Оглавление

Лекция 6: Смешанное произведение. Афинное пространство

30.10.2023

0.1 Смешанное произведение

Определение 1. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы в $\mathbb{R}^3$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c}) \text{ – смешанное произведение}$$

Геометрический смысл: $\pm V_{\text{параллелепипеда}}$

Доказательство.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}| \cos\alpha = S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|\mathbf{c}| \cos\alpha = \pm V_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}$$

$\square$

В координатах:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c}) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)(c_1, c_2, c_3) =$$

$$a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

0.2 Свойства смешанного произведения

(по свойствам определителей)

1. $(\mathbf{e} + \mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{e}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ для каждого аргумента
2. $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha\mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$

3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – ЛЗ
4. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$
5. Знак смешанного произведения – ориентация тройки.

Глава 1

Афинное (точечное) пространство

1.1 Определение

Определение 2. V – векторное пространство, E – множество. Назовем E точечным (аффинным) пространством , если определена операция $+ : E \times V \to E$, т.е. $(e; \mathbf{v}) \mapsto (e + \mathbf{v})$ со свойствами:

1. $(e + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = e + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$
2. $e + 0 = e$
3. $\forall e_1, e_2 \in E \exists! \mathbf{v} \in V : e_2 = e_1 + \mathbf{v}$

Такой вектор будем обозначать $\mathbf{v} = \overrightarrow{e_1 e_2}$

Определение 3 (Построение точек). Если в V есть базис $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ и мы зафиксируем $e_0 \in E \Rightarrow \forall e \in E \exists! \mathbf{w} : e_0 + \mathbf{w} = e$, при этом: $\exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n : \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n \Rightarrow e = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – координаты e.

Если имеем $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_n \mathbf{v}_n$, то: $e + \mathbf{v} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$

Определение 4 (Расстояние). Пусть e_0 – начало координат, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ – ОНБ. $e_1 = e_0 + \mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n), e_2 = e_0 + \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$

$$\operatorname{dist}(e_1, e_2) = |\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1| = \sqrt{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1)}$$

Определение 5 (Преобразование начала координат). (Если хотим перейти от начала координат e_0 к e_0')

Есть базис $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ и вектор $e_0' - e_0 = \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$. И пусть точка $e = (e_1, \dots, e_n)$ – координаты с началом e_0 и $e = (e_1', \dots, e_n')$ –

координаты с началом в e_0'. Тогда:

$$e = e_0 + e_1\mathbf{v}_1 + \ldots + e_n\mathbf{v}_n$$

$$e_0' = e_0 + e_1\mathbf{w}_1 + \ldots + e_n\mathbf{w}_n \Leftrightarrow e_0 = e_0' - \mathbf{w}_1\mathbf{v}_1 - \ldots - \mathbf{w}_n\mathbf{v}_n$$

Упражнение: почему равносильно?

$$\text{Имеем } e = e_0' + (e_1 - \mathbf{w}_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (e_n - \mathbf{w}_n)\mathbf{v}_n$$

$$\text{Значит } (e_1', \ldots e_n') = (e_1 - \mathbf{w}_1, \ldots, e_n - \mathbf{w}_n)$$

Глава 2

Прямые на плоскости

2.1 Определения

Определение 6. E – точечное пространство, V – векторное пространство, $\dim V = 2$. Тогда прямая – это подмножество $l \subset E$, если: $\forall e \in E, \mathbf{v} \in V \setminus \{0\}$:

$$l = \{e + \alpha\mathbf{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbf{v}$ – направляющий вектор прямой.

Определение 7 (Параметрическое уравнение прямой)**.**
Пусть $e = (e_1, e_2) \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2)$
$e + t\mathbf{v} = (e_1 + tv_1, e_2 + tv_2) = (x, y)$
$\begin{cases} x = e_1 + tv_1 \\ y = e_2 + tv_2 \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой.

Определение 8 (Каноническое уравнение прямой)**.** Если выразить t из параметрического уравнения, то получим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - e_1}{v_1} = \frac{y - e_2}{v_2}$$

Если $v_1 \vee v_2 = 0$ то $x = e_1 \vee y = e_2$, но $v_1 \wedge v_2$ быть не может.

Определение 9 (Построение прямой по точкам)**.** Пусть $e = (x_0, y_0), e_1 = (x_1, y_1) \qquad e\vec{e}_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ – направляющий вектор. Пусть e – начало, тогда уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Теорема 1 (Прямая в стандарнтных координатах). Из канонического уравнения прямой получаем:

$x(v_2)-y(v_1)-e_1v_2+e_2v_1=0 \Leftrightarrow \forall A,B,C : A^2+B^2 \neq 0 : Ax+By+C=0$

Доказательство.

$$Ax+C=-By \Rightarrow \frac{x+\frac{C}{A}}{B}=\frac{y-0}{-A}, \quad A \neq 0$$

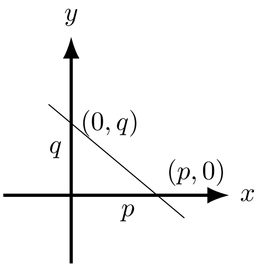
□

Определение 10 (Уравнение в отрезках). Если $A,B,C \neq 0$, то

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

$p=-\frac{C}{A}, q=-\frac{C}{B}$

$(p,0)$ и $(0,q)$ – подходят:



Теорема 2. Если A,B – коэффициенты уравнения прямой, то вектор (нормаль) $(A,B) \perp \mathbf{v}$.

Доказательство.

$$(A,B)=(v_2,-v_1) \perp (v_1,v_2), \text{ т.к. } (v_1,v_2)\cdot(v_2,-v_1)=0$$

□