Métodos de Apoio à Decisão - Trabalho 2

Pedro Antunes e Rafael Novais

April 26, 2020

up201507254
up201508010
Instructor: João Pedro Pedroso

1 Introdução

Dado um problema sobre determinadas posições em Portugal Continental, o nosso objetivo neste trabalho é descobrir a solução ótima do problema usando AMPL. A linguagem AMPL (A Mathematical Programming Language) é um Software desenhado para resolver e modelar otimizações em grande escala de programação linear ou programação mista. Antes de passarmos ao problema em si, é necessário realçar alguns conceitos importantes para compreender os métodos que usamos para resolver o problema.

1.1 Conceitos importantes

1.1.1 Distância de Manhattan:

Esta distância (usada no problema para determinar a distância entre dois pontos) é uma nova medida em que dado dois pontos, a distância entre esses dois pontos é a soma entre o módulo da diferença das coordenadas dos dois pontos. Exemplo:

$$d_{Manhattan}(A, B) = |A_x - B_x| + |A_y - B_y|$$

1.1.2 Distância entre dois pontos numa esfera:

Dado que estamos a trabalhar com coordenadas medidas em graus (latitude e longitude) e que temos que descobrir a distância entre dois pontos no planeta Terra (assumindo a Terra como um esfera perfeita) teremos que usar um fórmula mais complexa dada por:

$$d_{naEsfera}(A, B) = 2 \times \pi \times Raio_{Terra} \times \frac{\alpha}{360}$$

$$Sendo \quad \alpha = d_{Manhattan}(A, B) \ \wedge \ Raio_{Terra} = 6371.009$$

2 Problema

Dadas as geolocalizações e populações de todas as cidades de Portugal, pretende-se escolher as melhores cidades para posicionar centros de distribuição no sentido de realizar as entregas das encomendas de todos os clientes portugueses. Considerando que, são feitas 3 entregas por cada 1000 habitantes de uma certa cidade, que tem-se um custo de 1 euro por cada quilometro e que o raio do planeta Terra são 6371.009, o objetivo passa por minimizar o custo total de entrega. Usaremos um ficheiro do tipo DAT com o nome de "trabalho02.dat" como input dos dados das cidades.

3 Questão 1

3.1 Modelação de otimização matemática

3.1.1 Dados do Problema:

N		conjunto de cidades
lat_i	$\forall i \in N$	latitude das cidades
lng_i	$\forall i \in N$	longitude das cidades
pop_i	$\forall i \in N$	população das cidades
$\text{R} = 6371.009$		raio da terra (km)
$\text{c}_i = \frac{pop_i}{1000}$	$\forall i \in N$	custo por km para servir a cidade i (euros)
$\text{DCost} = 25000$		custo de construção de um DC (euros)
$\text{K} = 1$		número máximo de DC a construir
$\text{difflat1}_{i,j} = \frac{2\pi \times R \times (lat_i - lat_j)}{360}$	$\forall i \in N, \forall j \in N$	distância de latitude entre as cidades i e j
$\text{difflat2}_{i,j} = \frac{2\pi \times R \times (lat_j - lat_i)}{360}$	$\forall i \in N, \forall j \in N$	distância de latitude entre as cidades i e j
$\text{difflng1}_{i,j} = \frac{2\pi \times R \times (lng_i - lng_j)}{360}$	$\forall i \in N, \forall j \in N$	distância de longitude entre as cidades i e j
$\text{difflng2}_{i,j} = \frac{2\pi \times R \times (lng_j - lng_i)}{360}$	$\forall i \in N, \forall j \in N$	distância de longitude entre as cidades i e j
$\text{a}_{i,j} = max(difflat1, difflat2)$	$\forall i \in N, \forall j \in N$	diferença de latitude do DC i para a cidade j
$\text{b}_{i,j} = max(difflng1, difflng2)$	$\forall i \in N, \forall j \in N$	diferença de longitude do DC i para a cidade j
$\text{d}_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$	$\forall i \in N, \forall j \in N$	distância de Manhattan do DC i para a cidade j

3.1.2 Variáveis de Decisão:

dc_open_i	$\forall i \in N$	1 se a cidade i tem um DC; 0 caso contrário
$\text{dc\_serving\_city}_{i,j}$	$\forall i \in N, \forall j \in N$	1 se a cidade j é servida pelo DC i; 0 caso contrário
DTotalCost		custo para a construção de todos os DC

3.1.3 Formulação:

Minimizar:

$$z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_j \times d_{i,j} \times dc\_serving\_city_{i,j} + DTotalCost \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in N} dc\_open_i \geq 1 \tag{2}$$

$$\sum_{i \in N} dc\_open_i \leq K \tag{3}$$

$$DTotalCost = (\sum_{i \in N} dc\_open_i) \times DCost \tag{4}$$

$$\sum_{i \in N} dc\_serving\_city_{i,j} = 1 \qquad \forall j \in N \tag{5}$$

$$dc\_serving\_city_{i,j} \leq dc\_open_i \qquad \forall i \in N, j \in N \tag{6}$$

$$dc\_serving\_city_{i,j} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in N, j \in N \tag{7}$$

$$dc\_open_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in N \tag{8}$$

3.1.4 Função Objetivo e Restrições:

A **função objetivo (1)**, é o somatório de todos os custos de entrega ($\forall i \in N, j \in N$) mais o custo total de abrir os DC's. Isto funciona porque dc_serving_city$_{i,j}$ apenas toma valor 0 ou 1, **restrição (7) e (8)**. No caso de tomar **valor 1**, a ligação está ativa e este valor é multiplicado pela distância e pelo custo por km, retornanado o custo total do DC i servir a Cidade j. No caso de tomar **valor 0**, a ligação não está ativa, e portanto qualquer custo proveniente deste par i,j é multiplicado por 0.

A **restrição (2)**, assegura que o somatório de todos os DC's abertos é de pelo menos 1.

A **restrição (3)**, assegura que o somatório de todos os DC's abertos é igual ou inferior ao param K, o valor máximo de DC que podemos abrir.

A **restrição (4)**, serve para calcular o custo total para abrir os DC's, ou seja, é multiplicado o número total de DC's abertos por DCost, o custo individual para abrir um DC.

A **restrição (5)**, assegura que para todas as Cidades j $\in N$, o somatório de todas os DC's i $\in N$é igual a 1. Isto sgnifica que para todas as cidades j $\in N$, existe apenas um DC a servir essa cidade.

A **restrição (6)**, correlaciona dc_serving_city e dc_open. Isto é, assegura que se existir um DC i a servir uma cidade j, este mesmo DC i, está aberto, isto é dc_open$_i = 1$;

A **restrição (7) e (8)**, asseguram que as relações dc_serving_city e dc_open são binárias, isto é, apenas guardam valores 0 ou 1.

3.1.5 Implementação AMPL:

Para modular este modelo matemático em AMPL começamos por criar um ficheiro com extensão .run. Este ficheiro é responsável por carregar a data do ficheiro trabalho02.dat e de aplicar o modelo correspondente á questão de extensão .mod. Este ficheiro é usado ainda para mostrar os dados obtidos após a resolução. O modelo é todo definido no ficheiro com extensão .mod.
Para facilitar a implementação, começamos por adaptar a solução proveniente do trabalho 1 dada pelo professor, e começamos a fazer alterar para corresponder a este trabalho 2.

3.1.6 Solução:

Correndo o ficheiro trabalho02A.run, obtemos o valor mínimo de custo z = 3856574.5 euros, que é o valor ótimo. O **número de DC a abrir** é de **1** e a **localização do DC** é a seguinte: **"Santarem".** Já no caso da **cidade com maior custo de distribuição**, esta é **"Lisbon"**,e o DC que a serve é **"Santarem"**.

```
*** minimizing total cost ***
DC cost: 25000 euros
 Total cost: 3856574.5 euros
 Quantity of dc open:1
DC Location:Santarem      (39.2333,-8.68333)
Max cost of delivery: Santarem --> Lisbon with value: 167036 euros
```

Parte do output presente no ficheiro trabalho02A.sol

4 Questão 2

4.1 Modelação de otimização matemática

Desde o início, a nossa abordagem tinha como objetivo apenas a alteração do parâmetro para tornar possível a resolução das duas questões.
A única alteração então que é necessária ser efetuada ao modelo da questão 1 é a seguinte:

$$K = 5 \tag{9}$$

4.1.1 Solução:

Correndo o ficheiro trabalho02B.run, obtemos o valor mínimo de custo z = 989525.18 euros, que é o valor ótimo. O **número de DC a abrir** é de **5** e a **localização dos 5 DC** é a seguinte: **"Lisbon, Loule, Ourem, Pedroucos e Sernancelhe".** Já no caso da **cidade com maior custo de distribuição**, esta é **"Coimbra"**,e o DC que a serve é **"Ourem"**.
Em baixo, podemos ver ainda a cidade com maior custo de distribuição por cada DC.

```
*** minimizing total cost ***
DC cost: 125000 euros
 Total cost: 989525.18 euros
 Quantity of dc open:5
```

```
DC Location:Lisbon        (38.7167,-9.13333)
DC Location:Loule         (37.1377,-8.01968)
DC Location:Ourem         (39.6417,-8.5919)
DC Location:Pedroucos     (41.1888,-8.58624)
DC Location:Sernancelhe         (40.8987,-7.49342)
 [...]
Max cost of delivery: Lisbon --> Evora with value: 25687.9 euros
Max cost of delivery: Loule --> Beja with value: 12070 euros
Max cost of delivery: Ourem --> Coimbra with value: 26200.1 euros
Max cost of delivery: Pedroucos --> Braga with value: 21417.7 euros
Max cost of delivery: Sernancelhe --> Braganca with value: 19004.1 euros
```

Parte do output presente no ficheiro trabalho02B.sol