Оглавление

Лекция 8: Непрерывность. Точки разрыва.

26.10.2023

0.1 Непрерывность функции

Определение 1. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$ и X — метрическое пространство с метрикой ρ, A — точка сгущения. Тогда f непрерывна в точке сгущения a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Определение 2. (определение в другом виде)

- на языке $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, \rho(x, A) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(A)| < \varepsilon$;
- окрестности: $\forall \omega(f(A)) \exists \Omega(A) : \forall x \in \Omega(A) : f(x) \in \omega(f(A))$

0.2 Арифметические свойства функций, непрерывных в точке

Свойства. Задано метрическое пространство X и функция f. Справедливы следующие свойства:

1. $f(x) \equiv c, \forall x \in X \Rightarrow f-$ непрерывна в A
2. f - непрерывно в $A \Rightarrow cf$ непрерывно в A
3. f, g непрерывны в $A \Rightarrow f + g$ непрерывна в A
4. f, g непрерывна в $A \Rightarrow fg$ непрерывна в A
5. f непрерывна в A, $f(x) \neq 0, \forall x \in X \Rightarrow \dfrac{1}{f}$ непрерывна в A

6. f, как и в 5 g непрерывна в $A \Rightarrow \frac{g}{f}$ непрерывна в A

Доказательство. Докажем (5), остальное предоставляется читателю в качестве упражнения $\odot \smile \odot$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(A) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to A} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x)}$ □

0.3 Непрерывность композиции функций

Теорема 1. (Теорема о непрерывности композиции функций)

Пусть $E \subset \mathbb{R}, a \in E, a-$ точка сгущения E, $F \subset \mathbb{R}, b \in F, b-$ точка сгущения F и определены неперывные в a и b соответственно функции $f : E \to \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \in F, f(a) = b, g : F \to \mathbb{R}$.

Тогда $h(x) = g(f(x)), h : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в a.

Доказательство.

$$h(a) = g(f(a)) = g(b) \tag{5}$$

Возьмем $\forall\omega : (h(a)) = \omega(g(b))$ по (5). Тогда:

$$\exists\Omega(b) : \forall y \in \Omega(b) \cap F : g(y) \in \omega(g(b)) \tag{6}$$

По условию: $b = f(a)$, тогда: $\Omega(b) = \Omega(f(a))$

$$\exists\lambda(a) \text{ — окрестность а: } \forall x \in E \cap \lambda(a) : f(x) \in \Omega(f(a)) \tag{7}$$

$$(7) \Rightarrow \forall x \in E \cap \lambda(a) : f(x) \in \Omega(f(a)) \cap F = \Omega(b) \cap F$$

$$(6) \Rightarrow g(f(x)) \in \omega(g(b)) = \omega(h(a))$$

Значит имеем:

$$g(f(x)) = h(x) \in \omega(h(a))$$

□

Определение 3. $f : X \to \mathbb{R}, f$ непрерывно на X, если она непрерывна в каждой точке сгущения множества X

Обозначается как $f \in C(X)$ $(a, b) = [a, b]$

Пример. (Непрерывные функции)

1. $f(x) \equiv c, x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = x, f \in C(\mathbb{R})$
3. $x^2 = x \cdot x \in C(\mathbb{R}), x^{n+1} = x^n \cdot x \in C(\mathbb{R})$
4. $c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n \in C(\mathbb{R})$

5. $x \neq 0 \Rightarrow x^n \neq 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{1}{x^n} \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}$

6. Пусть $p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$, пусть $a_1, \ldots, a_m, m \leq n, a_k \neq a_e, k \neq l-$ все числа: $p(a_k) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{p(x)} \in C(\mathbb{R} \setminus U_{k=1}^m \{a_k\}$

7. $p(x)$, как в (6), $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_x x^t$
   $\dfrac{q(x)}{p(x)} \in C(\mathbb{R} \setminus U_{k=1}^m \{a_k\})$

8. $f(x) = e^x$
   из прошлой лекции: $\lim\limits_{h \to 0} e^h = 1 = e^0 \Rightarrow e^x-$ непрерывна в 0
   Рассмотрим $\forall x_0 \neq 0 \Rightarrow e^x = e^{x_0} \cdot e^{x - x_0} (x - x_0 \in C(\mathbb{R})) \Rightarrow$ непрерывно в $x_0 \Rightarrow e^x \in C(\mathbb{R})$

9. $(\lim\limits_{h \to 0} \ln(1+h) = 0 = \ln 1 \quad \ln(1+h) = \dfrac{\ln(1+h)}{h} h \Rightarrow \ln x-$ непрерывно при $x = 1)$
   $x_0 \neq_1, x_0 > 0, \ln x = \ln \dfrac{x}{x_0} + \ln x_0$
   $\dfrac{x}{x_0} \in C(\mathbb{R}), \quad \dfrac{x_0}{x_0} = 1 \Rightarrow \ln x-$ непрерывен при $x = x_0 \Rightarrow \ln x \in C(\{x : x > 0\})$

10. $x > 0, r \in \mathbb{R}, \Rightarrow x^r \in C(\{x : x > 0\}) \Rightarrow x^r = e^{r \ln x}$

10’ Пусть $r > 0, 0^r := 0 \Rightarrow x^r-$ непрерывно при $x = 0$

Доказательство 10’: если x^r монотонно возрастает при $x > 0$

$\forall \varepsilon > 0, \delta^r = \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon^r \Rightarrow$ при $x < \delta : 0 < x^r < \delta^r = (\varepsilon^{\frac{1}{2}})^2 = \varepsilon (r = \dfrac{1}{2}$

11. $\sin x, \cos x$ непрерывно при $x = 0$
    $\sin x = \dfrac{\sin x}{x} = x \to 0 (x \to 0), \sin 0 = 0$
    $\sqrt{1 - x^2} \leq \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \leq 1$
    $\cos x \to 1 (x \to 0), cos_0 = 1$

12. $\sin x, \cos x$ непрерывно при $x = x_0, x_0 \neq 0$
    $\sin x = \sin((x - x_0) + x_0) = \sin(x - x_0) \cos(x_0) + \cos(x - x_0) \sin(x_0)$
    $\cos x = \cos((x - x_0) + x_0) = \cos(x - x_0) \cos x - \sin(x - x_0) \sin(x_0)$
    $\sin x \cdot \cos x \in C(\mathbb{R})$

13. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ непрерывен при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

14. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ непрерывен при $x \neq \pi n$

Теорема 2. (об обращении непрерывной функции в 0 (Коши))
Пусть $f \in C([a,b]), f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = 0$

Доказательство. Пусть $a_1 = a, b_1 = b$, значит $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ (3)
$c_1 = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a_1+b_1}{2}$
если $f(c_1) = 0$, то полагаем $c = c_1$
если $f(c_1) \neq 0$, то по (3) $\Rightarrow f(a_1)f(c_1) < 0$ или $f(c_1)f(b_1) < 0$

$[a_2, b_2]-$ тот из $[a_1, c_1], [c_1, b_1]$ для которого $f(a_2)f(b_2) < 0$ (4)
$c_2 = \dfrac{a_2+b_2}{2}$, если $f(c_2) = 0$, то полагаем $c = c_2$
если $f(c_2) \neq 0$, то $f(a_2)f(c_2) < 0$ или $f(c_2)f(b_2) < 0$ в силу (4)

$[a_n, b_n] : f(a_n)f(b_n) < 0, c_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, если $f(c_n) = 0$, полагаем $c = c_n$,
если $f(c_n) \neq 0$, то либо $f(a_n)f(c_n) < 0$, либо $f(c_n)f(b_n) < 0$
$[a_{n+1}, b_{n+1}]-$ тот из $[a_n, c_n], [c_n, b_n]$ для которого $f(a_{n+1})f(bn+1) < 0$ (6)

Пусть $\forall n, c_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ и $f(c_n) \neq 0$ и $f(a_n)f(b_n) < 0$
$b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \to 0 (n \to \infty)$ (7)
$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \forall n$ (8)
(7),(8) $\Rightarrow \exists c \in [a_n, b_n] \forall n$ (9)

$$\begin{cases} a_n \to c(n \to \infty) \\ b_n \to c(n.\infty) \end{cases} \quad (10)$$

$f \in C([a,b]) \Rightarrow f$ непрерывно в c (11)

$$(10),(11) \Rightarrow \begin{cases} f(a_n) \to f(c)(n \to \infty) \\ f(b_n) \to f(c)(n \to \infty) \end{cases} \quad (12)$$

(12) $\Rightarrow f(a_n)f(b_n) \to f^2(c)(n \to \infty)$ (13)

$f(a_n)f(b_n) < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$ (14)
(13),(14) $\Rightarrow f^2(c) \leq 0 \Rightarrow f(c) = 0$ □

Теорема 3. (Теорема о промежуточных значениях)
Пусть $f \in C([a,b])$ и $f(a) = q \neq f(b) = pm \in (p,q) < r < \max(p,q) \Rightarrow \exists c \in [a,b] : f(c) = r$

Доказательство. Рассмотрим $g(x) = f(x) - r$:

$$g(a)g(b) = (f(a) - r)(f(b) - r) = (p - r)(q - r) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists c \in [a,b] : g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - r = 0$$

□

0.4 Классификация точек разрыва непрерывной функции

Определение 4. Пусть $E \subset \mathbb{R}, a \in E, a-$ точка сгущения E, $f : E \to \mathbb{R}, f$ ненепрерывна в a
Тогда точка a — точка разрыва функции f

Свойства. (Классификация точек разрыва)

1. $a \in (p, q), f : (p, q) \to \mathbb{R}$
   $\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to q+0} f(x) \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, но $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$
   тогда a – устранимая точка разрыва
   $$f(x) = \begin{cases} f(x), x \neq a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) \end{cases} \quad \Rightarrow f \text{ непрерывна в } a$$

2. **разрыв 1 рода или скачок:** $a \in (p, q), \exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) \in \mathbb{R}, \exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$
   $f : [a, q] \to \mathbb{R}, \exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq f(a)$
   $f : (p, a] \exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) \neq f(a)$

3. **разрыв 2 рода:** – если по крайней мере $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ не существует или бесконечен

Теорема 4. (Теорема о разрывах монотонной фукнции)
$f : [a, b]$ и монотонна $\Rightarrow \forall x_0 \in [a, b]$ f либо непрерывна в x_0, либо имеет в x_0 разрыв 1 рода

Доказательство. Пусть f возрастает и $x_0 \in (a, b)$
Предположим, что x_0 – точка разрыва f (*)

$$\text{Рассматрим } a < x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \tag{17}$$

$$(17) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow (18)$$

$$\text{Пусть } x_0 < x < b, \text{тогда } f(x_0) \leq f(x) \tag{19}$$

$$(19) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \geq f(x_0) \tag{20}$$

$$(18), (20) : \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \tag{21}$$

$$(*), (21) \Rightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) < \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

□

Теорема 5. (Об отображении отрезков)
Пусть $f : [a, b], f$ монотонна, $f(a) = p, f(b) = q, p \neq q$, тогда

$$f([a, b]) = [\min(p, q), \max(p, q)] \Leftrightarrow f \in C([a, b])$$

Доказательство. Пусть f непрерывна на $[a, b]$
$\forall r : \min(p, q) < r < \max(p, q)$
по теореме о промежуточных значениях: $\exists c \in (a, b) : f(c) = r$ (23)
$\forall x \in [a, b] : min(p, q) \leq f(x) \leq map(p, q)$
то есть $f([a, b]) \subset [\min(p, q), \max(p, q)]$
(23) $\Rightarrow f([a, b]) = [\min(p, q), \max(p, q)]$

Пусть $f([a, b]) = [\min(p, q), \max(p, q)]$ (24)
$\exists x_0 \in [a, b] : f$ разрывна в x_0 (25)
Пусть $x_0 \in (a, b)$ и f возрастает
по доказанной теормеме x_0 − развыв первого рода
$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A < B = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ (26)
Рассмотрим $y \in (A, B), y_0 \neq f(x_0)$ (27)
По теореме о пределе монотонной функции (когда возрастает): $\forall x < x_0, f(x) \leq A$ (28)
По той же теореме $\forall x > x_0 : f(x) \geq B$ (29)
(27),(28),(29) $\Rightarrow \forall x \in [a, b], x \neq x_0$ будет $f(x) \neq y_0$ (30) и $A < y_0 < B$
если $x = x_0$, то $f(x_0) \neq y_0$ (31)
(30),(31) $\Rightarrow y_0 \notin f([a, b])$ (32)
(24) и (32) противоречат

□