

# Оглавление

1	Вещественные числа	3
1.1	Супремумы и инфимумы . . . . .	4

## Лекция 2: Сечения

21.09.2023

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha, \beta$  — сечения. Тогда  $\exists!$   $\gamma$  — сечение :  $\alpha + \gamma = \beta$

**Доказательство.** Пусть имеем  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , удовлетворяющие условию. Тогда:  $\alpha + \gamma_1 = \beta = \alpha + \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$  — противоречие.

Положим  $\gamma = \beta + (-\alpha)$ . Тогда в силу свойств сечений имеем:  
 $\alpha + \gamma = \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0^* + \beta = \beta \quad \square$

**Определение 1.** Сечение  $\gamma$ , построенное в предыдущей теореме обозначается через  $\beta - \alpha$

**Определение 2.** (Абсолютная величина)  $|a| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geq 0^* \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0^* \end{cases}$

**Определение 3.** (Произведение) Пусть  $\alpha, \beta$  — сечения, причем  $\alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^*$

Тогда  $\alpha\beta = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0 \vee r = pq, \text{ где } p \in \alpha, q \in \beta\}$

**Пример.**  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^*$

**Теорема 2.** (Любые 3 из них необходимо доказать самостоятельно)  
Для любых сечений  $\alpha, \beta, \gamma$  имеем:

1.  $\alpha\beta = \beta\alpha$
2.  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
3.  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
4.  $\alpha 0^* = 0^*$

5.  $\alpha 1^* = \alpha$
6. если  $\alpha < \beta$  и  $\gamma > 0^*$ , то  $\alpha\gamma < \beta\gamma$
7. если  $\alpha \neq 0^*$ , то  $\exists \beta : \alpha \cdot \beta = 1^*, \beta = \frac{1^*}{\alpha}$
8. если  $\alpha \neq 0^*$ , то  $\exists \beta, \gamma : \alpha \cdot \gamma = \beta, \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$

**Теорема 3.** (Свойства рациональных сечений)

1.  $p^* + q^* = (p + q)^*$
2.  $p^* q^* = (pq)^*$
3.  $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

**Доказательство.** 1. Возьмем  $r \in (p + q)^* \Rightarrow r < p + q$

Положим  $h = p + q - r$ :

$$\begin{cases} p_1 = p - \frac{h}{2} \\ q_1 = q - \frac{h}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in p^* + q^* \Rightarrow (p^* + q^*) \subset p^* + q^*$$

Теперь возьмем  $r \in p^* + q^* \Rightarrow r = p_1 + q_1$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 < p + q \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in (p + q)^* \\ (p^* + q^*) &\Rightarrow p^* + q^* \subset (p + q)^* \\ \begin{cases} p^* + q^* \subset (p + q)^* \\ (p + q)^* \subset p^* + q^* \end{cases} &\Rightarrow p^* + q^* = (p + q)^* \end{aligned}$$

2. Для умножения доказательство аналогично.
3. Если  $p < q$ , то  $p \in q^*, p \notin p^* \Rightarrow p^* < q^*$   
 Если  $p^* < q^*$ , то  $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in q^*, r \notin p^* \Rightarrow p \leq r < q \Rightarrow p < q$   
 Значит  $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

□

**Теорема 4.** Пусть  $\alpha, \beta$  — сечения,  $\alpha < \beta$ . Тогда  $\exists r^*$  — рациональное сечение :  $\alpha < r^* < \beta$

**Доказательство.**  $\alpha < \beta \Rightarrow \exists p : p \in \beta, p \notin \alpha$

Выберем такое  $r > p$ , так, что  $r \in \beta$ . Поскольку  $r \in \beta, r \notin r^*$ , то  $r^* < \beta$

Поскольку  $p \in r^*, p \notin \alpha$ , то  $\alpha < r^*$

□

# Глава 1

## Вещественные числа

**Определение 4.** В дальнейшем сечения будут называться вещественными числами. Рациональные сечения будут отождествляться с рациональными числами. Все другие сечения будут называться иррациональными числами.

Таким образом, множество всех рациональных чисел оказывается подмножеством системы вещественных чисел.

**Теорема 5.** (Дедекинда) Пусть  $A$  и  $B$  — такие множества вещественных чисел, что:

1.  $A \cup B = \mathbb{R}$
2.  $A \cap B = \emptyset$
3.  $A, B \neq \emptyset, A \neq B$
4.  $\forall \alpha \in A, \beta \in B : \alpha < \beta$

Тогда  $\exists! \gamma \in \mathbb{R} : \alpha \leq \gamma \leq \beta \forall \alpha \in A, \forall \beta \in B$

**Доказательство.** 1. Докажем единственность.

Пусть  $\gamma_1, \gamma_2$  — два числа, причем  $\gamma_1 < \gamma_2$ . Тогда  $\exists \gamma_3 : \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2 \Rightarrow \gamma_3 \in A, \gamma_3 \in B$  — противоречие. Значит  $\gamma_1 = \gamma_2$ .

2. Проверим, является ли  $\gamma$  сечением.

$$\gamma = \{p \in \mathbb{Q} : \exists \alpha \in A : p \in \alpha\}$$

I.  $\gamma \neq \emptyset$ , т.к.  $A \neq \emptyset$

$\gamma \neq \mathbb{Q}$ , т.к.  $\exists q \in \mathbb{Q} : q \notin B \Rightarrow q \notin \gamma$

II. Пусть  $p_1 < p, p \in \gamma$ . Тогда  $\exists \alpha \in A : p_1 \in \alpha \Rightarrow p_1 \in \gamma$

III. Пусть  $p \in \gamma$ . Тогда  $\exists \alpha \in A : p \in \alpha$ . Поскольку  $\alpha$  — сечение, то  $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \alpha, q > p \Rightarrow q \in \gamma$

Ясно, что  $\alpha \leq \gamma \forall \alpha \in A$ .

Предположим, что  $\exists \beta \in B : \beta < \gamma$ . Тогда  $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \gamma, q \notin \beta \Rightarrow \exists \alpha \in A : q \in \alpha \Rightarrow \alpha > \beta$  — противоречие. Значит  $\gamma \leq \beta \forall \beta \in B$ .  $\square$

## 1.1 Супремумы и инфимумы

**Определение 5.**  $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \emptyset$

$E$  — ограничено сверху, если  $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq y$

**Определение 6.**  $G \subseteq \mathbb{R}, G \neq \emptyset$

$G$  — ограничено снизу, если  $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \geq y$

**Замечание.** Если множество ограничено сверху и снизу, оно называется ограниченным.

**Определение 7.** Пусть  $E$  ограничено сверху. Тогда  $y$  называется точной верхней границей (верхней гранью)  $E$ , если:

1.  $y$  — верхняя граница множества  $E$ .
2. если  $x < y$ , то  $x$  не является верхней границей множества  $E$ .

**Определение 8.** Пусть  $E$  ограничено снизу. Тогда  $y$  называется точной нижней границей (нижней гранью)  $E$ , если:

1.  $y$  — нижняя граница множества  $E$ .
2. если  $x > y$ , то  $x$  не является нижней границей множества  $E$ .

**Определение 9.** Точная верхняя граница —  $y \sup E$

Точная нижняя граница —  $y \inf E$

**Пример.**  $E$  состоит из всех чисел  $\frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$ . Тогда множество ограничено, верхняя грань равна 1 и принадлежит множеству, а нижняя равна 0 и множеству не принадлежит.

**Теорема 6.** Пусть  $E$  ограничено сверху. Тогда  $\sup E$  существует.

**Доказательство.** Пусть есть множества:

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in E : x > \alpha\}$$

$$B = \mathbb{R} \setminus A$$

Тогда  $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

$$\begin{cases} \beta \in B \\ \alpha \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in E : x \leq \beta \\ \exists x_0 \in E : x_0 > \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha < \beta$$

Ясно, что никакой элемент множества  $A$  не является верхней гра-

ницей множества  $E$ , а любой элемент множества  $B$  является верхней границей множества  $E$ . Поэтому достаточно доказать, что  $B$  содержит наименьшее число.

По теореме Дедекинда:  $\exists \gamma : \begin{cases} \alpha \leq \gamma \quad \forall \alpha \in A \\ \beta \geq \gamma \quad \forall \beta \in B \end{cases}$

Предположим, что  $\gamma \in A$ . Тогда  $\exists x \in E : x > \gamma$ .

Возьмем  $\gamma_1 : \gamma < \gamma_1 < x \Rightarrow \gamma_1 \in A$  — противоречие.

Значит  $\gamma \in B$ . □

**Теорема 7.** Пусть  $E$  ограничено снизу. Тогда  $\inf E$  существует.

**Доказательство.** Доказательство тривиально и предоставляется читателю в качестве упражнения  $\odot \smile \odot$ . □

**Теорема 8.** (Существование корня из вещественного числа)  $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n > 0 \exists! y \in \mathbb{R}, y > 0 : y^n = x, y = \sqrt[n]{x}$

**Доказательство.** 1. Единственность.

Пусть  $y_2 > y_1 : y_2^n = x = y_1^n \Rightarrow y_2^n - y_1^n = 0$

$(y_2 - y_1) \cdot \overset{>0}{(y_2^{n-1} + y_2^{n-2} \cdot y_1 + \dots + y_1^{n-1})} = 0$  — противоречие.

2. Существование.

Пусть  $E = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0, t^n < x\}$

$0 \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$

Положим  $t_0 = 1 + x, t_0^n = (1 + x)^n$

$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = 1 + nx + \dots \underset{>0}{>} x \Rightarrow E$  — ограничено сверху.

Пусть  $y = \sup E$  (она существует по теореме о Существовании супремума).

- Допустим, что  $y^n < x$ . Возьмем  $h : 0 < h < 1$  и  $h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}$

Тогда

$$\begin{aligned} (y + h)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k y^{n-k} h^k = \\ &= y^n + \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^k = \\ &= y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^{k-1} < y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} = \\ &= y^n + h \cdot ((1+y)^n - y^n) < (y+1)^n - y^n < y^n + x - y^n = x \\ &\text{— } y \text{ не верхняя граница.} \end{aligned}$$

- Допустим, что  $y^n < x$ . Возьмем  $k : 0 < k < 1$ ,  $k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$  и  $k < y$ . Тогда аналогично с  $y^n < x$  получаем, что  $y - k$  — верхняя граница  $E$ , что противоречит тому, что  $y = \sup E$ .

Значит  $y^n = x$ .

□