Дискретная математика

Григорьева Н.С.[1]

13.09.2023 - ...

[1] "Записал Сергей Киселев, Гараев Тагир"

Оглавление

Глава 1

Комбинаторика

Лекция 1: Введение

13.09.2023

1.1 Основные определения

Определение 1. Перестановкой называется упорядоченный набор неповторяющихся элементов длины n, состоящий из элементов от 1 до n.

Число перестановок: $P_n = n!$

Определение 2. Размещением называется упорядоченный набор неповторяющихся элементов длины k, состоящий из элементов от 1 до n.

Число размещений: $A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$
$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Определение 3. Сочетанием называется набор неповторяющихся элементов длины k, состоящий из элементов от 1 до n.

Число сочетаний: $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Определение 4. Перестановки с повторениями: $\overline{P_n} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$

Определение 5. Размещения с повторениями: $\overline{A_n^k} = n^k$

Определение 6. Сочетания с повторениями: $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$

Пример. (Толкование к сочетаниям с повторениями) Сколькими способами можно разложить пять одинаковых шаров по трём различным ящикам? На число шаров в ящике ограничений нет.

Решение:

Представим себе, что ящики стоят вплотную друг к другу. Три таких ящика — это фактически две перегородки между ними. Обозначим шар нулём, а перегородку — единицей. Тогда любому способу раскладывания пяти шаров по трём ящикам однозначно соответствует последовательность из пяти нулей и двух единиц; и наоборот, каждая такая последовательность однозначно определяет некоторый способ раскладывания. Например, 0010010 означает, что в первом ящике лежат два шара, во втором — два шара, в третьем — один шар; последовательность 0000011 соответствует случаю, когда все пять шаров лежат в первом ящике.

Теперь ясно, что способов разложить пять шаров по трём ящикам существует ровно столько же, сколько имеется последовательностей из пяти нулей и двух единиц. А число таких последовательностей равно C_7^2

1.2 Множества

Теорема 1. (Формула включений-исключений)

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |\bigcup_{i=1}^n A_i| =$

$$= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Доказательство. (докажем по индукции)

1. База индукции: $n = 2 : |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$
2. Переход индукции: $n \to n+1 :$

   $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}| =$

   $$= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| -$$

   $- \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})| =$

   $$= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| -$$

   $$- \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| - (\sum_{i=1}^n |A_i \cap A_{n+1}| -$$

$$- \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + \ldots (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}|) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| -$$

$\ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}|$

$\square$

1.3 Разбиения

Определение 7. Пусть A — множество. Имеется $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Совокупность этих множеств — разбиение, если: $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i; A_i \cap A_j = \varnothing$

Определение 8. Пусть у A есть разбиения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$

Тогда $\mathcal{B}$ — измельчение $\mathcal{A}$, если $\forall B_i \in \mathcal{B}\ \exists! A_j \in \mathcal{A} : B_i \subset A_j$

Определение 9. Произведение разбиений — разбиение, которое является измельчением $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и является самым крупным измельчением.

Лекция 2: Разбиения, прямое произведение, нумерация

20.09.2023

Теорема 2. Произведение разбиений существует.

Доказательство. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — разбиения.

Возьмем все множества вида $C_{ij} = A_i \cap B_j$

- C — измельчение $\mathcal{A}$, так как $\forall C_{ij}\ \exists A_i : C_{ij} \subset A_i$
- аналогично C — измельчение $\mathcal{B}$

Предположим, что F — измельчение, большее C, тогда:

$\forall F_k : \begin{cases} \exists A_i : F_k \subset A_i \\ \exists B_i : F_k \subset B_i \end{cases} \Rightarrow F_k \subset A_i \cap B_j \Rightarrow F_k \subset C_{ij}$ — C наибольшее из измельчений. $\square$

Глава 2

Алгоритмы перебора

2.1 Перебор 0-1 векторов

Будем рассматривать множество B^m всех наборов из m битов, каждый из которых может быть нулем и единицей. Элемент множества B^m — вектор $(0, 0, 1, \ldots, 1)$ длиной m. Количество элементов в множестве (мощность): $|B^m| = 2^m$.

Для того, чтобы создать вычислительный процесс, при котором на каждом шаге будет формироваться новый, не встречавшийся ранее, элемент рассматриваемого множества, достаточно заметить, что существует взаимнооднозначное соответствие между числами из $0 \ldots 2^m - 1$ и наборами 0-1 векторов. Т. е. достаточно первым взять число 0 и его двоичное представление $(0, \ldots, 0)$, а затем просто добавлять по единице, имитируя это на текущем наборе, пока мы не дойдем до набора из одних единиц.

Кроме рассмотренного способа перебора наборов, можно предложить другой алгоритм, который на каждом шаге меняет значение только одной компоненты:

> **Алгоритм.** (Перебор и нумерация 0-1 векторов в порядке минимального изменения)
>
> - создаем 2 набора x и y, каждый из m битов. Первоначально $x = y = (0, 0, 0, 0)$
> - прибавляем к x единицу и фиксируем позицию j, где произошло изменение.
> - изменить j-ую компоненту в наборе $y : y_j = 1 - y_j$
> - вернуть y

> **Пример.** (Рассмотрим на примере $m = 4$)

x	y	j
0000	0000	-
0001	0001	4
0010	0011	3
0011	0010	4
0100	0110	2
0101	0111	4

2.2 Перебор прямого произведения

Рассматриваем множество $M(1:k) = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$. Число элементов: $\prod_{i\in 1:k} m_i$, где $m_i = |M_i|$.

Будем считать, что каждое M_i состоит из m_i элементов, которые мы будем нумеровать от 0 до $m_i - 1$. Тогда каждый элемент $M(1:k)$ — последовательность неотрицательных чисел $(r_1, \ldots, r_k), r_i < m_i$

Общая формула перехода от элемента $(r_1, \ldots, r_k)$ к номеру этого элемента:

$$num(r_1, \ldots, r_k) = \sum_{i=1}^{k} \times (\prod_{j=1}^{i-1} m_j)$$

2.3 Перебор перестановок

Рассмотрим множество $T_k = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k, M_i = \{0, 1, \ldots, i-1\}, |T_k| = k!$. Обозначим множество всех перестановок из k элементов через P_k.

Построим взаимнооднозначное соответствие между T_k и P_k. Возьмем перестановку $(r_1, \ldots, r_k)$ и сопоставим ей элемент $(t_1, \ldots, t_k)$ следующим образом: $\forall i \in 1:k$ найдем число значений, меньших r_i среди $r_{i+1}, \ldots, r_k$ — это число перепишем в качестве t_i.

Пример.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
r_i	4	8	1	5	7	2	3	6
t_i	3	6	0	2	3	0	0	0

Чтобы получить перестановку по записи $(t_1, \ldots, t_k)$, нужно помнить множество значений S_i, которые могут быть в перестановке на i-ом месте. Так, $S_1 = 1:8, t_1 = 3$ означает, что $r_1 = 4$. Далее $S_2 = 1:3 \cup 5:8, t_2 = 6$ значит, что $r_2 = 8$

Замечание. Если использовать отображение из примера при переборре, то перестановки будут идти в лексикографическом порядке Это значит, что:

$(r_1, \ldots, r_k)$ предшествует $(R_1, \ldots, R_k) \Leftrightarrow$ начала этих перестановок совпадают до i индекса, а далее $r_i < R_i$

Замечание. Очевидно, что если факториальная запись $(t_1, \ldots, t_k)$ лексикографически предшествует другой, то порядок верен и для соответствующих перестановок.

Алгоритм. (Перебор перестановок в лексикографическом порядке)

1. в заданной перестановке $(r_1, \ldots, r_k)$ найдем наибольший суффикс $(r_t, \ldots, r_k)$, в котором элементы расположены по убыванию.

2. выбрать в $(r_t, \ldots, r_k)$ элемент, следующий по велечине после r_{t-1} и поставить его на r_{t-1}. Оставшиеся эелменты, включая r_{t-1} расположить за ним в порядке возрастания.

Пример.

3	4	2	1	7	8	9	5	**6**
3	4	2	1	7	8	**9**	**6**	**5**
3	4	2	1	7	9	5	6	**8**
3	4	2	1	7	9	5	**8**	**6**
3	4	2	1	7	9	6	5	**8**
3	4	2	1	7	9	6	**8**	**5**
3	4	2	1	7	9	8	5	**6**
3	4	2	1	7	**9**	**8**	**6**	**5**
3	4	2	1	8	5	6	7	**9**

Лекция 3: Продолжение

27.09.2023

2.4 Перебор перестановок в лекцикографическом порядке (другой способ)

Алгоритм. Будем брать элементы $(t_1, \ldots, t_k)$ из T_k и сопоставлять им перестановки так, как делали ранее. Переход к следующей перестановке осуществляется путем прибавления единицы к $(t_1, \ldots, t_k)$. (причем последний элемент в $(t_1, \ldots, t_k)$ всегда ноль, т.к. ничего не значит)

Пример. (для P_4)

num	t	p
0	(0, 0, 0, 0)	(1, 2, 3, 4)
1	(0, 0, 1, 0)	(1, 2, 4, 3)
2	(0, 1, 0, 0)	(1, 3, 2, 4)
3	(0, 1, 1, 0)	(1, 3, 4, 2)
4	(0, 2, 0, 0)	(1, 4, 2, 3)
5	(0, 2, 1, 0)	(1, 4, 3, 2)
6	(0, 3, 0, 0)	(2, 1, 3, 4)
⋮	⋮	⋮
23	(3, 2, 1, 0)	(4, 3, 2, 1)

2.5 Перебор с минимальным изменением

На каждой итерации будем менять только два соседних элемента. Для этого необходимо:

- берем последний элемент в перестановке и меняем его с соседом до тех пор, пока элемент не дойдет до начала.
- когда этот элемент оказался в начале, мы меняем у него направление: теперь он будет менятся с соседом справ, а элемент, который оказался на последней позиции, делает 1 шаг (и так каждый раз, когда наш первый элемент меняет направление). Такие действия применяются ко всем элементам в перестановке.

Алгоритм. Кроме самой перестановки p и ее номера t (на этот раз младший разряд в номере — последний), будем хранить массив d, в котором будем хранить направление движения элементов. Если элемент движется вправо, то d[i] = +, если влево, то d[i] = -. Начальное значение d[i] = - для всех i.

Также храним j где будем записывать индекс элемента в t, в котором значение увеличилось.

1. Прибавляем 1 к t
2. Определяем номер разряда в котором значение увеличивается на 1, записываем в j
3. $\forall i \in [1, n] : i > j$, меняем $d_i = -d_i$.
4. j (не номер, именно такой элемент) меняем с соседом слева если $d_j = -$, и с соседом справа, если $d_j = +$.

Пример.

num	t	d	p	j
0	0000	$----$	1234	-
1	0001	$----$	1243	4
2	0002	$----$	1423	4
3	0003	$----$	4123	4
4	0010	$---+$	4132	3
5	0011	$---+$	1432	4
6	0012	$---+$	1342	4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	0113	$--++$	4231	4
20	0120	$--++$	4213	3
21	0121	$--++$	2413	4
22	0122	$--++$	2143	4
23	0123	$--++$	2134	4
24	1000	$-+--$	—	1

2.6 Сочетания и бином Ньютона

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Свойства. (Свойства сочетаний)

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$
2. $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$

Доказательство. Доказывается путем подстановки непосредственно в формулу, или можно рассматривать пути на целочисленной решетке. □

Теорема 3. (Бином Ньютона)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0 : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Доказательство. (По индукции)

1. База $n = 1$ очевидна.
2. индкуционый переход $n - 1 \to n$:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1} = a(a+b)^{n-1} + b(a+b)^{n-1} =$$

$$= a \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-1-k} + b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-1-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} =$$

$$= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + b^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} =$$

$$= a^n + b^n + \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

□

2.7 Перебор сочетаний с хорошей нумерацией

Для того чтобы присваивать номер сочетанию, будем рассматривать сочетание как вектор из нулей и единиц: если элемент взяли — единица, иначе — ноль.

Пример. Вектору $b = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$ соответствует сочетание 1345.

Алгоритм. определяем номер рекурсивно:

$$num(b[1:n-1], m) = \begin{cases} num(b[1:n-1], m), & \text{если} b[n] = 0, \\ num(b[1:n-1], m-1), & \text{если} b[n] = 1, \end{cases}$$

Где m — кол-во единиц.

Пример. Рассмотрим $b = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0), m = 4$:

$$\begin{aligned} num(b, m) =& C_6^4 + num(b[1:n-1], 3) = \\ =& C_6^4 + C_4^3 + num(b[1:n-2], 3) = \\ =& C_6^4 + C_4^3 + num(b[1:n-3], 2) = \\ =& C_6^4 + C_4^3 + num(b[1:n-4], 2) = \\ =& C_6^4 + C_4^3 + C_2^2 + num(b[1:n-5], 1) = \\ =& C_6^4 + C_4^3 + C_2^2 + 0 = 15 + 4 + 1 = 20 \end{aligned}$$

Лекция 4: Фибоначчи и теория вероятностей

04.10.2023

2.8 Фибоначчи

Определение 10. Последовательность Фибоначчи определяеется как:

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$$

Лемма 1.

$$F_{2k} = F_{2k-1} + F_{2k-3} + \ldots + F_1$$

$$F_{2k-1} = F_{2k} + F_{2k-2} + \ldots + F_0 + 1$$

Доказательство. Докажем по индукции. База: $k = 1$:

$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$.

$F_1 = F_0 + 1 = 0 + 1 = 1$.

Переход: $k \to k + 1$. По предположению индукции:

$F_{2k} = F_{2k-1} + F_{2k-3} + \ldots + F_1$. Тогда $F_{2k+2} = F_{2k+1} + F_{2k-1} + \ldots + F_1 + F_0 = F_{2k+1} + F_{2k}$. Аналогично для нечетных. $\square$

Теорема 4. (Представление натуральных чисел в виде суммы чисел Фибоначчи)

$\forall S \in \mathbb{N} : S = F_{i_0} + F_{i_1} + \ldots + F_{i_s}$

Где $i_0 = 0, i_{k-1} + 1 < i_k : k \in 1 : s$

Доказательство. Докажем, что такое представление существует. Пусть $j(s)$ — номер максимального числа Фибоначчи, не большего чем S. Положим $S' = S - F_{j(s)}$. Предположим, что $S' > F_{j(s)-1}$, тогда: $S' > F_{j(s)-1} \Rightarrow S > F_{j(s)} + F_{j(s)-1} \Rightarrow S > F_{j(s)+1}$, но по лемме $S \leq F_{js+1}$ — противоречие, значит $S' < F_{j(s)-1}$

Далее можно построить представление для S', итого число S прдставляется в виде представление для S', дополненное слагаемым $F_{j(s)}$

Проверим однозначность предсталвения: пусть $S = F_{j_0} + \ldots + F_{j_q}(2)$. Не умоляя общности, $j_q < j(s)$ (больше быть не может, а равные можно отбросить) Заменим F_{j_q} на $F_{j(s)-1}$, тогда правая часть равенства (2) увеличится. Будем заменять F_{j_q-1} на $F_{j(s)-3}$ и т.д. Но при таких заменах сумма не превзойдет $F_{j(s)}$ по лемме, значит, представление для S однозначно. $\square$

2.9 Фибоначчиева система счисления

Вектор набора $(i_0, i_1, \ldots, i_s)$ — запись числа S в фибоначчиевой системе счисления.

Алгоритм. (Прибалвение единицы в фибоначчиевой системе счисления)

- Начальное положение: имеем набор $x[0 : n-1]$ из нулей и единиц, в котором нет двух единиц рядом и $x[0] = 1$.
- Положим $x[1] := 1$.
- Шаг: выбирем наибольшее k: $x[k] = 1 \wedge x[k-1] = 1$. Тогда:

$$\begin{cases} x[k] := 0, \\ x[k-1] := 0, \\ x[k+1] := 1, \\ x[0] := 1. \end{cases}$$

Пример.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	пояснение
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	$= 46$
1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	начало
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1-й шаг
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	2-й шаг
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	3-й шаг

Глава 3

Элементарная теория вероятностей

3.1 Основные понятия

Определение 11. Ω — множество элементарных исходов. $A \subset \Omega$ — событие.

Определение 12. $\varnothing \subset \Omega$ — невозможное событие, $\Omega \subset \Omega$ — достоверное событие.

Определение 13. Пусть есть события A, B, тогда:

- $A \cup B$ — объединение событий
- $A \cap B$ — совмещение событий, причем, если $A \cap B = \varnothing$, то A, B — несовместные события.
- $\overline{A}$ — противоположное событие.

Определение 14. $p : \Omega \to [0, 1]$ — вероятность события. Причем:

1. $0 \leq p(A) \leq 1$
2. $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$
3. если $A = A_1 + A_2, A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то $p(A) = p(A_1) + p(A_2)$

Определение 15. $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ — классическая вероятность.

Определение 16. (Полная система событий)
Пусть есть события $S_1, \ldots, S_n$, таких, что:

- $S_i \cap S_j = \varnothing, i \neq j$
- $S_1 \cup \ldots \cup S_n = \Omega$

Тогда вероятность события A можно посчитать следующим образом:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap S_i)$$

Определение 17. События A, B — независимы, если:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Определение 18. События $A_1, \ldots, A_n$ — независимы попарно, если:

$$p(A_i \cap A_j) = p(A_i) \cdot p(A_j)$$

И независимы в совокупности, если:

$$p(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i)$$

Определение 19. (Условная вероятность)
Событие B при условии, что произошло событие A:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Пример. Пусть есть тетраэдр с одной красной, одной черной, одной белой и одной, покрашенной во все цвета гранями. Тогда:

- $p(\text{Крас.}) = \frac{1}{2}$
- $p(\text{Крас.} \cap \text{Черн.}) = \frac{1}{4}$ — попарно независимы
- $p(\text{Крас.} \cap \text{Черн.} \cap \text{Бел.}) = \frac{1}{4}$ — не независимы в совокупности.

Определение 20. (Полная вероятность, используя условную)

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap S_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A|S_i) \cdot p(S_i)$$

Определение 21. (Формула Байеса) Пусть есть события A, B:

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B|A_i) \cdot p(A_i)$$

$$p(B|A_i) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(A_i)} \Rightarrow p(B \cap A_i) = p(A_i) \cdot p(B|A_i) = p(B) \cdot p(A_i|B)$$

Получаем формулу Байеса:

$$p(A_i|B) = \frac{p(B|A_i) \cdot p(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(B|A_j) \cdot p(A_j)}$$

Лекция 5: Случайные величины, мат.ожидание, дисперсия

11.10.2023

3.2 Случайные величины

Определение 22. Пусть Ω — множество элементарных событий, p_ω — вероятность события ω. Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^1$ называется случайной величиной.

Замечание. Способ задать случайную величину (дискретный случай)

ξ :

a_1	a_2	$\dots$	a_n
p_1	p_2	$\dots$	p_n

$p(\xi = a_i) = p_i$, где $\xi = a_i \Leftrightarrow \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = a_i\}$

Пример. Стрелок стреляет 3 раза, вероятность попадания — $0,8$:

0	1	2	3
$0,2^3$	$3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8$	$3 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2$	$0,8^3$

3.3 Математическое ожидание

Определение 23. математическим ожиданием случайной величины называется:

$$E_\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot p(\xi = a_i)$$

Свойства.

1. Если $p(\xi = a) = 1$, то $E_\xi = a$
2. Если $\eta = c \cdot \xi, c$ — константа, то $E_\eta = c \cdot E_\xi$
3. $E(\xi + \eta) = E_\xi + E_\eta$

4. $E(\xi \cdot \eta) = E_\xi \cdot E_\eta$ — для независимых

Определение 24. Случайные величины ξ и η — независимы, если:

$$p(\xi = a_i \wedge \eta = b_j) = p(\xi = a_i) \cdot p(\eta = b_j)$$

Доказательство. (доказательство свойства 3 для независимых величин)

$$E(\xi + \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (a_i + b_j) \cdot p(\xi + \eta = a_i + b_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_i p(\xi = a_i) p(\eta = b_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} b_j p(\xi = a_i) p(\eta = b_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i p(\xi = a_i) \underbrace{\sum_{j=1}^{k} p(\eta = b_j)}_{=1} \right) + \sum_{j=1}^{k} \left(b_k p(\eta = b_j) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p(\xi = a_i)}_{=1} \right) =$$

$$= E_\xi + E_\eta$$

□

Доказательство. (доказательство свойства 4)

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_i b_j p(\xi \cdot \eta = a_i b_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_i b_j p(\xi = a_i) p(\eta = b_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i p(\xi = a_i) \sum_{j=1}^{k} b_j p(\eta = b_j) \right) = E_\xi \cdot E_\eta$$

□

3.4 Дисперсия

Определение 25. Дисперией случайной величины называется:

$$D_\xi = E(\xi - E_\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E_\xi + (E_\xi)^2) =$$

$$= E_{\xi^2} - E(2\xi E_\xi) + E((E_\xi)^2) = E_{\xi^2} - 2E_\xi E_\xi + (E_\xi)^2 =$$
$$= E_{\xi^2} = (E_\xi)^2$$

Пример.

$\xi : \begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \quad E_\xi = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

$\xi^2 : \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad E_{\xi^2} = \frac{1}{2}, D_\xi = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

Свойства.

1. $p(\xi = a) = 1 \Rightarrow D_\xi = 0$
2. $\eta = c \cdot \xi \Rightarrow D_\eta = c^2 D_\xi$
3. $D(\xi + \eta) = D_\xi + D_\eta$ — независимы

Доказательство. (свойство 3)

$$D(\xi+\eta) = E(\xi+\eta)^2 - (E(\xi+\eta))^2 = E(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - (E_\xi + E_\eta)^2 =$$

$$= E_{\xi^2} + 2E_\xi E_\eta - (E_\xi)^2 - 2E_\xi E_\eta - (E_\eta)^2 = D_\xi + D_\eta$$

□

Лекция 6: Схема Бернулли, схема Уолкера, неравенство Крафта.

18.10.2023

3.5 Схема Бернулли

Определение 26. Пусть $\delta_1, ..., \delta_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $q = 1 - p$. Такая вероятностная схема называется схемой Бернулли.

Определение 27. Случайная величина $\xi_n = \delta_1 + \ldots, \delta_n$ имеет биномиальное распределение:

$$p(\xi_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Замечание. Чтобы найти $\xi_n = k$ нужно чтобы k из случайных величин $\delta_1, ..., \delta_n$ принимали значение 1, остальные - 0. Вероятность этого события при фиксированных местах единиц и нулей равна $p^k q^{n-k}$, и если учесть все возможные C_n^k расположений этих мест, то получим $k-$ый член биномиального разложения $(p+q)^n$

Свойства. Т.к. $E_{\xi_1} = p$ и $D_{\xi_1} = p - p^2 = pq$:

1. $E_\xi = np$

2. $D_\xi = npq$

3.6 Случайные числа и схема Уолкера

Дискретная случайная величина — это такая случайная величина, значения которой могут быть не более чем счетными, то есть либо конечными, либо счетными. Под счётностью имеется ввиду, что значения случайной величины можно занумеровать.

В вычислительных машинах можно имитировать случайные эксперименты. В качестве источника случайности используются специальные программы - *датчики случайных чисел*. Датчик при каждом обращении к нему вырабатывает некоторое число (обычно целое или вещественное число из фиксированного диапазона), и последовательность этих чисел по своему поведению очень похожа на последовательность независимых *случайных величин, имеющих одинаковое равномерное распределение.*

Есть стандартные функции — генераторы (псевдо-)случайных чисел, которые выдают случайные натуральные числа в диапазоне $[0 : n]$, либо вещественные из $[0 : 1)$. Равномерное распределение обладает таким свойством, что вероятность того, что случайная величина принимает значения из некоторого множества, пропорциональна количеству элементов в нем. Или же что вероятность попадания в промежуток $[a, b] \subset [0 : 1)$ равна длине этого промежутка.

Определение 28. Равномерное (дискретное) распределение — распределение на конечном множестве, в котором все исходы равновероятны.

Пример. Равномерное распределение на множестве целых чисел от k до l :

$$p(\xi = S) = \frac{1}{l - k + 1}, S \in [k : l]$$

Алгоритм (Схема Уолкера). Пусть мы умеем получать случайное число из диапазона $[0 : 1)$. Требуется смоделировать вероятностную схему из m исходов с заданными вероятностями $p_1, p_2, ..., p_m$.

- Назовём "донорами" те исходы, которые получили больше, чем им нужно, т.е. $p_i < \frac{1}{m}$.
- Назовём "реципиентами" те исходы, которые получили меньше, чем им нужно, т.е. $p_i > \frac{1}{m}$.

Алгоритм перераспределения:

1. Берём произвольного донора и реципиента.
2. Донор отдаёт реципиенту излишек из своего отрезка.
3. Отмечаем точку, где донор отдал излишек реципиенту – барьер.

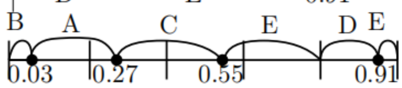
4. После этого у донора остаётся ровно столько, сколько ему нужно, а реципиент мог как остаться реципиентом (ему дали слишком мало), так и перейти в доноры (дали с избытком).

И так до тех пор, пока доноры и реципиенты не закончатся. После проведения такой предварительной работы можно за $O(1)$ генерировать случайные числа с нужным нам распределением следующим образом:

1. Генерируем случайное число x из диапазона $[0:1)$.
2. берем $\lfloor xm \rfloor$ – номер интервала на отрезке.
3. Сравниваем x с барьером на этом отрезке: если x больше, возвращаем реципиент, если меньше – донора.

Пример:
$m = 5, p(A) = 0.24, p(B) = 0.03, p(C) = 0.28, p(D) = 0.11, p(E) = 0.34$

i	Донор	Реципиент	Барьер
1	B	A	0.03
2	A	C	0.27
3	C	E	0.55
4	D	E	0.91



3.7 Двоичный поиск и неравенство Крафта.

Замечание. Данная глава писалась с опорой на другие источники. Думаю, вы понимаете почему. $\odot \smile \odot$

Определение 29. Алфавит A – конечное непустое множество символов, $\alpha \in A^k$ – строка длины k над алфавитом A.

Определение 30. $A^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^k$ – множество всех строк над алфавитом A (слова). ε – пустая строка.

Определение 31. Кодом называется функция $\varphi : A^* \to B^*$. B – алфавит кода.

Определение 32. Код называется декодируемым, если $\forall \alpha, \beta \in A^* : \alpha \neq \beta \Rightarrow \varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$, т.е. φ – инъекция.

Пример. Операция сжатия каким либо архиватором – декодируемый код. *jpeg* – сжатие с потерей информации, недекодируемый код.

Определение 33. Разделяемый код – код, в котором каждый символ алфавита A кодируется отдельно, т.е. код – функция $\varphi : A \to B^*$.

Если хотим закодировать строку $\alpha = a_1 a_2 ... a_n$, то $\varphi(\alpha) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)...\varphi(a_n)$ (конкатенируем коды символов)

Определение 34. Префиксный код – функция $\varphi : A \to B^*$, такая, что $\forall a, b \in A : \varphi(a)$ – не префикс $\varphi(b)$, т.е. ни одно кодовое слово не является префиксом другого кодового слова.

Пример. Пример: $A = \{a, b, c\}, B = \{0, 1\}$
$\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 10, \varphi(c) = 11 \Rightarrow \varphi$ – не префиксный код.

Теорема 5. Если код префиксный, то он однозначно декодируемый.

Доказательство. Приведем алгоритм декодирования.

Пусть дана $t = \varphi(s)$, нужно найти s. Тогда будем из t выделять префикс (он будет один, т.к. код префиксный), который является кодом некоторого символа a_1. Отрежем этот префикс от t. Так делаем, пока t не кончится. Получим $a_1 a_2 ... a_n = s$. □

Теорема 6 (неравенство Крафта)**.** Для алфавита $A = \{c_1, ..., c_k\}$ можно построить однозначно декодируемый двоичный код с длинами кодовых слов $s_1, \dots, s_k$ если:

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{-s_i} \le 1 \tag{6}$$

И наоборот, если для чисел $s_1, \dots, s_k$ выполняется неравенство 6, то существует однозначно декодируемый двоичный код в алфавите A.

Доказательство. (Необходимость) Рассмотрим бинарное дерево T. Каждой вершине r сопоставим число $a_r = 2^{-l}$, где l длина пути от корня до вершины r. Для корня имеем $a_{root} = 1$.
Заметим, что для любого узла, который не лист, справедливо неравенство:

$$2^{-l} \ge \underbrace{2^{-(l+1)}}_{left} + \underbrace{2^{-(l+1)}}_{right}$$

Просуммируем все узлы, которые не являются листьями и все узлы не корни, тогда справедливо неравенство:

$$\sum_{nodes\backslash leaves} a_r \geq \sum_{nodes\backslash\{a_{root}\}} a_r$$

После сокращения общих слагаемых в левой и правой частях неравенства получаем корень слева и все листья справа:

$$a_{root} = 1 \geq \sum_{leaves} a_r = \sum_{i=1}^{k} 2^{-s_i}$$

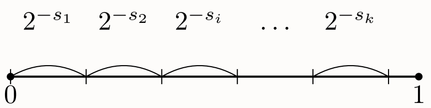
□

Лекция 7: Достаточность неравенства Крафта, задача о наилучших длинах кодов, энтропия.

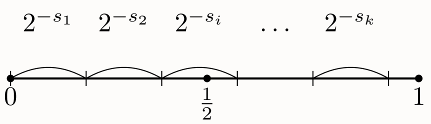
25.10.2023

Доказательство. (Достаточность)
Не умоляя общности, будем считать, что $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_k$. Тогда $2^{-s_1} \geq 2^{-s_2} \geq \ldots \geq 2^{-s_k}$

Теперь распложим эти значения на отрезке $[0, 1]$:



Утверждение: $\frac{1}{2}$ является границей отрезков. (не может лежать внутри какого либо 2^{-s_i})
Предположим, что это не так, тогда:



Имеем неравенства:

$$\begin{cases} 2^{-s_1} + \ldots + 2^{-s_{i-1}} \leq \frac{1}{2} \\ 2^{-s_1} + \ldots + 2^{-s_{i-1}} + 2^{-s_i} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{домножим на } 2^{s_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{2^{s_i - s_1} + \ldots + 2^{s_i - s_{i-1}}}_{c} < 2^{s_i - 1} \\ \underbrace{2^{s_i - s_1} + \ldots + 2^{s_i - s_{i-1}}}_{c} + 1 > 2^{s_i - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < 2^{s_i - 1} \\ c + 1 > 2^{s_i - 1} \end{cases} \quad \text{— противоречие.}$$

Таким образом какой-то отрезок из 2^{-s_i} упрется в $\frac{1}{2}$ или хотя бы не дойдет до нее. Тогда Разделим $2^{-s_1}, 2^{-s_2}, \ldots, 2^{-s_k}$ на 2 части: те, которые меньше $\frac{1}{2}$ и те, которые больше. Тем кодам, которые меньше $\frac{1}{2}$ поставим 0 в начало кода, а тем, которые больше $\frac{1}{2}$ поставим 1, тогда их длина уменьшилась на единицу. Тогда сумма тех, что слева и тех, что справа:

$$\sum 2^{-(s_i-1)} = \sum 2 \cdot 2^{-s_i} = 2 \cdot \sum 2^{-s_i} \leq 1$$

Тогда можем рекурсивно выполнять деление отрезков, т.к. если есть всего 2 символа, можем дать им коды 0 и 1 соответственно. □

3.8 Задача о наилучших длинах кодов

Пусть $A = \{c_1, \ldots, c_n\}$ — алфавит, $p_1, \ldots, p_n$ — вероятности появления символов. Пусть задан код $\varphi : A \to \{0,1\}^*$
Фиксируем текст (большую строку) длины $N : a_1 a_2 \ldots a_N$. В этом тексте количество символов c_i – $N \cdot a_i$ (закон больших чисел). Тогда длина кодовой последовательности текста:

$$\sum_{i=1}^{n} N p_i \varphi(c_i)$$

Задача заключается в том, чтобы минимализировать длину кодовой последовательности такого текста, а т.к. N – фиксированная величина, не влияющая на коды, задача сводиться к тому, чтобы минимализировать сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(c_i)$$

При этом для $p_i, \varphi(c_i)$ выполняются:

1. $\sum p_i = 1$
2. $0 < p_i < 1$
3. $\varphi(c_i) > 0, \varphi(c_i) \in \mathbb{Z}$
4. $\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_n)$ – длины кодов символов в префиксом коде, т.е. для этих длин выполняется неравенство Крафта.

Замечание. По правде говоря, из приведенного доказательства неравенства Крафта не следует, что код будет префиксным, но это можно вывести. Кто-нибудь умный скажет, как это сделать.

Теорема 7. Минимум достигается функцией:

$$H(p) = \sum_{i=1}^{n} \log_2 \frac{1}{p_i}$$

Доказательство. □

3.9 Энтропия

Определение 35. Энтропией вероятностной схемы называется мера содержащейся в ней неопределенности. Она задается как конкретная функция $H : RS \to \mathbb{R}^+$, где RS – множество всех возможных вероятностных схем.

Функция, задающая энтропию обладает рядом свойств, и этим свойствам удовлетворяет функция 7. Это докажем позже, а сейчас рассмотрим свойства энтропии:

Свойства.

1. Мера неопределенности непрерывно зависит от вероятностей. (функция 7 этим свойством, очевидно, обладает)
2. При перестановке вероятностей мера неопределенности не меняется.
3. Необходимо ввести единицу измерения неопределенности. За единицу будем брать энтропию честной монеты: $H(\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}) = 1$ – бит.
4. Обозначим за $h(m) = H(\{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\})$. Тогда $h(m)$ растет с ростом m. (функция 7 этим свойством тоже обладает)
5. При фиксированном m максимум энтропии достигается в случае равновероятных исходов, т.е. $h(m)$.
6. Пусть есть схемы $P_m = p_1, \dots, p_m$ и $Q_k = q_1, \dots, q_k$. Образуем комбинированную схему с $m-k+1$ исходами следующим образом: выбирается m-й исход в P_m и для него выбираются исходы из Q_k. Получим схему PQ с ихсодами:

$$1, 2, \dots, m-1, (m, 1), (m, 2), \dots, (m, k)$$

Вероятность этих исходов:

$$p_1, \dots, p_{m-1}, p_m q_1, \dots, p_m q_k$$

Тогда энтропия схемы $PQ : H(PQ) = H(P_k) + p_m H(Q_k)$

Доказательство. (Какие-то свойства либо уже доказаны, либо были даны без доказательства)

6

$$H(PQ) = \sum_{i=1}^{m-1} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} + \sum_{j=1}^{k} p_m q_j \log_2 \frac{1}{p_m q_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} + p_m \sum_{j=1}^{k} q_j \log_2 \frac{1}{p_m} + p_m \sum_{j=1}^{k} q_j \log_2 \frac{1}{q_j} =$$

$$= 1 \cdot p_m \log_2 \frac{1}{p_m} + \sum_{i=1}^{m-1} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} + p_m \sum_{j=1}^{k} q_j \log_2 \frac{1}{q_j} = H(P_m) + p_m H(Q_k)$$

$\square$