Оглавление

Лекция 13: Экстремум и производная. Правило Лопиталя.

30.11.2023

0.1 Достаточное условие локального экстремума с второй производной

Теорема 1. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$
$\forall x\in(a,b), \exists f'(x)$
$x_0\in(a,b), \exists f''(x_0)$
$f'(x_0)=0, f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ – строгий локальный минимум f

Теорема 2. $g:(a,b)\to\mathbb{R}$
$\exists g'(x)$
$\exists g''(x_0)$
$g'(x_0)=0, g''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ – строгий локальный максимум g

Доказательство. **Формула Тейлора с остатком в форме Пиано**

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+r(x)$ (1)

$\frac{r(x)}{(x-x_0)^2}\underset{x\to x_0}{\to}0$ (2)

$f'(x_0)=0: \quad (1)\Rightarrow f(x)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+r(x)$ (3)

$\varepsilon=\frac{1}{4}f''(x_0)$

$(2) \Rightarrow \exists \omega(x_0) : \forall x \in \omega(x_0) :$

$$|\frac{r(x)}{(x-x_0)^2}| < \varepsilon = \frac{1}{4} f''(x) \quad (4)$$

$x \neq x_0, x \in \omega$

$(3)(4) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 - |r(x)| > f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 -$

$- \frac{1}{4} f''(x_0)(x-x_0)^2 = f(x_0) + \frac{1}{4} f''(x_0)(x-x_0)^2 > f(x_0)$ □

0.1.1 Теорема о достаточном условии локального экстренума четной производной

Теорема 3. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$
$n \geq 2 : \quad \forall x \in (a,b), \exists f'(x), f''(x), \ldots, f^{(2n-1)}(x)$
$x_0 \in (a,b), \exists f^{(2n)}(x_0)$
$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(2n-1)}(x_0) = 0$
$f^{(2n)}(x_0) \neq 0$
если $f^{(2n)}(x_0) > 0$, то x_0 – строгий локальный минимум
если $f^{(2n)}(x_0) < 0$, то x_0 – строгий локальный максимум

Доказательство. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x-x_0)^3 +$
$+ \ldots + \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n} + r(x)$ (5)

$$\frac{r(x)}{(x-x_0)^{2n}} \underset{x \to x_0}{\to} 0 \quad (6)$$

$(5) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n} + r(x)$ (7)
$\varepsilon = \frac{1}{2} * \frac{1}{(2n)!} * f^{(2n)}(x_0)$
$(6) \Rightarrow \exists \omega(x_0) : \forall x \in \omega(x_0) :$

$$|\frac{r(x)}{(x-x_0)^{2n}}| < \varepsilon \quad (8)$$

$x \in \omega(x_0), x \neq x_0$
$(7)(8) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n} - |r(x)| >$
$> f(x_0) + \frac{1}{(2m)!} f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n} - \frac{1}{2} * \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n} =$
$= f(x_0) + \frac{1}{2} * \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n} > f(x_0)$ □

0.1.2 Достаточное условие отсутствия локального экстренума с нечетной производной

Теорема 4. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$
Предположим $x_0 \in (a, b)$
$n \geq 1 : \quad \forall x \in (a, b), \exists f'(x), f''(x), \ldots, f^{(2n)}(x); \quad \exists f^{(2n+1)}(x_0)$
$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(2n)}(x_0) = 0$
$f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$
Тогда x_0 — не является точкой локального экстренума

Доказательство. $f(x) = f(x_0) + \dfrac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x - x_0)^{2n+1} + r(x)$
$|\dfrac{r(x)}{(x - x_0)^{2n+1}}| \underset{x \to x_0}{\to} 0$
Возьмем окрестность $x_0 - \omega(x_0) : |\dfrac{r(x)}{(x - x_0)^{2n+1}}| < \dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{(2n+1)!} |f^{(2n+1)}(x_0)|$
$x > x_0 :$
$f(x) > f(x_0) + \dfrac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x - x_0)^{2n+1} - \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x - x_0)^{2n+1} > f(x_0)$
$x < x_0 :$
$f(x) < f(x_0) + \dfrac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x - x_0)^{2n+1} + \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)|(x - x_0)^{2n+1}| =$
$= f(x_0) + \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x - x_0)^{2n+1} < f(x_0)$ □

0.2 Правило Бернулли–Лопиталя

Теорема 5. Номер 1
Пусть $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$
Пусть $f(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$
$\forall x \in (a, b), \exists f'(x), \exists g'(x)$
Предположим $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$
$f(x) \underset{x \to a+0}{\to} 0, g(x) \underset{x \to a+0}{\to} 0$
$\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$ (1)
$\Rightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)} \underset{x \to a+0}{\to} A$ (2)

Доказательство. $f(a) =^{def} 0, g(x) =^{def} 0$
$f, g \in C([a, b))$

$b > x > a : \quad [a, x]$ по теореме Коши $\Rightarrow \exists c \in (a, x)$:

$$\frac{g(x) - g(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)} \quad (3)$$

$(3) \Rightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{g'(c)}{f'(c)}$ (4)
$\forall \omega(A), \exists \delta > 0 : \forall y \in (a, a + \delta)$:

$$(1) \Rightarrow \frac{g'(y)}{f'(y)} \in \omega(A) \quad (5)$$

$x \in (a, a + \delta); \quad c \in (a, x) \Rightarrow c \in (a, a + \delta)$
$(5) \Rightarrow \dfrac{g'(c)}{f'(c)} \in \omega(A)$ (6)
$(4)(6) \Rightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)} \in \omega(A) \Rightarrow (2)$ □

Теорема 6. Номер 1'
Пусть $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$
Пусть $f(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$
$\forall x \in (a, b), \exists f'(x), \exists g'(x)$
Предположим $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$
$f(x) \underset{x \to b-0}{\to} 0, g(x) \underset{x \to b-0}{\to} 0$
$\exists \lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$
$\Rightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)} \underset{x \to b-0}{\to} A$

Доказательство. Аналогично □

Теорема 7. Номер 2
$f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$
$f(x) \neq 0, \forall x \in (a, +\infty)$
$f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$ (7)
$\forall x \in (a, +\infty), \exists f'(x), g'(x)$
Пусть $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a, +\infty)$
$\dfrac{g'(x)}{f'(x)} \underset{x \to +\infty}{\to} A$ (8)
$\Rightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\to} A$ (9)

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0$
$(8) \Rightarrow \exists L_1 : \forall x > L_1 : \dfrac{g'(x)}{f'(x)} \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ (10)
Возьмем $x > L_1, x > x_0$

По теореме Коши $\exists c \in (x_0, x) : \dfrac{g(x)-g(x_0)}{f(x)-f(x_0)} = \dfrac{g'(c)}{f'(c)}$ (11)
$L_1 < x > x_0 \Rightarrow c > L_1$
$\varepsilon < \dfrac{1}{2}\ \dfrac{g'(c)}{f'(c)} \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ (12)

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{f(x)-f(x_0)} = \frac{\dfrac{g(x)}{f(x)} - \dfrac{g(x_0)}{f(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}} \ (13)$$

$L_2 \geq L_1$, при $x > L_2$
$|\dfrac{g(x_0)}{f(x)}| < \varepsilon, |\dfrac{f(x_0)}{f(x)}| < \varepsilon$ (14)

$$(14) \Rightarrow -2\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{1-\dfrac{1}{2}} < \frac{\dfrac{g(x_0)}{f(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}} < \frac{\varepsilon}{1-\dfrac{1}{2}} = 2\varepsilon \ (15)$$

$$(11)(12)(13) \Rightarrow x > L_2 : A - 3\varepsilon < \frac{\dfrac{g(x)}{f(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}} < A+\varepsilon+\frac{\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}} < A+3\varepsilon$$

(16)

$$(14)(16) \Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)} < (A+3\varepsilon)(1-\frac{f(x_0)}{f(x)}) < (A+3\varepsilon)(1+\varepsilon) = A+(A+3)\varepsilon+3\varepsilon^2$$

(17)

$$\frac{g(x)}{f(x)} > (A-3\varepsilon)(1-\frac{f(x_0)}{f(x)}) > (A-3\varepsilon)(1-\varepsilon) = A-(A+3)\varepsilon+3\varepsilon^2 \ (18)$$

$(17)(18) \Rightarrow (9)$ $\square$

Следствие: $x > 1, g(x) = \ln x, f(x) = x^r, r > 0$

$g'(x) = \dfrac{1}{x}, f'(x) = rx^{r-1}$

$$\frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{rx^{r-1}} = \frac{1}{rx^r} \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{x^r} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

Теорема 8. Номер 3
$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$
$x_0 \in (a,b)$
$f(x) \neq 0$, если $x \neq x_0$
$n \geq 2 : \quad \forall x \in (a,b), \exists f'(x), \dots, f^{(n)}(x); \quad \exists g'(x), \dots, g^{(n-1)}(x); \quad \exists f^{(n)}(x_0), g^{(n)}(x_0)$
$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$
Пусть $f^{(n)} \neq 0$

$$\frac{g(x)}{f(x)} \underset{x\to x_0}{\to} \frac{g^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0)} \quad (19)$$

Доказательство. Теорема Тейлора с остатком в форме Пиано $\Rightarrow$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_1(x)}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_2(x)} = \frac{g^{(n)}(x_0) + n!\frac{r_1(x)}{(x-x_0)^n}}{f^{(n)}(x_0) + n!\frac{r_2(x)}{(x-x_0)^n}} \underset{x\to x_0}{\to} \frac{g^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0)}$$

$\square$