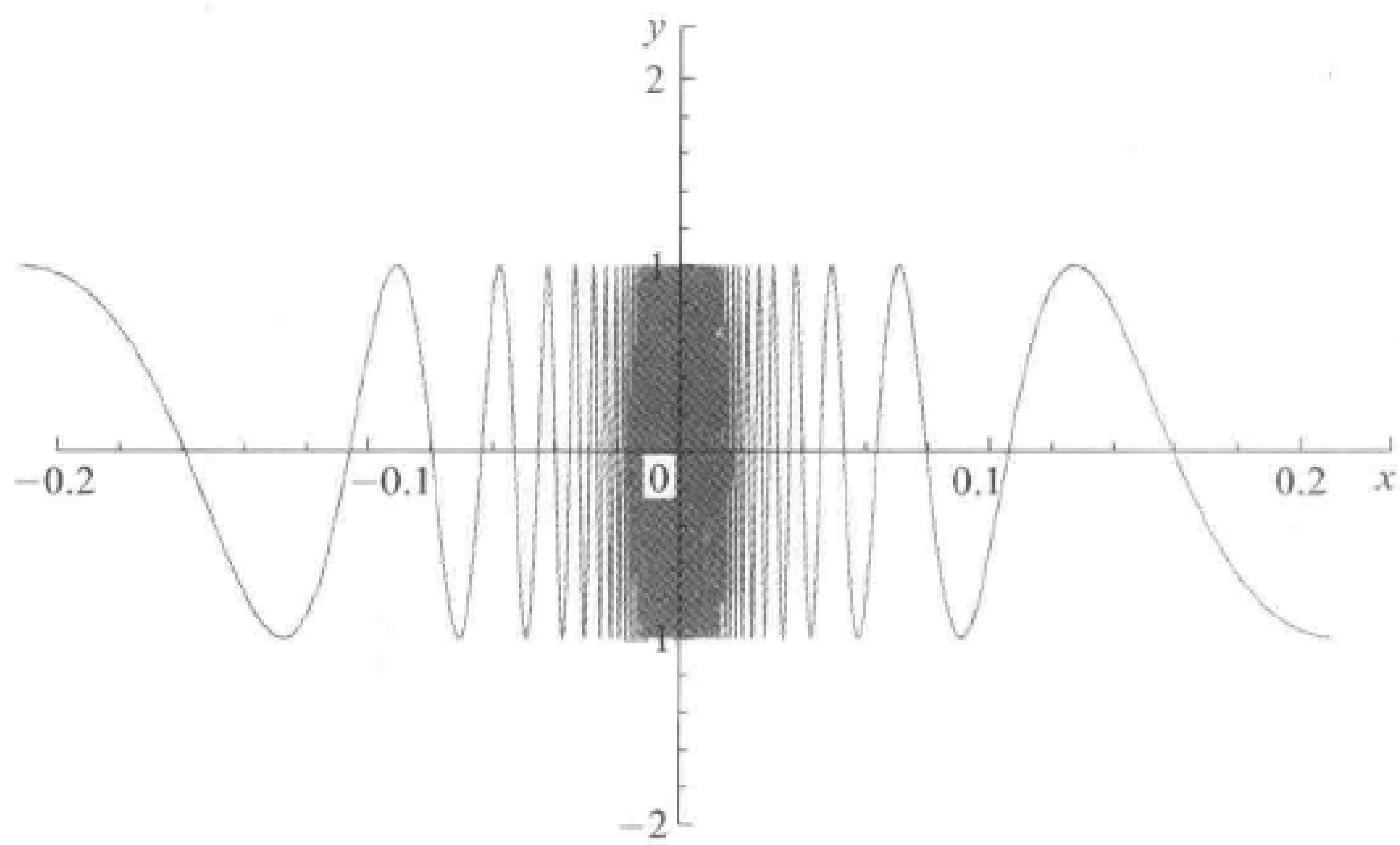

图 3.6

类似地,可以定义 $x\to\infty$ 时函数的极限.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上有定义,A 为常数. 如果对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得当 $x>M$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 是 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时函数的**极限**,记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to+\infty)$.

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,a)$ 上有定义,A 为常数. 如果对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得当 $x<-M$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 是 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时函数的**极限**,记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$.

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 和 $(-\infty,b)$ 上有定义,A 为常数. 如果对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得当 $|x|>M$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 是 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时函数的**极限**,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to\infty)$.

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to0}x=0$.

证明 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x|<\delta$ 时,$|x-0|=|x|<\delta=\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to0}x=0$.

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

证明 $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right|=|x-1|<\varepsilon$,这时取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-1|<\delta$ 时,$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$. 由函数的定义可知,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

证明 首先,假设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 为图 3.7 中单位圆内部的直角三角形 AOB 的一个锐角,其中 O 为单位圆的圆心,则 $\triangle BOC$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}|OC|\cdot|AB|=\dfrac{1}{2}|OC|\cdot|OB|\sin x=\dfrac{1}{2}\sin x$,扇形 BOC 的面积 $=\pi\cdot1^2\cdot\dfrac{x}{2\pi}=\dfrac{x}{2}$. 因为 $\triangle BOC$ 的面积 $<$ 扇形 BOC 的面积,所以 $\sin x<x$.

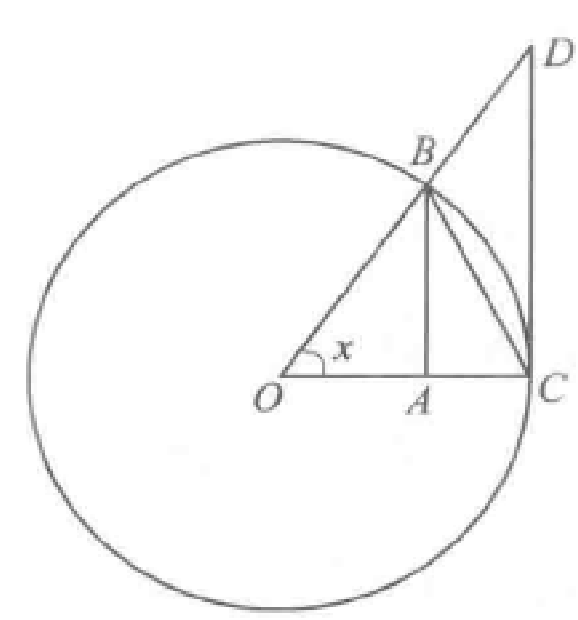

图 3.7

当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时，$0<-x<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin(-x)=-\sin x<-x$. 当 $|x|\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$|\sin x|\leqslant 1<|x|$.

综上所述，对任意实数都有 $|\sin x|\leqslant|x|$.

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，

$$|\sin x-\sin a|=\left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x-a}{2}\right|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

注 1：同理，我们可以证明 $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

注 2：由扇形 BOC 的面积 $<\triangle COD$ 的面积可知，$x<\tan x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

例 4　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$.

解　$\forall\varepsilon>0$，只需取 $M=1/\varepsilon$，则当 $x>M$ 时，$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

观察函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的图像（见图 3.8），容易看出，当 $x\to 0$ 时，函数值没有无限接近于某一确定的实数，因此函数极限不存在. 但如果考虑自变量单从原点左侧或右侧趋于原点时，函数值是具有确定的趋向的：当 $x<0$ 且 $x\to 0$ 时，函数值无限接近于 1；当 $x>0$ 且 $x\to 0$ 时，函数值无限接近于 0. 此时我们称函数在零点的左极限是 1，右极限是 0，它们统称为函数的单侧极限.

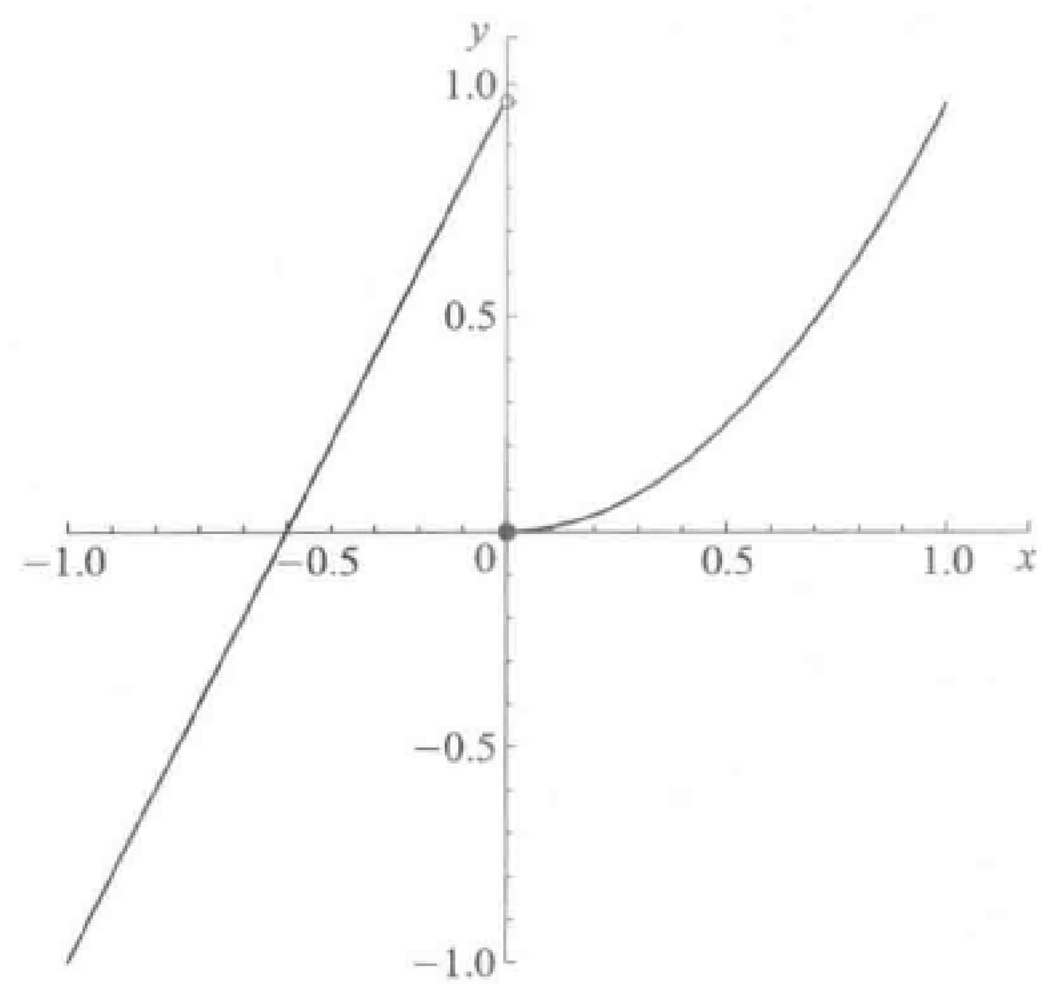

图 3.8

下面给出函数单侧极限的一般定义.

定义 5　设函数 $y=f(x)$ 在 (x_0-a,x_0)（或 (x_0,x_0+b)）内有定义，A 为常数. 若对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对满足 $x_0-\delta<x<x_0$（$x_0<x<x_0+\delta$）的所有 x，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0-0$（$x\to x_0+0$）时的**左（右）极限**，记为 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$（$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$），$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$（$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$）或 $f(x)\to A(x\to x_0-0)$（$f(x)\to A(x\to x_0+0)$）或 $f(x_0-0)=A$（$f(x_0+0)=A$）.

容易证明，函数极限和单侧极限之间具有如下关系：

定理 1　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$.

由此定理可以得出判断函数极限不存在的一个方法：如果函数的左右极限有一个不存在或两极限存在但不相等，则函数极限不存在.

例 5　证明 $\lim\limits_{x\to 2-0}\sqrt{2-x}=0$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，要使 $|\sqrt{2-x}-0|<\varepsilon$，可取 $\delta=\varepsilon^2/4$，则当 $2-\delta<x<2$ 时，$|\sqrt{2-x}-0|=$

$\sqrt{\delta}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{x\to 2-0}\sqrt{2-x}=0$.

3.2.2 函数极限的性质与运算

下面列举当$x\to x_0$时函数极限的主要性质.对于$x\to x_0^-$,$x\to x_0^+$,$x\to\pm\infty$,$x\to\infty$等极限形式,性质完全类似.

定理2(局部有界性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则存在$x_0$的一个去心邻域,使得函数在此邻域内有界.

定理3(局部保号性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0(<0)$,则存在$x_0$的一个去心邻域,使得在此邻域内$f(x)>0(<0)$.

定理4(局部保序性) 若在x_0的一个去心邻域内$f(x)\geqslant g(x)$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

定理5(四则运算法则) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都存在,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.特别地,若$c$为常数,则$\lim\limits_{x\to x_0}[cf(x)]$存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}cf(x)=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

(3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$.

定理6(复合函数求极限法则) 若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$,但在$a$的某个去心邻域内$g(x)\neq a$,又$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))$存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=A$.

例6 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{\cos x+x^2}$.

解 由极限四则运算法则,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\cos x+x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\tan x}{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+x^2)}.$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\tan x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\frac{\sin 0}{\cos 0}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+x^2)=\lim_{x\to 0}\cos x+\lim_{x\to 0}x^2=\cos 0+(\lim_{x\to 0}x)^2=1+0=1,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\cos x+x^2}=0.$$

例7 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-1/x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}(1-1/x)}=1.$

例 8　证明$\lim\limits_{x\to 0} a^x=1(a>0,a\neq 1)$.

证明　首先假设 $a>1$,则当 $x>0$ 时,$a^x>1$. $\forall \varepsilon>0$,若使 $|a^x-1|=a^x-1<\varepsilon$,只需 $0<x<\log_a(1+\varepsilon)=\delta$. 由单侧极限定义可知 $\lim\limits_{x\to 0+0} a^x=1$;当 $x<0$ 时,$|a^x-1|=1-a^x<\varepsilon\Rightarrow 0>x>\log_a(1-\varepsilon)=\delta$. 因此得出 $\lim\limits_{x\to 0-0} a^x=1$. 因为左右极限存在且都为 1,所以$\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$.

当 $a<1$ 时,$b=\dfrac{1}{a}>1$,且$\lim\limits_{x\to 0} b^x=1$,则

$$\lim_{x\to 0} a^x=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{b}\right)^x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{b^x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} b^x}=\frac{1}{1}=1.$$

综上所述,对所有 $a>0,a\neq 1$,都有$\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$.

例 9　求 $\lim\limits_{x\to +\infty} 3^{\frac{1}{x}}$.

解　令 $u=\dfrac{1}{x}$,$\lim\limits_{x\to +\infty} u=0$,又$\lim\limits_{u\to 0} 3^u=1$,所以由复合函数求极限法则可知

$$\lim_{x\to +\infty} 3^{\frac{1}{x}}=1.$$

习题 3.2

1. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x}{2+x-x^2}$;　(2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3+x+1}{2x^3-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$;　(4) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\tan x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$;　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$,其中 $f(x)=\begin{cases}2x-x^2+1, & x\geqslant 0\\ 2^{\sin x}, & x<0\end{cases}$;(8) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$.

2. 假设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+e^x)+x, & x>0\\ (x+a)\cos x^2, & x\leqslant 0\end{cases}$当 $x\to 0$ 时的极限存在,求 a 的值.

3.3　两个重要极限

3.3.1　$\dfrac{\sin x}{x}$的极限

对于求函数极限问题:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$,因为分子和分母极限都为零,所以不能用上一节的极限四则运算法则进行,但是可以利用类似于数列的夹逼定理来研究这个极限.

定理 1(夹逼定理)　设函数 $f(x),g(x),h(x)$在点 x_0 的某个去心邻域内有定义,且在此邻域内满足 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$. 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$存在且等于 A.

注:此处的 $x\to x_0$ 也可以换成 $x\to x_0+0,x\to x_0-0,x\to +\infty,x\to -\infty,x\to\infty$.

下面利用上述定理来计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$的值.

当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时,$\sin x<x$,$x<\tan x$. 第一个不等式可写为$\dfrac{\sin x}{x}<1$,从第二个不等式可推导出$\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$,综合两式可得$\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$.

当$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$时,则$0<-x<\dfrac{\pi}{2}$,且$\cos x=\cos(-x)<\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}<1$. 因此对所有$0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$,都有$\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$.

由于$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\lim\limits_{x\to 0}1=1$,所以由夹逼定理可得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$是微积分中一个非常重要的极限,可以用来解决很多函数极限问题.

例 1 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{2x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=2.$

例 2 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

3.3.2 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$的极限

在学习数列极限时,有结论$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$. 那么如果把$n$换成$x$,是否有$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$? 下面就借助函数的夹逼定理来研究这个极限.

记$[x]$为不大于x的最大整数,则$[x]\leqslant x<[x]+1$,且

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leqslant\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

当$x\to+\infty$时,$[x]$,$[x]+1\to+\infty$,且

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{1+\dfrac{1}{[x]+1}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{[x]+1}\right)}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\cdot\left(1+\frac{1}{[x]}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)=\mathrm{e},$$

因此,$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

当$x\to-\infty$时,令$y=-x$,则

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=\mathrm{e}.$$

综上所述，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

此极限形式也可以写成$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$. 事实上，若令 $t=\frac{1}{x}$，则

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\mathrm{e}.$$

对于形如 $u(x)^{v(x)}$ 的函数，若有 $\lim u(x)=1$，$\lim v(x)=\infty$，这样的极限称为 1^∞ 极限. 而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 可以用来解决很多极限形式为 1^∞ 形的函数的极限问题.

例 3　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3$.

当 $x\to\infty$时，$t=\frac{x}{3}\to\infty$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\mathrm{e},\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\mathrm{e}^3.$$

例 4　求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}]^2=[\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}]^2$.

当 $x\to 0$ 时，$t=\sin x\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}=\mathrm{e}^2.$$

习题 3.3

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin(3x)}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{2\cot x}$.

3.4 无穷大量与无穷小量

3.4.1 无穷大与无穷小的定义

定义 1 极限为零的量称为**无穷小量**.

注:无穷小量不是一个数,而是代表数列或是函数当自变量趋近于某个值时的极限. 例如,数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$当$n\to\infty$时是无穷小量;函数$\sin x$当$x\to 0$时是无穷小量,但当$x\to\frac{\pi}{2}$时则不是无穷小量,因为此时$\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x=1\neq 0$.

与无穷小量所对应的另一个概念是**无穷大量**.

定义 2 绝对值的极限为∞的量称为无穷大量.

和无穷小量一样,无穷大量也是描述变量的变化趋势,而不是一个具体的数,所以无穷大量并不等同于很大的数. 如,函数$f(x)=\frac{1}{x}$当$x\to 0$时为无穷大量,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$.

由无穷大量、无穷小量的定义可以立即得到结论:无穷小量的倒数是无穷大量;非零无穷大量的倒数是无穷小量. 因此无穷小量和无穷大量可以相互转换. 下面只对无穷小量研究其性质.

根据极限的性质容易得出:

(1) 无穷小量的和、差、积、商也是无穷小量;

(2) 无穷小量和有界量的乘积也是无穷小量;

(3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的充分必要条件是$f(x)-A$为$x\to a$时的无穷小量.

3.4.2 无穷小量的阶、等价无穷小量的应用

问题:既然无穷小量不是常量,那么能对无穷小量进行比较吗?

我们画出函数$y=x$,$y=x^2$,$y=x^3$在零点附近的图像,如图 3.9 所示. 这几个函数当

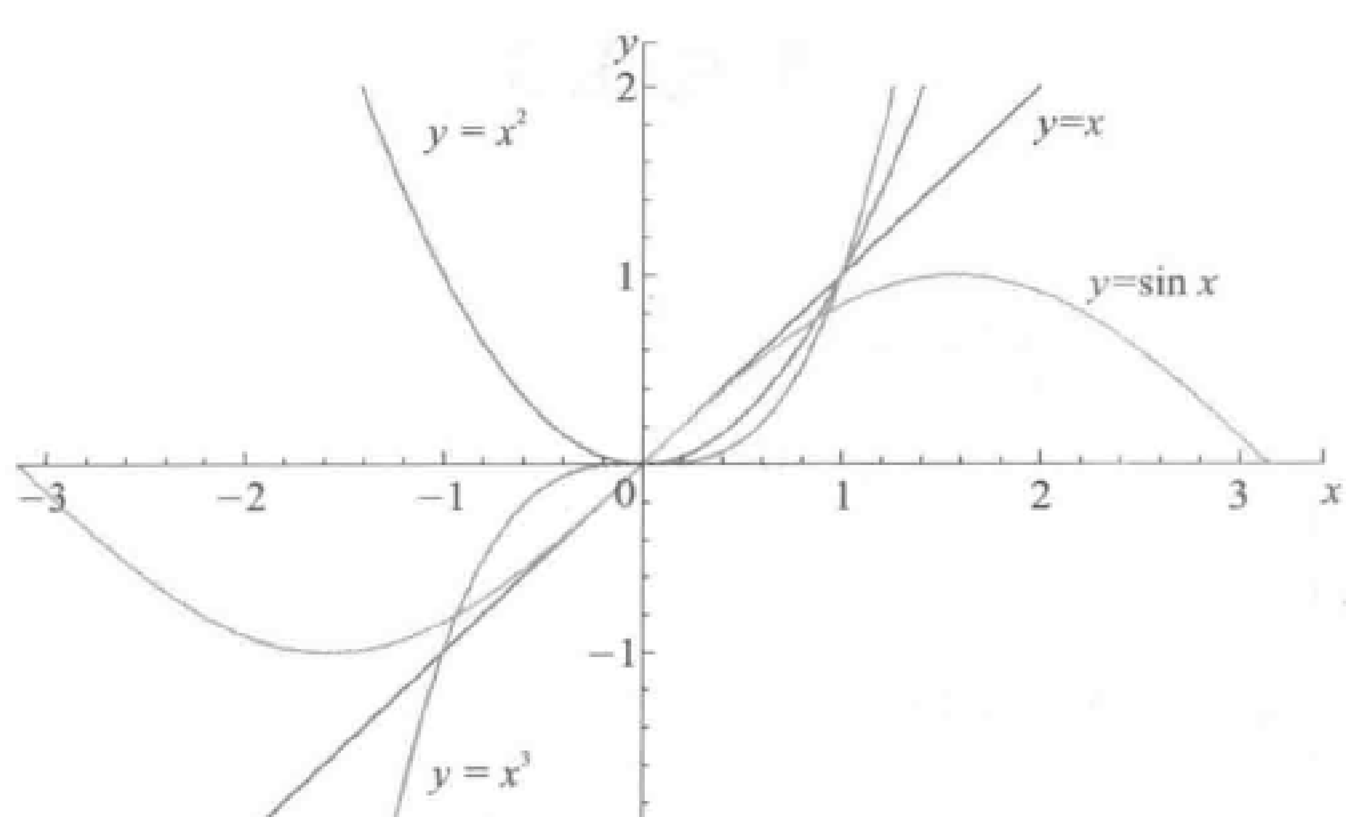

图 3.9

$x\to 0$时都是无穷小量. 但从零点附近的函数的图像可以看出,各个函数趋近于零的快慢是不同的. 例如,函数 $y=x^2$ 比 $y=x$ 趋近于零的速度要快,此时我们称 $x\to 0$ 时,x^2 是 x 的高阶无穷小量;而比较 $y=x^2$ 和 $y=x^3$ 在原点附近的图像可知,前者比后者相对平缓,函数趋近于原点的速度要更慢一些,此时我们称 $x\to 0$ 时,x^2 是 x^3 的低阶无穷小量.

在上节中,我们学习了微积分学中的一个重要极限:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 可以看出,尽管分子和分母都趋近于 0,但当$|x|$非常小时,$\sin x$ 和 x 的比值和 1 非常接近,即两者趋近于 0 的速度趋于一致,或者说,$\sin x\approx x$. 此结论也可以通过比较两者在原点附近的图像得到(见图 3.10). 我们称 $\sin x$ 和 x 在 $x\to 0$ 时是同阶的或等价的.

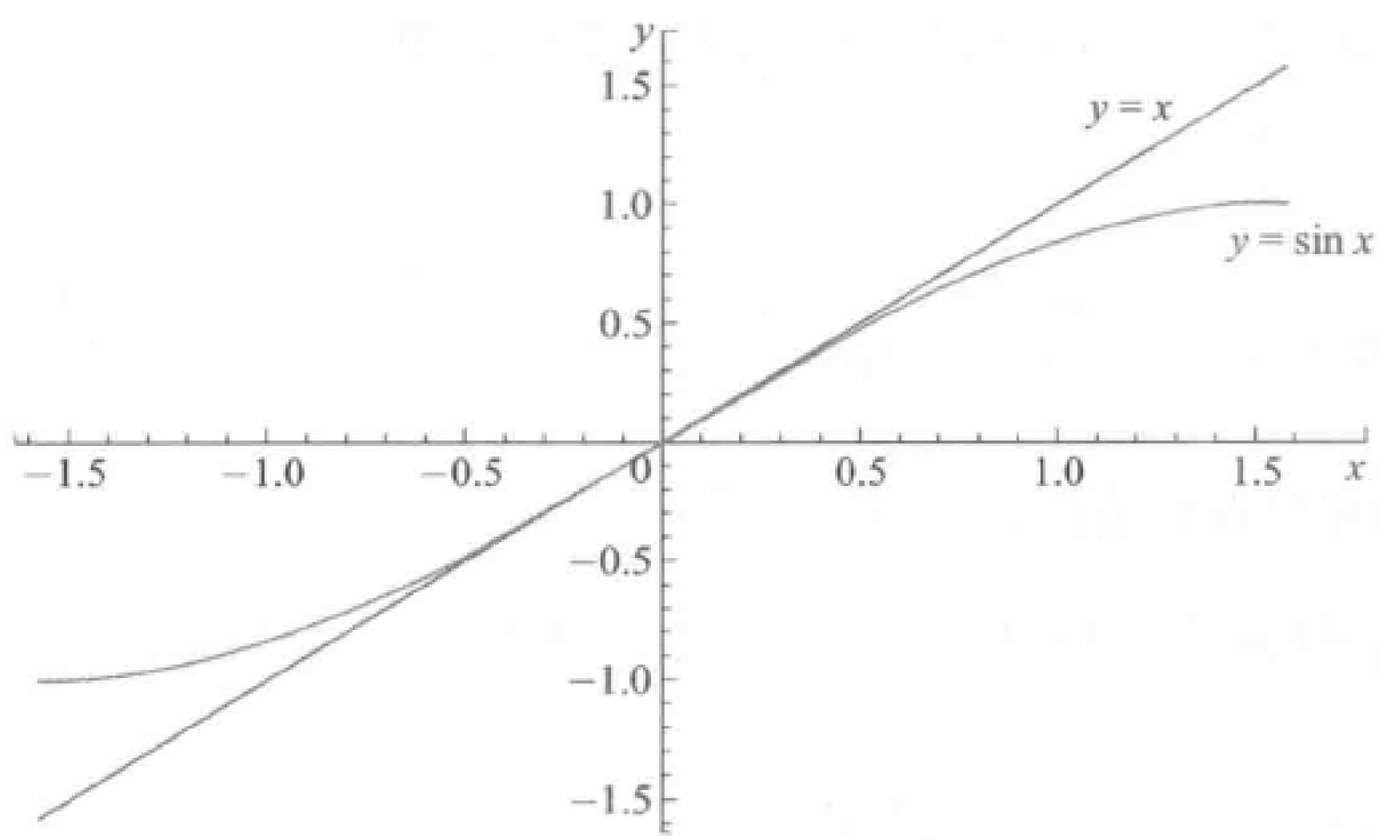

图 3.10

无穷小量的比较可以从比值的极限得到. 下面给出一般无穷小量的阶的定义.

定义 3　假设 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$,$g(x)$都是无穷小量.

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,则称 $f(x)$是比 $g(x)$**高阶的无穷小量**,或 $g(x)$是比 $f(x)$**低阶的无穷小量**,记作 $f(x)=o(g(x))$,$x\to x_0$;

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$,$c$ 为常数,则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为**同阶无穷小量**,记作 $f(x)=O(g(x))$,$x\to x_0$;

(3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=c\neq 0$,$c$ 为常数,则称 $f(x)$是 $g(x)$的 k **阶无穷小量**;

(4) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则称 $f(x)$和 $g(x)$为**等价无穷小量**,记作

$$f(x)\sim g(x),\qquad x\to x_0.$$

注:上述定义中,$x\to x_0$ 可换成其他极限形式.

通过定义可以得出一些函数的等价无穷小量. 例如,当 $x\to 0$ 时,由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 可知 $\sin x\sim x$. 类似地,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\Rightarrow\tan x\sim x,$$

$$t=\arcsin x \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1 \Rightarrow \arcsin x \sim x.$$

等价无穷小量具有如下性质：

(1) 设 $x\to x_0$ 时，$f(x)\sim g(x)$，$g(x)\sim h(x)$，则 $f(x)\sim h(x)$；

(2) 设 $x\to x_0$ 时，$f_1(x)\sim g_1(x)$，$f_2(x)\sim g_2(x)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)f_2(x)=\lim_{x\to x_0} g_1(x)g_2(x)；$$

(3) 设 $x\to x_0$ 时，$f_1(x)\sim g_1(x)$，$f_2(x)\sim g_2(x)$，$f_2(x)$和 $g_2(x)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

利用无穷小量的等价性替换，可以计算某些函数的极限.

例 1 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

由此例题我们可以得到结论：$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

例 2 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

例 3 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2}.$$

注：等价无穷小量替换只能应用于处在乘除位置的无穷小量，而不能用于加减位置的无穷小量，否则经常会得出错误结果. 例如上述例题中，如果直接将 $\tan x$ 和 $\sin x$ 分别用等价量替换，则得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=0.$$

此结果是错误的.

习题 3.4

1. 利用等价无穷小量替换求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{2x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x}{1-\cos x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arcsin\dfrac{1}{x}}{x+\sin x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\right)$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\dfrac{x}{3^n}$.

2. 求 c 的值,使得下列函数与 x^c 是当 $x\to 0$ 时的同阶无穷小量.

(1) $\sin 2x-2\sin x$；　(2) $\dfrac{1}{1+x^2}-(1-x^2)$.

3.5　函数的连续性

3.5.1　函数的连续性与间断点分类

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处及其某邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ **连续**,$x=x_0$ 称为函数 $f(x)$ 的**连续点**.

函数连续的 $\varepsilon-\delta$ 定义如下：

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义. 若对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对满足 $|x-x_0|<\delta$ 的所有 x,都有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

定义 2　若函数在 $x=x_0$ 处及其右邻域内有定义,且有 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ **右连续**;若函数在 $x=x_0$ 处及其左邻域内有定义,且有 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ **左连续**.

由极限的性质可知,函数 $f(x)$ 在某点连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在此点同时是左连续和右连续的.

定义 3　若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每个点都连续,则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续;若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续,且在 $x=a$ 处右连续,$x=b$ 处左连续,则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

一般地,连续函数的图像是一条连续不间断的曲线.

根据函数连续的定义,函数在某点连续,必须满足如下三个条件：

(1) $f(x_0)$ 存在；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $f(x_0)$ 相等.

上述三个条件中有一个不满足,我们就称函数在 $x=x_0$ 不连续,或者称 x_0 为函数的**间断点**.

例如,图 3.11 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 的图像. 此函数在 $x=0$ 无定义,不符合上述条件(1),因此在 $x=0$ 不连续. 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$,这样的间断点称为**无穷间断点**. 凡是极限为无穷的间断点都是无穷间断点.

对于函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$,它在 $x=0$ 无定义,且当 $x\to 0$ 时,函数值在 -1 和 $+1$ 之间无穷振

荡(见图 3.12),这样的间断点称为**振荡间断点**.

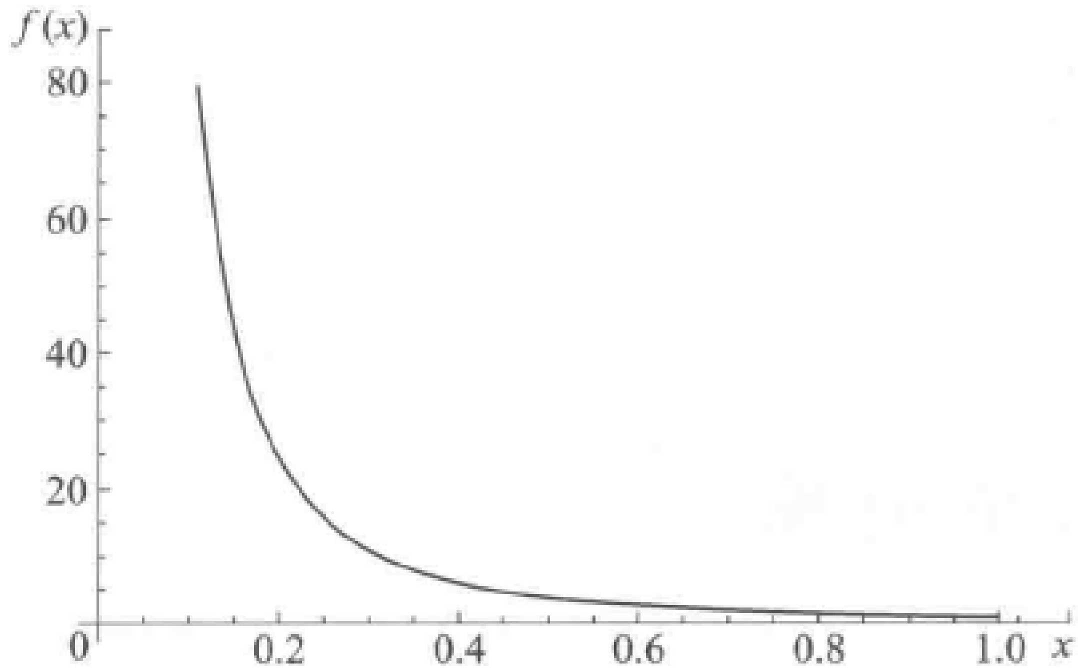

图 3.11

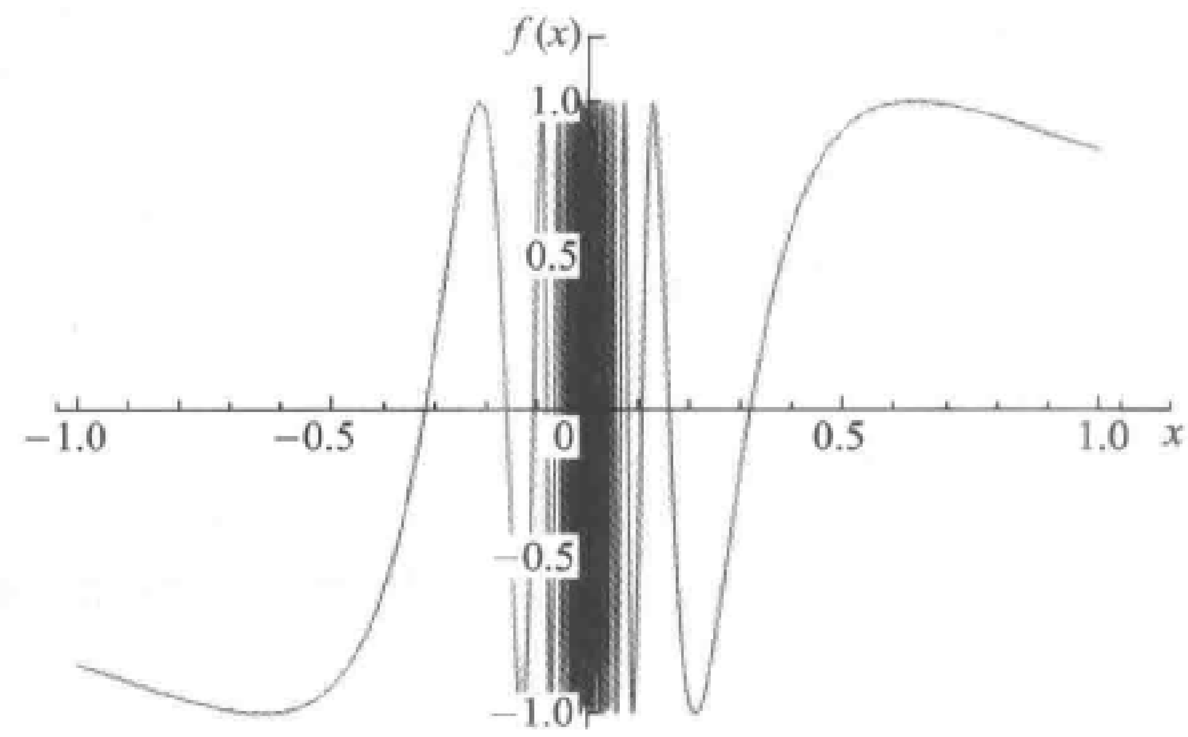

图 3.12

无穷间断点和振荡间断点满足左右极限至少有一个不存在. 当函数在某点的左右极限都存在时,此点也可能是不连续点.

例如,$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 不连续,这是因为 $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}1=1$, $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}-1=-1$,左右极限存在但不相等,所以函数在 $x=0$ 处极限不存在(见图 3.13). 这样的间断点称为**跳跃间断点**.

对于函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的左右极限存在,且都等于 1,因此函数在此点的极限存在. 由于 $f(0)=0\neq 1=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$,所以函数在原点处不连续. 但如果我们将函数 $x=0$ 点的值改为 1,则函数就变成了连续函数(见图 3.14). 因此这样的不连续点称为**可去间断点**.

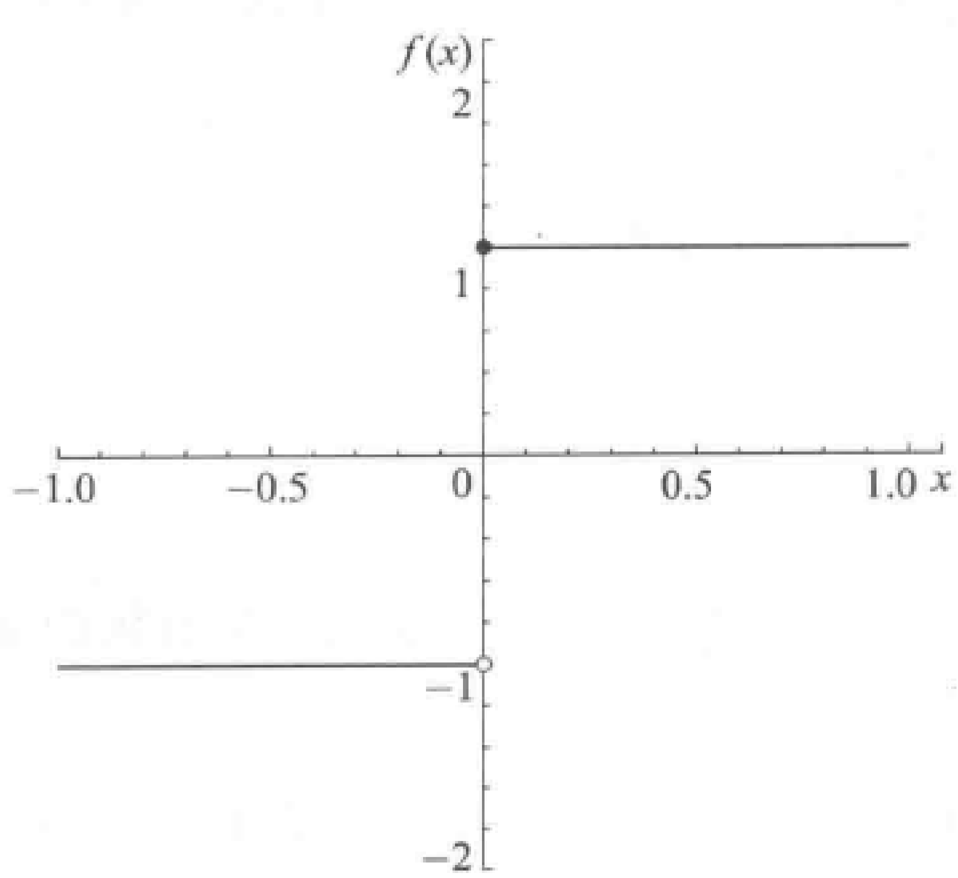

图 3.13

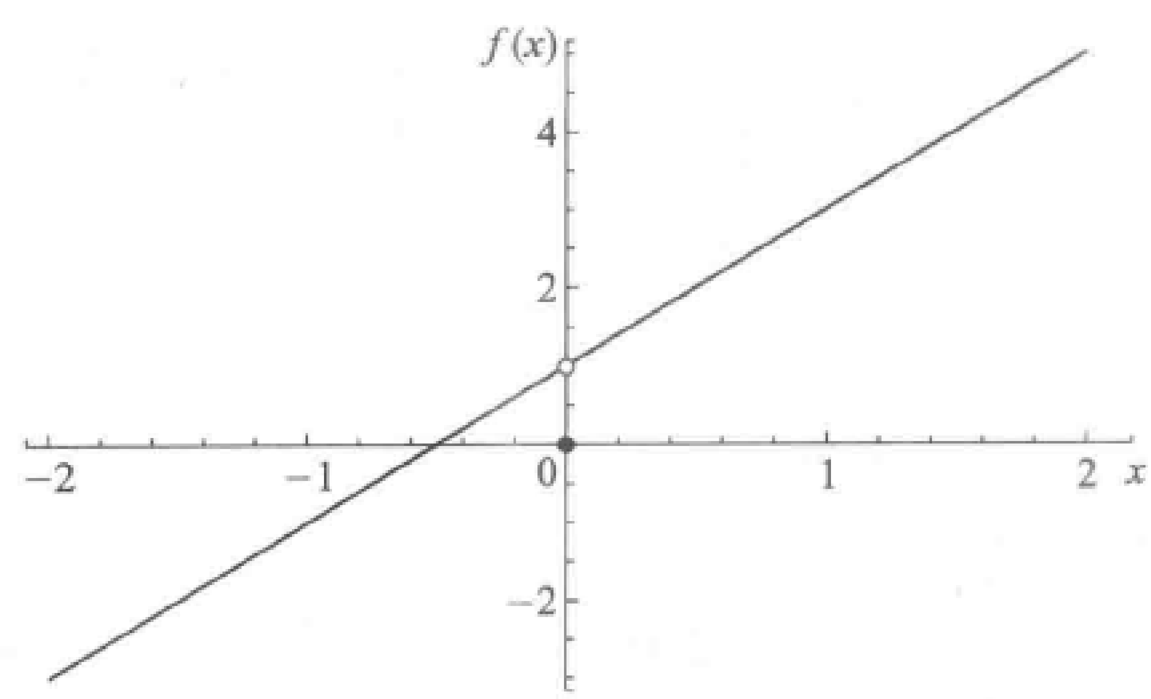

图 3.14

对函数 $f(x)=x^n$,n 为正整数,任取定义域中的一个点 $x=x_0$,则有 $\lim\limits_{x\to x_0}x^n=\lim\limits_{x\to x_0}x\cdot\lim\limits_{x\to x_0}x\cdot\cdots\cdot\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0^n$,所以此函数在定义域上每一点都连续.

我们证明了$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$，所以正弦函数和余弦函数在定义域上都是连续的.

例 1　证明函数 $f(x)=a^x$ 在$(-\infty,+\infty)$连续.

证明　因为对任意实数 x_0，

$$\lim_{x\to x_0}a^x=\lim_{x\to x_0}(a^{x-x_0}\cdot a^{x_0})=a^{x_0}\lim_{x\to x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}\lim_{t\to 0}a^{t_0}=a^{x_0},$$

式中，$t=x-x_0$. 所以函数在 x_0 连续，从而在$(-\infty,+\infty)$连续.

我们还可以证明，连续函数的反函数在定义域上也是连续的，从而对数函数 $y=\log_a x$ 以及反三角函数 $\arcsin x$，$\arccos x$ 都在定义域上连续.

例 2　求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的连续性.

解　因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=1=f(0)$，所以 $f(x)$在 $x=0$ 连续.

3.5.2　利用连续函数的性质求极限

利用函数极限的性质，可以推导如下关于函数在某点连续的性质：

定理 1　(1) 若函数 $f(x)$和 $g(x)$在点 x_0 连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$在点 x_0 连续；

(2) 若函数 $f(x)$和 $g(x)$在点 x_0 连续且 $g(x_0)\neq 0$，则$\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$在点 x_0 连续；

(3) 若函数 $u=g(x)$在点 x_0 连续，$y=f(u)$在点 $u_0=g(x_0)$连续，则复合函数 $y=f(g(x))$在点 x_0 连续.

前面我们已经提到，所有六类基本初等函数在定义域中都是连续的，所以由上述性质可知，所有初等函数在定义区间上都是连续的. 因此，对初等函数的求极限过程，就转化为求初等函数在极限点的函数值，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$. 对于复合函数，如果满足性质(3)的条件，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))=f(g(x_0))$；特别地，对于复合函数 $f(x)^{g(x)}$，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=a^b$.

例 3　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\sin x}{x\cos x+\ln(2+x)}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\sin x}{x\cos x+\ln(2+x)}=\dfrac{2+\sin 0}{0\cdot\cos 0+\ln(2+0)}=\dfrac{2}{\ln 2}$.

例 4　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 因为此函数的分母极限为 0，所以不能直接将 $x=0$ 代入函数求极限值. 但由重要极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 可知，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1.$$

由等价无穷小的定义可知，当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$.

更一般地,若 $a>0,a\neq 1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x\ln a}=\dfrac{1}{\ln a}$.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$,其中 $a>0,a\neq 1$.

解 令 $u=e^x-1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\ln(1+u)}=1$. 由此可得当 $x\to 0$ 时,$e^x-1\sim x$;更一般地,若 $a>0,a\neq 1$,则 $a^x-1\sim x\ln a$.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}$,其中 a 为实数.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\ln(1+x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\ln(1+x)}{x}=a$. 所以,当 $x\to 0$ 时,$(1+x)^a-1\sim a\ln(1+x)$.

前面我们提到,对于形如 $u(x)^{v(x)}$ 的函数,若有 $\lim u(x)=1$,$\lim v(x)=\infty$,则这样的极限称为 1^∞ 极限. 对于这种极限,一般都可以利用 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,将原函数转换为底和指数极限都有限的复合函数来求解.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}$,而当 $x\to 0$ 时,分子极限为 1,分母极限为 0,所以 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x=\infty$,不能用前面提到的复合函数求极限的方法直接求解.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\cos x}$,而

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1,\qquad \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}e^1=e$.

3.5.3 有界闭区间上的连续函数

如果函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续,则它有如下一些重要性质:

定理 2(有界性) 存在 $M>0$,使得对任意 $x\in[a,b]$,均有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理 3(最值存在性) 在此区间上存在两点,使得函数在这两点的值分别是函数在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值.

定理 4(零点定理) 若函数在区间端点处的值符号相反,即 $f(a)f(b)<0$,则在区间内部至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

零点定理是闭区间上的连续函数所具有的重要性质. 此定理可以用来研究方程根的分布问题.

例 8 证明方程 $x^3+2x-1=0$ 在 $(0,1)$ 之间至少有一个根.

解 令 $f(x)=x^3+2x-1$,则 $f(x)$ 是有界闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数.

$f(0)=-1<0$,$f(1)=2>0$,则由零点定理可知,存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=0$,ξ 为方程在 $(0,1)$ 之间的一个根.

我们还可以应用零点定理来证明等式.

例 9 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,且 $f(a)<a$,$f(b)>b$,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=\xi$.

证明 令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

由题目条件可知：$F(a)=f(a)-a<0$，$F(b)=f(b)-b>0$. 由零点定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

由零点定理可以很容易地推导出下面的结论.

定理 5(介值定理)　若 $f(a)\neq f(b)$，则对任一介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数 C，都存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$.

推论 1　有界闭区间上的连续函数能取到此区间上最大值和最小值之间的一切值.

需要指出的是，上述提到的几个性质都是特别针对于有界闭区间上的连续函数的，如果条件不满足，则性质不一定存在.

例如，对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$，它在 $(0,1)$ 区间上连续，但在此区间上不满足有界性性质（见图 3.11)，原因是此区间不是闭区间. 而对于函数 $f(x)=\begin{cases}2-x, & 1<x\leqslant 2\\ x-1, & -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$，它是定义在 $[-1,2]$ 上的一个函数，图像见图 3.15. 虽然当 $x\to 1+0$ 时，函数值趋近于 1，但区间 $[-1,2]$ 上取不到一点 x，使得 $f(x)=1$，最值定理不成立，这是因为此函数不是连续函数.

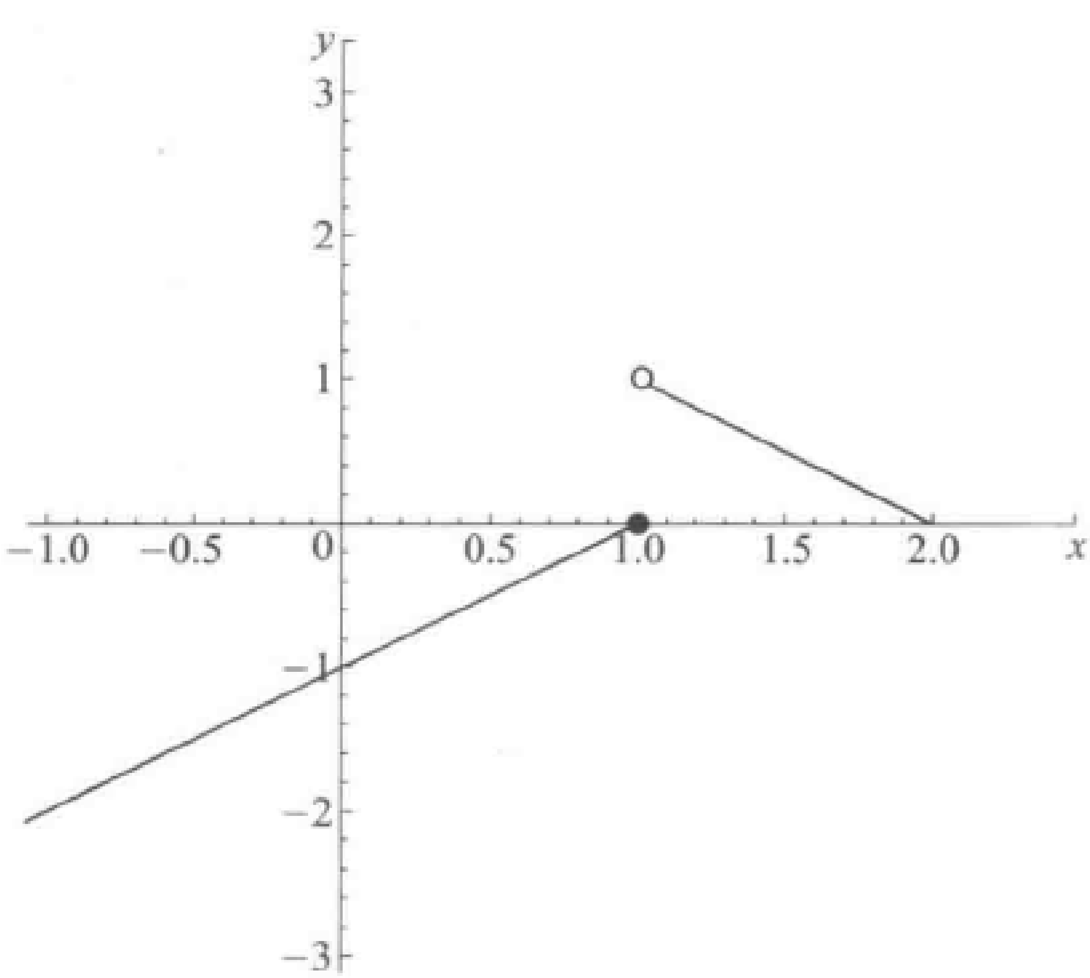

图 3.15

习题 3.5

1. 判断下列函数在 $x=0$ 处是否连续.

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$；　(2) $f(x)=\dfrac{1}{\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}x\cos^2\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$；　(4) $f(x)=\begin{cases}e^{x^2}, & x>0\\ 0, & x=0.\\ e^{-x^2}, & x<0\end{cases}$

2. 求 a,b,c 的值，使得下列函数连续.

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\leqslant -1\\ ax^2+bx+c, & -1<x<0\\ 0, & x=0\\ ax^2+bx+c, & 0<x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}.$$

3. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin(1+x^2)$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$；(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$；(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$；(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan x^{\tan 2x}$.

4. 证明方程 $x2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.