Оглавление

Лекция 12: Формула Тейлора.

23.11.2023

Свойства.
$(e^x)' = e^x; \quad (e^x)'' = ((e^x)')' = (e^x)' = e^x$
$(e^x)^{(n)} = e^x; \quad (e^x)^{(n+1)} = ((e^x)^n)' = (e^x)' = e^x$

Свойства.
$(\sin(x))' = \cos(x); \quad (\sin(x))'' = ((\sin(x))')' = (\cos(x))' = -\sin(x)$
$(\sin(x))''' = ((\sin(x))'')' = (-\sin(x))' = -\cos(x)$
$(\sin(x))^{(4)} = ((\sin(x))''')' = (-\cos(x))' = \sin(x)$
$(\sin(x))^{(4n)} = \sin(x); \quad (\sin(x))^{(4n+r)} = (\sin(x))^{(r)}, 1 \leq r \leq 3$

Свойства.
$(\cos(x))' = -\sin(x); \quad (\cos(x))'' = ((\cos(x))')' = (-\sin(x))' = -\cos(x)$
$(\cos(x))''' = ((\cos(x))'')' = (-\cos(x))' = \sin(x)$
$(\cos(x))^{(4)} = ((\cos(x))''')' = (\sin(x))' = \cos(x)$
$(\cos(x))^{(4n)} = \cos(x); \quad (\cos(x))^{(4n+r)} = (\cos(x))^{(r)}, 1 \leq r \leq 3$

Свойства.
$(x+a)^r, r \notin \mathbb{N}$
если $r \notin \mathbb{Z}$, то $x > -a$
если $r \in \mathbb{Z}$, то $x \neq -a$
$((x+a)^{(r)})' = r(x+a)^{r-1}$
$((x+a)^r)'' = (r(x+a)^{r-1})' = r(r-1)(x-a)^{r-2}$
$((x+a)^r)''' = (r(r-1)(x+a)^{r-2})' = r(r-1)(r-2)(x+a)^{r-3}$
$r-1 \neq 0, r-2 \neq 0$
$((x+a)^r)^{(n)} = r(r-1)\ldots(r-n+1)(x+a)^{r-n}, r-k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$

Свойства.
$(\ln{(x+a)})' = \dfrac{1}{x+a} = (x+a)^{-1}, x > -a$
$(\ln{(x+a)})^{(n)} = ((x+a)^{-1})^{(n-1)} = (-1)(-2)\ldots(-1-(n-1)+1)(x+$

$a)^{-n} =$
$= (-1)^{n-1}(n-1)!(x+a)^{-n}$

Свойства.
$(x+a)' = 1; \quad (x+a)'' = 1' = 0, (x+a)^{(n)} = 0, n \geq 2$
$((x+a)^2)' = 2(x+a), ((x+a)^2)'' = (2(x+a))' = 2$
$((x+a)^2)''' = 0; \quad ((x+a)^2)^{(n)} = 0, n \geq 3$

$k \geq 3: \quad ((x+a)^k)' = k(x+a)^{k-1}$
$((x+a)^k)'' = (k(x+a)^{k-1})' = k(k-1)(x+a)^{k-2}$
$((x+a)^k)''' = k(k-1)(k-2)(x+a)^{k-3}$

$l < k-1 \quad ((x+a)^k)^{(l)} = k(k-1)\dots(k-l+1)(x+a)^{k-l}$

$((x+a)^k)^{(k-1)} = k(k-1)\dots 2(x+a)$
$((x+a)^k)^{(k)} = k!(x-a)' = k!$
$((x+a)^k)^{(k+1)} = 0; \quad ((x+a)^k)^{(n)} = 0, n \geq k+1$

при $l < k: ((x+a)^k)^{(l)} \mid_{x=-a} = 0$
при $l > k: ((x+a)^k)^{(l)} \mid_{x=-a} = 0$
при $l = k: ((x+a)^k)^{(k)} \mid_{x=-a} = k!$

$(\frac{1}{k!}(x \pm a)^k)^{(l)} \mid_{x=\mp a} = \begin{cases} 0, l \neq k \\ 1, l = k \end{cases}$

0.1 Формула Тейлора

Определение 1. $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$
$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + \frac{b_2}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{b_n}{n!}(x-a)^n$
$p(a) = b_0$
$p'(a) = b_0' + (b_1(x-a))' \mid_{x=a} + \dots + (\frac{b_n}{n!}(x-a)^n)' \mid_{x=a} = b_1$

$1 \leq k \leq n: \quad p^{(k)}(a) = b_0^{(k)} + (b_1(x-a))^{(k)} \mid_{x=a} + \dots + (\frac{b_k}{k!}(x-a)^k)^{(k)} \mid_{x=a}$
$+ \dots + (\frac{b_n}{n!}(x-a)^n)^{(k)} \mid_{x=a} = b_k$

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \dots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (1)$$

Лемма 1. $g \in C((p,q))$
g если $n = 1: g'(x) = 0, g(a) = 0$
если $n > 1$, то $\forall x \in (p,q), \exists g^{(n-1)}(x)$ и $\exists g^{(n)}(a)$, при этом
$g(a) = 0, g'(a) = 0, \dots, g^{(n-1)}(a) = 0, g^{(n)}(a) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{g(x)}{(x-a)^n} \to_{x\to a} 0 \quad (4)$$

Доказательство. По индукции:
$n=1: \quad g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + r(x) = r(x)$ (5)
$\dfrac{r(x)}{(x-a)^n} \to_{x\to a} 0$

Индукционное предположение: $n-1 \geq 1:$
$h(a) = 0, \dots, h^{(n-1)}(a) = 0$ и $\forall x \in (p,q), \exists h^{(n-2)}(x)$, то
$\Rightarrow \dfrac{h(x)}{(x-a)^{n-1}} \to_{x\to a} 0$ (6)

$h(x) = g'(x); \quad (g')^{(n-1)}(x) = g^{(n)}(x)$
$\delta(x) = \dfrac{g'(x)}{(x-a)^{n-1}}; \quad \delta(a) =^{def} 0; \quad \delta$ неопределена на точке a
(6) $\Rightarrow \delta(x) \to_{x\to a} 0$
$g(x) = g(x) - g(a) = g'(c)(x-a)$ (7)
$\exists c = c(x)$ (c зависит от x), c между x и a (Теорема Лагранжа)
$|c-a| < |x-a|$
$g'(x) = \delta(x)(x-a)^{n-1}$
$c(x) \to_{x\to a} 0$ (7) $\Rightarrow g(x) = \delta(c)(c-a)^{n-1}(x-a)$ (8)
(8) $\Rightarrow \dfrac{g(x)}{(x-a)^n} = \delta(c(x))\dfrac{(c(x)-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}} \Rightarrow$
$\Rightarrow |\dfrac{g(x)}{(x-a)^n}| \leq |\delta(c(x))| \to_{x\to a} 0 \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{(x-a)^n} \to_{x\to a} 0$ $\square$

Теорема 1 (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано). $f \in C((p,q)), a \in (p,q)$
если $n=1$, то $\exists f'(a)$
если $n>1$, то $\forall x \in (p,q), \exists f^{(n-1)}(x)$ и $\exists f^{(n)}(a)$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x) \quad (2)$$

$$\frac{r(x)}{(x-a)^n} \to_{x\to a} 0 \quad (3)$$

Доказательство. $p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ (9)
(9) $\Rightarrow p(a) = f(a)$ (10)
$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ (11)
$g(x) = f(x) - p(x)$ (12)
$\forall x \in (p,q), \exists g^{(n-1)}(x), \exists g^{(n)}(a)$
(10)(11)(12) $\Rightarrow g(a) = 0, g'(a) = 0, \dots, g^{(n)}(a) = 0$
$\dfrac{g(x)}{(x-a)^n} \to_{x\to a} 0$
(2)(12) $\Rightarrow r(x) = g(x)$ $\square$

Теорема 2 (Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа). $f:(p,q)\to\mathbb{R}; \quad n\geq 1, \forall x\in(p,q), \exists f^{(n+1)}(x)$
$a\in(p,q), x\in(p,q), x\neq a$
$\Rightarrow \exists c$ между x и a :

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (1)$$

Доказательство. фиксируем x, рассмотрим функцию от y: $\varphi(y)=f(x)-f(y)-f'(y)(x-y)-\frac{f''(y)}{2!}(x-y)^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n$ (2)
$\varphi:(p,q)\to\mathbb{R}$
(2) $\Rightarrow \forall y\in(p,q), \exists\varphi'(y)$
(2) $\Rightarrow \varphi'(y)=(f(x))'_y-f'(y)-(f'(y)(x-y))'-(\frac{f''(y)}{2!}(x-y)^2)'-\ldots-(\frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n)'=$
$=0-f'(y)-(f''(y)(x-y)-f'(y)*1)-(\frac{f'''(y)}{2!}(x-y)^2-2\frac{f''(y)}{2!}(x-y))-$
$-\ldots-(\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y^n)-\frac{n}{n!}f^{(n)}(y)(x-y)^{n-1})=-\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n$
(3)
$\varphi(x)=0; \quad \varphi(a)=^{def} r$
$\psi(y)=(x-y)^{n+1}$, $y\in[min(a,x),max(a,x)]$
$\psi(x)=0; \quad \psi(a)=(x-a)^{n+1}$
$\psi'(y)=-(n+1)(x-y)^n, \psi(y)\neq 0; \quad y\in(min(a,x),max(a,x))$
$\exists c$ между a и x, такое что
$\frac{\varphi(a)-\varphi(x)}{\psi(a)-\psi(x)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$ (4)

$$\frac{r-0}{(x-a)^{n+1}-0}=\frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Rightarrow$$

$\Rightarrow r=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ (5)
(2)(5) $\Rightarrow$ (1) $\square$

0.2 Применение формулы Тейлора к элементарным функциям (a=0)

Свойства. $e^x: \quad (e^x)^{(n)}|_{x=0}=1$
$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}; \quad (cx>0, |c|<|x|)$

Свойства. $\sin(x): \quad (\sin(x))^{(2n)}|_{x=0}=0; \quad (\sin(x))^{(2n-1)}|_{x=0}=(-1)^{n-1}$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \pm \sin(c)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Свойства. $\cos(x): \quad (\cos(x))^{(2n-1)}\,|_{x=0} = 0; \quad (\cos(x))^{(2n)}\,|_{x=0} = (-1)^n$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \sin(c)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Свойства. $r \neq 0; \quad r \notin \mathbb{N}; \quad x \in (-1,1)$
$((1+x)^r)^{(n)}\,|_{x=0} = r(r-1)\ldots(r-n+1)$
$(1+x)^r = 1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}x^n+\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)(r-n)}{(n+1)!}(1+c)^{r-n-1}x^{n+1}$

Свойства. $\ln(1+x); \quad x \in (-1,1)$
$(\ln(1+x))'\,|_{x=0} = 1$
$n \geq 2: \quad (\ln(1+x))^{(n)}\,|_{x=0} = (-1)^{n-1}(n-1)!$
Замечание: $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + (-1)^n\frac{1}{n+1}(1+x)^{-n-1}x^{n+1}$
т.к. $(\ln(1+x))^{(n+1)} = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$