Оглавление

Лекция 6: Верхний и нижний пределы. Предел функции.

12.10.2023

Теорема 1. (свойства пределов) Пусть есть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\exists N : \forall n > N : a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon \tag{1}$$

$$\forall N \exists n > N : a_n > \limsup_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \tag{2}$$

$$\exists N_2 : \forall n > N_2 : a_n > \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \tag{3}$$

$$\forall N_3 \exists n > N_3 : a_n < \liminf_{n\to\infty} a_n + \varepsilon \tag{4}$$

Доказательство. (Все пределы при $n \to \infty$)
Докажем только (1) и (2), другие свойства доказываются аналогично.

1. Возьмем $E_n = \{a_n : m \geq n\}$ и $g_n = \sup E_n$.
   Тогда $\limsup a_n = \lim g_n$, и $\forall n : a_n \leq g_n$.
   При этом $\exists N : \forall n > N : g_n < g_n + \varepsilon$
   Имеем $\forall n > N : a_n \leq g_n < g_n + \varepsilon = \limsup a_n + \varepsilon$
2. Имеем $g_N = \sup E_N$ и $g_{N+1} \geq g_N$,
   значит $\exists a_n \in E_{N+1} : a_n \geq g_n > g_n - \varepsilon \Rightarrow$
   $\Rightarrow a_n > \limsup a_n - \varepsilon$

□

Свойства. (Без доказательств)

Пусть есть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда:

$$\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} \limsup a_n$$

$$\exists \{a_{n_l}\}_{l=1}^{\infty} : a_{n_l} \underset{l\to\infty}{\to} \liminf a_n$$

Теорема 2. (Последнее свойство) Пусть есть подпоследовательность

$$\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} : \exists \lim_{m\to\infty} a_{n_m} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{m\to\infty} a_{n_m} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Доказательство. Пусть $h_n = \inf E_n, g_n = \sup E_n$. Имеем неравенство:

$$h_{n_m} \leq a_{n_m} \leq g_{n_m} \Rightarrow \lim_{m\to\infty} h_{n_m} \leq \lim_{m\to\infty} a_{n_m} \leq \lim_{m\to\infty} g_{n_m}$$

.

В силу существования пределов у последовательностей g_n, h_n имеем:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{m\to\infty} a_{n_m} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

□

Глава 1

Функции. Предел функции, монотонность, непрерывность

1.1 Предел функции

Определение 1. Пусть X — метричесткое простанство с метрикой ρ, $\alpha \in X$. Окрестностью точки α называется:
$\omega(\alpha) = \{x \in X : \forall\varepsilon > 0 : \rho(x, \alpha) < \varepsilon\}$

Определение 2. α — точка сгущения множества X, если:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists x_1 \in X : x_1 \neq \alpha \wedge \rho(x_1, \alpha) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall\omega(\alpha)\ \exists x_1 \in \omega(\alpha), x_1 \neq \alpha$

Определение 3. α — точка сгущения для $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, если:
$\forall\omega(\alpha)\ \exists b \in (E \cap \omega(\alpha)), b \neq \alpha$

Пример. $E = \mathbb{N}, +\infty$ — точка сгущения для E.

Теорема 3. Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ, $\alpha \in X$ — точка сгущения, тогда:

$$\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha,\ \forall x_n : x_n \neq \alpha, x_n \in X$$

Доказательство. Возьмем $x_1 \neq \alpha$, пусть $\varepsilon_1 = \rho(x_1, \alpha) > 0$. $\exists x_2 \neq \alpha : \rho(x_2, \alpha) < \frac{1}{2}\varepsilon_1$. Положим $\varepsilon_2 = \rho(x_2, \varepsilon)$.

Пусть уже выбрали выбрали $x_1, \ldots, x_n$ так, что $x_k \neq \alpha, 2 \leq k \leq n, \varepsilon_k = \rho(x_k, \alpha) < \frac{1}{2}\varepsilon_{k-1}$

Тогда $\exists x_{n+1} \neq \alpha : \rho(x_{n+1}, \alpha) < \frac{1}{2}\varepsilon_n$.

Имеем $\varepsilon_n < \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1} < \frac{1}{2^2}\varepsilon_{n-2} < \ldots < \frac{1}{2^{n-1}}\varepsilon_1$, т.е. $\rho(x_n, \alpha) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha$ □

Определение 4. (Предел функции) Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\rho, \alpha \in X$ — точка сгущения, определна функция $f : X \to \mathbb{R}$ и $A \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда:

$$f(x) \underset{x\to\alpha}{\to} A \Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha} f(x) = A, \text{ если выполнено:}$$

$$\forall \omega(A)\ \exists \Omega(\alpha) : \forall x \in \Omega(\alpha), x \neq \alpha : f(x) \in \omega(A)$$

Теорема 4. (единственность предела) Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\rho, \alpha \in X$ — точка сгущения, определна функция $f : X \to \mathbb{R}$. Тогда:

$$\exists! A \in \overline{\mathbb{R}} : \lim_{x\to\alpha} f(x) = A$$

Доказательство. Предположим, что есть $A, B \in \overline{\mathbb{R}}, B \neq A$ и
$\lim_{x\to\alpha} f(x) = A, \lim_{x\to\alpha} f(x) = B$.
Тогда: $\exists \omega_1(A), \omega_2(B) : (\omega_1(A) \cap \omega_2(B)) = \varnothing$
А также: $\begin{cases} \exists \Omega_1(\alpha) : \forall x \in \Omega_1(\alpha) : f(x) \in \omega_1(A) \\ \exists \Omega_2(\alpha) : \forall x \in \Omega_2(\alpha) : f(x) \in \omega_2(B) \end{cases}$
Рассмотрим $\Omega(\alpha) = \Omega_1(\alpha) \cap \Omega_2(\alpha)$:
$\exists x \in \Omega(\alpha), x \neq \alpha : \begin{cases} f(x) \in \omega_1(A) \\ f(x) \in \omega_2(B) \end{cases}$ — противоречие, т.к. $\omega_1(A) \cap \omega_2(B) = \varnothing$. □

1.2 Односторонние пределы

Определение 5. Пусть есть $E = (p, q), p, q \in \mathbb{R}, a \in E, E_- = (p, a), E_+ = (a, q)$
А также определены функции:
$f : E \to \mathbb{R}$.
$f_- : E_- \to \mathbb{R}, \quad f_-(x) = f(x)$, при $x \in E_-$
$f_+ : E_+ \to \mathbb{R}, \quad f_+(x) = f(x)$, при $x \in E_+$
Тогда пределом справа функции f в точке a называется:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = c_+$$

А пределом слева функции f в точке a называется:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = c_-$$

Теорема 5. (обозначения из определения выше)

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x)$$

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$. Тогда:

$\forall \omega(c)\ \exists \Omega(a) : \forall x \in \Omega(a) \cap E, x \neq a : f(x) \in \omega(c)$

При этом $\begin{cases} \Omega(a) \cap E_+ \in \Omega(a) \cap E \\ \Omega(a) \cap E_- \in \Omega(a) \cap E \end{cases}$

Значит получаем $\begin{cases} \forall x \in \Omega(a) \cap E_+ : f(x) \in \omega(c) \\ \forall x \in \Omega(a) \cap E_- : f(x) \in \omega(c) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$

$\Leftarrow$: Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = c$. Тогда:

$\begin{cases} \forall \omega(c) \exists \Omega(a) : \forall x \in \Omega_1(a) \cap E_+, x \neq a : f(x) \in \omega(c) \\ \forall \omega(c) \exists \Omega(a) : \forall x \in \Omega_2(a) \cap E_-, x \neq a : f(x) \in \omega(c) \end{cases}$

Возьмем $\Omega(a) = \Omega_1(a) \cap \Omega_2(a)$

Имеем $((\Omega_1(a) \cap E_+) \setminus \{a\}) \cup ((\Omega_2(a) \cap E_-) \setminus \{a\}) = ((\Omega(a) \cap E) \setminus \{a\})$

Тогда справедливо: $\forall x \in \Omega(a) \cap E, x \neq a : f(x) \in \omega(c)$

$\square$

1.3 Существование предела

Теорема 6. (Соответствие предела функции пределу последовательности) Пусть есть X — метрическое пространство с метрикой $\rho, \alpha \in X$ — точка сгущения, определна функция $F : X \to \mathbb{R}$.

И пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}, a$ — точка сгущения, определена функция $f : E \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим последовательности:
$\{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}, x_n \to \alpha, \forall n : x_n \neq \alpha$
$\{f(b_n)\}_{n=1}^{\infty}, b_n \to a, \forall n : b_n \neq a$
Тогда:

$$\exists \lim_{x\to\alpha} F(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\} : F(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$$

$$\exists \lim_{b\to a} f(x) = c \Leftrightarrow \forall \{b_n\} : f(b_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$$

Доказательство. (Будем доказывать для метрического пространства, для множества E доказательство аналогично)

$\Rightarrow$: Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} F(x) = A$. Тогда:

$\forall\omega(A)\ \exists\Omega(\alpha) : \forall x \in \dot{\Omega}(\alpha) : F(x) \in \omega(A)$

Поскольку $x_n \to \alpha$, то $\exists N : \forall n > N : x_n \in \Omega(\alpha)$

Имеем, что $\forall n > N : F(x_n) \in \omega(A) \Rightarrow F(x_n) \to A$

$\Leftarrow$: Предположим, что $\forall\{x_n\} : F(x_n) \to A$ — неверно. Тогда:

$\exists\omega_0(A) : \forall\Omega_0(\alpha)\ \exists x \in \dot{\Omega}_0(\alpha) : F(x) \notin \omega_0(A)$

Будем брать $\Omega_{1/n}(\alpha) = \{x \in X : \rho(x,\alpha) < \frac{1}{n}\}$

$\exists x_n \in \ldots\Omega_{1/n}(\alpha) : F(x) \notin \omega_0(A)$

Это означает, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha \Rightarrow F(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$ — противоречие.

$\square$

1.4 Свойства пределов функции

Свойства. (обозначения как в теореме выше) Для метрического пространства и для множества E:

1. $F(x) \equiv A \Rightarrow F(x) \to A, A \in \overline{\mathbb{R}}$
2. $\lim qF(x) = q\lim F(x), q \in \mathbb{R}$
3. $\lim(F(x) + G(x)) = \lim F(x) + \lim G(x)$
4. $\lim(F(x) \cdot G(x)) = \lim F(x) \cdot \lim G(x)$
5. $\lim \frac{1}{F(x)} = \frac{1}{\lim F(x)}$, если $\lim F(x) \neq 0$
6. $\lim \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\lim F(x)}{\lim G(x)}$, если $\lim G(x) \neq 0$
7. $\forall x : F(x) \leq G(x) \Rightarrow \lim F(x) \leq \lim G(x)$
8. $F(x) \leq G(x) \leq H(x)$ и $\lim F(x) = \lim H(x) \Rightarrow \exists\lim G(x) = \lim F(x)$

UPD: для множества E свойства аналогичны.

Доказательство. Все эти свойства доказываются аналогично свойствам пределов последовательностей, так как была доказана теорема о соответствии предела функции пределу последовательности.

Докажем 5 свойство для метрического пространства:
Возьмем последовательность $\{x_n\}$ из теоремы.

По теореме: $F(x_n) \to A, A \neq 0$
Получаем, что $\forall n : F(x_n) \neq 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{F(x_n)} = \frac{1}{A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \alpha} \frac{1}{F(x)} = \frac{1}{A}$$

$\square$