Оглавление

Лекция 5: Продолжение

05.10.2023

Доказательство. (Продолжение доказательства)

$$x_{n+1} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{k-1}{n+1})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{n}{n+1})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n+1}) \quad (2)$$

$$\forall r>0: 1-\frac{r}{n+1} > 1-\frac{r}{n} \Rightarrow (1-\frac{k-1}{n+1})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n+1}) > (1-\frac{k-1}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n}) \quad (1)$$

$(1),(2) \Rightarrow x_{n+1} > x_n$

Примем во внимание неравенства для y_n и неравенства для x_n. Тогда мы будем иметь следующее неравенство:

$$\Rightarrow x_1 < x_2 < \cdots < x_n < y_n < y_{n-1} < \cdots < y_1 \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow x_n < y_1, y_n > x, \forall n \quad (5)$$

Последовательность x_n строго возрастает и ограниченна сверху. Мы можем применить критерий существования конечного предела у строго монотонной возрастающей последовательности.

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Если мы посмотрим на последовательность y_n, она ограничена снизу в отношении пять и мы знаем что она строго монотонно убвает. По теореме о предельной последовательности получаем, что:

$$\exists \lim_{n\ to\infty} y_n = b$$

Теперь,

$$b = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) \cdot \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Таким образом,

$$a = b = e \tag{6}$$

.

$$(6) \Rightarrow x_n < e < y_n \forall n \tag{7}$$

$$(7) \Rightarrow e > x_1 = 2, e < y_5 < 3$$

$$y_5 = (\frac{6}{5})^6$$

$$e = 2.718...$$

□

Замечание. Число e — одно из фундаментальных констант на которой держится вся математика.

Первые две - это 0 и 1. А третья — это π

0.1 Критерий Коши, существование конечного предела последовательности

Теорема 1. Пусть имеется некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для того чтобы $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0, \exists N :$ $\forall m, \forall n > N :$

$$|x_m - x_m| < \varepsilon \tag{8}$$

Замечание. В формулировке не сказано чему будет равен этот предел. Какой именно он будет - неизвесто. Известно только то что он существует. Это так называемая теорема существования.

Примечание. Необходимость означает что предел существует.

Доказательство. Докажем необходимость. Предположим, что

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \in \mathbb{R}$$

Тогда, по определению предела для любого $\varepsilon > 0 \exists N$ такой, что

$\forall n > N$ выполнено

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

Тогда,

$$(9) \Rightarrow \text{при } n > N, m > N$$

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow (8)$$

То-есть, необходимость доказана. Если конечный предел существует, то соотношение 8 выполнено.

Теперь докажем достаточность.

Когда мы будем доказывать достаточность, то мы не знаем, существует предел или нет.

> **Замечание.** Не каждая последовательность имеет предел (например, $x_n = -1^n$).

Для доказательства мы будем использовать теорему Дедекинда.

Определим сечение множества вещественных чисел.

Нижний класс A — это

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists N : \forall n > N : x_n > \alpha\} \tag{10}$$

Верхний класс A‘’ — это

$$A' = \mathbb{R} \setminus A \tag{10'}$$

Множества, получившиеся в (10) и (10’) - это сечения, и это нужно проверить.

- Возьмём $\varepsilon = 1$, тогда: $\exists N_0 : \forall m, n > N_0 : |x_m - x_n| < 1$

  В частности, при $m = N + 1$ и при $n > N + 1$ имеем

$$|x_n - x_{N+1}| < 1 \Leftrightarrow x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1 \tag{11}$$

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} - 1 \in A \tag{12}$$

  С другой стороны,

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} + 1 \notin A, \text{ то-есть, } x_{N+1} + 1 \in A' \tag{13}$$

$$(12), (13) \Rightarrow A \neq \varnothing, A' \neq \varnothing$$

- Никакое из них не может быть множеством вещественных чисел.

  Давайте возьмём $\forall\alpha \in A, \forall\beta \in A'$. Нужно доказать, что α всегда меньше β. В этом состоит условие определения сечения.

$$\alpha \in A = (10) > \exists N : \forall n > N x_n > \alpha \tag{14}$$

  Если бы для любого $\forall n > N$ выполнялось $x_n > \beta$, то $\beta \in A$. Однако, это не так, т.к. $\beta \in A'$.

  То-есть,
$$\exists n_0 > N : x_{n_0} \leq \beta \tag{15}$$

> **Примечание.** Если бы всё время неравенство было в другую сторону ($x_n > \beta$), тогда бы по определению (10), мы бы получили, что $\beta \in A$, но мы взяли $\beta \in A'$, то есть $\beta \notin A$, значит свойства выше выполнятся не может и выполняется свойство (15).

$$(14), (15) \Rightarrow \alpha \leq x_{n_0} \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta$$

  То-есть, мы действительно получили сечение.

Теперь можно применить теорему Дедекинда. По теореме Дедекинда:

$$\exists a \in R : \forall\alpha \in A, \forall\beta \in A' : \alpha < a < \beta \tag{16}$$

Возьмём $\forall\varepsilon > 0$, тогда:

$$(8) \Rightarrow \exists N \text{ такое, что выполнено } (8)$$

$m = N + 1$
Тогда, $(8) \Rightarrow \forall n > N + 1$

$$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x_{N+1} - \varepsilon, x_{N+1} + \varepsilon) \tag{17}$$

Теперь, если посмотреть на соотношение (17),

$$(17) \Leftrightarrow x_n > x_{N+1} - \varepsilon \text{ и } x_n < x_{N+1} + \varepsilon \tag{18}$$

> **Примечание.** при $\forall n > N + 1$, выполнена правая счасть неравенства (17) $x_n > x_{N+1} - \varepsilon$.

Теперь рассмотрим (10) и (18).

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \in A \tag{19}$$

Теперь обратимся ко второму неравенству в соотношении (18).

Получается, что правая часть неравенства $x_n < x_{N+1}$ принадлежит A', потому что если бы принадлежало A, должно было бы быть другое неравенство в другую сторону

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon \in A' \tag{20}$$

Возьмём (19) $\Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon$ как α,
а (20) $\Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon$ как β,
Тогда, применяем (16), получаем что:

$$(16), (19), (20) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \leq a \leq x_{N+1} + \varepsilon \tag{21}$$

Обратимся к соотношению (17)

$$(17) : x_{N+1} < x_n < x_{N+1} + \varepsilon$$

Получаем, что a удовлетворяет этому неравенству и x_n удовлетворяет этому неравенству (лежит на промежутке) при $\forall n > N + 1$.
Поэтому, (21) и (17) $\Rightarrow$

$$|x_n - a| < 2\varepsilon = (x_{N+1} + \varepsilon) - (x_{N+1} - \varepsilon) \tag{22}$$

Примечание. То-есть, если x_n и a лежат на этом промежутке, то длина отрезка между a и x_n меньше чем длина промежутка, на котором они лежат. Длина промежутка равна 2ε

Мы получили, что существует некоторое a такое, что для любого n $>$ N+1 выполняется неравенство (22). А это определение предела.
По определению предела,

$$(22) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Тем самым, достаточность в критерии доказана.

$\square$

0.2 Подпоследовательности

Определение 1. Пусть есть отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и нетождественное отображение $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. При этом выполняется: $\forall n < m : g(n) < g(m)$
Тогда последовательность отображений $f(g) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — подпоследовательность.

Примечание. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
Берем $g(1) = n_1, g(2) = n_2, \ldots, g(k) = n_k$ и получаем подпоследовательность:
$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$

Обозначение. Если эти номера определены, то последовательность обозначают как: $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

Определение 2. Предел последовательности определяется как предел подпоследовательности по нижним индексам.

Если есть такая последовательность, говорят что:

$A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом, то есть $x_{n_k} \to A$, при $k \to \infty$, если $\forall \Omega(A)\ \exists K : \forall k > K : x_{n_k} \in \Omega(A)$

Теорема 2. Пусть $x_n \to A$, при $n \to \infty$, где $A \in \overline{\mathbb{R}}$ и пусть мы имеем любую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, выбранную из этой последовательности.

Тогда $x_{n_k} \to A$, при $k \to \infty$.

Доказательство. Возьмём любую окрестность A.

$$\forall \Omega(A) \Rightarrow \exists N : \forall n > N : x_n \in \Omega(A)$$

Воспользуемся тем, что поледовательность n_k строго возрастает:

$$n_1 \geq 1, n_2 > n_1, n_2 \geq 2$$

Тогда по индукции:

$$n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > n_k \geq k \to n_{k+1} > k + 1$$

То есть, если мы выберем подпоследовательность, то n_k будет больше или равно k. Начиная с какого-то индекса, будет строго больше.

Возьмём $k = N$.

Тогда, при $k > N : n_k \geq k > N$

То есть, при $k > N : x_{n_k} \in \Omega(A)$

$$\Rightarrow x_{n_k} \to A, \text{ при } k \to \infty$$

□

Теорема 3. (Больцано-Вейерштрасса)

Пусть имеется некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая ограничена, т.е. $\forall n : a \leq x_n \leq b$.

Тогда: $\exists \alpha \in [a, b]$ и $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что: $x_{n_k} \to \alpha$ при $k \to \infty$

> **Замечание.** Такое α может быть только одним, если последовательность ограниченна и имеет некоторый предел.

Доказательство. определим последовательность промежутков.

$$I_1 = [a, b]$$

$$I_2' = [a, \frac{a+b}{2}], I_2'' = [\frac{a+b}{2}, b]$$

Рассмотрим множества номеров n:

$$\begin{cases} \text{таких, что } : x_n \in I'_2 \\ \text{таких, что } : x_n \in I''_2 \end{cases} \quad \text{— какое-то из них, или оба бесконечны}$$

Если бы первое и второе множество n выше было конечно, то мы получили бы, что последовательность, лежащая в I_1 конечна, что противоречит условию. Тогда возьмем I_2 — одно из множеств из I'_1, I''_2

> **Примечание.** Это может быть либо I'_1, либо I'_2, либо I''_2 если оба удовлетворяем, то любой возьмем. Произвольно. Можно например всегда брать только I'_2, но по крайней мере для одного, таких номеров будет бесконечно много.

Имеется некоторое множество натуральных чисел, таких что x_n принадлежит I_2

Пусть n_1 - минимальное $n : x_n \in I_2$

Возьмем $I_2 = [a_2, b_2]$ и поделим этот отрезок на:

$I'_3 = [a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

$I''_3 = [\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

По крайней мере в одном из этих отрезков тоже будет находится бесконечное множество номеров n.

Пусть I_3 - тот из I'_3, I''_3, для которого $\exists$ бесконечно n таких что $x_n \in I_3$

n_2 - минимальное n такое, что $x_n \in I_3$, и $n_2 > n_1$.

И так далее по индукции. Предположим, что мы уже выбрали промежутки

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_m \tag{3'}$$

$$I_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\frac{b-a}{2^k}}_{=I_k}) \tag{3'}$$

$$n_1 < n_2 < \dots n_m < n_{m+1} \tag{4}$$

$$x_{n_1} \in I_2, x_{n_2} \in I_2, \dots x_{n_{m-1}} \in I_m \tag{5}$$

Предположим, что по индукции такое построение уже произошло

Пусть

$$I_m = [a_m, b_m] \tag{6}$$

Существует бесконечно много n, таких что

$$x_n \in I_m \tag{7}$$

Предположим, что это проделано для n и будем выполнять индукционный шаг.

$$I'_{m+1} = [a_m, \frac{a_m + b_m}{2}]$$

$$I''_{m+1} = [\frac{a_m + b_m}{2}, b_m]$$

Мы снова взяли и разделили промежуток $[a_m, b_m]$ пополам.

Рассмотрим множество номеров в множестве n таких, что $x_n \in I'_{m+1}$ и n такие что $x_n \in I''_{m+1}$

Тогда по определению I_{m+1} - тот из I'_m, I''_m, для которого $\exists$ бесконечно много n таких что $x_n \in I_{m+1}$

Пускай n_{m+1} - это наименьшее n такое что $x_{n_m} \in I_{m+1}$ и $n_{m+1} > n_m$

И так мы получили в итоге этих рассуждений:

$$n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$$

$$x_{n_m} \in I_{m+1}$$

$$(3) \Rightarrow \text{ длина } I_m \to 0, \text{ при } m \to \infty \tag{8}$$

Получается, что это вложенные промежутки.

По теореме о вложенных промежутках:

$$\exists! \ \alpha \text{ такое что } \alpha \in I_m \forall m \tag{9}$$

$$(5) \Rightarrow x_{n_m} \in I_{m+1}$$

Точка α лежит на этом промежутке и точка с номером x_{n_m} лежит на этом же промежутке, справедилво неравенство:

$$|x_{n_m} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^m} \tag{10}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists k : \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \tag{11}$$

$$(10), (11) \Rightarrow |x_{n_m} - \alpha| < \varepsilon \text{ при } m > k$$

Таким образом мы доказали, что существует подпоследовательность у которой есть конечный предел.

$a \in I_1$, т.е. $a \leq \alpha \leq \varepsilon$ □

0.3 Верхний и нижний предел последовательности

Определение 3. Пусть есть произвольная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху, то верхний предел

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} := +\infty$$

.

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху, то верхний предел

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} := \lim_{n\to\infty}\left(\sup\{x_m : m \geq n\}\right)$$

.

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена снизу, то нижний предел

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} := -\infty$$

.

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу, то нижний предел

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} := \lim_{n\to\infty}\left(\inf\{x_m : m \geq n\}\right)$$

.

Таким образом,если мы рассматриваем любую последовательность x_n, то у неё существуют верхний и нижний предел.

Замечание. Нижний и верхний пределы в дальнейшем будут обозначаться как $\liminf$ и $\limsup$ соответственно. (простите, так удобней)

0.4 Свойства верхних и нижних пределов

Замечание. Пусть есть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определим E_n как множество $\{x_m : m \geq n\}, h_n = \inf E_n, g_n = \sup E_n$. Справедливо неравенство:

$$h_n \leq g_n, \text{ откуда получаем: } \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

Теорема 4. Есть некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда:

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{R} \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n \tag{13}$$

Доказательство. Предположим, что существует предел. Хотим проверить, что верхний предел равен нижнему пределу.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$$

Посмотрим на определение g_n и h_n.

$$(14) \Rightarrow \text{ при } n > N : E_n \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup x_n - \liminf x_n \leq 2\varepsilon \tag{15}$$

Получается, что некоторое не отрицательное число не превосходит

2ε при любом положительном ε. Это может быть только тогда, когда это число равно 0.

$$(15) \Rightarrow limsupx_n = \liminf x_n = \lim x_n$$

В обратную сторону:
$\forall n : g_n \leq a, h_n \geq a$
Рассмотрим последовательности g_n, h_n, такие, что:

$$g_n \to a, h_n \to a$$

По определенеию предела: $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1 : a - \varepsilon < g_n < a + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_2 : a - \varepsilon < h_n < a + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$
$a - \varepsilon < \inf E_n \leq \sup E_n < a + \varepsilon$
При $N = \max(N_1, N_2)$ из этого следует, что $\forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$

$$\text{а это значит, что: } \exists \lim_{n \to \infty} x_n = a = \limsup x_n = \liminf x_n$$

$\square$