Duarte Pereira - up201704138
Pedro Antunes - up201507254

Métodos de Apoio à Decisão Trabalho 1 - Modelos de Otimização linear

Departamento de Ciência de Computadores
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Março de 2020

Duarte Pereira - up201704138
Pedro Antunes - up201507254

Métodos de Apoio à Decisão
Trabalho 1 - Modelos de Otimização linear

Orientador: João Pedro Pedroso
Co-orientador:

Departamento de Ciência de Computadores
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Março de 2020

Capítulo 1

Modelos de Otimização Linear

1.1 Introdução

Dado um problema sobre determinadas posições em Portugal Continental, o nosso objetivo neste trabalho é descobrir algumas soluções ótimas do problema usando o GLPK. O GLPK (GNU Linear Programming Kit) é um Software desenhado para resolver programação linear em grande escala, programação mista, ou até, problemas relacionados. Antes de passarmos ao problema em si, é necessário realçar alguns conceitos importantes sobre os métodos que usamos para resolver o problema.

1.1.1 Conceitos importantes

1.1.1.1 Distância de Manhattan:

Esta distância (usada no problema para determinar a distância entre dois pontos) é uma nova medida em que dado dois pontos, a distância entre esses dois pontos é a soma entre o módulo da diferença das coordenadas dos dois pontos. Exemplo:

$$d_{Manhattan}(A, B) = |A_x - B_x| + |A_y - B_y| \tag{1.1}$$

1.1.1.2 Distância entre dois pontos numa esfera:

Dado que estamos a trabalhar com coordenadas medidas em graus (latitude e longitude) e que temos que descobrir a distância entres dois pontos no planeta Terra (assumindo a Terra como um esfera perfeita) teremos que usar um fórmula mais complexa dada por:

$$d_{naEsfera}(A, B) = 2 * \pi * Raio_{Terra} * \frac{\alpha}{360} \tag{1.2}$$

Sendo $\alpha = d_{Manhattan}(A, B) \ \wedge \ Raio_{Terra} = 6371.009$

1.2 Problema

Dadas a geolocalização e população de todas as cidades de Portugal, pretendeu-se reposicionar um centro de distribuição para realizar as entregas das encomendas de todos os clientes portugueses. Considerando que, são feitas 3 entregas por cada 1000 habitantes de uma certa cidade, que tem-se um custo de 1 euro por cada quilometro e que o raio do planeta Terra são 6371.009 quis-se que todos os custos de entrega fossem mínimos. Usaremos um ficheiro do tipo CSV com o nome de ”Population-ContPT2020.csv”como input dos dados das cidades.

1.2.1 Minimização da soma das distâncias de Manhattan

1.2.1.1 Variáveis auxiliares

Diferenciou-se as cidades pelo seu nome e ao mesmo tempo pela sua população.

$$input_{i,j} = Nome\ de\ Cidade\ i\ e\ popula\acute{c}\tilde{a}o\ j, \forall i, j \in PopulationContPT - 2020.csv \tag{1.3}$$

$$raio = 6371.009 \tag{1.4}$$

$$n = length(input) \tag{1.5}$$

$$lat_{i,j} = latitude\ da\ cidade\ ij, \forall i, j \in input \tag{1.6}$$

$$long_{i,j} = longitude\ da\ cidade\ ij, \forall i, j \in input \tag{1.7}$$

$$minDistancia = min(\ \forall i, j \in input\ difflat_{i,j} + difflong_{i,j}), \tag{1.8}$$

1.2.1.2 Variáveis de decisão

$$x = latitude\ do\ local\ ideal \tag{1.9}$$

$$y = longitude\ do\ local\ ideal \tag{1.10}$$

$$difflat_{i,j} = diferenca\ de\ latitude\ entre\ o\ local\ ideal\ e\ uma\ cidade\ ij, \forall i, j \in input \tag{1.11}$$

$$difflong_{i,j} = diferenca\ de\ longitude\ entre\ o\ local\ ideal\ e\ uma\ cidade\ ij, \forall i, j \in input \tag{1.12}$$

1.2.1.3 Restrições

$$difflat_{i,j} - lat_{i,j} + x \geq 0 \quad \forall i, j \in input \tag{1.13}$$

$$difflat_{i,j} + lat_{i,j} - x \geq 0 \quad \forall i, j \in input \tag{1.14}$$

$$difflong_{i,j} - long_{i,j} + y \geq 0 \quad \forall i, j \in input \tag{1.15}$$

$$difflong_{i,j} + long_{i,j} - y \geq 0 \quad \forall i, j \in input \tag{1.16}$$

1.2.1.4 Objetivo

$$\forall i, j \in input\ minimizar\ distancia = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((2 * \pi * raio) * (\frac{difflat_{i,j}}{360} + \frac{difflong_{i,j}}{360})) \tag{1.17}$$

1.2.1.5 Identificação da cidade mais próxima do ponto ótimo para o centro de distribuição

$$Cidade\ i\ :\ \forall i, j \in input\ ,\ (difflat_{i,j} + difflong_{i,j}) = minDistancia \tag{1.18}$$

1.2.2 Minimização do custo total das entregas a serem feitas

1.2.2.1 Variáveis auxiliares

Diferenciou-se as cidades pelo seu nome e ao mesmo tempo pela sua população.

$$input_{i,j} = Nome\ de\ Cidade\ i\ e\ populacão\ j, \forall i, j \in PopulationContPT - 2020.csv \tag{1.19}$$

$$raio = 6371.009 \tag{1.20}$$

$$n = length(input) \tag{1.21}$$

$$lat_{i,j} = latitude\ da\ cidade\ ij, \forall i, j \in input \tag{1.22}$$

$$long_{i,j} = longitude\ da\ cidade\ ij, \forall i, j \in input \tag{1.23}$$

$$minDistancia = min(\ \forall i, j \in input\ difflat_{i,j} + difflong_{i,j}), \tag{1.24}$$

$$maxCustoCidade = max(\ \forall i, j \in input\ ((2*\pi*raio)*(\frac{3j}{1000})*(\frac{difflat_{i,j}}{360}+\frac{difflong_{i,j}}{360}))), \tag{1.25}$$

1.2.2.2 Variáveis de decisão

$$x = latitude\ do\ local\ ideal \tag{1.26}$$

$$y = longitude\ do\ local\ ideal \tag{1.27}$$

$$difflat_{i,j} = diferenca\ de\ latitude\ entre\ o\ local\ ideal\ e\ uma\ cidade\ ij, \forall i, j \in input \tag{1.28}$$

$$difflong_{i,j} = diferen\text{ç}a\ de\ longitude\ entre\ o\ local\ ideal\ e\ uma\ cidade\ ij, \forall i,j \in input \tag{1.29}$$

1.2.2.3 Restrições

$$difflat_{i,j} - lat_{i,j} + x \geq 0 \quad \forall i,j \in input \tag{1.30}$$

$$difflat_{i,j} + lat_{i,j} - x \geq 0 \quad \forall i,j \in input \tag{1.31}$$

$$difflong_{i,j} - long_{i,j} + y \geq 0 \quad \forall i,j \in input \tag{1.32}$$

$$difflong_{i,j} + long_{i,j} - y \geq 0 \quad \forall i,j \in input \tag{1.33}$$

1.2.2.4 Objetivo

$$minimizar\ custo = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((2 * \pi * raio) * (\frac{3j}{1000}) * (\frac{difflat_{i,j}}{360} + \frac{difflong_{i,j}}{360})) \tag{1.34}$$

1.2.2.5 Identificação da cidade mais dispendiosa a partir do ponto ótimo para o centro de distribuição

$$Cidade\ i\ :\ \forall i,j \in input\ ((2*\pi*raio)*(\frac{3j}{1000})*(\frac{difflat_{i,j}}{360}+\frac{difflong_{i,j}}{360})) = maxCustoCidade \tag{1.35}$$

1.3 Resultados

Na primeira pergunta, onde pedia para descobrir o DC (centro de distribuição) da qual minimizava as distâncias de Manhattan a cada cidade, foi obtido o ponto de coordenadas (40.16692, -8.58187). Ao mesmo tempo, foi pedido também para indicar a cidade mais perto do DC obtido, da qual foi obtida como resposta a cidade Condeixa-a-Nova.

Na segunda pergunta, era pedido o DC mas agora tendo em conta a minimização to total de custos de entregas. Usando o GLPK foi obtido como resposta o ponto de coordenadas (39.33732,-8.67422) sendo a cidade mais perto Santarém.

Na última questão, assumindo o último DC, descobrimos que a cidade mais dispendiosa é Lisboa.

1.4 Conclusão

Com este trabalho descobrimos que o GLPK é uma ferramenta importante para solucionar problemas de otimização. Aprendemos como utilizá-lo face a este problema em específico e sentimo-nos muito mais bem preparado para problemas no futuro do mesmo género. É de realçar a organização necessária que o software impõe na criação de código e também no cuidado a ter com as variáveis escolhidas e as restrições feitas para que o resultado seja o pretendido.

1.5 Bibliografia

Seguem-se alguns links usados como fonte de informação para a realização deste trabalho:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_do_táxi
https://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html
https://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html
https://lists.gnu.org/archive/html/help-glpk/2017-01/msg00101.html