Técnicas de Desenho de Algoritmos

Ana Paula Tomás

Desenho e Análise de Algoritmos

Novembro 2019

Técnicas de desenho de algoritmos

- Pesquisa exaustiva (*exhaustive search*)
- Divisão-e-conquista (*Divide-and-conquer*)
- **Estratégias ávidas**, gananciosas, gulosas (*greedy*)
- **Programação Dinâmica** (*dynamic programmimng*)
- ...

Programação Dinâmica (DP)

- Obtém a solução à custa de soluções de subproblemas (ou de problemas relacionados).
- A construção é muitas vezes realizada por fases (como nos algoritmos de Floyd-Warshall, Bellman-Ford, Dijkstra, Prim).
- **Cada subproblema só é resolvido uma vez** e a sua solução é memorizada para utilização futura, se necessária.
- DP torna-se particularmente **eficiente** quando a partilha de subproblemas entre os subproblemas é significativa (não se reduz a "divide-and-conquer").
- Em **problemas de otimização**: utilizado quando as soluções ótimas têm subestrutura ótima (por exemplo, caminho mínimo de s para t num grafo), mas não só. Habitualmente, começamos por definir uma **recorrência** para caraterizar o valor ótimo e uma estratégia ótima em função dos valores e das estratégias para os subproblemas.

Algoritmo de Floyd-Warshall - aplicação de DP

Problema: Distâncias mínimas para todos os pares de nós

Dado um grafo $G = (V, E, d)$, com $d(u, v) > 0$, para todo $(u, v) \in E$, e $|V| = n$, determinar o comprimento do caminho mínimo de s para t, para **todos os pares** $(s, t) \in V \times V$, $s \neq t$.

O **algoritmo de Floyd-Warshall** resolve o problema em $\Theta(n^3)$.

Supõe-se que os nós do grafo estão numerados de 1 a n

Inicialmente: $D_{ii} = 0$; $D_{ij} = d(i, j)$, se $i \neq j$ e $(i, j) \in E$; se não, $D_{ij} = \infty$.

```
AlgoritmoFloyd-Warshall(D, n)
    Para k ← 1 até n fazer
        Para i ← 1 até n fazer
            Para j ← 1 até n fazer
                Se D[i,j] > D[i,k] + D[k,j] então D[i,j] ← D[i,k] + D[k,j];
```

Algoritmo de Floyd-Warshall - aplicação de DP

Problema: Distâncias mínimas para todos os pares de nós

Dado um grafo $G = (V, E, d)$, com $d(u, v) > 0$, para todo $(u, v) \in E$, e $|V| = n$, determinar o comprimento do caminho mínimo de s para t, para **todos os pares** $(s, t) \in V \times V$, $s \neq t$.

O **algoritmo de Floyd-Warshall** resolve o problema em $\Theta(n^3)$.

Supõe-se que os nós do grafo estão numerados de 1 a n

Inicialmente: $D_{ii} = 0$; $D_{ij} = d(i, j)$, se $i \neq j$ e $(i, j) \in E$; se não, $D_{ij} = \infty$.

```
AlgoritmoFloyd-Warshall(D, n)
  Para k ← 1 até n fazer
      Para i ← 1 até n fazer
          Para j ← 1 até n fazer
              Se D[i,j] > D[i,k] + D[k,j] então D[i,j] ← D[i,k] + D[k,j];
```

Justificação da correção do algoritmo de Floyd-Warshall

Seja $G = (V, E, d)$ um grafo dirigido finito, com $d(e) \in \mathbb{R}^+$, para todo $e \in E$. Suponhamos que os nós estão **numerados de** 1 **a** $n = |V|$

Seja $D_{ij}^{(k)}$ a distância mínima de i para j em G **se os percursos só puderem ter os nós** $1, 2, \ldots, k$ **como nós intermédios**, com $k \geq 0$, fixo.

- Para todo $(i, j) \in V \times V$, o valor de $D_{ij}^{(k)}$ **define-se recursivamente** assim:

$$D_{ij}^{(k)} = \min(D_{ij}^{(k-1)}, D_{ik}^{(k-1)} + D_{kj}^{(k-1)}), \text{ se } k \geq 1$$

$$D_{ij}^{(0)} = \begin{cases} d(i,j), & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \\ \infty & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \notin E \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

- O algoritmo de Floyd-Warshall baseia-se nessa recorrência e no facto de $D_{ij}^{(k+1)} \leq D_{ij}^{(k)}$, o que permite *dispensar a construção de matrizes auxiliares*.
- A matriz das distâncias mínimas é $D_{ij}^{(n)}$, sendo $n = |V|$. Notar que, nesse caso, **qualquer nó de** V **pode ser nó intermédio no caminho mínimo**.

Justificação da correção do algoritmo de Floyd-Warshall

Seja $G = (V, E, d)$ um grafo dirigido finito, com $d(e) \in \mathbb{R}^+$, para todo $e \in E$. Suponhamos que os nós estão **numerados de** 1 **a** $n = |V|$

Seja $D_{ij}^{(k)}$ a distância mínima de i para j em G **se os percursos só puderem ter os nós** $1, 2, \ldots, k$ **como nós intermédios**, com $k \geq 0$, fixo.

- Para todo $(i, j) \in V \times V$, o valor de $D_{ij}^{(k)}$ **define-se recursivamente** assim:

$$D_{ij}^{(k)} = \min(D_{ij}^{(k-1)}, D_{ik}^{(k-1)} + D_{kj}^{(k-1)}), \quad \text{se } k \geq 1$$

$$D_{ij}^{(0)} = \begin{cases} d(i,j), & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \\ \infty & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \notin E \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

- O algoritmo de Floyd-Warshall baseia-se nessa recorrência e no facto de $D_{ij}^{(k+1)} \leq D_{ij}^{(k)}$, o que permite *dispensar a construção de matrizes auxiliares*.
- A matriz das distâncias mínimas é $D_{ij}^{(n)}$, sendo $n = |V|$. Notar que, nesse caso, **qualquer nó de** V **pode ser nó intermédio no caminho mínimo**.

Justificação da correção do algoritmo de Floyd-Warshall

Seja $G = (V, E, d)$ um grafo dirigido finito, com $d(e) \in \mathbb{R}^+$, para todo $e \in E$. Suponhamos que os nós estão **numerados de** 1 **a** $n = |V|$

Seja $D_{ij}^{(k)}$ a distância mínima de i para j em G **se os percursos só puderem ter os nós** $1, 2, \ldots, k$ **como nós intermédios**, com $k \geq 0$, fixo.

- Para todo $(i, j) \in V \times V$, o valor de $D_{ij}^{(k)}$ **define-se recursivamente** assim:

$$D_{ij}^{(k)} = \min(D_{ij}^{(k-1)}, D_{ik}^{(k-1)} + D_{kj}^{(k-1)}), \quad \text{se } k \geq 1$$

$$D_{ij}^{(0)} = \begin{cases} d(i,j), & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \\ \infty & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \notin E \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

- O algoritmo de Floyd-Warshall baseia-se nessa recorrência e no facto de $D_{ij}^{(k+1)} \leq D_{ij}^{(k)}$, o que permite *dispensar a construção de matrizes auxiliares*.
- A matriz das distâncias mínimas é $D_{ij}^{(n)}$, sendo $n = |V|$. Notar que, nesse caso, **qualquer nó de** V **pode ser nó intermédio no caminho mínimo**.

Justificação da correção do algoritmo de Floyd-Warshall

Seja $G = (V, E, d)$ um grafo dirigido finito, com $d(e) \in \mathbb{R}^+$, para todo $e \in E$. Suponhamos que os nós estão **numerados de** 1 **a** $n = |V|$

Seja $D_{ij}^{(k)}$ a distância mínima de i para j em G **se os percursos só puderem ter os nós** $1, 2, \ldots, k$ **como nós intermédios**, com $k \geq 0$, fixo.

- Para todo $(i, j) \in V \times V$, o valor de $D_{ij}^{(k)}$ **define-se recursivamente** assim:

$$D_{ij}^{(k)} = \min(D_{ij}^{(k-1)}, D_{ik}^{(k-1)} + D_{kj}^{(k-1)}), \quad \text{se } k \geq 1$$

$$D_{ij}^{(0)} = \begin{cases} d(i,j), & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \\ \infty & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \notin E \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

- O algoritmo de Floyd-Warshall baseia-se nessa recorrência e no facto de $D_{ij}^{(k+1)} \leq D_{ij}^{(k)}$, o que permite *dispensar a construção de matrizes auxiliares*.
- A matriz das distâncias mínimas é $D_{ij}^{(n)}$, sendo $n = |V|$. Notar que, nesse caso, **qualquer nó de** V **pode ser nó intermédio no caminho mínimo**.

Como caraterizar o caminho mínimo?

Problema: Caminhos mínimos para todos os pares de nós

Dado um grafo $G = (V, E, d)$, com $d(u, v) > 0$, para todo $(u, v) \in E$, encontrar um caminho mínimo de s para t, para todos os pares $(s, t) \in V \times V$, $s \neq t$.

Assume-se que os nós estão numerados de 1 a $n = |V|$. Seja $D_{ij}^{(k)}$ a distância mínima de i para j em G **se os percursos só puderem ter os nós** $1, 2, \ldots, k$ **como nós intermédios**, com $k \geq 0$, fixo. Seja $P_{ij}^{(k)}$ o nó que precede o nó j **num caminho mínimo de** i **para** j **nessas condições**. Para todo $(i, j) \in V \times V$, o valor de $P_{ij}^{(k)}$ **define-se recursivamente** assim:

$$P_{ij}^{(k)} = \begin{cases} P_{ij}^{(k-1)} & \text{se } D_{ij}^{(k)} = D_{ij}^{(k-1)} \\ P_{kj}^{(k-1)} & \text{caso contrário } (D_{ij}^{(k)} = D_{ik}^{(k-1)} + D_{kj}^{(k-1)} \text{ e } D_{ij}^{(k)} < D_{ij}^{(k-1)}) \end{cases}$$

$$P_{ij}^{(0)} = \begin{cases} i & \text{se } (i, j) \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

NB: Em alternativa, podiamos definir $P_{ij}^{(k)}$ como o nó que segue i ou como um nó intermédio no caminho.

Como caraterizar o caminho mínimo?

Problema: Caminhos mínimos para todos os pares de nós

Dado um grafo $G = (V, E, d)$, com $d(u, v) > 0$, para todo $(u, v) \in E$, encontrar um caminho mínimo de s para t, para todos os pares $(s, t) \in V \times V$, $s \neq t$.

Assume-se que os nós estão numerados de 1 a $n = |V|$. Seja $D_{ij}^{(k)}$ a distância mínima de i para j em G **se os percursos só puderem ter os nós** $1, 2, \ldots, k$ **como nós intermédios**, com $k \geq 0$, fixo. Seja $P_{ij}^{(k)}$ o nó que precede o nó j **num caminho mínimo de** i **para** j **nessas condições**. Para todo $(i, j) \in V \times V$, o valor de $P_{ij}^{(k)}$ **define-se recursivamente** assim:

$$P_{ij}^{(k)} = \begin{cases} P_{ij}^{(k-1)} & \text{se } D_{ij}^{(k)} = D_{ij}^{(k-1)} \\ P_{kj}^{(k-1)} & \text{caso contrário } (D_{ij}^{(k)} = D_{ik}^{(k-1)} + D_{kj}^{(k-1)} \text{ e } D_{ij}^{(k)} < D_{ij}^{(k-1)}) \end{cases}$$

$$P_{ij}^{(0)} = \begin{cases} i & \text{se } (i, j) \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

NB: Em alternativa, podiamos definir $P_{ij}^{(k)}$ como o nó que segue i ou como um nó intermédio no caminho.

Algoritmo de Floyd-Warshall com cálculo dos caminhos

```
AlgoritmoFloyd-Warshall(D, P, n)
    Para k ← 1 até n fazer
        Para i ← 1 até n fazer
            Para j ← 1 até n fazer
                Se D[i,j] > D[i,k] + D[k,j] então
                    D[i,j] ← D[i,k] + D[k,j];
                    P[i,j] ← P[k,j];
```

As matrizes D e P devem estar já inicializadas na chamada se, como acima, não se incluir a inicialização na função:

$D[i,i] = 0$; $D[i,j] = d(i,j)$ *se* $(i,j) \in E$ *e, caso contrário,* $D[i,j] = \infty$.
$P[i,i] = 0$; $P[i,j] = i$ *se* $(i,j) \in E$ *e, caso contrário,* $P[i,j] = 0$.

Construir expressão regular para AF – Método de Kleene

Dado um autómato finito $A = (S, \Sigma, \delta, s_1, F)$, com estados numerados de 1 a n, seja $r_{ij}^{(k)}$ a expressão que descreve a linguagem determinada pelos percursos de i para j que passam quando muito por estados intermédios *etiquetados* com números não superiores a k.

$$r_{ii}^{(0)} = \begin{cases} \varepsilon & sse \quad \text{não existe qualquer lacete em } i \\ \varepsilon + a_1 \ldots + a_p & sse \quad \text{os lacetes em } i \text{ estão etiquetados com } a_1, \ldots, a_p \end{cases}$$

$$r_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \emptyset & sse \quad \text{não existe qualquer arco } (i,j) \\ a_1 + \ldots + a_p & sse \quad a_1, \ldots, a_p \text{ etiquetam os arcos } (i,j) \end{cases}$$

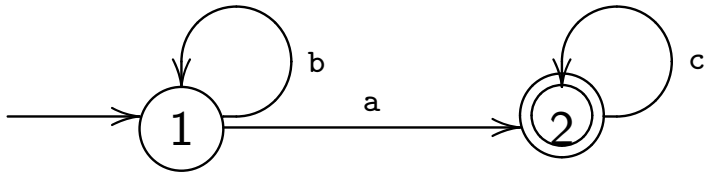
Define-se agora $r_{ij}^{(k)}$, para $k \geq 1$, recursivamente assim:

$$r_{ij}^{(k)} = r_{ij}^{(k-1)} + r_{ik}^{(k-1)} (r_{kk}^{(k-1)})^{\star} r_{kj}^{(k-1)}$$

onde $\star$ é o (habitual) fecho de Kleene. A expressão que define a linguagem reconhecida pelo autómato é dada por: $\sum_{s \in F} r_{1s}^{(n)}$

Método de Kleene para obter expressões regulares para AFs

Muito trabalhoso...



$$r_{11}^{(0)} = \varepsilon + \mathtt{b} \qquad r_{22}^{(0)} = \varepsilon + \mathtt{c} \qquad r_{12}^{(0)} = \mathtt{a} \qquad r_{21}^{(0)} = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
r_{11}^{(1)} &= r_{11}^{(0)} + r_{11}^{(0)}(r_{11}^{(0)})^\star r_{11}^{(0)} = \varepsilon + \mathtt{b} + (\varepsilon + \mathtt{b})(\varepsilon + \mathtt{b})^\star(\varepsilon + \mathtt{b}) = \mathtt{b}^\star \\
r_{22}^{(1)} &= r_{22}^{(0)} + r_{21}^{0}(r_{11}^{(0)})^\star r_{12}^{(0)} = \varepsilon + \mathtt{c} + \emptyset(\varepsilon + \mathtt{b})^\star \mathtt{a} = \varepsilon + \mathtt{c} \\
r_{12}^{(1)} &= r_{12}^{(0)} + r_{11}^{(0)}(r_{11}^{(0)})^\star r_{12}^{(0)} = \mathtt{a} + (\varepsilon + \mathtt{b})(\varepsilon + \mathtt{b})^\star \mathtt{a} = \mathtt{b}^\star \mathtt{a} \\
r_{21}^{(1)} &= r_{21}^{(0)} + r_{21}^{(0)}(r_{11}^{(0)})^\star r_{11}^{(0)} = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{11}^{(2)} &= r_{11}^{(1)} + r_{12}^{(1)}(r_{22}^{(1)})^\star r_{21}^{(1)} = r_{11}^{(1)} = \mathtt{b}^\star \\
r_{12}^{(2)} &= r_{12}^{(1)} + r_{12}^{(1)}(r_{22}^{(1)})^\star r_{22}^{(1)} = \mathtt{b}^\star \mathtt{a} + \mathtt{b}^\star \mathtt{a}(\varepsilon + \mathtt{c})^\star(\varepsilon + \mathtt{c}) = \mathtt{b}^\star \mathtt{a} \mathtt{c}^\star \\
r_{22}^{(2)} &= r_{22}^{(1)} + r_{22}^{(1)}(r_{22}^{(1)})^\star r_{22}^{(1)} = \mathtt{c}^\star \\
r_{21}^{(2)} &= \emptyset
\end{aligned}$$

Conclusão: a expressão que descreve a linguagem aceite pelo AF é $r_{12}^{(2)}$ ou seja, $b^\star ac^\star$.

Se 1 e 2 fossem estados finais seria $r_{11}^{(2)} + r_{12}^{(2)} = \mathtt{b}^\star + \mathtt{b}^\star \mathtt{a} \mathtt{c}^\star$.

Cálculo do fecho transitivo R^+ de uma relação binária R

Recordar que:

- Um grafo dirigido $G = (V, E)$ representa uma **relação binária** R definida no conjunto V. O conjunto de ramos corresponde ao conjunto de pares ordenados que constituem R. Por definição, $R \subseteq V \times V$.
- R é transitiva se $((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$, para todo (x, y, z).
- O fecho transitivo de R denota-se por R^+ e é a menor relação binária definida em V que é transitiva e contém R. **Menor** para $\subseteq$.
- Usando a **composta de relações**, define-se $R^1 = R$ e $R^{i+1} = R^i R = R R^i$. Por definição de composição, $uR^i Rv$ se existe $w \in V$ tal que $uR^i w \ \wedge \ wRv$.

  Consequentemente:

  - $(x, y) \in R^i$ sse existir um percurso de x para y com i ramos no grafo de R, para $i \geq 1$. É conhecido que $R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$, com $n = |V|$.
  - $(x, y) \in R^+$ **sse existir um percurso de x para y no grafo de R.**

Cálculo do fecho transitivo R^+ de uma relação binária R

Recordar que:

- Um grafo dirigido $G = (V, E)$ representa uma **relação binária** R definida no conjunto V. O conjunto de ramos corresponde ao conjunto de pares ordenados que constituem R. Por definição, $R \subseteq V \times V$.
- R é transitiva se $((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$, para todo (x, y, z).
- O fecho transitivo de R denota-se por R^+ e é a menor relação binária definida em V que é transitiva e contém R. **Menor** para $\subseteq$.
- Usando a **composta de relações**, define-se $R^1 = R$ e $R^{i+1} = R^i R = R R^i$. Por definição de composição, $uR^i Rv$ se existe $w \in V$ tal que $uR^i w \ \wedge \ wRv$.

  Consequentemente:

  - $(x, y) \in R^i$ sse existir um percurso de x para y com i ramos no grafo de R, para $i \geq 1$. É conhecido que $R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$, com $n = |V|$.
  - $(x, y) \in R^+$ **sse existir um percurso de** x **para** y **no grafo de** R.

Cálculo do fecho transitivo R^+ de uma relação binária R

Recordar que:

- Um grafo dirigido $G = (V, E)$ representa uma **relação binária** R definida no conjunto V. O conjunto de ramos corresponde ao conjunto de pares ordenados que constituem R. Por definição, $R \subseteq V \times V$.
- R é transitiva se $((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$, para todo (x, y, z).
- O fecho transitivo de R denota-se por R^+ e é a menor relação binária definida em V que é transitiva e contém R. **Menor** para $\subseteq$.
- Usando a **composta de relações**, define-se $R^1 = R$ e $R^{i+1} = R^i R = R R^i$. Por definição de composição, $uR^i Rv$ se existe $w \in V$ tal que $uR^i w \ \wedge \ wRv$.

  Consequentemente:

  - $(x, y) \in R^i$ sse existir um percurso de x para y com i ramos no grafo de R, para $i \geq 1$. É conhecido que $R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$, com $n = |V|$.
  - $(x, y) \in R^+$ **sse existir um percurso de** x **para** y **no grafo de** R.

Cálculo do fecho transitivo R^+ de uma relação binária R

Recordar que:

- Um grafo dirigido $G = (V, E)$ representa uma **relação binária** R definida no conjunto V. O conjunto de ramos corresponde ao conjunto de pares ordenados que constituem R. Por definição, $R \subseteq V \times V$.
- R é transitiva se $((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$, para todo (x, y, z).
- O fecho transitivo de R denota-se por R^+ e é a menor relação binária definida em V que é transitiva e contém R. **Menor** para $\subseteq$.
- Usando a **composta de relações**, define-se $R^1 = R$ e $R^{i+1} = R^i R = R R^i$. Por definição de composição, $uR^i Rv$ se existe $w \in V$ tal que $uR^i w \ \wedge \ wRv$.

Consequentemente:

- $(x, y) \in R^i$ sse existir um percurso de x para y com i ramos no grafo de R, para $i \geq 1$. É conhecido que $R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$, com $n = |V|$.
- $(x, y) \in R^+$ **sse existir um percurso de x para y no grafo de R.**

Cálculo do fecho transitivo R^+ de uma relação binária R

Recordar que:

- Um grafo dirigido $G = (V, E)$ representa uma **relação binária** R definida no conjunto V. O conjunto de ramos corresponde ao conjunto de pares ordenados que constituem R. Por definição, $R \subseteq V \times V$.
- R é transitiva se $((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$, para todo (x, y, z).
- O fecho transitivo de R denota-se por R^+ e é a menor relação binária definida em V que é transitiva e contém R. **Menor** para $\subseteq$.
- Usando a **composta de relações**, define-se $R^1 = R$ e $R^{i+1} = R^i R = R R^i$. Por definição de composição, $uR^i Rv$ se existe $w \in V$ tal que $uR^i w \ \wedge \ wRv$.

  Consequentemente:

  - $(x, y) \in R^i$ sse existir um percurso de x para y com i ramos no grafo de R, para $i \geq 1$. É conhecido que $R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$, com $n = |V|$.
  - $(x, y) \in R^+$ **sse existir um percurso de** x **para** y **no grafo de** R.

Cálculo do fecho transitivo R^+ de uma relação binária R

Recordar que:

- Um grafo dirigido $G = (V, E)$ representa uma **relação binária** R definida no conjunto V. O conjunto de ramos corresponde ao conjunto de pares ordenados que constituem R. Por definição, $R \subseteq V \times V$.
- R é transitiva se $((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$, para todo (x, y, z).
- O fecho transitivo de R denota-se por R^+ e é a menor relação binária definida em V que é transitiva e contém R. **Menor** para $\subseteq$.
- Usando a **composta de relações**, define-se $R^1 = R$ e $R^{i+1} = R^i R = R R^i$. Por definição de composição, $uR^i Rv$ se existe $w \in V$ tal que $uR^i w \ \wedge \ wRv$.

  Consequentemente:

  - $(x, y) \in R^i$ sse existir um percurso de x para y com i ramos no grafo de R, para $i \geq 1$. É conhecido que $R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$, com $n = |V|$.
  - $(x, y) \in R^+$ **sse existir um percurso de** x **para** y **no grafo de** R.

Algoritmo de Warshall para cálculo do fecho transitivo

- A **matriz da relação binária** R é uma **matriz de booleanos** dada por

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in R \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin R \end{cases}$$

- Como no algoritmo de **Floyd-Warshall**, seja $M_{ij}^{(k)} = 1$ se existir algum percurso no grafo de R do nó i para o nó j que, quando muito, use nós numerados até k como nós intermédios. Supomos que $V = \{1, \ldots, n\}$.
- Definimos $M_{ij}^{(0)} = M_{ij}$. Tem-se $(i,j) \in R^+$ sse $M_{ij}^+ = 1$, sendo $M_{ij}^+ = M_{ij}^{(n)}$.

```
ALGORITMO WARSHALL(M, n)
1 | Para k ← 1 até n fazer
2 |     Para i ← 1 até n fazer
3 |         Para j ← 1 até n fazer
4 |             M[i,j] ← M[i,j] ∨ (M[i,k] ∧ M[k,j]);
```

Na linha 4 explora propriedades de R^+. Mais eficiente do que $M^{(k)}[i,j] \leftarrow M^{(k-1)}[i,j] \vee (M^{(k-1)}[i,k] \wedge M^{(k-1)}[k,j])$;

Algoritmo de Warshall para cálculo do fecho transitivo

- A **matriz da relação binária** R é uma **matriz de booleanos** dada por

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in R \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin R \end{cases}$$

- Como no algoritmo de **Floyd-Warshall**, seja $M_{ij}^{(k)} = 1$ se existir algum percurso no grafo de R do nó i para o nó j que, quando muito, use nós numerados até k como nós intermédios. Supomos que $V = \{1, \ldots, n\}$.
- Definimos $M_{ij}^{(0)} = M_{ij}$. Tem-se $(i,j) \in R^+$ sse $M_{ij}^+ = 1$, sendo $M_{ij}^+ = M_{ij}^{(n)}$.

```
ALGORITMO WARSHALL(M, n)
1 | Para k ← 1 até n fazer
2 |     Para i ← 1 até n fazer
3 |         Para j ← 1 até n fazer
4 |             M[i,j] ← M[i,j] ∨ (M[i,k] ∧ M[k,j]);
```

Na linha 4 explora propriedades de R^+. Mais eficiente do que $M^{(k)}[i,j] \leftarrow M^{(k-1)}[i,j] \vee (M^{(k-1)}[i,k] \wedge M^{(k-1)}[k,j])$;

Algoritmo de Warshall para cálculo do fecho transitivo

- A **matriz da relação binária** R é uma **matriz de booleanos** dada por

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in R \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin R \end{cases}$$

- Como no algoritmo de **Floyd-Warshall**, seja $M_{ij}^{(k)} = 1$ se existir algum percurso no grafo de R do nó i para o nó j que, quando muito, use nós numerados até k como nós intermédios. Supomos que $V = \{1, \ldots, n\}$.
- Definimos $M_{ij}^{(0)} = M_{ij}$. Tem-se $(i,j) \in R^+$ sse $M_{ij}^+ = 1$, sendo $M_{ij}^+ = M_{ij}^{(n)}$.

```
ALGORITMO WARSHALL(M, n)
1 | Para k ← 1 até n fazer
2 |     Para i ← 1 até n fazer
3 |         Para j ← 1 até n fazer
4 |             M[i,j] ← M[i,j] ∨ (M[i,k] ∧ M[k,j]);
```

Na linha 4 explora propriedades de R^+. Mais eficiente do que $M^{(k)}[i,j] \leftarrow M^{(k-1)}[i,j] \vee (M^{(k-1)}[i,k] \wedge M^{(k-1)}[k,j])$;

Algoritmo de Warshall para cálculo do fecho transitivo

- A **matriz da relação binária** R é uma **matriz de booleanos** dada por

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in R \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin R \end{cases}$$

- Como no algoritmo de **Floyd-Warshall**, seja $M_{ij}^{(k)} = 1$ se existir algum percurso no grafo de R do nó i para o nó j que, quando muito, use nós numerados até k como nós intermédios. Supomos que $V = \{1, \ldots, n\}$.
- Definimos $M_{ij}^{(0)} = M_{ij}$. Tem-se $(i,j) \in R^+$ sse $M_{ij}^+ = 1$, sendo $M_{ij}^+ = M_{ij}^{(n)}$.

ALGORITMO WARSHALL(M, n)

```
1 | Para k ← 1 até n fazer
2 |     Para i ← 1 até n fazer
3 |         Para j ← 1 até n fazer
4 |             M[i,j] ← M[i,j] ∨ (M[i,k] ∧ M[k,j]);
```

Na linha 4 explora propriedades de R^+. Mais eficiente do que $M^{(k)}[i,j] \leftarrow M^{(k-1)}[i,j] \vee (M^{(k-1)}[i,k] \wedge M^{(k-1)}[k,j])$;

Algoritmo de Warshall para cálculo do fecho transitivo

- A **matriz da relação binária** R é uma **matriz de booleanos** dada por

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in R \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin R \end{cases}$$

- Como no algoritmo de **Floyd-Warshall**, seja $M_{ij}^{(k)} = 1$ se existir algum percurso no grafo de R do nó i para o nó j que, quando muito, use nós numerados até k como nós intermédios. Supomos que $V = \{1, \ldots, n\}$.
- Definimos $M_{ij}^{(0)} = M_{ij}$. Tem-se $(i,j) \in R^+$ sse $M_{ij}^+ = 1$, sendo $M_{ij}^+ = M_{ij}^{(n)}$.

ALGORITMO WARSHALL(M, n)

```
1 | Para k ← 1 até n fazer
2 |     Para i ← 1 até n fazer
3 |         Para j ← 1 até n fazer
4 |             M[i,j] ← M[i,j] ∨ (M[i,k] ∧ M[k,j]);
```

Na linha 4 explora propriedades de R^+. Mais eficiente do que $M^{(k)}[i,j] \leftarrow M^{(k-1)}[i,j] \vee (M^{(k-1)}[i,k] \wedge M^{(k-1)}[k,j])$;

Contagem de percursos em grafos

Problema: calcular o número de percursos de v_i para v_j, para todos os pares de nós (v_i, v_j) de um grafo $G = (V, E)$. Assumir que $V = \{0, \ldots, n-1\}$. O resultado deve ser guardado numa matriz M, com $M[i,j] = -1$ se existir uma infinidade de percursos de v_i para v_j.

Resolução:

Seja C_{ij}^k o número de percursos de i para j que apenas podem ter como nós intermédios os numerados até k, com $k \geq -1$ fixo. C_{ij}^k define-se pela **recorrência**:

$$C_{ij}^{-1} = \begin{cases} 1, \text{ se } (i,j) \in E \\ 0, \text{ se } (i,j) \notin E \end{cases}$$

$$C_{ij}^{k} = C_{ik}^{k-1} \times (C_{kk}^{k-1})^{\star} \times C_{kj}^{k-1} + C_{ij}^{k-1}$$

em que $\times$ e $+$ (extensão das operações habituais a $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$) e $\star$ satisfazem:

$$0^{\star} = 1 \qquad y^{\star} = \infty, \quad \text{se } y \neq 0$$

$$\infty \times 0 = 0 \times \infty = 0 \qquad \infty + y = y + \infty = \infty, \quad \text{para todo } y$$

$$\infty \times y = y \times \infty = \infty, \text{ se } y \neq 0$$

Contagem de percursos em grafos

Problema: calcular o número de percursos de v_i para v_j, para todos os pares de nós (v_i, v_j) de um grafo $G = (V, E)$. Assumir que $V = \{0, \ldots, n-1\}$. O resultado deve ser guardado numa matriz M, com $M[i,j] = -1$ se existir uma infinidade de percursos de v_i para v_j.

Resolução:

Seja C_{ij}^k o número de percursos de i para j que apenas podem ter como nós intermédios os numerados até k, com $k \geq -1$ fixo. C_{ij}^k define-se pela **recorrência**:

$$C_{ij}^{-1} = \begin{cases} 1, \text{ se } (i,j) \in E \\ 0, \text{ se } (i,j) \notin E \end{cases}$$

$$C_{ij}^{k} = C_{ik}^{k-1} \times (C_{kk}^{k-1})^{\star} \times C_{kj}^{k-1} + C_{ij}^{k-1}$$

em que $\times$ e $+$ (extensão das operações habituais a $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$) e $\star$ satisfazem:

$$0^{\star} = 1 \qquad y^{\star} = \infty, \quad \text{se } y \neq 0$$

$$\infty \times 0 = 0 \times \infty = 0 \qquad \infty + y = y + \infty = \infty, \quad \text{para todo } y$$

$$\infty \times y = y \times \infty = \infty, \text{ se } y \neq 0$$

Contagem de percursos em grafos

Problema: calcular o número de percursos de v_i para v_j, para todos os pares de nós (v_i, v_j) de um grafo $G = (V, E)$. Assumir que $V = \{0, \ldots, n-1\}$. O resultado deve ser guardado numa matriz M, com $M[i,j] = -1$ se existir uma infinidade de percursos de v_i para v_j.

Resolução:

Seja C_{ij}^k o número de percursos de i para j que apenas podem ter como nós intermédios os numerados até k, com $k \geq -1$ fixo. C_{ij}^k define-se pela **recorrência**:

$$C_{ij}^{-1} = \begin{cases} 1, \text{ se } (i,j) \in E \\ 0, \text{ se } (i,j) \notin E \end{cases}$$

$$C_{ij}^{k} = C_{ik}^{k-1} \times (C_{kk}^{k-1})^{\star} \times C_{kj}^{k-1} + C_{ij}^{k-1}$$

em que $\times$ e $+$ (extensão das operações habituais a $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$) e $\star$ satisfazem:

$0^{\star} = 1$

$\infty \times 0 = 0 \times \infty = 0$

$\infty \times y = y \times \infty = \infty, \text{ se } y \neq 0$

$y^{\star} = \infty, \quad \text{se } y \neq 0$

$\infty + y = y + \infty = \infty, \quad \text{para todo } y$

Contagem de percursos – Implementação em C

Se $M_{ij}^{k-1} = -1$ ou se $M_{ik}^{k-1} \times M_{kj}^{k-1} \neq 0$ e algum dos valores $M_{ik}^{k-1}, M_{kj}^{k-1}$ e M_{kk}^{k-1} for -1, então $M_{ij}^{k} = -1$. Nos outros casos, $M_{ij}^{k} = M_{ik}^{k-1} \times M_{kj}^{k-1} + M_{ij}^{k-1}$.

```
void contacaminhos(int n,int M[][MAX])
{ int aux[MAX][MAX], k,  i, j;

  for(k=0; k < n ; k++) {
    // copia M para aux
    for (i=0; i < n; i++)
       for (j=0; j < n; j++) aux[i][j] = M[i][j];
    // atualiza a contagem
    for (i=0; i < n; i++)
      for (j=0; j < n; j++)
       if (a[i][j] != -1) {
         if (aux[i][k]*aux[k][j])
           if(aux[k][k] || aux[i][k]== -1 || aux[k][j]== -1) M[i][j] = -1;
           else M[i][j] += aux[i][k]*aux[k][j];
      }
  }
}
```

Contagem de percursos – Implementação em C

Se $M_{ij}^{k-1} = -1$ ou se $M_{ik}^{k-1} \times M_{kj}^{k-1} \neq 0$ e algum dos valores M_{ik}^{k-1}, M_{kj}^{k-1} e M_{kk}^{k-1} for -1, então $M_{ij}^{k} = -1$. Nos outros casos, $M_{ij}^{k} = M_{ik}^{k-1} \times M_{kj}^{k-1} + M_{ij}^{k-1}$.

```
void contacaminhos(int n,int M[][MAX])
{ int aux[MAX][MAX], k,  i, j;

  for(k=0; k < n ; k++) {
    // copia M para aux
    for (i=0; i < n; i++)
       for (j=0; j < n; j++) aux[i][j] = M[i][j];
    // atualiza a contagem
    for (i=0; i < n; i++)
      for (j=0; j < n; j++)
       if (a[i][j] != -1) {
         if (aux[i][k]*aux[k][j])
           if(aux[k][k] || aux[i][k]== -1 || aux[k][j]== -1) M[i][j] = -1;
           else M[i][j] += aux[i][k]*aux[k][j];
      }
  }
}
```

Caixotes de Morangos - aplicação de DP

O dono de uma pequena cadeia de ($L \geq 1$) mercearias adquiriu ($C \geq 1$) caixotes de morangos e tem que decidir quantos caixotes enviar para cada uma das suas lojas, de forma a maximizar o lucro. Devido às características específicas de cada loja (localização, capacidade de armazenamento, número médio de clientes, etc.), o lucro esperado com a venda dos morangos varia, não só de loja para loja, como, também, consoante o número de caixotes enviados para cada loja. É conhecido o lucro do envio de n caixotes para cada uma das lojas, para cada $n \in [0, C]$. Naturalmente, é nulo se não enviar nenhum caixote. Por razões administrativas, cada caixote é indivisível (i.e., o seu conteúdo não pode ser repartido por várias lojas). Não é necessário enviar caixotes para todas as lojas. Como efetuar a distribuição?

(Margarida Mamede, UNL, adaptado)

Caixotes de Morangos

Exemplo de dados:

```
3 5
1.50 2.50 2.00
3.50 5.00 3.00
4.50 5.50 5.50
6.00 5.50 6.00
6.50 5.50 6.00
```

Neste exemplo, tem $L = 3$ lojas e $C = 5$ caixotes.

Na coluna j tem os lucros v_{ij} do envio de i caixotes para a loja j, com $i = 1, 2, \ldots, C$, e $j = 1, 2, \ldots, L$.

Admitimos ainda que $v_{0j} = 0$, para todo j.

Seja $z_{k,j}$ o lucro ótimo se enviar no total k caixotes para as j primeiras lojas, com k e j fixos. Então, $z_{k,j}$ é definido pela recorrência:

$$\begin{aligned} z_{0,j} &= 0, \quad \text{para } 1 \leq j \leq L \\ z_{k,1} &= v_{k,1}, \quad \text{para } 1 \leq k \leq C \\ z_{k,j} &= \max_{0 \leq t \leq k} (v_{k-t,j} + z_{t,j-1}), \quad \text{para } 1 \leq k \leq C, \text{ e } 2 \leq j \leq L \ , \end{aligned}$$

Para $j \geq 2$, calculam-se os lucros das soluções que enviam $k - t$ caixotes à loja j e distribuem *otimamente os restantes* t pelas lojas numeradas até $j - 1$, para $0 \leq t \leq k$. A solução de maior valor define $z_{k,j}$.

Caixotes de Morangos

Exemplo de dados:

```
3 5
1.50 2.50 2.00
3.50 5.00 3.00
4.50 5.50 5.50
6.00 5.50 6.00
6.50 5.50 6.00
```

Neste exemplo, tem $L = 3$ lojas e $C = 5$ caixotes.

Na coluna j tem os lucros v_{ij} do envio de i caixotes para a loja j, com $i = 1, 2, \ldots, C$, e $j = 1, 2, \ldots, L$.

Admitimos ainda que $v_{0j} = 0$, para todo j.

Seja $z_{k,j}$ o lucro ótimo se enviar no total k caixotes para as j primeiras lojas, com k e j fixos. Então, $z_{k,j}$ é definido pela recorrência:

$$\begin{aligned} z_{0,j} &= 0, \quad \text{para } 1 \leq j \leq L \\ z_{k,1} &= v_{k,1}, \quad \text{para } 1 \leq k \leq C \\ z_{k,j} &= \max_{0 \leq t \leq k} (v_{k-t,j} + z_{t,j-1}), \quad \text{para } 1 \leq k \leq C, \text{ e } 2 \leq j \leq L \ , \end{aligned}$$

Para $j \geq 2$, calculam-se os lucros das soluções que enviam $k - t$ caixotes à loja j e distribuem *otimamente os restantes* t pelas lojas numeradas até $j - 1$, para $0 \leq t \leq k$. A solução de maior valor define $z_{k,j}$.

Caixotes de Morangos

Exemplo de dados:

```
3 5
1.50 2.50 2.00
3.50 5.00 3.00
4.50 5.50 5.50
6.00 5.50 6.00
6.50 5.50 6.00
```

Neste exemplo, tem $L = 3$ lojas e $C = 5$ caixotes.

Na coluna j tem os lucros v_{ij} do envio de i caixotes para a loja j, com $i = 1, 2, \ldots, C$, e $j = 1, 2, \ldots, L$.

Admitimos ainda que $v_{0j} = 0$, para todo j.

Seja $z_{k,j}$ o lucro ótimo se enviar no total k caixotes para as j primeiras lojas, com k e j fixos. Então, $z_{k,j}$ é definido pela recorrência:

$$\begin{aligned} z_{0,j} &= 0, \quad \text{para } 1 \leq j \leq L \\ z_{k,1} &= v_{k,1}, \quad \text{para } 1 \leq k \leq C \\ z_{k,j} &= \max_{0 \leq t \leq k} (v_{k-t,j} + z_{t,j-1}), \quad \text{para } 1 \leq k \leq C, \text{ e } 2 \leq j \leq L \ , \end{aligned}$$

Para $j \geq 2$, calculam-se os lucros das soluções que enviam $k - t$ caixotes à loja j e distribuem *otimamente os restantes* t pelas lojas numeradas até $j - 1$, para $0 \leq t \leq k$. A solução de maior valor define $z_{k,j}$.

Caixotes de Morangos - Exemplo

```
3 5
1.50 2.50 2.00
3.50 5.00 3.00
4.50 5.50 5.50
6.00 5.50 6.00
6.50 5.50 6.00
```

$$
\begin{aligned}
z_{0,j} &= 0, \quad \text{para } 1 \leq j \leq L \\
z_{k,1} &= v_{k,1}, \quad \text{para } 1 \leq k \leq C \\
z_{k,j} &= \max_{0 \leq t \leq k} (v_{k-t,j} + z_{t,j-1}), \quad \text{para } 1 \leq k \leq C, \text{ e } 2 \leq j \leq L \ ,
\end{aligned}
$$

caixas / lojas	0	1	2	3	4	5
L_1	0.00	1.50	3.50	4.50	6.00	6.50
	$0 : L_1$	$1 : L_1$	$2 : L_1$	$3 : L_1$	$4 : L_1$	$5 : L_1$
L_1, L_2	0.00	2.50	5.00	6.50	8.50	9.50
	$0 : L_1$	$0 : L_1$	$0 : L_1$	$1 : L_1$	$2 : L_1$	$3 : L_1$
	$0 : L_2$	$1 : L_2$	$2 : L_2$	$2 : L_2$	$2 : L_2$	$2 : L_2$
L_1, L_2, L_3	0.00	2.50	5.00	7.00	8.50	10.50
	$0 : L_1$	$0 : L_1$	$0 : L_1$	$0 : L_1$	$1 : L_1$	$0 : L_1$
	$0 : L_2$	$1 : L_2$	$2 : L_2$	$2 : L_2$	$2 : L_2$	$2 : L_2$
	$0 : L_3$	$0 : L_3$	$0 : L_3$	$1 : L_3$	$1 : L_3$	$3 : L_3$

Caixotes de Morangos (cont.)

$$
\begin{aligned}
z_{0,j} &= 0, \quad \text{para } 1 \leq j \leq L \\
z_{k,1} &= v_{k,1}, \quad \text{para } 1 \leq k \leq C \\
z_{k,j} &= \max_{0 \leq t \leq k} (v_{k-t,j} + z_{t,j-1}), \quad \text{para } 1 \leq k \leq C, \text{ e } 2 \leq j \leq L
\end{aligned}
$$

- **Algoritmos baseados em programação dinâmica podem gastar muita memória**. É necessário evitar, se possível, gastos de memória excessivos.
- Neste caso, **não precisamos de uma matriz** $(C+1) \times L$ para guardar $z_{k,j}$, pois $z_{k,j}$ só depende dos valores de $z_{t,j-1}$, para $t \leq k$.
- Bastariam dois *arrays* com $C+1$ posições, para guardar os valores de $z_{k,j-1}$ e de $z_{k,j}$, para todo k.
- Se analisarmos com mais cuidado, podemos concluir que, de facto, **basta um array** $Z[\cdot]$, sendo $Z[k] = z_{k,j}$, pois $z_{k,j}$ só depende dos valores de $z_{t,j-1}$, para $t \leq k$. Para tal, **na atualização** de $Z[k]$ **para um novo** j, tem de se **começar pelo valor mais alto de** k, tomando $k = C, C-1, \ldots, 2, 1$.

Caixotes de Morangos – *DP construção "bottom-up"*

CaixotesMorangos(V, L, C, Z)

```
0 | Z[0] ← 0;
1 | Para k ← 1 até C fazer Z[k] ← V[k, 1];
2 | Para j ← 2 até L fazer
3 |   Para k ← C até 1 com decremento de 1 fazer
4 |     Para t ← 0 até k − 1 fazer   /* NB: inicialmente Z[k] é já V[0, j] + Z[k] */
5 |       Se V[k − t, j] + Z[t] > Z[k] então
6 |         Z[k] ← V[k − t, j] + Z[t];
```

Complexidade:
Passando V e Z por referência e C e L por valor, a **complexidade temporal** é $\Theta(LC^2)$ e a **espacial** (adicional) é $\Theta(C)$. "Adicional" porque não contabiliza o espaço $\Theta(LC)$ ocupado pela matriz de dados V, mas apenas Z.

Justificação (sucinta): A complexidade temporal do **ciclo 4-6** é $\Theta(k)$. Logo, para o **ciclo 3-6** é $\Theta(\sum_{k=1}^{C} k) = \Theta(C(C+1)/2) = \Theta(C^2)$ e, portanto, para o **ciclo 2-6** é $\Theta(LC^2)$. Assim, o **bloco 1-6** tem complexidade $\Theta(C + LC^2) = \Theta(LC^2)$.

Se os dados fossem lidos de um ficheiro e se desse V^T (a transposta de V) em vez de V, o espaço total podia ser $\Theta(C)$.

Ver problema da aula prática: Caixotes de Morangos II (não passar V; ler lucro da loja j dentro da função e atualizar Z)

Caixotes de Morangos – *DP construção "bottom-up"*

CaixotesMorangos(V, L, C, Z)

```
0 | Z[0] ← 0;
1 | Para k ← 1 até C fazer Z[k] ← V[k, 1];
2 | Para j ← 2 até L fazer
3 |   Para k ← C até 1 com decremento de 1 fazer
4 |     Para t ← 0 até k − 1 fazer    /* NB: inicialmente Z[k] é já V[0, j] + Z[k] */
5 |       Se V[k − t, j] + Z[t] > Z[k] então
6 |         Z[k] ← V[k − t, j] + Z[t];
```

Complexidade:
Passando V e Z por referência e C e L por valor, a **complexidade temporal** é $\Theta(LC^2)$ e a **espacial** (adicional) é $\Theta(C)$. "Adicional" porque não contabiliza o espaço $\Theta(LC)$ ocupado pela matriz de dados V, mas apenas Z.

Justificação (sucinta): A complexidade temporal do **ciclo 4-6** é $\Theta(k)$. Logo, para o **ciclo 3-6** é $\Theta(\sum_{k=1}^{C} k) = \Theta(C(C+1)/2) = \Theta(C^2)$ e, portanto, para o **ciclo 2-6** é $\Theta(LC^2)$. Assim, o **bloco 1-6** tem complexidade $\Theta(C + LC^2) = \Theta(LC^2)$.

Se os dados fossem lidos de um ficheiro e se desse V^T (a transposta de V) em vez de V, o espaço total podia ser $\Theta(C)$.

Ver problema da aula prática: Caixotes de Morangos II (não passar V; ler lucro da loja j dentro da função e atualizar Z)

Problemas de trocos com número de moedas limitado

- O problema "Não lhes dês troco" usa uma **estratégia ávida** (*greedy*) para dar o troco, que nem sempre permite obter o montante pretendido.
- De quantas formas conseguiria obter uma quantia Q dada se não usar essa estratégia? Seja d_k **o número de moedas disponíveis de valor** v_k, para $1 \leq k \leq m$. Admita-se que $v_k < v_{k+1}$, para todo $k < m$.
- Se puder usar apenas moedas de valor $v_1, \ldots, v_k$, o número de formas $N_{q,k}$ de obter q pode ser definido recursivamente assim:

  $N_{0,k} = 1$, para $1 \leq k \leq m$ (não dar moeda nenhuma se $q = 0$)

  $$N_{q,1} = \begin{cases} 1 & \text{se } q > 0 \wedge q\%v_1 = 0 \wedge d_1 \geq \frac{q}{v_1} \\ 0 & \text{se } q > 0 \wedge (q\%v_1 \neq 0 \vee d_1 < \frac{q}{v_1}) \end{cases}$$

  $N_{q,k} = \sum_{r=0}^{\min(d_k, \lfloor q/v_k \rfloor)} N_{q-rv_k,k-1}$, para todo $q > 0$ e $1 < k \leq m$.

O valor procurado é $N_{Q,m}$. Dependendo de Q e dos valores das moedas disponíveis, pode acontecer que nem todos os pares (q, k), com $q \leq Q$, precisem de ser calculados.

Problemas de trocos com número de moedas limitado

- O problema "Não lhes dês troco" usa uma **estratégia ávida** (*greedy*) para dar o troco, que nem sempre permite obter o montante pretendido.
- De quantas formas conseguiria obter uma quantia Q dada se não usar essa estratégia? Seja d_k **o número de moedas disponíveis de valor** v_k, para $1 \leq k \leq m$. Admita-se que $v_k < v_{k+1}$, para todo $k < m$.
- Se puder usar apenas moedas de valor $v_1, \ldots, v_k$, o número de formas $N_{q,k}$ de obter q pode ser definido recursivamente assim:

  $N_{0,k} = 1$, para $1 \leq k \leq m$ (não dar moeda nenhuma se $q = 0$)

  $$N_{q,1} = \begin{cases} 1 & \text{se } q > 0 \wedge q\%v_1 = 0 \wedge d_1 \geq \frac{q}{v_1} \\ 0 & \text{se } q > 0 \wedge (q\%v_1 \neq 0 \vee d_1 < \frac{q}{v_1}) \end{cases}$$

  $N_{q,k} = \sum_{r=0}^{\min(d_k, \lfloor q/v_k \rfloor)} N_{q-rv_k,k-1}$, para todo $q > 0$ e $1 < k \leq m$.

O valor procurado é $N_{Q,m}$. Dependendo de Q e dos valores das moedas disponíveis, pode acontecer que nem todos os pares (q, k), com $q \leq Q$, precisem de ser calculados.

Problemas de trocos com número de moedas limitado

- O problema "Não lhes dês troco" usa uma **estratégia ávida** (*greedy*) para dar o troco, que nem sempre permite obter o montante pretendido.
- De quantas formas conseguiria obter uma quantia Q dada se não usar essa estratégia? Seja d_k **o número de moedas disponíveis de valor** v_k, para $1 \leq k \leq m$. Admita-se que $v_k < v_{k+1}$, para todo $k < m$.
- Se puder usar apenas moedas de valor $v_1, \ldots, v_k$, o número de formas $N_{q,k}$ de obter q pode ser definido recursivamente assim:

  $N_{0,k} = 1$, para $1 \leq k \leq m$ (não dar moeda nenhuma se $q = 0$)

  $$N_{q,1} = \begin{cases} 1 & \text{se } q > 0 \wedge q\%v_1 = 0 \wedge d_1 \geq \frac{q}{v_1} \\ 0 & \text{se } q > 0 \wedge (q\%v_1 \neq 0 \vee d_1 < \frac{q}{v_1}) \end{cases}$$

  $N_{q,k} = \sum_{r=0}^{\min(d_k, \lfloor q/v_k \rfloor)} N_{q-rv_k,k-1}$, para todo $q > 0$ e $1 < k \leq m$.

O valor procurado é $N_{Q,m}$. Dependendo de Q e dos valores das moedas disponíveis, pode acontecer que nem todos os pares (q, k), com $q \leq Q$, precisem de ser calculados.

Problemas de trocos com número de moedas limitado

- O problema "Não lhes dês troco" usa uma **estratégia ávida** (*greedy*) para dar o troco, que nem sempre permite obter o montante pretendido.
- De quantas formas conseguiria obter uma quantia Q dada se não usar essa estratégia? Seja d_k **o número de moedas disponíveis de valor** v_k, para $1 \leq k \leq m$. Admita-se que $v_k < v_{k+1}$, para todo $k < m$.
- Se puder usar apenas moedas de valor $v_1, \ldots, v_k$, o número de formas $N_{q,k}$ de obter q pode ser definido recursivamente assim:

$$N_{0,k} = 1, \text{ para } 1 \leq k \leq m \text{ (não dar moeda nenhuma se } q = 0)$$

$$N_{q,1} = \begin{cases} 1 & \text{se } q > 0 \wedge q\%v_1 = 0 \wedge d_1 \geq \frac{q}{v_1} \\ 0 & \text{se } q > 0 \wedge (q\%v_1 \neq 0 \vee d_1 < \frac{q}{v_1}) \end{cases}$$

$$N_{q,k} = \sum_{r=0}^{\min(d_k, \lfloor q/v_k \rfloor)} N_{q-rv_k,k-1}, \text{ para todo } q > 0 \text{ e } 1 < k \leq m.$$

O valor procurado é $N_{Q,m}$. Dependendo de Q e dos valores das moedas disponíveis, pode acontecer que nem todos os pares (q, k), com $q \leq Q$, precisem de ser calculados.

Problemas de trocos com número de moedas limitado

- O problema "Não lhes dês troco" usa uma **estratégia ávida** (*greedy*) para dar o troco, que nem sempre permite obter o montante pretendido.
- De quantas formas conseguiria obter uma quantia Q dada se não usar essa estratégia? Seja d_k **o número de moedas disponíveis de valor** v_k, para $1 \leq k \leq m$. Admita-se que $v_k < v_{k+1}$, para todo $k < m$.
- Se puder usar apenas moedas de valor $v_1, \ldots, v_k$, o número de formas $N_{q,k}$ de obter q pode ser definido recursivamente assim:

  $N_{0,k} = 1$, para $1 \leq k \leq m$ (não dar moeda nenhuma se $q = 0$)

  $$N_{q,1} = \begin{cases} 1 & \text{se } q > 0 \wedge q\%v_1 = 0 \wedge d_1 \geq \frac{q}{v_1} \\ 0 & \text{se } q > 0 \wedge (q\%v_1 \neq 0 \vee d_1 < \frac{q}{v_1}) \end{cases}$$

  $N_{q,k} = \sum_{r=0}^{\min(d_k, \lfloor q/v_k \rfloor)} N_{q-rv_k,k-1}$, para todo $q > 0$ e $1 < k \leq m$.

O valor procurado é $N_{Q,m}$. Dependendo de Q e dos valores das moedas disponíveis, pode acontecer que nem todos os pares (q, k), com $q \leq Q$, precisem de ser calculados.

Problemas de trocos com número de moedas limitado

- O problema "Não lhes dês troco" usa uma **estratégia ávida** (*greedy*) para dar o troco, que nem sempre permite obter o montante pretendido.
- De quantas formas conseguiria obter uma quantia Q dada se não usar essa estratégia? Seja d_k **o número de moedas disponíveis de valor** v_k, para $1 \leq k \leq m$. Admita-se que $v_k < v_{k+1}$, para todo $k < m$.
- Se puder usar apenas moedas de valor $v_1, \ldots, v_k$, o número de formas $N_{q,k}$ de obter q pode ser definido recursivamente assim:

$$N_{0,k} = 1, \text{ para } 1 \leq k \leq m \text{ (não dar moeda nenhuma se } q = 0)$$

$$N_{q,1} = \begin{cases} 1 & \text{se } q > 0 \wedge q\%v_1 = 0 \wedge d_1 \geq \frac{q}{v_1} \\ 0 & \text{se } q > 0 \wedge (q\%v_1 \neq 0 \vee d_1 < \frac{q}{v_1}) \end{cases}$$

$$N_{q,k} = \sum_{r=0}^{\min(d_k, \lfloor q/v_k \rfloor)} N_{q-rv_k,k-1}, \text{ para todo } q > 0 \text{ e } 1 < k \leq m.$$

O valor procurado é $N_{Q,m}$. Dependendo de Q e dos valores das moedas disponíveis, pode acontecer que nem todos os pares (q, k), com $q \leq Q$, precisem de ser calculados.

Problemas de trocos com número de moedas limitado

Abordagem "Top-Down" com memoização

```
ContaSols(v, d, q, k)        /* chamar ContaSols(v, d, Q, m) para obter N_{Q,m} */
1   | Se q = 0 então retorna 1;
2   | Se k = 1 então
3   |     Se q%v[1] ≠ 0 ∨ d[1] < q/v[1] então retorna 0;
4   |     retorna 1;
5   | Se N[q, k] já calculado então retorna N[q, k];
6   | rmax ← min(d[k], ⌊q/v[k]⌋);
7   | conta ← 0;
8   | Para r ← 0 até rmax fazer
9   |     conta ← conta + ContaSols(v, d, q − r ∗ v[k], k − 1);
10  | N[q, k] ← conta;   /* memoriza para uso futuro se necessário */
11  | retorna conta;
```

Implementação: Definir a tabela N por **dicionário** (*hash-table*)

*Dicionários/Tabelas de dispersão/*Arrays *associativos – coleção de pares* **(Chave,Valor)**.

Java: Map, HashMap, TreeMap C++: std::unordered_map, std::map

Problemas de trocos com número de moedas limitado

Abordagem "Top-Down" com memoização

```
ContaSols(v, d, q, k)        /* chamar ContaSols(v, d, Q, m) para obter N_{Q,m} */
1   | Se q = 0 então retorna 1;
2   | Se k = 1 então
3   |     Se q%v[1] ≠ 0 ∨ d[1] < q/v[1] então retorna 0;
4   |     retorna 1;
5   | Se N[q, k] já calculado então retorna N[q, k];
6   | rmax ← min(d[k], ⌊q/v[k]⌋);
7   | conta ← 0;
8   | Para r ← 0 até rmax fazer
9   |     conta ← conta + ContaSols(v, d, q − r ∗ v[k], k − 1);
10  | N[q, k] ← conta;   /* memoriza para uso futuro se necessário */
11  | retorna conta;
```

Implementação: Definir a tabela N por **dicionário** (*hash-table*)

*Dicionários/Tabelas de dispersão/*Arrays *associativos – coleção de pares* **(Chave,Valor)**.

Java: `Map`, `HashMap`, `TreeMap` *C++:* `std::unordered_map`, `std::map`

Problemas de trocos com número de moedas ilimitado

Problema: Supondo que se tem um número não limitado de moedas de valores 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, e 1, qual é o **número mínimo** de moedas necessário para formar uma quantia Q?

- Abordagem de programação dinâmica é **ineficiente**.
- Prova-se que a **estratégia greedy** que consiste em começar por **usar a moeda de valor mais alto** $v_k \leq Q$ **o número máximo de vezes que puder** (isto é, $n_k = \lfloor Q/v_k \rfloor$ vezes) e aplicar a mesma estratégia para obter a quantia $Q - n_k v_k$ restante, determina a **solução ótima**, em $O(m)$, sendo m o número de tipos de moedas existentes.

Atenção! Para garantir $O(m)$, é necessário usar $Q - n_k v_k$ em vez de dar uma moeda v_k e aplicar a estratégia a $Q - v_k$. Note que $O(Q)$ é $O(2^{\log_2 Q})$ e, portanto, é exponencial no tamanho da representação de Q (input) em binário (assumido no modelo RAM para análise assintótica).

Problemas de trocos com número de moedas ilimitado

Prova de que a estratégia greedy obtém a solução ótima se $\{200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1\}$:

- Seja $x^\star$ uma solução ótima para a quantia Q. Seja $x_v^\star$ é o número de moedas que usa de valor v.
- Se $x_{100}^\star > 1$, a solução não seria ótima (podia reduzir o número de moedas se substituir duas de 100 por uma de 200). Portanto, $x_{100}^\star \leq 1$.
  Analogamente se conclui que: $x_{50}^\star \leq 1$, $x_{10}^\star \leq 1$, e $x_1^\star \leq 1$.
- Se $x_{20}^\star > 2$ então a solução não seria ótima porque podia trocar três moedas de 20 por uma de 50 e uma de 10. Portanto, $x_{20}^\star \leq 2$. Analogamente, $x_2^\star \leq 2$.
- Não pode ter simultaneamente $x_2^\star = 2$ e $x_1^\star = 1$, pois a solução não seria ótima (podia substituir essas três moedas por uma de 5). Portanto $2x_2^\star + x_1^\star \leq 4$.
  Também não tem simultaneamente $x_{20}^\star = 2$ e $x_{10}^\star = 1$.
- Como $2x_2^\star + x_1^\star \leq 4$, $x_5^\star \leq 1$ e $x_{10}^\star \leq 1$ então $5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 9$ e $10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 19$. Analogamente, se deduz que $20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 49$, $50x_{50}^\star + 20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 99$. $100x_{100}^\star + 50x_{50}^\star + 20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 199$.

  Tem-se $\sum_{i=1}^{k} v_i x_{v_i}^\star < v_{k+1}$, para todo k. Portanto, $x^\star$ é a solução greedy. □

NB: A estratégia *greedy* apresentada não seria correta para, por exemplo, $V = \{1, 300, 1000\}$, $Q = 1200$.

Problemas de trocos com número de moedas ilimitado

Prova de que a estratégia greedy obtém a solução ótima se $\{200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1\}$:

- Seja $x^\star$ uma solução ótima para a quantia Q. Seja $x_v^\star$ é o número de moedas que usa de valor v.
- Se $x_{100}^\star > 1$, a solução não seria ótima (podia reduzir o número de moedas se substituir duas de 100 por uma de 200). Portanto, $x_{100}^\star \leq 1$.
  Analogamente se conclui que: $x_{50}^\star \leq 1$, $x_{10}^\star \leq 1$, e $x_1^\star \leq 1$.
- Se $x_{20}^\star > 2$ então a solução não seria ótima porque podia trocar três moedas de 20 por uma de 50 e uma de 10. Portanto, $x_{20}^\star \leq 2$. Analogamente, $x_2^\star \leq 2$.
- Não pode ter simultaneamente $x_2^\star = 2$ e $x_1^\star = 1$, pois a solução não seria ótima (podia substituir essas três moedas por uma de 5). Portanto $2x_2^\star + x_1^\star \leq 4$.
  Também não tem simultaneamente $x_{20}^\star = 2$ e $x_{10}^\star = 1$.
- Como $2x_2^\star + x_1^\star \leq 4$, $x_5^\star \leq 1$ e $x_{10}^\star \leq 1$ então $5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 9$ e $10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 19$. Analogamente, se deduz que $20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 49$, $50x_{50}^\star + 20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 99$. $100x_{100}^\star + 50x_{50}^\star + 20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 199$.

  Tem-se $\sum_{i=1}^{k} v_i x_{v_i}^\star < v_{k+1}$, para todo k. Portanto, $x^\star$ é a solução greedy. □

NB: A estratégia *greedy* apresentada não seria correta para, por exemplo, $V = \{1, 300, 1000\}$, $Q = 1200$.

Problemas de trocos com número de moedas ilimitado

Prova de que a estratégia greedy obtém a solução ótima se $\{200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1\}$:

- Seja $x^\star$ uma solução ótima para a quantia Q. Seja $x_v^\star$ é o número de moedas que usa de valor v.
- Se $x_{100}^\star > 1$, a solução não seria ótima (podia reduzir o número de moedas se substituir duas de 100 por uma de 200). Portanto, $x_{100}^\star \leq 1$.
  Analogamente se conclui que: $x_{50}^\star \leq 1$, $x_{10}^\star \leq 1$, e $x_1^\star \leq 1$.
- Se $x_{20}^\star > 2$ então a solução não seria ótima porque podia trocar três moedas de 20 por uma de 50 e uma de 10. Portanto, $x_{20}^\star \leq 2$. Analogamente, $x_2^\star \leq 2$.
- Não pode ter simultaneamente $x_2^\star = 2$ e $x_1^\star = 1$, pois a solução não seria ótima (podia substituir essas três moedas por uma de 5). Portanto $2x_2^\star + x_1^\star \leq 4$.
  Também não tem simultaneamente $x_{20}^\star = 2$ e $x_{10}^\star = 1$.
- Como $2x_2^\star + x_1^\star \leq 4$, $x_5^\star \leq 1$ e $x_{10}^\star \leq 1$ então $5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 9$ e $10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 19$. Analogamente, se deduz que $20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 49$, $50x_{50}^\star + 20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 99$. $100x_{100}^\star + 50x_{50}^\star + 20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 199$.

  Tem-se $\sum_{i=1}^{k} v_i x_{v_i}^\star < v_{k+1}$, para todo k. Portanto, $x^\star$ é a solução greedy. □

NB: A estratégia *greedy* apresentada não seria correta para, por exemplo, $V = \{1, 300, 1000\}$, $Q = 1200$.

Problemas de trocos com número de moedas ilimitado

Prova de que a estratégia greedy obtém a solução ótima se $\{200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1\}$:

- Seja $x^\star$ uma solução ótima para a quantia Q. Seja $x_v^\star$ é o número de moedas que usa de valor v.
- Se $x_{100}^\star > 1$, a solução não seria ótima (podia reduzir o número de moedas se substituir duas de 100 por uma de 200). Portanto, $x_{100}^\star \leq 1$.
  Analogamente se conclui que: $x_{50}^\star \leq 1$, $x_{10}^\star \leq 1$, e $x_1^\star \leq 1$.
- Se $x_{20}^\star > 2$ então a solução não seria ótima porque podia trocar três moedas de 20 por uma de 50 e uma de 10. Portanto, $x_{20}^\star \leq 2$. Analogamente, $x_2^\star \leq 2$.
- Não pode ter simultaneamente $x_2^\star = 2$ e $x_1^\star = 1$, pois a solução não seria ótima (podia substituir essas três moedas por uma de 5). Portanto $2x_2^\star + x_1^\star \leq 4$.
  Também não tem simultaneamente $x_{20}^\star = 2$ e $x_{10}^\star = 1$.
- Como $2x_2^\star + x_1^\star \leq 4$, $x_5^\star \leq 1$ e $x_{10}^\star \leq 1$ então $5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 9$ e $10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 19$. Analogamente, se deduz que $20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 49$, $50x_{50}^\star + 20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 99$. $100x_{100}^\star + 50x_{50}^\star + 20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 199$.

  Tem-se $\sum_{i=1}^{k} v_i x_{v_i}^\star < v_{k+1}$, para todo k. Portanto, $x^\star$ é a solução greedy. □

NB: A estratégia *greedy* apresentada não seria correta para, por exemplo, $V = \{1, 300, 1000\}$, $Q = 1200$.

Problemas de trocos com número de moedas ilimitado

Prova de que a estratégia greedy obtém a solução ótima se $\{200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1\}$:

- Seja $x^\star$ uma solução ótima para a quantia Q. Seja $x_v^\star$ é o número de moedas que usa de valor v.
- Se $x_{100}^\star > 1$, a solução não seria ótima (podia reduzir o número de moedas se substituir duas de 100 por uma de 200). Portanto, $x_{100}^\star \leq 1$.
  Analogamente se conclui que: $x_{50}^\star \leq 1$, $x_{10}^\star \leq 1$, e $x_1^\star \leq 1$.
- Se $x_{20}^\star > 2$ então a solução não seria ótima porque podia trocar três moedas de 20 por uma de 50 e uma de 10. Portanto, $x_{20}^\star \leq 2$. Analogamente, $x_2^\star \leq 2$.
- Não pode ter simultaneamente $x_2^\star = 2$ e $x_1^\star = 1$, pois a solução não seria ótima (podia substituir essas três moedas por uma de 5). Portanto $2x_2^\star + x_1^\star \leq 4$.
  Também não tem simultaneamente $x_{20}^\star = 2$ e $x_{10}^\star = 1$.
- Como $2x_2^\star + x_1^\star \leq 4$, $x_5^\star \leq 1$ e $x_{10}^\star \leq 1$ então $5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 9$ e $10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 19$. Analogamente, se deduz que $20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 49$, $50x_{50}^\star + 20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 99$. $100x_{100}^\star + 50x_{50}^\star + 20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 199$.

  Tem-se $\sum_{i=1}^{k} v_i x_{v_i}^\star < v_{k+1}$, para todo k. Portanto, $x^\star$ é a solução greedy. □

NB: A estratégia *greedy* apresentada não seria correta para, por exemplo, $V = \{1, 300, 1000\}$, $Q = 1200$.

Problemas de trocos com número de moedas ilimitado

Prova de que a estratégia greedy obtém a solução ótima se $\{200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1\}$:

- Seja $x^\star$ uma solução ótima para a quantia Q. Seja $x_v^\star$ é o número de moedas que usa de valor v.
- Se $x_{100}^\star > 1$, a solução não seria ótima (podia reduzir o número de moedas se substituir duas de 100 por uma de 200). Portanto, $x_{100}^\star \leq 1$.
  Analogamente se conclui que: $x_{50}^\star \leq 1$, $x_{10}^\star \leq 1$, e $x_1^\star \leq 1$.
- Se $x_{20}^\star > 2$ então a solução não seria ótima porque podia trocar três moedas de 20 por uma de 50 e uma de 10. Portanto, $x_{20}^\star \leq 2$. Analogamente, $x_2^\star \leq 2$.
- Não pode ter simultaneamente $x_2^\star = 2$ e $x_1^\star = 1$, pois a solução não seria ótima (podia substituir essas três moedas por uma de 5). Portanto $2x_2^\star + x_1^\star \leq 4$.
  Também não tem simultaneamente $x_{20}^\star = 2$ e $x_{10}^\star = 1$.
- Como $2x_2^\star + x_1^\star \leq 4$, $x_5^\star \leq 1$ e $x_{10}^\star \leq 1$ então $5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 9$ e $10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 19$. Analogamente, se deduz que $20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 49$, $50x_{50}^\star + 20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 99$. $100x_{100}^\star + 50x_{50}^\star + 20x_{20}^\star + 10x_{10}^\star + 5x_5^\star + 2x_2^\star + x_1^\star \leq 199$.

  Tem-se $\sum_{i=1}^{k} v_i x_{v_i}^\star < v_{k+1}$, para todo k. Portanto, $x^\star$ é a solução greedy. □

NB: A estratégia *greedy* apresentada não seria correta para, por exemplo, $V = \{1, 300, 1000\}$, $Q = 1200$.

Algoritmo de Bellman-Ford

Seja $G = (V, E, d)$ um grafo que **pode ter pesos negativos** nos ramos.
O algoritmo de Bellman-Ford determina percursos com peso mínimo de um nó **origem** s para cada nó $v \in V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Um percurso mínimo de s para v não pode ter mais do que $n-1$ ramos, a menos que inclua ciclos com peso negativo. Mas, nesse caso, **não há** percurso mínimo de s para v pois, usando o ciclo, poderia diminuir o peso...
- O algoritmo inclui um passo (linhas 6–8) para verificar se existem ciclos com peso negativo. Se existirem, as distâncias finais não estariam corretas.

ALGORITMO BELLMAN-FORD(s, n)

1. Para cada $v \in V$ fazer $dist[v] \leftarrow \infty$
2. $dist[s] \leftarrow 0$;
3. Para $r \leftarrow 1$ até $n-1$ fazer
4. Para cada $(u, v) \in E$ fazer
5. Se $dist[v] > dist[u] + d(u, v)$ então $dist[v] \leftarrow dist[u] + d(u, v)$
6. Para cada $(u, v) \in E$ fazer
7. Se $dist[v] > dist[u] + d(u, v)$ então retorna `false`; /*ciclos com peso negativo*/
8. retorna `true`; /*sem ciclos com peso negativo*/

Algoritmo de Bellman-Ford

Seja $G = (V, E, d)$ um grafo que **pode ter pesos negativos** nos ramos.
O algoritmo de Bellman-Ford determina percursos com peso mínimo de um nó **origem** s para cada nó $v \in V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Um percurso mínimo de s para v não pode ter mais do que $n - 1$ ramos, a menos que inclua ciclos com peso negativo. Mas, nesse caso, **não há** percurso mínimo de s para v pois, usando o ciclo, poderia diminuir o peso...
- O algoritmo inclui um passo (linhas 6–8) para verificar se existem ciclos com peso negativo. Se existirem, as distâncias finais não estariam corretas.

```
ALGORITMO BELLMAN-FORD(s, n)
1.  Para cada v ∈ V fazer dist[v] ← ∞
2.  dist[s] ← 0;
3.  Para r ← 1 até n − 1 fazer
4.      Para cada (u, v) ∈ E fazer
5.          Se dist[v] > dist[u] + d(u, v) então dist[v] ← dist[u] + d(u, v)
6.  Para cada (u, v) ∈ E fazer
7.      Se dist[v] > dist[u] + d(u, v) então retorna false;  /*ciclos com peso negativo*/
8.  retorna true;  /*sem ciclos com peso negativo*/
```

Algoritmo de Bellman-Ford

Seja $G = (V, E, d)$ um grafo que **pode ter pesos negativos** nos ramos.
O algoritmo de Bellman-Ford determina percursos com peso mínimo de um nó **origem** s para cada nó $v \in V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Um percurso mínimo de s para v não pode ter mais do que $n-1$ ramos, a menos que inclua ciclos com peso negativo. Mas, nesse caso, **não há** percurso mínimo de s para v pois, usando o ciclo, poderia diminuir o peso...
- O algoritmo inclui um passo (linhas 6–8) para verificar se existem ciclos com peso negativo. Se existirem, as distâncias finais não estariam corretas.

```
ALGORITMO BELLMAN-FORD(s, n)
1.  Para cada v ∈ V fazer dist[v] ← ∞
2.  dist[s] ← 0;
3.  Para r ← 1 até n − 1 fazer
4.      Para cada (u, v) ∈ E fazer
5.          Se dist[v] > dist[u] + d(u, v) então dist[v] ← dist[u] + d(u, v)
6.  Para cada (u, v) ∈ E fazer
7.      Se dist[v] > dist[u] + d(u, v) então retorna false;  /*ciclos com peso negativo*/
8.  retorna true;  /*sem ciclos com peso negativo*/
```

Algoritmo de Bellman-Ford

Seja $G = (V, E, d)$ um grafo que **pode ter pesos negativos** nos ramos.
O algoritmo de Bellman-Ford determina percursos com peso mínimo de um nó **origem** s para cada nó $v \in V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Um percurso mínimo de s para v não pode ter mais do que $n-1$ ramos, a menos que inclua ciclos com peso negativo. Mas, nesse caso, **não há** percurso mínimo de s para v pois, usando o ciclo, poderia diminuir o peso...
- O algoritmo inclui um passo (linhas 6–8) para verificar se existem ciclos com peso negativo. Se existirem, as distâncias finais não estariam corretas.

```
ALGORITMO BELLMAN-FORD(s, n)
1.  Para cada v ∈ V fazer dist[v] ← ∞
2.  dist[s] ← 0;
3.  Para r ← 1 até n − 1 fazer
4.      Para cada (u, v) ∈ E fazer
5.          Se dist[v] > dist[u] + d(u, v) então dist[v] ← dist[u] + d(u, v)
6.  Para cada (u, v) ∈ E fazer
7.      Se dist[v] > dist[u] + d(u, v) então retorna false;  /*ciclos com peso negativo*/
8.  retorna true;  /*sem ciclos com peso negativo*/
```

Algoritmo de Bellman-Ford

Seja $G = (V, E, d)$ um grafo que **pode ter pesos negativos** nos ramos.
O algoritmo de Bellman-Ford determina percursos com peso mínimo de um nó **origem** s para cada nó $v \in V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Um percurso mínimo de s para v não pode ter mais do que $n - 1$ ramos, a menos que inclua ciclos com peso negativo. Mas, nesse caso, **não há** percurso mínimo de s para v pois, usando o ciclo, poderia diminuir o peso...
- O algoritmo inclui um passo (linhas 6–8) para verificar se existem ciclos com peso negativo. Se existirem, as distâncias finais não estariam corretas.

ALGORITMO BELLMAN-FORD(s, n)

1. Para cada $v \in V$ fazer $dist[v] \leftarrow \infty$
2. $dist[s] \leftarrow 0$;
3. Para $r \leftarrow 1$ até $n - 1$ fazer
4. Para cada $(u, v) \in E$ fazer
5. Se $dist[v] > dist[u] + d(u, v)$ então $dist[v] \leftarrow dist[u] + d(u, v)$
6. Para cada $(u, v) \in E$ fazer
7. Se $dist[v] > dist[u] + d(u, v)$ então retorna `false`; /*ciclos com peso negativo*/
8. retorna `true`; /*sem ciclos com peso negativo*/

Algoritmo de Bellman-Ford adaptado para todos os pares

Para $d(e) \in \mathbb{R}^+$, a matriz das distâncias mínimas $\tilde{D}_{ij}^{(n-1)}$ para **todos os** (i,j) pode ser definida pela recorrência

$$\tilde{D}_{ij}^{(1)} = \begin{cases} d(i,j) \text{ se } i \neq j \text{ e } (i,j) \in E \\ \infty, \text{ se } i \neq j \text{ e } (i,j) \notin E \\ 0, \text{ se } i = j. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ij}^{(r)} &= \min\{\tilde{D}_{ik}^{(r-1)} + \tilde{D}_{kj}^{(1)} \mid 1 \leq k \leq n\} \\ &= \min\{\tilde{D}_{ik}^{(1)} + \tilde{D}_{kj}^{(r-1)} \mid 1 \leq k \leq n\}, \text{ se } r \geq 2 \end{aligned}$$

$\tilde{D}_{ij}^{(r)}$ é a distância mínima de i para j se o percurso não puder ter mais do que r ramos, para cada $r \geq 1$.

Algoritmo de Bellman-Ford adaptado para todos os pares

Para $d(e) \in \mathbb{R}^+$, a matriz das distâncias mínimas $\tilde{D}_{ij}^{(n-1)}$ para **todos os** (i,j) pode ser definida pela recorrência

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{ij}^{(1)} &= \begin{cases} d(i,j) & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \in E \\ \infty, & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \notin E \\ 0, & \text{se } i = j. \end{cases} \\
\tilde{D}_{ij}^{(r)} &= \min\{\tilde{D}_{ik}^{(r-1)} + \tilde{D}_{kj}^{(1)} \mid 1 \leq k \leq n\} \\
&= \min\{\tilde{D}_{ik}^{(1)} + \tilde{D}_{kj}^{(r-1)} \mid 1 \leq k \leq n\}, \quad \text{se } r \geq 2
\end{aligned}$$

Calcula-se como um **produto de matrizes** $\otimes$ em $(\mathbb{R}, \min, +)$, sendo um **método multiplicativo**. Os percursos mínimos têm subestrutura ótima e, por isso, $\tilde{D}^{(r+s)} = \tilde{D}^{(r)} \otimes \tilde{D}^{(s)}$, sendo dada por

$$(\tilde{D}^{(r)} \otimes \tilde{D}^{(s)})_{ij} = \min_{1 \leq k \leq n} (\tilde{D}_{ik}^{(r)} + \tilde{D}_{kj}^{(s)})$$

Para reduzir o número de multiplicações $\otimes$ de $\Theta(n)$ para $\Theta(\log_2 n)$ podemos usar **o método binário para cálculo de potências**: $x^n = (x^2)^{\lfloor n/2 \rfloor} x^{n\%2} = \prod_{t=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (x^{2^t})^{b_t}$, onde b_t é o bit t da representação de n em binário. Por exemplo, $\tilde{D}^{19} = \tilde{D}^{16} \otimes \tilde{D}^2 \otimes \tilde{D}$.

Algoritmo de Bellman-Ford adaptado para todos os pares

Para $d(e) \in \mathbb{R}^+$, a matriz das distâncias mínimas $\tilde{D}_{ij}^{(n-1)}$ para **todos os** (i,j) pode ser definida pela recorrência

$$\begin{array}{rcl} \tilde{D}_{ij}^{(1)} & = & \begin{cases} d(i,j) & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \in E \\ \infty, & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \notin E \\ 0, & \text{se } i = j. \end{cases} \\ \tilde{D}_{ij}^{(r)} & = & \min\{\tilde{D}_{ik}^{(r-1)} + \tilde{D}_{kj}^{(1)} \mid 1 \leq k \leq n\} \\ & = & \min\{\tilde{D}_{ik}^{(1)} + \tilde{D}_{kj}^{(r-1)} \mid 1 \leq k \leq n\}, \quad \text{se } r \geq 2 \end{array}$$

Calcula-se como um **produto de matrizes** $\otimes$ em $(\mathbb{R}, \min, +)$, sendo um **método multiplicativo**. Os percursos mínimos têm subestrutura ótima e, por isso, $\tilde{D}^{(r+s)} = \tilde{D}^{(r)} \otimes \tilde{D}^{(s)}$, sendo dada por

$$(\tilde{D}^{(r)} \otimes \tilde{D}^{(s)})_{ij} = \min_{1 \leq k \leq n} (\tilde{D}_{ik}^{(r)} + \tilde{D}_{kj}^{(s)})$$

Para reduzir o número de multiplicações $\otimes$ de $\Theta(n)$ para $\Theta(\log_2 n)$ podemos usar **o método binário para cálculo de potências**: $x^n = (x^2)^{\lfloor n/2 \rfloor} x^{n\%2} = \prod_{t=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (x^{2^t})^{b_t}$, onde b_t é o bit t da representação de n em binário. Por exemplo, $\tilde{D}^{19} = \tilde{D}^{16} \otimes \tilde{D}^2 \otimes \tilde{D}$.

Algoritmo de Bellman-Ford adaptado para todos os pares

Para $d(e) \in \mathbb{R}^+$, a matriz das distâncias mínimas $\tilde{D}_{ij}^{(n-1)}$ para **todos os** (i,j) pode ser definida pela recorrência

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{ij}^{(1)} &= \begin{cases} d(i,j) & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \in E \\ \infty, & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \notin E \\ 0, & \text{se } i = j. \end{cases} \\
\tilde{D}_{ij}^{(r)} &= \min\{\tilde{D}_{ik}^{(r-1)} + \tilde{D}_{kj}^{(1)} \mid 1 \leq k \leq n\} \\
&= \min\{\tilde{D}_{ik}^{(1)} + \tilde{D}_{kj}^{(r-1)} \mid 1 \leq k \leq n\}, \quad \text{se } r \geq 2
\end{aligned}$$

Calcula-se como um **produto de matrizes** $\otimes$ em $(\mathbb{R}, \min, +)$, sendo um **método multiplicativo**. Os percursos mínimos têm subestrutura ótima e, por isso, $\tilde{D}^{(r+s)} = \tilde{D}^{(r)} \otimes \tilde{D}^{(s)}$, sendo dada por

$$(\tilde{D}^{(r)} \otimes \tilde{D}^{(s)})_{ij} = \min_{1 \leq k \leq n} (\tilde{D}_{ik}^{(r)} + \tilde{D}_{kj}^{(s)})$$

Para reduzir o número de multiplicações $\otimes$ de $\Theta(n)$ para $\Theta(\log_2 n)$ podemos usar **o método binário para cálculo de potências**: $x^n = (x^2)^{\lfloor n/2 \rfloor} x^{n\%2} = \prod_{t=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (x^{2^t})^{b_t}$, onde b_t é o bit t da representação de n em binário. Por exemplo, $\tilde{D}^{19} = \tilde{D}^{16} \otimes \tilde{D}^2 \otimes \tilde{D}$.

Outra abordagem DP para cálculo do fecho transitivo

Podemos adotar a ideia do algoritmo de Bellman-Ford (adaptado) para obter a matrix do fecho transitivo R^+.

- Definimos $\tilde{M}_{ij}^{(r)} = 1$ se existir algum **percurso no grafo de R do nó i para o nó j com até r ramos, para $r \geq 1$, fixo**.
- Recorrência: para todos os pares (i, j) tem-se

$$\tilde{M}_{ij}^{(1)} = M_{ij}$$

$$\tilde{M}_{ij}^{(r)} = \tilde{M}_{ij}^{(r-1)} \vee (\bigvee_{k=1}^{n} (\tilde{M}_{ik}^{(r-1)} \wedge M_{kj})), \quad \text{para } r \geq 2$$

- Podemos avaliar usando o método multiplicativo e adaptar o método binário para reduzir o número de multiplicações, pois

$$\tilde{M}^{(r+s)} = \tilde{M}^{(r)} \otimes \tilde{M}^{(s)}$$

onde o produto de matrizes $\otimes$ é considerado em $(\{0, 1\}, \vee, \wedge)$.

- **Pontos fixos:** se $\tilde{M}^{(r)} = \tilde{M}^{(r+1)}$, então $\tilde{M}^{(r)} = M^+$. Também, no algoritmo de Bellman-Ford adaptado, se $\tilde{D}^{(r)} = \tilde{D}^{(r+1)}$, então $\tilde{D}^{(r)} = \tilde{D}^{(n)}$.

Outra abordagem DP para cálculo do fecho transitivo

Podemos adotar a ideia do algoritmo de Bellman-Ford (adaptado) para obter a matrix do fecho transitivo R^+.

- Definimos $\tilde{M}_{ij}^{(r)} = 1$ se existir algum **percurso no grafo de R do nó i para o nó j com até r ramos, para $r \geq 1$, fixo**.
- Recorrência: para todos os pares (i, j) tem-se

$$\tilde{M}_{ij}^{(1)} = M_{ij}$$

$$\tilde{M}_{ij}^{(r)} = \tilde{M}_{ij}^{(r-1)} \vee (\bigvee_{k=1}^{n} (\tilde{M}_{ik}^{(r-1)} \wedge M_{kj})), \quad \text{para } r \geq 2$$

- Podemos avaliar usando o método multiplicativo e adaptar o método binário para reduzir o número de multiplicações, pois

$$\tilde{M}^{(r+s)} = \tilde{M}^{(r)} \otimes \tilde{M}^{(s)}$$

onde o produto de matrizes $\otimes$ é considerado em $(\{0, 1\}, \vee, \wedge)$.

- **Pontos fixos:** se $\tilde{M}^{(r)} = \tilde{M}^{(r+1)}$, então $\tilde{M}^{(r)} = M^+$. Também, no algoritmo de Bellman-Ford adaptado, se $\tilde{D}^{(r)} = \tilde{D}^{(r+1)}$, então $\tilde{D}^{(r)} = \tilde{D}^{(n)}$.

Outra abordagem DP para cálculo do fecho transitivo

Podemos adotar a ideia do algoritmo de Bellman-Ford (adaptado) para obter a matrix do fecho transitivo R^+.

- Definimos $\tilde{M}_{ij}^{(r)} = 1$ se existir algum **percurso no grafo de R do nó i para o nó j com até r ramos, para $r \geq 1$, fixo**.
- Recorrência: para todos os pares (i, j) tem-se

$$\tilde{M}_{ij}^{(1)} = M_{ij}$$

$$\tilde{M}_{ij}^{(r)} = \tilde{M}_{ij}^{(r-1)} \vee \left(\bigvee_{k=1}^{n} (\tilde{M}_{ik}^{(r-1)} \wedge M_{kj})\right), \quad \text{para } r \geq 2$$

- Podemos avaliar usando o método multiplicativo e adaptar o método binário para reduzir o número de multiplicações, pois

$$\tilde{M}^{(r+s)} = \tilde{M}^{(r)} \otimes \tilde{M}^{(s)}$$

onde o produto de matrizes $\otimes$ é considerado em $(\{0, 1\}, \vee, \wedge)$.

- **Pontos fixos:** se $\tilde{M}^{(r)} = \tilde{M}^{(r+1)}$, então $\tilde{M}^{(r)} = M^+$. Também, no algoritmo de Bellman-Ford adaptado, se $\tilde{D}^{(r)} = \tilde{D}^{(r+1)}$, então $\tilde{D}^{(r)} = \tilde{D}^{(n)}$.

Outra abordagem DP para cálculo do fecho transitivo

Podemos adotar a ideia do algoritmo de Bellman-Ford (adaptado) para obter a matrix do fecho transitivo R^+.

- Definimos $\tilde{M}_{ij}^{(r)} = 1$ se existir algum **percurso no grafo de R do nó i para o nó j com até r ramos, para $r \geq 1$, fixo**.
- Recorrência: para todos os pares (i, j) tem-se

$$\tilde{M}_{ij}^{(1)} = M_{ij}$$

$$\tilde{M}_{ij}^{(r)} = \tilde{M}_{ij}^{(r-1)} \vee \left(\bigvee_{k=1}^{n} (\tilde{M}_{ik}^{(r-1)} \wedge M_{kj})\right), \quad \text{para } r \geq 2$$

- Podemos avaliar usando o método multiplicativo e adaptar o método binário para reduzir o número de multiplicações, pois

$$\tilde{M}^{(r+s)} = \tilde{M}^{(r)} \otimes \tilde{M}^{(s)}$$

onde o produto de matrizes $\otimes$ é considerado em $(\{0, 1\}, \vee, \wedge)$.

- **Pontos fixos:** se $\tilde{M}^{(r)} = \tilde{M}^{(r+1)}$, então $\tilde{M}^{(r)} = M^+$. Também, no algoritmo de Bellman-Ford adaptado, se $\tilde{D}^{(r)} = \tilde{D}^{(r+1)}$, então $\tilde{D}^{(r)} = \tilde{D}^{(n)}$.

Algoritmo CYK para decidir se $x \in \mathcal{L}(G)$, para GIC G na forma normal de Chomsky, e $x \in \Sigma^\star$

- Para $G = (V, \Sigma, P, S)$ fixa, a complexidade temporal do algoritmo é $O(|x|^3)$, ou seja, é cúbica no comprimento da palavra que se quer analisar.
- Seja $N[i, i+s]$ o conjunto de variáveis em V que geram a subpalavra $x_i \ldots x_{i+s}$ de x, isto é, $N[i, i+s] = \{A \mid A \in V, A \Rightarrow_{\mathcal{G}}^\star x_i \ldots x_{i+s}\}$.
- **Algoritmo CYK:**
  - $N[i,i] := \{A \mid A \in V, A \to x_i\}$, para $1 \leq i \leq n$ e $N[i,j] := \emptyset$, para todo (i,j), com $i \neq j$.
  - Para cada s entre 1 e $n-1$ fazer
    Para cada i entre 1 e $n-s$, considerar $N[i,k]$ e $N[k+1, i+s]$, para todo k com $i \leq k \leq (i+s)-1$. Se existir $(A \to BC) \in P$ com $B \in N[i,k]$ e $C \in N[k+1, i+s]$, acrescentar A a $N[i, i+s]$.
  - A palavra x está em $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ se e só se $S \in N[1,n]$.

Algoritmo CYK – aplicação de DP

É usual usar uma matriz, com $N[t, t+s]$ na coluna t e linha $\#s{+}1$.

$\#n$	$N[1,n]$					
$\#n{-}1$	$N[1,n{-}1]$	$N[2,n]$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$\#3$	$N[1,3]$	$N[2,4]$	$\cdots$	$N[n{-}2,n]$		
$\#2$	$N[1,2]$	$N[2,3]$	$\cdots$	$N[n{-}2,n{-}1]$	$N[n{-}1,n]$	
$\#1$	$N[1,1]$	$N[2,2]$	$\cdots$	$N[n{-}2,n{-}2]$	$N[n{-}1,n{-}1]$	$N[n,n]$
	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n

A entrada $N[t, t+s]$ da tabela apresenta o conjunto das categorias possíveis para a subpalavra $x_t \cdots x_{t+s}$ de x. Portanto, carateriza as categorias das subpalavras indicadas na matrix seguinte:

$\#n$	$x_1 \cdots x_n$					
$\#n{-}1$	$x_1 \cdots x_{n-1}$	$x_2 \cdots x_n$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$\#3$	$x_1x_2x_3$	$x_2x_3x_4$	$\cdots$	$x_{n-2}x_{n-1}x_n$		
$\#2$	x_1x_2	x_2x_3	$\cdots$	$x_{n-2}x_{n-1}$	$x_{n-1}x_n$	
$\#1$	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n

Algoritmo CYK – aplicação de DP

É usual usar uma matriz, com $N[t, t+s]$ na coluna t e linha $\#s{+}1$.

$\#n$	$N[1,n]$					
$\#n{-}1$	$N[1,n{-}1]$	$N[2,n]$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$\#3$	$N[1,3]$	$N[2,4]$	$\cdots$	$N[n{-}2,n]$		
$\#2$	$N[1,2]$	$N[2,3]$	$\cdots$	$N[n{-}2,n{-}1]$	$N[n{-}1,n]$	
$\#1$	$N[1,1]$	$N[2,2]$	$\cdots$	$N[n{-}2,n{-}2]$	$N[n{-}1,n{-}1]$	$N[n,n]$
	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n

A entrada $N[t, t+s]$ da tabela apresenta o conjunto das categorias possíveis para a subpalavra $x_t \cdots x_{t+s}$ de x. Portanto, carateriza as categorias das subpalavras indicadas na matrix seguinte:

$\#n$	$x_1 \cdots x_n$					
$\#n{-}1$	$x_1 \cdots x_{n-1}$	$x_2 \cdots x_n$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$\#3$	$x_1x_2x_3$	$x_2x_3x_4$	$\cdots$	$x_{n-2}x_{n-1}x_n$		
$\#2$	x_1x_2	x_2x_3	$\cdots$	$x_{n-2}x_{n-1}$	$x_{n-1}x_n$	
$\#1$	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n

Algoritmo CYK - Exemplo

Para GIC G, com $V = \{E, T, F, E_1, E_2, T_1, T_2, T_3, M, S, X, Q, A, B\}$, símbolo inicial E, e seguintes produções:

$$
\begin{array}{lcl}
E & \rightarrow & TE_1 \mid TE_2 \mid FT_1 \mid FT_2 \mid AT_3 \mid \mathtt{n} \\
T & \rightarrow & \mathtt{n} \mid FT_1 \mid FT_2 \mid AT_3 \\
F & \rightarrow & AT_3 \mid \mathtt{n} \\
E_1 & \rightarrow & ME \\
E_2 & \rightarrow & SE \\
T_1 & \rightarrow & XT \\
T_2 & \rightarrow & QT
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
M & \rightarrow & + \\
S & \rightarrow & - \\
X & \rightarrow & * \\
Q & \rightarrow & / \\
A & \rightarrow & (\\
B & \rightarrow &) \\
T_3 & \rightarrow & EB
\end{array}
$$

Tem-se $(\mathtt{n} + \mathtt{n}) * \mathtt{n} \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$? Sim, porque o símbolo inicial E ocorre no topo da tabela:

#7	$\{T, E\}$						
#6	$\emptyset$	$\emptyset$					
#5	$\{F, T, E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$				
#4	$\emptyset$	$\{T_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$			
#3	$\emptyset$	$\{E\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
#2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{E_1\}$	$\{T_3\}$	$\emptyset$	$\{T_1\}$	
#1	$\{A\}$	$\{E, T, F\}$	$\{M\}$	$\{E, T, F\}$	$\{B\}$	$\{X\}$	$\{E, T, F\}$
	(	n	+	n	)	*	n