Геометрия и топология

Солынин А. А.[1]

11.09.2023 - ...

[1] "Записал Сергей Киселев"

Оглавление

Лекция 1: Векторное пространство

09.09.2023

Глава 1

Векторное пространство

1.1 Определение векторного пространства

Определение 1. Пусть V - множество;
$+ : V \times V \longrightarrow V$
$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$
$\forall u, w, v \in V : \forall \alpha, \beta$

1. (u+v)+w=(u+v)+w (ассоциативность сложения)
2. u+v=v+u (коммутативность сложения)
3. $\exists! 0 \in V : u + 0 = 0 + u = u$ (нейтральный элемент по сложению)
4. $\exists u; -u : u + (-u) = 0$ (обратный элемент по сложению)
5. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (дистрибутивность)
6. $(\alpha \cdot \beta)u = \alpha(\beta \cdot u)$ (ассоциативность умножения)
7. $1 \cdot u = u$ (нейтральный элемент по умножению)

Если 1-8 выполняются, то V - (вещественное) векторное пространство.

Пример.

1. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ - n-мерное пространство $(a_1...a_n)+(b_1...b_n) = (a_1 + b_1...a_n + b_n)$
2. Множество многочленов V
   Множество многочленов n степени — не веркторное пространство, т. к. $(x^n + 1) + (-x^n + x) = x + 1$ — сложение не определено
   Множество многочленов степени $n \leqslant n$ — векторное пространство.
3. Множество определенных на $[a..b]$, непрерывных и имеющих непрерывную производную функций — векторное пространство.
4. Матрицы $n \times m$ — векторное пространство.

5. Множество вращений шара (сложение — композиция, умножение — умножение угла на число на число) — не векторное пространство. (Упражнение: докажите почему)

Свойство. (Доказуемые свойства)

1. $\overline{1}$ — единственный.
2. $\begin{cases} u+v=0 \\ u+w=0 \end{cases} \Rightarrow v=w$
3. $-\overline{1}\cdot u=-u$
4. $u\cdot 0=0$

1.2 Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная независимость

Определение 2. V - векторное пространство и векторы $v_1, v_2, v_3, ..., v_n \in V$. Система $v_1, ..., v_n$ называется линейно независимой (ЛНЗ), если из $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Определение 3. Если $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, $v_1, ..., v_n \in V$. То $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ – линейная комбинация (ЛК) векторов $v_1, ..., v_n$.

Определение 4. Если $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n$, не все $= 0$, но $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$, то система $v_1, ..., v_n$ называется линейно зависимой (ЛЗ).

Теорема 1. $v_1, ..., v_n$ – ЛЗ $\Leftrightarrow$ один из этих векторов можно представить как ЛК остальных. $\exists i : v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + ... + \alpha_n v_n$

Доказательство. $\Rightarrow$: $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n (\exists i : \alpha_i \neq 0)$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$$
$$\alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - ... - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - ... - \alpha_n v_n$$
$$\alpha_i \neq 0 \quad v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n$$
$$\Leftarrow: v_i = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \text{ без } i\text{-ого слагаемого}$$
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + (-1) v_i + ... + \alpha_n v_n = 0$$
$$\text{ЛК } = 0 \text{ не все коэффициенты} = 0$$

□

Предположение 1. $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ, то любой его поднабор тоже ЛНЗ. $v_1, ..., v_n$ – ЛЗ, то при добавлении векторов, набор останется ЛЗ.

Теорема 2. $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ $\Leftrightarrow$ если

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; ...; \alpha_n = \beta_n$$

Доказательство.

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$
$$\alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow v_1, ..., v_n \text{– ЛНЗ}$$

$\square$