Оглавление

Лекция 3: Матрицы

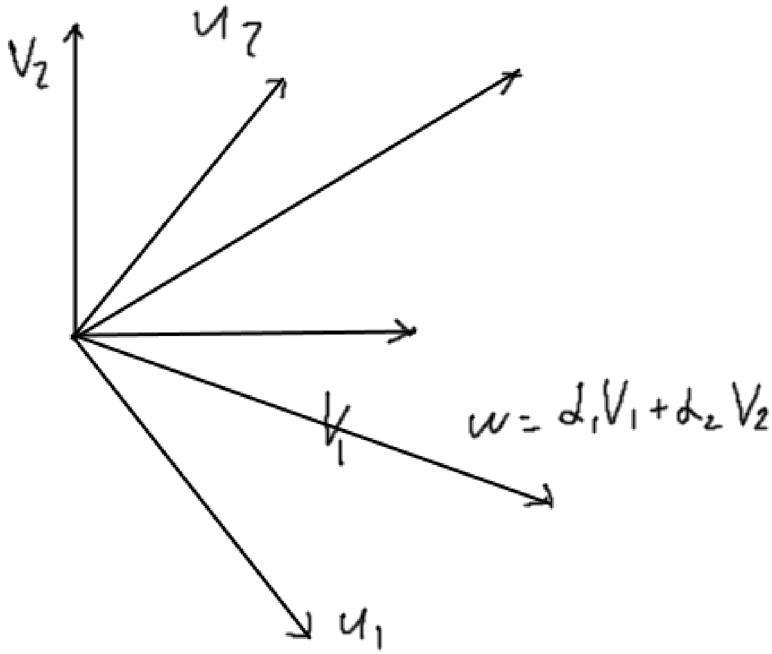
25.09.2023

0.1 Матрицы

Определение 1. Пусть V - Это конечно мерно пространство
$v_1 \dots v_n$ - базис V
$w \in V \Rightarrow \exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n :$
$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$
Тогда $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ — координаты w в базисе $u_1 \dots u_n$

- $w \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$
- $u \Leftrightarrow (\beta_1 \dots \beta_n)$
- $u + w \Leftrightarrow (\alpha_1 + \beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \dots \alpha_n \beta_n)$
- $f \cdot w \Leftrightarrow (f \cdot \alpha_1, f \cdot \alpha_2 \dots f \cdot \alpha_n)$

Определение 2. Пусть $v_1 \dots v_n$ и $u_1, u_2, \dots u_n$ — базисы
Тогда w может выражаться как:
$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot u_1 + \dots + \beta_n \cdot u_n$



Определение 3. (*) Пусть $v_1 \dots v_n$ и $u_1, u_2, \dots u_n$ — базисы

Выразим базис $u_1 \dots u_n$ через $v_1 \dots v_n$:

$u_1 = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n$

$u_2 = a_2 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_{2n} \cdot v_n$

$\vdots$

$u_n = a_n \cdot v_1 + a_{n2} \cdot v_2 + \dots + a_{nr} \cdot vn$

Тогда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от $v_1 \dots v_n$ к $u_1 \dots u_n$

Определение 4. Пусть есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \text{ — Матрица } n \times K$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nl} \end{pmatrix} \text{— Матрица } k \times l$$

Умножение матриц определяется как:

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \dots & \dots & c_{kl} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы равны:

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1k} \cdot b_{kl}$

$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \dots + a_{1k} \cdot b_{k2}$

$\vdots$

$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}$

$\vdots$

Замечание. Выражение базиса через базис можно записать так:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Теорема 1. Пусть $v_1 \dots v_n$ и $u_1, u_2, \dots u_n$ — базисы.

A — матрица перехода от $v_1 \dots v_n$ к $u_1 \dots u_n$

B — матрица перехода от $w_1 \dots w_n$ к $v_1 \dots v_n$

Тогда матрица перехода от $w_1 \dots w_n$ к $u_1 \dots u_n$ равна $A \times B$

Доказательство. Выразим базис $v_1 \dots v_n$ через $w_1 \dots w_n$:

$v_1 = b_{11}w_1 + \dots + b_{1n}w_n$

$\vdots$

$v_1 = b_{n1}w_1 + \dots + b_{nn}w_n$

Выразим базис $u_1 \dots u_n$ через $v_1 \dots v_n$:

$u_1 = a_{11}(b_{11}w_1 + \dots + b_{1n}w_n) + \dots + a_{1n}(b_{n1}w_1 + \dots + b_{nn}w_n) = w_1(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}) + \dots + w_1(a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \dots + a_{nn}b_{nn})$

Мы видим, что базис $u_1 \dots u_n$ выражается через $w_1 \dots w_n$, а матрица перехода — $A \times B$. □

Теорема 2. A(BC) = (AB)C

Умножение матриц не коммутативно, но ассоциативно.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & . & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ - единичная матрица}$$

Замечание. $u_1 \dots u_n$, $v_1 \dots v_n$ — базисы, выражаются как:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$A \times B = E$

$B \times A = E$

(A и B) — обратные матрицы

0.2 Скалярное произведение

Определение 5. V - векторное пространство

$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$

1. (u, u) $\geq$ 0 (u, u) $=$ 0 $\Leftrightarrow$ U $=$ 0
2. $(u_1 + u_2; v) = (u_1, v_1) + (u_2, v)$ $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u_1 v_2)$
3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v)$
4. (u, v) $=$ (v, u)

V - евклидово пространство $(\cdot, \cdot)$ - скалярное произведение

Пример.

1. $V = \mathbb{R}^n$

   $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

   $$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2. V - пространство функций $(\dots)$ $(f(x), g(x)) := \int_a^b f(x)g(x)dx$

Определение 6. Пусть V - евклидово пространство, $v \in V$

$|v| := \sqrt{(v, v)}$

$cos\angle(u, v) := \frac{(u,w)}{|u| \cdot |v|}$

Теорема 3. (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ))

$|(u, w)| \leq |u| \cdot |v|$

Доказательство.

$$(u + tv, u + tv) \geq 0 \quad \forall t$$
$$(u, u) + (u, tv) + (tv, u) + (tv, tv) \geq 0$$
$$|u|^2 + 2t(u, v) + t^2|v|^2 \geq 0 \quad \forall t$$
$$\frac{D}{4} \leq 0 \quad (u, v)^2 - |u|^2|v|^2 \leq 0$$
$$|(u, v)| \leq |u||v|$$

□

Вывод. (Следствие из КБШ)

1. $|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$
2. $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b g(x)dx) \cdot (\int_a^b f(x)dx)$

Определение 7. $u \perp v$, если $(u, b) = 0$

Определение 8. $v_1 \ldots v_n$ — ортогональная система, если:
$\forall v_i, v_j : v_i \perp v_j, (i \neq j)$

Теорема 4. $v_1 \ldots v_n$ - ортогональная система и в ней нет нулевых векторов $\Rightarrow v_1 \ldots v_n$ линейно не зависимы.

Доказательство.

$$\alpha_1v_1 + \ldots + \alpha_nv_n = 0$$
$$\alpha_1(v_1v_i) + \alpha_2(v_2, v_i) + \ldots + \alpha_i(v_i, v_i) + \ldots = 0$$
$$a_i|v_i|^2 = 0$$
$$\alpha_i = 0$$

□

Определение 9. u — нормированый или единичный если $|u| = 1$
$v_1 \ldots v_n$ — ортонормированные системы, если $v_i \perp v_j$ и $|v_i| = 1$
$v_1..v_i$ — ОНБ ортонормированный базис