Problemas de Fluxo Máximo

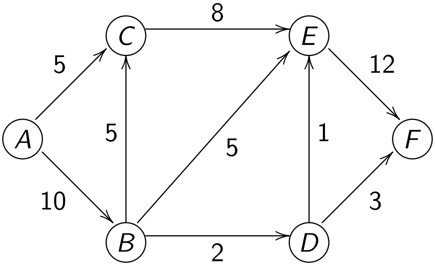
Ana Paula Tomás

Desenho e Análise de Algoritmos 2019/20

Novembro 2019

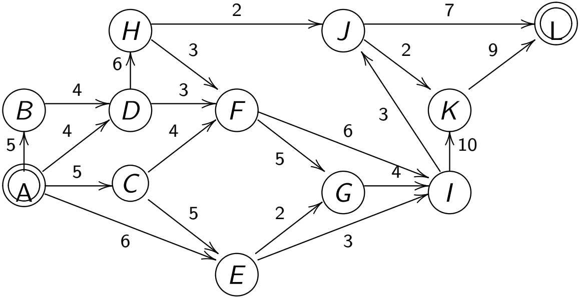
Exemplo 1 - Distribuição de água

Considere uma rede de distribuição de água com **origem em** A e com a configuração seguinte.



O valor em cada ramo representa a capacidade máxima do tubo correspondente. Os ramos indicam o sentido em que a água flui. Qual é a quantidade máxima de água que pode chegar de A a F? Como a encaminhar? Em cada nó interno, pode haver redistribuição da água que lá chegar, não ocorrendo perdas.

Exemplo 2 - Encaminhamento de chamadas



O grafo representa parte de uma rede de comunicações. Quando A recebe uma chamada, encaminha-a para L através de um conjunto de terminais de reencaminhamento. A capacidade de cada ligação está indicada na ligação. Enquanto estiver a decorrer, **uma chamada ocupa uma unidade de cada uma das linhas usadas** para a estabelecer. Não há corte das chamadas.
Quantas chamadas podem estar a decorrer no máximo num instante?

Fluxo máximo numa rede

- Rede: grafo dirigido $G = (V, A, c, \{s, t\})$ com valores nos ramos e um **nó origem** s (*source*) e um **nó destino** t (*target*).
- $c(u, v) \in \mathbb{R}_0^+$ diz-se capacidade de $(u, v) \in V \times V$.

  Assumimos que $\boxed{c(u, v) = 0 \text{ se } (u, v) \notin A}$.
- Um fluxo na rede é uma função $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições seguintes:
  1. $f(u, v) = -f(v, u)$, para $u, v \in V$;
  2. $f(u, v) \leq c(u, v)$, para $u, v \in V$ (fluxo não excede capacidade)
  3. $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$, para $u \in V \setminus \{s, t\}$ (conservação do fluxo)
- O valor do fluxo f denota-se por $|f|$, e é igual ao *fluxo que sai da origem s*, sendo necessariamente igual ao *fluxo que chega ao destino t*:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{v \in V} f(v, t).$$

- **Problema:** determinar um **fluxo máximo** em G.

Fluxo máximo numa rede

- Rede: grafo dirigido $G = (V, A, c, \{s, t\})$ com valores nos ramos e um **nó origem** s (*source*) e um **nó destino** t (*target*).
- $c(u, v) \in \mathbb{R}_0^+$ diz-se capacidade de $(u, v) \in V \times V$.

  Assumimos que $\boxed{c(u, v) = 0 \text{ se } (u, v) \notin A}$.
- Um fluxo na rede é uma função $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições seguintes:
  1. $f(u, v) = -f(v, u)$, para $u, v \in V$;
  2. $f(u, v) \leq c(u, v)$, para $u, v \in V$ (fluxo não excede capacidade)
  3. $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$, para $u \in V \setminus \{s, t\}$ (conservação do fluxo)
- O valor do fluxo f denota-se por $|f|$, e é igual ao *fluxo que sai da origem* s, sendo necessariamente igual ao *fluxo que chega ao destino* t:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{v \in V} f(v, t).$$

- **Problema:** determinar um **fluxo máximo** em G.

Fluxo máximo numa rede

- Rede: grafo dirigido $G = (V, A, c, \{s, t\})$ com valores nos ramos e um **nó origem** s (*source*) e um **nó destino** t (*target*).
- $c(u, v) \in \mathbb{R}_0^+$ diz-se capacidade de $(u, v) \in V \times V$.

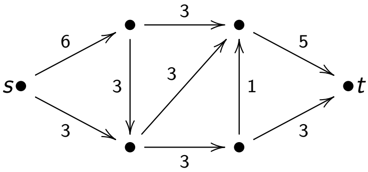
  Assumimos que $\boxed{c(u, v) = 0 \text{ se } (u, v) \notin A}$.
- Um fluxo na rede é uma função $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições seguintes:
  1. $f(u, v) = -f(v, u)$, para $u, v \in V$;
  2. $f(u, v) \leq c(u, v)$, para $u, v \in V$ (fluxo não excede capacidade)
  3. $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$, para $u \in V \setminus \{s, t\}$ (conservação do fluxo)
- O valor do fluxo f denota-se por $|f|$, e é igual ao *fluxo que sai da origem* s, sendo necessariamente igual ao *fluxo que chega ao destino* t:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{v \in V} f(v, t).$$

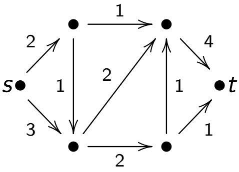
- **Problema:** determinar um **fluxo máximo** em G.

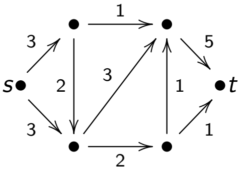
Exemplo de rede e de fluxos na rede

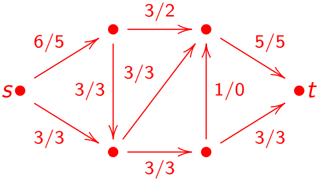
Rede



Três exemplos de fluxos na rede







Nos exemplos, representou-se $f(u, v)$ apenas para $(u, v) \in A$.
No exemplo à direita, colocou-se c/f nos ramos (pares capacidade/fluxo).

Definições

- Existe fluxo de u para v sse $f(u,v) > 0$
- Se $f(u,v) = c(u,v)$, o ramo (u,v) está saturado.
- Corte $\{S,T\}$ é qualquer partição $\{S,T\}$ de V tal que $s \in S$ e $t \in T$.
- Capacidade do corte $\{S,T\}$ é $c(S,T) = \displaystyle\sum_{u \in S, v \in T} c(u,v)$
- Corte mínimo é qualquer corte $\{S,T\}$ de capacidade mínima.
- Fluxo através do corte $\{S,T\}$ é $f(S,T) = \displaystyle\sum_{u \in S, v \in T} f(u,v)$

Teorema de Ford-Fulkerson

Teorema de Ford-Fulkerson (1956)

O valor do fluxo máximo numa rede é igual à capacidade do corte mínimo.

O teorema será provado à frente.

Alguns lemas úteis para a prova

- $f(X, Y) = -f(Y, X)$ e $f(X, X) = 0$, quaisquer que sejam $X, Y \subseteq V$.
- $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$, para $X, Y, Z \subseteq V$, com $X \cap Y = \emptyset$.
- Qualquer que seja o fluxo f, o fluxo através de qualquer corte $\{S, T\}$ é igual ao fluxo na rede, isto é $|f| = \sum_{u \in S, v \in T} f(u, v)$.
- $|f| \leq c(S, T)$, para todo o fluxo f e corte $\{S, T\}$, com $s \in S$ e $t \in T$.
- Se as capacidades são inteiras então existe um fluxo máximo inteiro, i.e., se $c(u, v) \in \mathbb{Z}_0^+$, existe um fluxo máximo f com $f(u, v) \in \mathbb{Z}$, para todo (u, v).

Teorema de Ford-Fulkerson

Teorema de Ford-Fulkerson (1956)

O valor do fluxo máximo numa rede é igual à capacidade do corte mínimo.

O teorema será provado à frente.

Alguns lemas úteis para a prova

- $f(X, Y) = -f(Y, X)$ e $f(X, X) = 0$, quaisquer que sejam $X, Y \subseteq V$.
- $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$, para $X, Y, Z \subseteq V$, com $X \cap Y = \emptyset$.
- Qualquer que seja o fluxo f, o fluxo através de qualquer corte $\{S, T\}$ é igual ao fluxo na rede, isto é $|f| = \sum_{u \in S, v \in T} f(u, v)$.
- $|f| \leq c(S, T)$, para todo o fluxo f e corte $\{S, T\}$, com $s \in S$ e $t \in T$.
- Se as capacidades são inteiras então existe um fluxo máximo inteiro, i.e., se $c(u, v) \in \mathbb{Z}_0^+$, existe um fluxo máximo f com $f(u, v) \in \mathbb{Z}$, para todo (u, v).

Provas dos lemas

- $f(X,Y) = -f(Y,X)$ e $f(X,X) = 0$, quaisquer que sejam $X, Y \subseteq V$.

$$f(X,Y) \stackrel{def}{=} \sum_{x\in X, y\in Y} f(x,y) = \sum_{x\in X, y\in Y} (-f(y,x)) \stackrel{def}{=} -f(Y,X)$$

Logo, se $X = Y$ tem-se $f(X,X) = -f(X,X)$. Portanto, $f(X,X) = 0$.

- $f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$, para $X, Y, Z \subseteq V$, com $X \cap Y = \emptyset$.
Segue trivialmente da definição, usando $X \cap Y = \emptyset$.

- Para todo fluxo f e corte $\{S,T\}$ tem-se $|f| = f(S,T)$.

$f(S,T) = f(S,T) + f(T,T) = f(S \cup T, T) = f(V,T) = |f|$ pois
$f(V,T) = \sum_{y\in T\setminus\{t\}} f(V,\{y\}) + f(V,\{t\}) = 0 + |f| = |f|$, porque $f(V,\{y\}) = 0$ para $y \notin \{s,t\}$.

- $|f| \leq c(S,T)$ para todo o fluxo f e corte $\{S,T\}$.

$|f| = f(S,T) = \sum_{u\in S, v\in T} f(u,v) \leq \sum_{u\in S, v\in T} c(u,v) = c(S,T)$

Provas dos lemas

- $f(X,Y) = -f(Y,X)$ e $f(X,X) = 0$, quaisquer que sejam $X, Y \subseteq V$.

$$f(X,Y) \stackrel{def}{=} \sum_{x \in X, y \in Y} f(x,y) = \sum_{x \in X, y \in Y} (-f(y,x)) \stackrel{def}{=} -f(Y,X)$$

  Logo, se $X = Y$ tem-se $f(X,X) = -f(X,X)$. Portanto, $f(X,X) = 0$.

- $f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$, para $X, Y, Z \subseteq V$, com $X \cap Y = \emptyset$.
  Segue trivialmente da definição, usando $X \cap Y = \emptyset$.

- Para todo fluxo f e corte $\{S,T\}$ tem-se $|f| = f(S,T)$.
  $f(S,T) = f(S,T) + f(T,T) = f(S \cup T, T) = f(V,T) = |f|$ pois $f(V,T) = \sum_{y \in T \setminus \{t\}} f(V,\{y\}) + f(V,\{t\}) = 0 + |f| = |f|$, porque $f(V,\{y\}) = 0$ para $y \notin \{s,t\}$.

- $|f| \leq c(S,T)$ para todo o fluxo f e corte $\{S,T\}$.
  $|f| = f(S,T) = \sum_{u \in S, v \in T} f(u,v) \leq \sum_{u \in S, v \in T} c(u,v) = c(S,T)$

Provas dos lemas

- $f(X,Y) = -f(Y,X)$ e $f(X,X) = 0$, quaisquer que sejam $X, Y \subseteq V$.

$$f(X,Y) \stackrel{def}{=} \sum_{x \in X, y \in Y} f(x,y) = \sum_{x \in X, y \in Y} (-f(y,x)) \stackrel{def}{=} -f(Y,X)$$

  Logo, se $X = Y$ tem-se $f(X,X) = -f(X,X)$. Portanto, $f(X,X) = 0$.

- $f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$, para $X, Y, Z \subseteq V$, com $X \cap Y = \emptyset$.
  Segue trivialmente da definição, usando $X \cap Y = \emptyset$.

- Para todo fluxo f e corte $\{S, T\}$ tem-se $|f| = f(S,T)$.
  $f(S,T) = f(S,T) + f(T,T) = f(S \cup T, T) = f(V,T) = |f|$ pois
  $f(V,T) = \sum_{y \in T \setminus \{t\}} f(V,\{y\}) + f(V,\{t\}) = 0 + |f| = |f|$, porque $f(V,\{y\}) = 0$ para $y \notin \{s,t\}$.

- $|f| \leq c(S,T)$ para todo o fluxo f e corte $\{S,T\}$.
  $|f| = f(S,T) = \sum_{u \in S, v \in T} f(u,v) \leq \sum_{u \in S, v \in T} c(u,v) = c(S,T)$

Provas dos lemas

- $f(X,Y) = -f(Y,X)$ e $f(X,X) = 0$, quaisquer que sejam $X, Y \subseteq V$.

$$f(X,Y) \overset{def}{=} \sum_{x \in X, y \in Y} f(x,y) = \sum_{x \in X, y \in Y} (-f(y,x)) \overset{def}{=} -f(Y,X)$$

  Logo, se $X = Y$ tem-se $f(X,X) = -f(X,X)$. Portanto, $f(X,X) = 0$.

- $f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$, para $X, Y, Z \subseteq V$, com $X \cap Y = \emptyset$.
  Segue trivialmente da definição, usando $X \cap Y = \emptyset$.

- Para todo fluxo f e corte $\{S,T\}$ tem-se $|f| = f(S,T)$.
  $f(S,T) = f(S,T) + f(T,T) = f(S \cup T, T) = f(V,T) = |f|$ pois
  $f(V,T) = \sum_{y \in T \setminus \{t\}} f(V,\{y\}) + f(V,\{t\}) = 0 + |f| = |f|$, porque $f(V,\{y\}) = 0$ para $y \notin \{s,t\}$.

- $|f| \leq c(S,T)$ para todo o fluxo f e corte $\{S,T\}$.
  $|f| = f(S,T) = \sum_{u \in S, v \in T} f(u,v) \leq \sum_{u \in S, v \in T} c(u,v) = c(S,T)$

Rede residual associada a um fluxo

- Dado um fluxo f, a **capacidade residual** c_f é definida $V \times V \to$ em $\mathbb{R}$, por

$$\boxed{c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)}$$

- A rede $G_f = (V, A_f, c_f, \{s,t\})$ com $A_f = \{(u,v) \in V \times V \mid c_f(u,v) > 0\}$ designa-se por **rede residual induzida pelo fluxo f em G**.
- Um caminho para aumento de f é qualquer caminho de s para t em G_f.
- A capacidade residual de um caminho para aumento γ é a capacidade residual mínima dos ramos que constituem tal caminho γ.

Da prova do teorema de Ford-Fulkerson, que apresentaremos à frente, conclui-se que o fluxo f é máximo se e só se não existe caminho de s para t na rede residual G_f.

Rede residual associada a um fluxo

- Dado um fluxo f, a **capacidade residual** c_f é definida $V \times V \rightarrow$ em $\mathbb{R}$, por

$$\boxed{c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)}$$

- A rede $G_f = (V, A_f, c_f, \{s,t\})$ com $A_f = \{(u,v) \in V \times V \mid c_f(u,v) > 0\}$ designa-se por **rede residual induzida pelo fluxo f em G**.
- Um caminho para aumento de f é qualquer caminho de s para t em G_f.
- A capacidade residual de um caminho para aumento γ é a capacidade residual mínima dos ramos que constituem tal caminho γ.

Da prova do teorema de Ford-Fulkerson, que apresentaremos à frente, conclui-se que o fluxo f é máximo se e só se não existe caminho de s para t na rede residual G_f.

Rede residual associada a um fluxo

- Dado um fluxo f, a **capacidade residual** c_f é definida $V \times V \to$ em $\mathbb{R}$, por

$$\boxed{c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)}$$

- A rede $G_f = (V, A_f, c_f, \{s,t\})$ com $A_f = \{(u,v) \in V \times V \mid c_f(u,v) > 0\}$ designa-se por **rede residual induzida pelo fluxo f em G**.
- Um caminho para aumento de f é qualquer caminho de s para t em G_f.
- A capacidade residual de um caminho para aumento γ é a capacidade residual mínima dos ramos que constituem tal caminho γ.

Da prova do teorema de Ford-Fulkerson, que apresentaremos à frente, conclui-se que o fluxo f é máximo se e só se não existe caminho de s para t na rede residual G_f.

Rede residual associada a um fluxo

- Dado um fluxo f, a **capacidade residual** c_f é definida $V \times V \rightarrow$ em $\mathbb{R}$, por

$$\boxed{c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)}$$

- A rede $G_f = (V, A_f, c_f, \{s,t\})$ com $A_f = \{(u,v) \in V \times V \mid c_f(u,v) > 0\}$ designa-se por **rede residual induzida pelo fluxo f em G**.
- Um caminho para aumento de f é qualquer caminho de s para t em G_f.
- A capacidade residual de um caminho para aumento γ é a capacidade residual mínima dos ramos que constituem tal caminho γ.

Da prova do teorema de Ford-Fulkerson, que apresentaremos à frente, conclui-se que o fluxo f é máximo se e só se não existe caminho de s para t na rede residual G_f.

Rede residual associada a um fluxo

- Dado um fluxo f, a **capacidade residual** c_f é definida $V \times V \rightarrow$ em $\mathbb{R}$, por

$$\boxed{c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)}$$

- A rede $G_f = (V, A_f, c_f, \{s,t\})$ com $A_f = \{(u,v) \in V \times V \mid c_f(u,v) > 0\}$ designa-se por **rede residual induzida pelo fluxo f em G**.
- Um caminho para aumento de f é qualquer caminho de s para t em G_f.
- A capacidade residual de um caminho para aumento γ é a capacidade residual mínima dos ramos que constituem tal caminho γ.

Da prova do teorema de Ford-Fulkerson, que apresentaremos à frente, conclui-se que o fluxo f é máximo se e só se não existe caminho de s para t na rede residual G_f.

Fluxos na rede e na rede residual

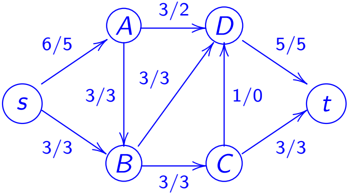
Lema (relaciona fluxos na rede e na rede residual)

Seja $G = (V, E, c, \{s, t\})$ uma rede com origem s e destino t. Seja f um fluxo em G e sejam G_f o grafo residual induzido por esse fluxo em G e f' um fluxo em G_f.

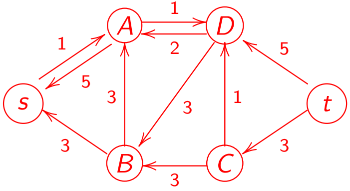
1. f' é um fluxo em G_f se e só se $f + f'$ é um fluxo em G.
2. O valor do fluxo $f + f'$ em G é $|f| + |f'|$ quaisquer que sejam $x, y \in V$ (por definição, $(f + f')(x, y) = f(x, y) + f'(x, y)$).
3. f' é um fluxo máximo em G_f se e só se $f + f'$ é um fluxo máximo em G.

Exemplo: fluxo e rede residual associada

Fluxo f



Rede residual G_f



Omitiu-se fluxo $f(x, y)$ para $(x, y) \notin A$.

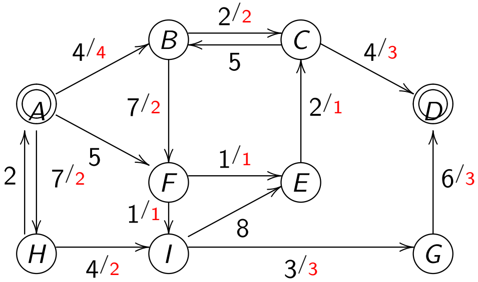
Na rede residual, $c_f(s, A) = 1$ e $c_f(A, s) = 5$ pois

$$
\begin{aligned}
c_f(A, s) &= c(A, s) - f(A, s) = 0 - (-f(s, A)) = 5 \\
c_f(s, A) &= c(s, A) - f(s, A) = 6 - 5 = 1
\end{aligned}
$$

O fluxo f é máximo porque não há caminho de s para t na rede residual G_f.
Exemplo de corte $\{S, T\}$ mínimo: $S = \{s, A, D, B\}$, $T = \{C, t\}$ com capacidade $c(D, t) + c(B, C) = 8 = |f|$.

Exemplo: Como é a rede residual? O fluxo é máximo?

Os valores indicados a vermelho representam o fluxo no ramo. A origem da rede é o nó A e o destino é o nó D. Não estão indicados valores de $f(x,y) \leq 0$.

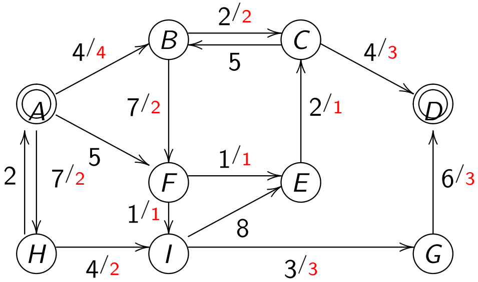


$f(A,H) = ?$ $c(A,H) = ?$ $c_f(A,H) = ?$ $f(H,A) = ?$ $c(H,A) = ?$ $c_f(H,A) = ?$
$f(G,I) = ?$ $c(G,I) = ?$ $c_f(G,I) = ?$
$f(I,E) = ?$ $f(E,I) = ?$ $c_f(E,I) = ?$ $c_f(I,E) = ?$

Observar a **conservação de fluxo nos nós internos e na rede** . Quanto é $|f|$?

Exemplo: Como é a rede residual? O fluxo é máximo?

Os valores indicados a vermelho representam o fluxo no ramo. A origem da rede é o nó A e o destino é o nó D. Não estão indicados valores de $f(x, y) \leq 0$.



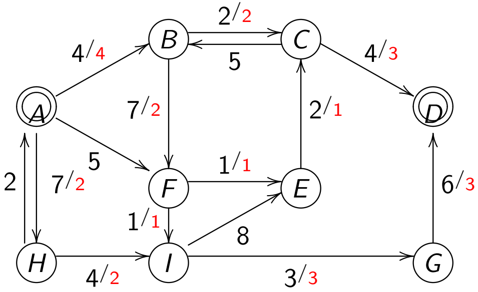
$f(A, H) =?$ $c(A, H) =?$ $c_f(A, H) =?$ $f(H, A) =?$ $c(H, A) =?$ $c_f(H, A) =?$

$f(G, I) =?$ $c(G, I) =?$ $c_f(G, I) =?$

$f(I, E) =?$ $f(E, I) =?$ $c_f(E, I) =?$ $c_f(I, E) =?$

Observar a **conservação de fluxo nos nós internos e na rede** . Quanto é $|f|$?

Como é a rede residual? O fluxo é máximo?



$|f| = 6$ $f(A,H) = 2$ $c(A,H) = 7$ $c_f(A,H) = 5$

$f(H,A) = -2$ $c(H,A) = 2$ $c_f(H,A) = 4$

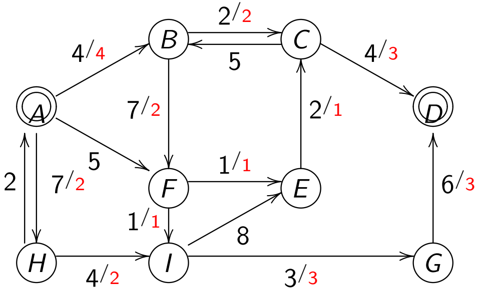
$f(G,I) = -3$ $c(G,I) = 0$ $c_f(G,I) = 3$

$f(I,E) = 0$ $f(E,I) = 0$ $c_f(E,I) = 0$ $c_f(I,E) = 8$

Como é a rede residual G_f? Notar que G_f contém (x, y) sse $c_f(x, y) > 0$.

O fluxo f é máximo? Nao é máximo sse existir caminho para aumento em G_f. Verificar!

Como é a rede residual? O fluxo é máximo?

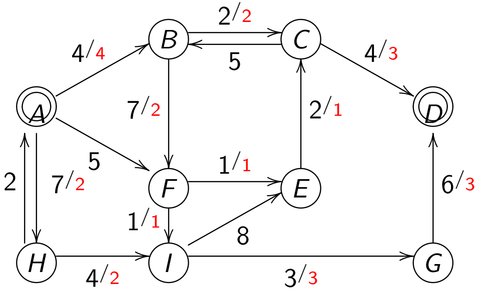


$$
\begin{array}{lllll}
|f| = 6 & f(A,H) = 2 & c(A,H) = 7 & c_f(A,H) = 5 & \\
 & f(H,A) = -2 & c(H,A) = 2 & c_f(H,A) = 4 & \\
 & f(G,I) = -3 & c(G,I) = 0 & c_f(G,I) = 3 & \\
 & f(I,E) = 0 & f(E,I) = 0 & c_f(E,I) = 0 & c_f(I,E) = 8
\end{array}
$$

Como é a rede residual G_f? Notar que G_f contém (x, y) sse $c_f(x, y) > 0$.

O fluxo f é máximo? Nao é máximo sse existir caminho para aumento em G_f. Verificar!

Como é a rede residual? O fluxo é máximo?



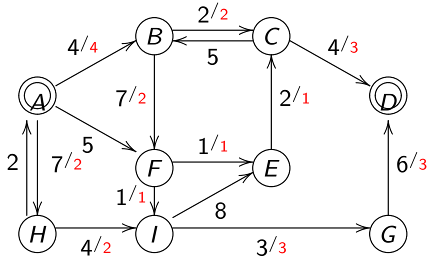
$$
\begin{array}{lllll}
|f| = 6 & f(A,H) = 2 & c(A,H) = 7 & c_f(A,H) = 5 & \\
 & f(H,A) = -2 & c(H,A) = 2 & c_f(H,A) = 4 & \\
 & f(G,I) = -3 & c(G,I) = 0 & c_f(G,I) = 3 & \\
 & f(I,E) = 0 & f(E,I) = 0 & c_f(E,I) = 0 & c_f(I,E) = 8
\end{array}
$$

Como é a rede residual G_f? Notar que G_f contém (x,y) sse $c_f(x,y) > 0$.

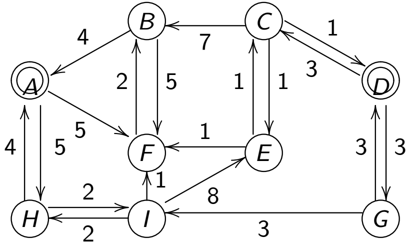
O fluxo f é máximo? Nao é máximo sse existir caminho para aumento em G_f. Verificar!

Como é a rede residual? O fluxo é máximo?

fluxo f



rede residual G_f

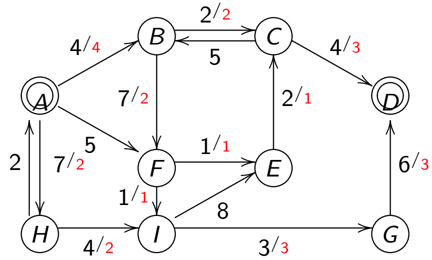


O fluxo f não é máximo porque existe caminho $\gamma = (A, H, I, E, C, D)$ da origem A para o destino D na rede residual. Como $cap(\gamma) = 1$, o fluxo pode aumentar de 1 unidade.

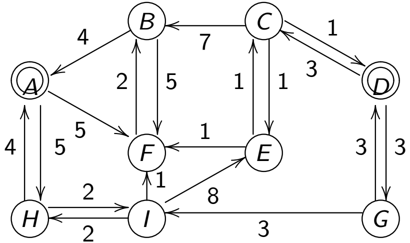
Alteração do fluxo ao longo de γ (restantes valores não são alterados):
$f(A, H) = 3$, $f(H, A) = -3$; $f(H, I) = 3$, $f(I, H) = -3$;
$f(I, E) = 1$, $f(E, I) = -1$; $f(E, C) = 2$, $f(C, E) = -2$;
$f(C, D) = 4$, $f(D, C) = -4$. Se voltarmos a calcular a rede residual, já não há caminho em G_f. $|f| = 7$ é máximo.

Como é a rede residual? O fluxo é máximo?

fluxo f



rede residual G_f

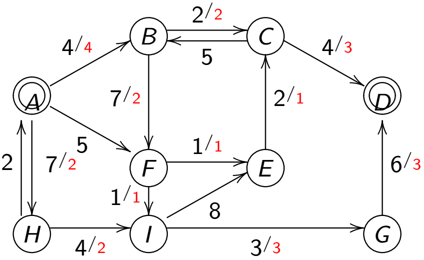


O fluxo f não é máximo porque existe caminho $\gamma = (A, H, I, E, C, D)$ da origem A para o destino D na rede residual. Como $cap(\gamma) = 1$, o fluxo pode aumentar de 1 unidade.

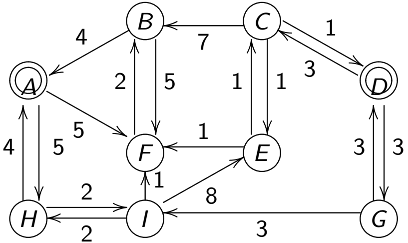
Alteração do fluxo ao longo de γ (restantes valores não são alterados):
$f(A, H) = 3$, $f(H, A) = -3$; $f(H, I) = 3$, $f(I, H) = -3$;
$f(I, E) = 1$, $f(E, I) = -1$; $f(E, C) = 2$, $f(C, E) = -2$;
$f(C, D) = 4$, $f(D, C) = -4$. Se voltarmos a calcular a rede residual, já não há caminho em G_f. $|f| = 7$ é máximo.

Como é a rede residual? O fluxo é máximo?

fluxo f



rede residual G_f

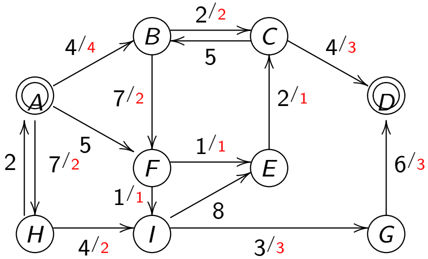


O fluxo f não é máximo porque existe caminho $\gamma = (A, H, I, E, C, D)$ da origem A para o destino D na rede residual. Como $cap(\gamma) = 1$, o fluxo pode aumentar de 1 unidade.

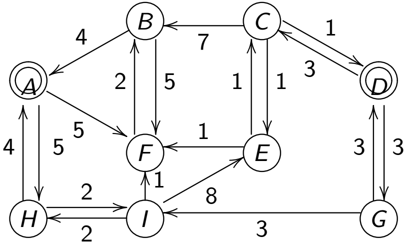
Alteração do fluxo ao longo de γ (restantes valores não são alterados):
$f(A, H) = 3$, $f(H, A) = -3$; $f(H, I) = 3$, $f(I, H) = -3$;
$f(I, E) = 1$, $f(E, I) = -1$; $f(E, C) = 2$, $f(C, E) = -2$;
$f(C, D) = 4$, $f(D, C) = -4$. Se voltarmos a calcular a rede residual, já não há caminho em G_f. $|f| = 7$ é máximo.

Como é a rede residual? O fluxo é máximo?

fluxo f



rede residual G_f

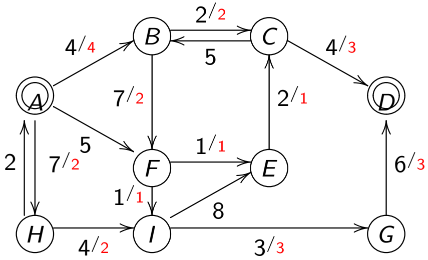


O fluxo f não é máximo porque existe caminho $\gamma = (A, H, I, E, C, D)$ da origem A para o destino D na rede residual. Como $cap(\gamma) = 1$, o fluxo pode aumentar de 1 unidade.

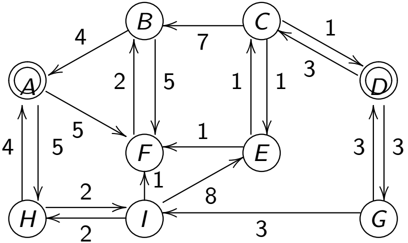
Alteração do fluxo ao longo de γ (restantes valores não são alterados):
$f(A, H) = 3$, $f(H, A) = -3$; $f(H, I) = 3$, $f(I, H) = -3$;
$f(I, E) = 1$, $f(E, I) = -1$; $f(E, C) = 2$, $f(C, E) = -2$;
$f(C, D) = 4$, $f(D, C) = -4$. Se voltarmos a calcular a rede residual, já não há caminho em G_f. $|f| = 7$ é máximo.

Como é a rede residual? O fluxo é máximo?

fluxo f



rede residual G_f



O fluxo f não é máximo porque existe caminho $\gamma = (A, H, I, E, C, D)$ da origem A para o destino D na rede residual. Como $cap(\gamma) = 1$, o fluxo pode aumentar de 1 unidade.

Alteração do fluxo ao longo de γ (restantes valores não são alterados):
$f(A, H) = 3$, $f(H, A) = -3$; $f(H, I) = 3$, $f(I, H) = -3$;
$f(I, E) = 1$, $f(E, I) = -1$; $f(E, C) = 2$, $f(C, E) = -2$;
$f(C, D) = 4$, $f(D, C) = -4$. Se voltarmos a calcular a rede residual, já não há caminho em G_f. $|f| = 7$ é máximo.

Prova do Teorema de Ford-Fulkerson

Teorema de Ford-Fulkerson (1956)

O valor do fluxo máximo numa rede é igual à capacidade do corte mínimo.

O teorema de Ford-Fulkerson resulta da prova de que **as três condições seguintes são equivalentes**:

1. f é um fluxo máximo em G.
2. Na rede residual G_f não existe caminho de s para t.
3. $|f| = c(S, T)$, para algum corte (S, T) de G, com $s \in S$ e $t \in T$.

Para provar as três equivalências basta provar três implicações:

$$\begin{tikzcd} f \text{ é fluxo máximo} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ |f| = c(S,T) \text{ para algum corte } \{S,T\} \arrow[u, Rightarrow] & \text{não existe caminho para aumento de } f \text{ em } G_f \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Prova do Teorema de Ford-Fulkerson

Teorema de Ford-Fulkerson (1956)

O valor do fluxo máximo numa rede é igual à capacidade do corte mínimo.

O teorema de Ford-Fulkerson resulta da prova de que **as três condições seguintes são equivalentes**:

1. f é um fluxo máximo em G.
2. Na rede residual G_f não existe caminho de s para t.
3. $|f| = c(S, T)$, para algum corte (S, T) de G, com $s \in S$ e $t \in T$.

Para provar as três equivalências basta provar três implicações:

f é fluxo máximo $\Longrightarrow$ não existe caminho para aumento de f em G_f

não existe caminho para aumento de f em G_f $\Longrightarrow$ $|f| = c(S, T)$ para algum corte $\{S, T\}$

$|f| = c(S, T)$ para algum corte $\{S, T\}$ $\Longrightarrow$ f é fluxo máximo

Prova do Teorema de Ford-Fulkerson

Prova de que $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2} \Rightarrow \boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$

1. *f é um fluxo máximo em G.*
2. *Na rede residual G_f não existe caminho de s para t.*
3. *$|f| = c(S,T)$, para algum corte (S,T) de G, com $s \in S$ e $t \in T$.*

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ Se existisse caminho de s para t em G_f, então um fluxo f' ao longo desse caminho aumentaria $|f|$ de $|f'|$ (ver os lemas anteriores).

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ Sejam $S = \{$nós acessíveis de s em $G_f\}$ e $T = V \setminus S$ (notar que $t \in T$). Os ramos que existiam de S para T na rede inicial, não existem em G_f. Isso quer dizer que f os saturou. Logo, $c(S,T) = |f|$.

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ Como $|f| = c(S,T)$, então $|f|$ é máximo pois nenhum fluxo excede a capacidade de um corte $\{S,T\}$ da rede, qualquer que seja o corte $\{S,T\}$ (cf, lemas). Assim, se $|f| = c(S,T)$, então $\{S,T\}$ tem capacidade mínima. Logo, $|f|$ é máximo.

NB: a prova de $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ indica como encontrar um corte $\{S,T\}$ mínimo, i.e., tal que $|f| = c(S,T)$.

Prova do Teorema de Ford-Fulkerson

Prova de que $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2} \Rightarrow \boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$

1. *f é um fluxo máximo em G.*
2. *Na rede residual G_f não existe caminho de s para t.*
3. *$|f| = c(S,T)$, para algum corte (S,T) de G, com $s \in S$ e $t \in T$.*

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ Se existisse caminho de s para t em G_f, então um fluxo f' ao longo desse caminho aumentaria $|f|$ de $|f'|$ (ver os lemas anteriores).

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ Sejam $S = \{$nós acessíveis de s em $G_f\}$ e $T = V \setminus S$ (notar que $t \in T$). Os ramos que existiam de S para T na rede inicial, não existem em G_f. Isso quer dizer que f os saturou. Logo, $c(S,T) = |f|$.

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ Como $|f| = c(S,T)$, então $|f|$ é máximo pois nenhum fluxo excede a capacidade de um corte $\{S,T\}$ da rede, qualquer que seja o corte $\{S,T\}$ (cf. lemas). Assim, se $|f| = c(S,T)$, então $\{S,T\}$ tem capacidade mínima. Logo, $|f|$ é máximo.

NB: a prova de $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ indica como encontrar um corte $\{S,T\}$ mínimo, i.e., tal que $|f| = c(S,T)$.

Prova do Teorema de Ford-Fulkerson

Prova de que $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2} \Rightarrow \boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$

1. *f é um fluxo máximo em G.*
2. *Na rede residual G_f não existe caminho de s para t.*
3. *$|f| = c(S,T)$, para algum corte (S,T) de G, com $s \in S$ e $t \in T$.*

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ Se existisse caminho de s para t em G_f, então um fluxo f' ao longo desse caminho aumentaria $|f|$ de $|f'|$ (ver os lemas anteriores).

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ Sejam $S = \{$nós acessíveis de s em $G_f\}$ e $T = V \setminus S$ (notar que $t \in T$). Os ramos que existiam de S para T na rede inicial, não existem em G_f. Isso quer dizer que f os saturou. Logo, $c(S,T) = |f|$.

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ Como $|f| = c(S,T)$, então $|f|$ é máximo pois nenhum fluxo excede a capacidade de um corte $\{S,T\}$ da rede, qualquer que seja o corte $\{S,T\}$ (cf, lemas). Assim, se $|f| = c(S,T)$, então $\{S,T\}$ tem capacidade mínima. Logo, $|f|$ é máximo.

NB: a prova de $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ indica como encontrar um corte $\{S,T\}$ mínimo, i.e., tal que $|f| = c(S,T)$.

Prova do Teorema de Ford-Fulkerson

Prova de que $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2} \Rightarrow \boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$

1. *f é um fluxo máximo em G.*
2. *Na rede residual G_f não existe caminho de s para t.*
3. *$|f| = c(S,T)$, para algum corte (S,T) de G, com $s \in S$ e $t \in T$.*

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ Se existisse caminho de s para t em G_f, então um fluxo f' ao longo desse caminho aumentaria $|f|$ de $|f'|$ (ver os lemas anteriores).

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ Sejam $S = \{$nós acessíveis de s em $G_f\}$ e $T = V \setminus S$ (notar que $t \in T$). Os ramos que existiam de S para T na rede inicial, não existem em G_f. Isso quer dizer que f os saturou. Logo, $c(S,T) = |f|$.

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ Como $|f| = c(S,T)$, então $|f|$ é máximo pois nenhum fluxo excede a capacidade de um corte $\{S,T\}$ da rede, qualquer que seja o corte $\{S,T\}$ (cf, lemas). Assim, se $|f| = c(S,T)$, então $\{S,T\}$ tem capacidade mínima. Logo, $|f|$ é máximo.

NB: a prova de $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ indica como encontrar um corte $\{S,T\}$ mínimo, i.e., tal que $|f| = c(S,T)$.

Método de Ford-Fulkerson para determinar fluxo máximo

Da prova resulta um método para cálculo do fluxo máximo, que termina sempre para capacidades $\in \mathbb{Q}_0^+$.

Metodo_Ford-Fulkerson(G)

Para cada $(u, v) \in G.A$ fazer $f(u, v) \leftarrow 0$; $f(v, u) \leftarrow 0$;
Determinar a rede residual G_f; /* neste caso $G_f = G$ pois f é nulo */
Enquanto existir um caminho γ de s para t em G_f fazer:
    $c_\gamma \leftarrow \min\{c_f(u, v) \mid (u, v) \in \gamma\}$;
    Para cada $(u, v) \in \gamma$ fazer
        $f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_\gamma$;
        $f(v, u) \leftarrow -f(u, v)$;
    Actualizar G_f; /* afeta apenas os ramos de γ e simétricos */

NB: em vez de partir de f nulo, podemos **partir de um fluxo f já conhecido**, **calcular G_f, e prosseguir...**

Método de Ford-Fulkerson para determinar fluxo máximo

- O método de Ford-Fulkerson **não indica como se escolhe γ.** Tal causa problemas.
  - Prova-se que termina sempre para capacidades $\in \mathbb{Z}_0^+$ (e $\mathbb{Q}_0^+$) mas **pode não terminar** se forem irracionais. $\therefore$ Não é *algoritmo.*
  - O número de iterações pode ser exponencial no tamanho da instância.

Se escolher alternadamente os caminhos (s, a, b, t) e (s, b, a, t) são necessárias 2000000 **iterações**. Mas, **bastam duas se for (s, a, t) e (s, b, t)**.

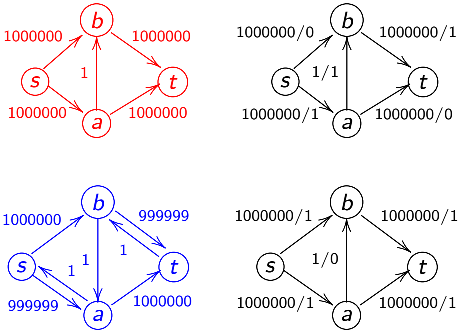
Método de Ford-Fulkerson para determinar fluxo máximo

- O método de Ford-Fulkerson não indica como se escolhe γ. Tal causa problemas.
  - Prova-se que termina sempre para capacidades $\in \mathbb{Z}_0^+$ (e $\mathbb{Q}_0^+$) mas **pode não terminar** se forem irracionais. $\therefore$ Não é *algoritmo*.
  - O número de iterações pode ser exponencial no tamanho da instância.

Se escolher alternadamente os caminhos (s, a, b, t) e (s, b, a, t) são necessárias 2000000 **iterações**. Mas, **bastam duas se for** (s, a, t) **e** (s, b, t).

Método de Ford-Fulkerson para determinar fluxo máximo

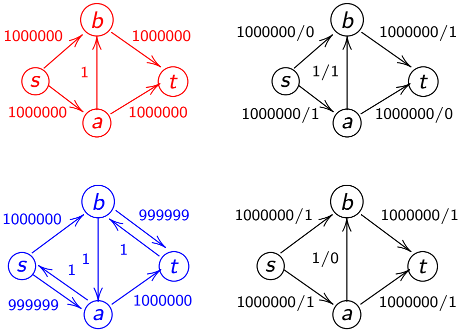
- O método de Ford-Fulkerson não indica como se escolhe γ. Tal causa problemas.
  - Prova-se que termina sempre para capacidades $\in \mathbb{Z}_0^+$ (e $\mathbb{Q}_0^+$) mas **pode não terminar** se forem irracionais. $\therefore$ Não é *algoritmo*.
  - O número de iterações pode ser exponencial no tamanho da instância.



Se escolher alternadamente os caminhos (s, a, b, t) e (s, b, a, t) são necessárias 2000000 **iterações**. Mas, **bastam duas se for** (s, a, t) **e** (s, b, t).

Método de Ford-Fulkerson para determinar fluxo máximo

- O método de Ford-Fulkerson não indica como se escolhe γ. Tal causa problemas.
  - Prova-se que termina sempre para capacidades $\in \mathbb{Z}_0^+$ (e $\mathbb{Q}_0^+$) mas **pode não terminar** se forem irracionais. $\therefore$ Não é *algoritmo*.
  - O número de iterações pode ser exponencial no tamanho da instância.



Se escolher alternadamente os caminhos (s, a, b, t) e (s, b, a, t) são necessárias 2000000 **iterações**. Mas, **bastam duas se for** (s, a, t) **e** (s, b, t).

Método de Ford-Fulkerson para determinar fluxo máximo

Para capacidades inteiras...

- Complexidade de cada iteração é $O(m)$, sendo $|A| = m$.
- O fluxo aumenta de uma unidade pelo menos em cada iteração. Portanto, o número de iterações é menor ou igual ao fluxo ótimo $|f^*|$.
- Complexidade do método é $\mathcal{O}(m^2\,C)$, onde C é capacidade máxima dos ramos. Notar que é $O(m|f^*|)$ e $|f^*| \le mC$. De facto, $|f^*| \le nC$, porque não excede a capacidade do corte $(\{s\}, V \setminus \{s\})$, sendo n o número de nós, ou seja, **a complexidade do método de Ford-Fulkerson para capacidades inteiras é $O(mnC)$**.
- $O(mnC)$ não é polinomial no tamanho do *input*. $C \in O(2^{\log_2 C})$.

Algoritmo de Edmonds & Karp

Análogo ao método de Ford-Fulkerson, mas escolhe caminho γ em G_f com menor número de ramos, aplicando BFS. Prova-se que o número de iterações não excede $m(n/2)$. O algoritmo é polinomial, com complexidade $O(m^2n)$.

Método de Ford-Fulkerson para determinar fluxo máximo

Para capacidades inteiras...

- Complexidade de cada iteração é $O(m)$, sendo $|A| = m$.
- O fluxo aumenta de uma unidade pelo menos em cada iteração. Portanto, o número de iterações é menor ou igual ao fluxo ótimo $|f^*|$.
- Complexidade do método é $\mathcal{O}(m^2\,C)$, onde C é capacidade máxima dos ramos. Notar que é $O(m|f^*|)$ e $|f^*| \leq mC$. De facto, $|f^*| \leq nC$, porque não excede a capacidade do corte $(\{s\}, V \setminus \{s\})$, sendo n o número de nós, ou seja, **a complexidade do método de Ford-Fulkerson para capacidades inteiras é $O(mnC)$**.
- $O(mnC)$ não é polinomial no tamanho do *input*. $C \in O(2^{\log_2 C})$.

Algoritmo de Edmonds & Karp

Análogo ao método de Ford-Fulkerson, mas escolhe caminho γ em G_f com menor número de ramos, aplicando BFS. Prova-se que o número de iterações não excede $m(n/2)$. O algoritmo é polinomial, com complexidade $O(m^2 n)$.

Método de Ford-Fulkerson para determinar fluxo máximo

Para capacidades inteiras...

- Complexidade de cada iteração é $O(m)$, sendo $|A| = m$.
- O fluxo aumenta de uma unidade pelo menos em cada iteração. Portanto, o número de iterações é menor ou igual ao fluxo ótimo $|f^*|$.
- Complexidade do método é $\mathcal{O}(m^2\,C)$, onde C é capacidade máxima dos ramos. Notar que é $O(m|f^*|)$ e $|f^*| \leq mC$. De facto, $|f^*| \leq nC$, porque não excede a capacidade do corte $(\{s\}, V \setminus \{s\})$, sendo n o número de nós, ou seja, **a complexidade do método de Ford-Fulkerson para capacidades inteiras é $O(mnC)$**.
- $O(mnC)$ não é polinomial no tamanho do *input*. $C \in O(2^{\log_2 C})$.

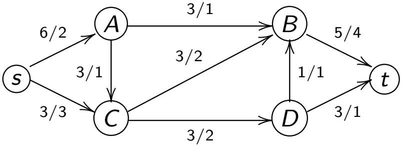
Algoritmo de Edmonds & Karp

Análogo ao método de Ford-Fulkerson, mas escolhe caminho γ em G_f com menor número de ramos, aplicando BFS. Prova-se que o número de iterações não excede $m(n/2)$. O algoritmo é polinomial, com complexidade $O(m^2 n)$.

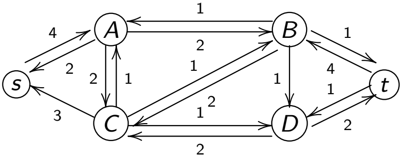
Algoritmo de Edmonds-Karp a partir de f já na rede

Algoritmo de Edmonds-Karp: usa BFS para encontrar caminho γ em G_f

Fluxo f dado



Rede residual G_f correspondente



Existe caminho de s para t em G_f: (s, A, B, t), com capacidade 1, permite aumentar o fluxo de 1 unidade.

Novo fluxo f

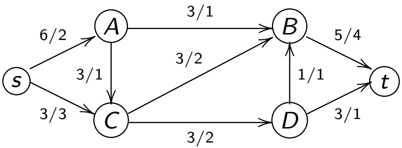
Rede residual G_f correspondente

O fluxo ainda não é máximo.

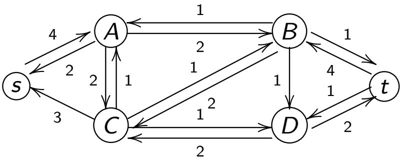
Algoritmo de Edmonds-Karp a partir de f já na rede

Algoritmo de Edmonds-Karp: usa BFS para encontrar caminho γ em G_f

Fluxo f dado

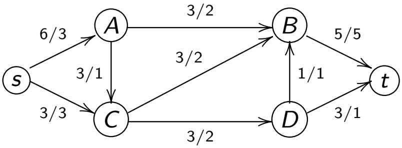


Rede residual G_f correspondente

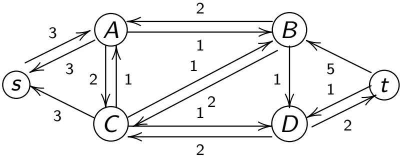


Existe caminho de s para t em G_f: (s, A, B, t), com capacidade 1, permite aumentar o fluxo de 1 unidade.

Novo fluxo f

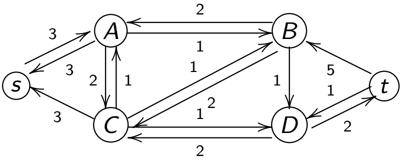


Rede residual G_f correspondente



O fluxo ainda não é máximo.

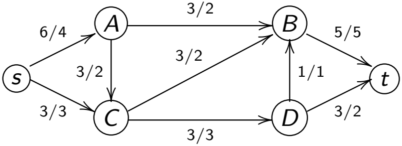
Exemplo (cont.)



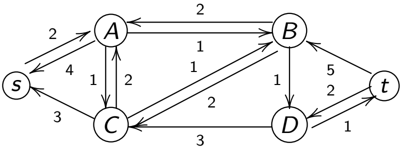
O fluxo ainda não é máximo. Existe caminho de s para t na rede residual: (s, A, C, D, t), que tem capacidade 1, permite aumentar o fluxo de 1 unidade.

Após essa iteração (como vemos abaixo à direita), o fluxo não é ainda máximo pois (s, A, B, D, t) é um caminho para aumento na nova rede residual.

Novo fluxo f



Rede residual G_f correspondente



O fluxo ainda não é máximo.

É necessário aumentar novamente o fluxo, ao longo de (s, A, B, D, t), para finalmente obter o fluxo máximo $|f^\star| = 8$.

Emparelhamento de cardinal máximo em grafos bipartidos

- Um grafo $G = (V_1 \cup V_2, E)$ é bipartido sse $u \in V_1$ e $v \in V_2$, qualquer que seja o ramo $\langle u, v \rangle \in E$.
- Um emparelhamento num grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto M de E tal que quaisquer ramos em M são incidentes em vértices distintos de V (ou seja, não há dois ramos em M que partilhem algum extremo).
- **Problema** (*Maximal Bipartite Matching Problem*): Dado um grafo bipartido $G = (V_1 \cup V_2, E)$ determinar um emparelhamento de cardinal máximo em G.
- Exemplos de aplicação:
  - **Atribuição de tarefas a pessoas**. Cada pessoa só desempenha no máximo uma tarefa e cada tarefa é atribuída no máximo a uma pessoa. As pessoas tem habilitações distintas. Maximizar o número de tarefas realizadas.
  - **Propagação de restrições** em sistemas de programação por restrições (*constraint programming*): sendo $x_1, \ldots, x_n$ variáveis com $x_i \in D_i$, e D_i finito, para $1 \leq i \leq n$, existirá uma atribuição de valores às variáveis que satisfaça $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, para todo i, j?

Emparelhamento de cardinal máximo em grafos bipartidos

- Um grafo $G = (V_1 \cup V_2, E)$ é bipartido sse $u \in V_1$ e $v \in V_2$, qualquer que seja o ramo $\langle u, v \rangle \in E$.
- Um emparelhamento num grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto M de E tal que quaisquer ramos em M são incidentes em vértices distintos de V (ou seja, não há dois ramos em M que partilhem algum extremo).
- **Problema** (*Maximal Bipartite Matching Problem*): Dado um grafo bipartido $G = (V_1 \cup V_2, E)$ determinar um emparelhamento de cardinal máximo em G.
- Exemplos de aplicação:
  - **Atribuição de tarefas a pessoas**. Cada pessoa só desempenha no máximo uma tarefa e cada tarefa é atribuída no máximo a uma pessoa. As pessoas tem habilitações distintas. Maximizar o número de tarefas realizadas.
  - **Propagação de restrições** em sistemas de programação por restrições (*constraint programming*): sendo $x_1, \ldots, x_n$ variáveis com $x_i \in D_i$, e D_i finito, para $1 \leq i \leq n$, existirá uma atribuição de valores às variáveis que satisfaça $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, para todo i, j?

Emparelhamento de cardinal máximo em grafos bipartidos

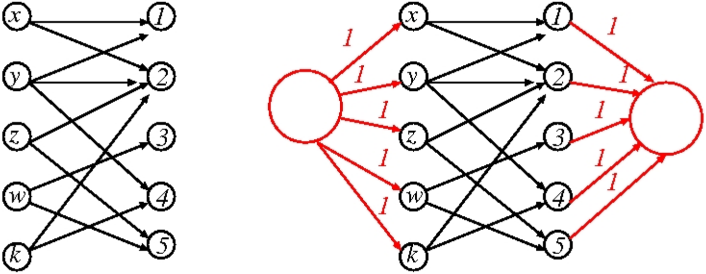
- Um grafo $G = (V_1 \cup V_2, E)$ é bipartido sse $u \in V_1$ e $v \in V_2$, qualquer que seja o ramo $\langle u, v \rangle \in E$.
- Um emparelhamento num grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto M de E tal que quaisquer ramos em M são incidentes em vértices distintos de V (ou seja, não há dois ramos em M que partilhem algum extremo).
- **Problema** (*Maximal Bipartite Matching Problem*): Dado um grafo bipartido $G = (V_1 \cup V_2, E)$ determinar um emparelhamento de cardinal máximo em G.
- Exemplos de aplicação:
  - **Atribuição de tarefas a pessoas**. Cada pessoa só desempenha no máximo uma tarefa e cada tarefa é atribuída no máximo a uma pessoa. As pessoas tem habilitações distintas. Maximizar o número de tarefas realizadas.
  - **Propagação de restrições** em sistemas de programação por restrições (*constraint programming*): sendo $x_1, \ldots, x_n$ variáveis com $x_i \in D_i$, e D_i finito, para $1 \leq i \leq n$, existirá uma atribuição de valores às variáveis que satisfaça $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, para todo i, j?

Emparelhamento de cardinal máximo em grafos bipartidos

- Um grafo $G = (V_1 \cup V_2, E)$ é bipartido sse $u \in V_1$ e $v \in V_2$, qualquer que seja o ramo $\langle u, v \rangle \in E$.
- Um emparelhamento num grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto M de E tal que quaisquer ramos em M são incidentes em vértices distintos de V (ou seja, não há dois ramos em M que partilhem algum extremo).
- **Problema** (*Maximal Bipartite Matching Problem*): Dado um grafo bipartido $G = (V_1 \cup V_2, E)$ determinar um emparelhamento de cardinal máximo em G.
- Exemplos de aplicação:
  - **Atribuição de tarefas a pessoas**. Cada pessoa só desempenha no máximo uma tarefa e cada tarefa é atribuída no máximo a uma pessoa. As pessoas tem habilitações distintas. Maximizar o número de tarefas realizadas.
  - **Propagação de restrições** em sistemas de programação por restrições (*constraint programming*): sendo $x_1, \ldots, x_n$ variáveis com $x_i \in D_i$, e D_i finito, para $1 \leq i \leq n$, existirá uma atribuição de valores às variáveis que satisfaça $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, para todo i, j?

Emparelhamento de cardinal máximo em grafos bipartidos

Pode-se reduzir instâncias de "*maximum matching*" a fluxo máximo.
Basta orientar os ramos, inserir origem s e destino t fictícios, acrescentar ramos de s para os nós de V_1 e dos nós de V_2 para t, e atribuir capacidades unitárias.



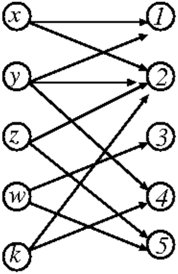
capacidades 1

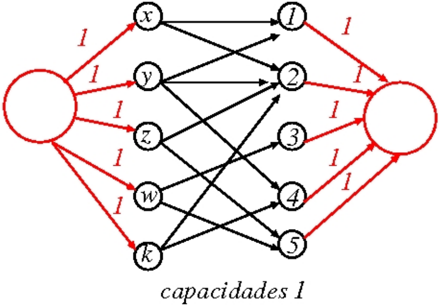
Um fluxo máximo na rede corresponde a um emparelhamento de cardinal máximo.

NB: **Complexidade** $O(mn)$, pois o número de iterações não excede $\frac{n}{2}$, com $n = |V_1 \cup V_2|$. Existem algoritmos específicos que são mais eficientes, por exemplo, o Algoritmo de Hopcroft-Karp tem complexidade $O(m\sqrt{n})$.

Emparelhamento de cardinal máximo em grafos bipartidos

Pode-se reduzir instâncias de "*maximum matching*" a fluxo máximo.
Basta orientar os ramos, inserir origem s e destino t fictícios, acrescentar ramos de s para os nós de V_1 e dos nós de V_2 para t, e atribuir capacidades unitárias.





Um fluxo máximo na rede corresponde a um emparelhamento de cardinal máximo.

NB: **Complexidade** $O(mn)$, pois o número de iterações não excede $\frac{n}{2}$, com $n = |V_1 \cup V_2|$. Existem algoritmos específicos que são mais eficientes, por exemplo, o Algoritmo de Hopcroft-Karp tem complexidade $O(m\sqrt{n})$.

Outros exemplos de aplicações

Problemas que se resolvem por redução ao problema de fluxo máximo:

- Qual é o **número máximo de caminhos que não partilham ramos** num grafo dirigido G de um nó s para um nó t, sendo G, s e t dados?
- **Atribuição de tarefas a pessoas**, assumindo que cada pessoa tem competências para algumas tarefas e uma capacidade máxima. Maximizar o número de tarefas atribuídas. Cada tarefa só será desempenhada por uma pessoa no máximo.
- **Colocações de pessoas em postos de trabalho** (**sem preferências**): maximizar o número de pessoas colocadas, dado o número de vagas existente em cada posto e as habilitações de cada pessoa (ou seja, os postos que pode ocupar).

Como são as redes de fluxo? Origem e destino? Capacidades dos ramos?

A seguir, introduzimos um problema clássico de **afetação com preferências mútuas**.

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

A versão clássica do problema traduz-se da forma seguinte.

> STABLEMARRIAGE: *Seja $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ um conjunto de n homens e seja $\mathcal{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$ um conjunto de n mulheres. Cada elemento ordenou todos os de sexo oposto por ordem de preferência estrita. Determinar um emparelhamento estável M, com $|M| = n$.*

- Um emparelhamento M é instável sse existir um par $(h, m)) \notin M$ tal que h prefere m a $M(h)$ e m prefere h a $M(m)$. Aqui, $M(x)$ denota o par de x em M, isto é, tem-se $\langle x, M(x)\rangle \in M$.
- É um problema de emparelhamento em grafos bipartidos com preferências mútuas. **Foram estudadas diversas variantes com interesse prático.**
  Para saber mais, por exemplo: • D. Gusfield and R. W. Irving. The stable marriage problem - structure and algorithms. MIT Press, Cambridge (1989); • D. Manlove. Algorithms of matchings under preferences. World Scientific (2013).
- **Prémio Nobel 2012 (Economia)** atribuído a A.Roth e L.Shapley *"for the theory of stable allocations and the practice of market design"*.

  (D. Gale tinha falecido em 2008)

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

A versão clássica do problema traduz-se da forma seguinte.

> STABLEMARRIAGE: *Seja $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ um conjunto de n homens e seja $\mathcal{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$ um conjunto de n mulheres. Cada elemento ordenou todos os de sexo oposto por ordem de preferência estrita. Determinar um emparelhamento estável M, com $|M| = n$.*

- Um emparelhamento M é instável sse existir um par $(h, m)) \notin M$ tal que h prefere m a $M(h)$ e m prefere h a $M(m)$. Aqui, $M(x)$ denota o par de x em M, isto é, tem-se $\langle x, M(x)\rangle \in M$.
- É um problema de emparelhamento em grafos bipartidos com preferências mútuas. **Foram estudadas diversas variantes com interesse prático.**
  Para saber mais, por exemplo: • D. Gusfield and R. W. Irving. The stable marriage problem - structure and algorithms. MIT Press, Cambridge (1989); • D. Manlove. Algorithms of matchings under preferences. World Scientific (2013).
- **Prémio Nobel 2012 (Economia)** atribuído a A.Roth e L.Shapley *"for the theory of stable allocations and the practice of market design"*.

  (D. Gale tinha falecido em 2008)

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

A versão clássica do problema traduz-se da forma seguinte.

> StableMarriage: *Seja $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ um conjunto de n homens e seja $\mathcal{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$ um conjunto de n mulheres. Cada elemento ordenou todos os de sexo oposto por ordem de preferência estrita. Determinar um emparelhamento estável M, com $|M| = n$.*

- Um emparelhamento M é instável sse existir um par $(h, m)) \notin M$ tal que h prefere m a $M(h)$ e m prefere h a $M(m)$. Aqui, $M(x)$ denota o par de x em M, isto é, tem-se $\langle x, M(x)\rangle \in M$.
- É um problema de emparelhamento em grafos bipartidos com preferências mútuas. **Foram estudadas diversas variantes com interesse prático.**
  Para saber mais, por exemplo: • D. Gusfield and R. W. Irving. The stable marriage problem - structure and algorithms. MIT Press, Cambridge (1989); • D. Manlove. Algorithms of matchings under preferences. World Scientific (2013).
- **Prémio Nobel 2012 (Economia)** atribuído a A.Roth e L.Shapley *"for the theory of stable allocations and the practice of market design"*.

  (D. Gale tinha falecido em 2008)

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

A versão clássica do problema traduz-se da forma seguinte.

> StableMarriage: *Seja $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ um conjunto de n homens e seja $\mathcal{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$ um conjunto de n mulheres. Cada elemento ordenou todos os de sexo oposto por ordem de preferência estrita. Determinar um emparelhamento estável M, com $|M| = n$.*

- Um emparelhamento M é instável sse existir um par $(h, m)) \notin M$ tal que h prefere m a $M(h)$ e m prefere h a $M(m)$. Aqui, $M(x)$ denota o par de x em M, isto é, tem-se $\langle x, M(x)\rangle \in M$.
- É um problema de emparelhamento em grafos bipartidos com preferências mútuas. **Foram estudadas diversas variantes com interesse prático.**
  Para saber mais, por exemplo: • D. Gusfield and R. W. Irving. The stable marriage problem - structure and algorithms. MIT Press, Cambridge (1989); • D. Manlove. Algorithms of matchings under preferences. World Scientific (2013).
- **Prémio Nobel 2012 (Economia)** atribuído a A.Roth e L.Shapley *"for the theory of stable allocations and the practice of market design"*.

  (D. Gale tinha falecido em 2008)

Algoritmo de Gale-Shapley para StableMarriage

Gale e Shapley (1962) provaram que qualquer instância de StableMarriage admite um emparelhamento estável.

Algoritmo de Gale-Shapley

Considerar inicialmente que todas as pessoas estão livres.
Enquanto houver algum homem h livre fazer:
    seja m a primeira mulher na lista de h a quem este ainda não se propôs;
    se m estiver livre então
        emparelhar h e m (ficam noivos)
    senão
        se m preferir h ao seu noivo atual h' então
            emparelhar h e m (ficam noivos), voltando h' a estar livre
        senão
            m rejeita h e assim h continua livre.

O algoritmo de Gale-Shapley obtém um emparelhamento estável em tempo $O(n^2)$.
Foi provado que tal emparelhamento é **o melhor emparelhamento estável segundo os homens** e, se não for o único emparelhamento estável, é **o pior segundo as mulheres**.

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

Exemplo:

$$\begin{array}{lllll} h_1: & m_4, & m_2, & m_3, & m_1 \\ h_2: & m_2, & m_3, & m_4, & m_1 \\ h_3: & m_2, & m_3, & m_1, & m_4 \\ h_4: & m_1, & m_3, & m_2, & m_4 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} m_1: & h_4, & h_2, & h_1, & h_3 \\ m_2: & h_3, & h_1, & h_4, & h_2 \\ m_3: & h_2, & h_3, & h_1, & h_4 \\ m_4: & h_3, & h_4, & h_2, & h_1 \end{array}$$

$M = \{(h_1, m_4), (h_2, m_3), (h_3, m_2), (h_4, m_1)\}$ é o emparelhamento estável que se obtém por aplicação do algoritmo de Gale-Shapley a esta instância.

Não existe nenhum outro emparelhamento estável para esta instância.

Justificação: De acordo com a teoria sobre o problema StableMarriage, o emparelhamento que o algoritmo de Gale-Shapley produz é ótimo segundo os homens e péssimo segundo as mulheres. Se se **trocar o papel dos homens e das mulheres no algoritmo de Gale-Shapley**, obtém-se o emparelhamento ótimo segundo as mulheres e péssimo segundo os homens. Para esta instância esses dois emparelhamentos são iguais, o que quer dizer que M é o único emparelhamento estável que esta instância admite.

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

Exemplo:

$$\begin{array}{lllll} h_1: & m_4, & m_2, & m_3, & m_1 \\ h_2: & m_2, & m_3, & m_4, & m_1 \\ h_3: & m_2, & m_3, & m_1, & m_4 \\ h_4: & m_1, & m_3, & m_2, & m_4 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} m_1: & h_4, & h_2, & h_1, & h_3 \\ m_2: & h_3, & h_1, & h_4, & h_2 \\ m_3: & h_2, & h_3, & h_1, & h_4 \\ m_4: & h_3, & h_4, & h_2, & h_1 \end{array}$$

$M = \{(h_1, m_4), (h_2, m_3), (h_3, m_2), (h_4, m_1)\}$ é o emparelhamento estável que se obtém por aplicação do algoritmo de Gale-Shapley a esta instância.

Não existe nenhum outro emparelhamento estável para esta instância.

Justificação: De acordo com a teoria sobre o problema StableMarriage, o emparelhamento que o algoritmo de Gale-Shapley produz é ótimo segundo os homens e péssimo segundo as mulheres. Se se **trocar o papel dos homens e das mulheres no algoritmo de Gale-Shapley**, obtém-se o emparelhamento ótimo segundo as mulheres e péssimo segundo os homens. Para esta instância esses dois emparelhamentos são iguais, o que quer dizer que M é o único emparelhamento estável que esta instância admite.

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

Exemplo:
Colocar os candidatos c_1, c_2, c_3, e c_4 em quatro postos de trabalho p_1, p_2, p_3, p_4 numa empresa, dadas as preferências dos candidatos e da empresa (ambas por ordem decrescente). Cada posto é atribuído exatamente a um candidato.

$$\begin{array}{llll} c_1: & p_1, & p_2, & p_3, & p_4 \\ c_2: & p_2, & p_3, & p_1, & p_4 \\ c_3: & p_3, & p_4, & p_2, & p_1 \\ c_4: & p_4, & p_1, & p_2, & p_3 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} p_1: & c_2, & c_3, & c_4, & c_1 \\ p_2: & c_3, & c_4, & c_1, & c_2 \\ p_3: & c_1, & c_4, & c_2, & c_3 \\ p_4: & c_2, & c_1, & c_3, & c_4 \end{array}$$

Qual é a melhor solução estável segundo os candidatos?

$$M^C = \{(c_1, p_1), (c_2, p_2), (c_3, p_3), (c_4, p_4)\}$$

Mas, segundo a empresa, isto é, segundo os postos de trabalho, seria:

$$M^E = \{(c_1, p_3), (c_2, p_1), (c_3, p_4), (c_4, p_2)\}$$

Conclusão: M^C é o pior emparelhamento estável para a empresa e M^E é o pior emparelhamento estável para os candidatos.

Qual preferir? Existirá um mais "igualitário"?

The stable marriage problem (Casamentos estáveis)

Exemplo:
Colocar os candidatos c_1, c_2, c_3, e c_4 em quatro postos de trabalho p_1, p_2, p_3, p_4 numa empresa, dadas as preferências dos candidatos e da empresa (ambas por ordem decrescente). Cada posto é atribuído exatamente a um candidato.

$$\begin{array}{llllllllll} c_1: & p_1, & p_2, & p_3, & p_4 & \qquad p_1: & c_2, & c_3, & c_4, & c_1 \\ c_2: & p_2, & p_3, & p_1, & p_4 & \qquad p_2: & c_3, & c_4, & c_1, & c_2 \\ c_3: & p_3, & p_4, & p_2, & p_1 & \qquad p_3: & c_1, & c_4, & c_2, & c_3 \\ c_4: & p_4, & p_1, & p_2, & p_3 & \qquad p_4: & c_2, & c_1, & c_3, & c_4 \end{array}$$

Qual é a melhor solução estável segundo os candidatos?

$$M^C = \{(c_1, p_1), (c_2, p_2), (c_3, p_3), (c_4, p_4)\}$$

Mas, segundo a empresa, isto é, segundo os postos de trabalho, seria:

$$M^E = \{(c_1, p_3), (c_2, p_1), (c_3, p_4), (c_4, p_2)\}$$

Conclusão: M^C é o pior emparelhamento estável para a empresa e M^E é o pior emparelhamento estável para os candidatos.

Qual preferir? Existirá um mais "igualitário"?

Estrutura das soluções do (*"stable marriage problem"*)

Para saber mais (se tiver interesse) sobre o significado de:
"o emparelhamento que o ALGORITMO DE GALE-SHAPLEY *produz é óptimo para os homens* e *péssimo para as mulheres*".

- Isto quer dizer que, quando considerados todos os emparelhamentos estáveis, qualquer homem fica com a melhor companheira que poderia obter e qualquer mulher fica com o pior companheiro que poderia obter.

- Formalmente, o **conjunto** $\mathbb{M}$ **de todos os emparelhamentos estáveis** de uma instância de STABLEMARRIAGE constitui um **reticulado distributivo** se for ordenado por $\preceq$ assim: $M \preceq M'$, lendo-se M **domina** M' **(segundo os homens)**, sse todo homem tem ou a mesma companheira em M e M' ou uma companheira em M que prefere à que tem em M'.
- Prova-se que: M domina M' segundo os homens sse M' domina M segundo as mulheres.

Estrutura das soluções do (*"stable marriage problem"*)

Para saber mais (se tiver interesse):
Porque é que $(\mathbb{M}, \preceq)$ é um reticulado distributivo?

- Sendo M e M' emparelhamentos estáveis, tem-se:
  - é estável o emparelhamento $M \wedge M'$, em que cada homem h ficará com a mulher que **prefere** entre $M(h)$ e $M'(h)$;
  - é estável o emparelhamento $M \vee M'$, em que cada homem h ficará com a mulher de que **gosta menos** entre $M(h)$ e $M'(h)$.
- $(\mathbb{M}, \preceq)$ é um reticulado: $M \wedge M'$ é o **ínfimo** entre M e M'; $M \vee M'$ é o **supremo** entre M e M'.

  Distributivo porque $M_1 \vee (M_2 \wedge M_3) = (M_1 \vee M_2) \wedge (M_1 \vee M_3)$ e $M_1 \wedge (M_2 \vee M_3) = (M_1 \wedge M_2) \vee (M_1 \wedge M_3)$, para $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{M}$.
- O mínimo de $\mathbb{M}$ é o emparelhamento estável ótimo segundo os homens.
- O máximo de $\mathbb{M}$, se for distinto do mínimo, é o pior emparelhamento estável segundo os homens (mas o melhor para as mulheres).

Estrutura das soluções do (*"stable marriage problem"*)

Para saber mais (se tiver interesse):
A estrutura de reticulado permite obter alguns algoritmos eficientes.

Por exemplo, em D. Gusfield, Three Fast Algorithms for four Problems in Stable Marriage, *SIAM J. Computing*, 16(1):111-128, 1987. é explorada para:

- determinar de todos os **pares** estáveis em $O(n^2)$;
- enumerar com complexidade ótima (espaço-temporal) todos os emparelhamentos estáveis. Tempo $O(n^2 + n|\mathbb{M}|)$ e espaço $O(n^2)$;
    - Notar que $|\mathbb{M}|$ pode ser exponencial em n.
      R. Irving, P. Leather, The Complexity of Counting Stable Marriages, *SIAM J. Computing*, 15:655-667, 1986.
- construir em $O(n^2)$ o emparelhamento estável que **minimiza o nível de descontentamento máximo**, quando se considera simultaneamente todos os homens e mulheres.