Оглавление

0.1 Монотонность функции 1
0.2 Критерий Коши 2
0.3 Некоторые существенные неравенства 3
0.4 Замечательные пределы 5

Лекция 7: Монотонность функции. Критерий Коши. Замечательные пределы.

19.10.2023

0.1 Монотонность функции

Определение 1. Пусть задана функция $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Функция называется (строго, если строгий знак) монотонно возрастающей, если:

$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

И (строго, если строгий знак) монотонно убывающей, если:

$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Замечание. Если функция монотонна, то она либо возрастающая, либо убывающая.

Теорема 1. Пусть a — точка сгущения множества E и $\forall x \in E : x < a$.

Задана функция $f : E \to \mathbb{R}$, f — монотонна, тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

Если f — монотонно возрастающая, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in E : f(x) \leq M \tag{1}$$

Если f — монотонно убывающая, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in E : f(x) \geq M \tag{2}$$

Пусть $a_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ — точка сгущения множества E_1 и $\forall x \in E : x > a$.

Если f — монотонно возрастающая, то:

$$\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in E : f(x) \geq M \tag{3}$$

Если f — монотонно убывающая, то:

$$\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in E : f(x) \leq M \tag{4}$$

Доказательство. Докажем (1). Остальные доказываются аналогично.

Пусть $\nexists M$ из (1), тогда $\forall L > 0 : \ \exists x_0 \in E : f(x_0) > L \Rightarrow \forall x > x_0 : f(x) \geq f(x_0) > L \Rightarrow f(x) \underset{x\to\infty}{\to} +\infty$

Пусть $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in E : f(x) \leq M$. Пусть $c = \sup\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in E : f(x) = y\}$. Тогда:

$c \leq M, \forall x \in E : f(x) \leq c$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$, тогда $\exists x_1 \in E : f(x_1) > c - \varepsilon$. Имеем неравенство:

$$c-\varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq c < c+\varepsilon \Rightarrow f(x) \underset{x\to\infty}{\to} c, \text{ при этом } f(x) \leq \lim_{x\to\infty} f(x)$$

$\square$

0.2 Критерий Коши

Теорема 2. (Критерий Коши) Пусть есть множество $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — точка сгущения E. Тогда:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \omega(a) : \forall x_1, x_2 \in \dot{\omega}(a) \cap E : |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = c \in \mathbb{R}$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \omega(a) : \forall x \in \dot{\omega}(a) \cap E : |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$

Имеем, что $\forall x_1, x_2 \in \dot{\omega}(a) \cap E : |f(x_2) - f(x_1)| = |(f(x_2) - c) - (f(x_1) - c)| \leq |f(x_2) - c| + |f(x_1) - c| < \varepsilon$

$\Leftarrow$: Возьмем $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in E, x_n \neq a, x_n \underset{x\to\infty}{\to} a$. Возьмем окрестность из условия, тогда:

$\exists N : \forall n > N : x_n \in \omega(a)$, значит, $\forall n, m > N, \varepsilon > 0 : |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ — выполнен критерий Коши для последовательностей. А значит:

$\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \in \mathbb{R}$ — необходимо проверить, что все последовательности сходятся к c.

Предположим, что есть такая последовательность $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}, x'_n \in E, x'_n \neq a, x'_n \underset{x' \to \infty}{\to} a$, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x'_n) = c' \neq c$

Тогда возьмем последовательность: $\begin{cases} \overline{x}_{2n-1} = x_n \\ \overline{x}_{2n} = x'_n \end{cases}$

$\overline{x}_n \to a \overline{x}_n \in E, \overline{x}_n \neq a$, тогда по критерию Коши $\lim\limits_{n \to \infty} f(\overline{x}_{2n-1}) = \lim\limits_{n \to \infty} f(\overline{x}_{2n}) = \overline{c}$, но $\lim\limits_{n \to \infty} f(\overline{x}_{2n-1}) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$ — противоречие.

□

0.3 Некоторые существенные неравенства

Свойство. (неравенство для $\ln(1+x)$) Пусть $0 < x \leq \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n \geq 2$. Тогда имеем неравенства:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \geq 1 \Leftrightarrow n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{1}$$

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \tag{2}$$

$$\frac{1}{x} - 1 < n \leq \frac{1}{x} \tag{3}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \ln(x+1) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1-x}{x}} = \frac{x}{1-x} \tag{4}$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \ln(x+1) > \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{\frac{1}{x}+2} = \frac{x}{1+2x} \tag{5}$$

$$\text{т.е. при } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ имеем: } \frac{x}{1+2x} < \ln(1+x) < \frac{1}{1-x} \tag{6}$$

Пусть теперь $-\frac{1}{3} \leq x < 0$ (7), $y > 0$ и выполнено $1 + x = \frac{1}{1+y}$ (8)

$$(7), (8) \Rightarrow 0 < y \leq \frac{1}{2} \tag{9}$$

$$(6), (8), (9) \Rightarrow \ln(1+x) = \ln\left(\frac{1}{1+y}\right) = -\ln(1+y) < -\frac{1}{1+2y} = \frac{-\frac{x}{1+x}}{1 - \frac{2x}{1+x}} = \frac{x}{1-x} \tag{10}$$

$$(10) \Rightarrow \ln(1+x) < \frac{x}{1-x} \tag{11}$$

$$(6), (8), (9) \Rightarrow \ln(1+x) = -\ln(1+y) > -\frac{y}{1-y} = \frac{-\frac{x}{1+x}}{1 + \frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x} \tag{12}$$

$$(10),(12) \Rightarrow \frac{1}{1+2x} < \ln(1+x) < \frac{x}{1-x} \tag{13}$$

$$(6),(13) \Rightarrow \text{ при } -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}, x \neq 0: \frac{1}{1+2x} < \ln(1+x) < \frac{x}{1-x} \tag{14}$$

Замечание. (2 полезных неравенства (15))
при $x > 0: \frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$
при $x < 0: -\frac{1}{4} \leq \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq x$

Свойство. (неравенство для экспоненты)
Возьмем $y = \ln(1+x)$, тогда $x = e^y - 1$:

$$(15) \Rightarrow \text{ при } y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right], y \neq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], x \neq 0 \tag{16}$$

$$\text{при } (16\text{: })(13) \Leftrightarrow \frac{e^y-1}{1+2(e^y-1)} < y < \frac{e^y-1}{1-(e^y-1)} \Leftrightarrow \frac{e^y-1}{2e^y-1} < y < \frac{e^y-1}{-e^y+2} \tag{17}$$

$$(17) \Rightarrow e^y - 1 > y(2-e^y) \Leftrightarrow e^y(1+y) > 1+2y \Leftrightarrow e^y > \frac{1+2y}{1+y} \tag{18}$$

$$(17) \Rightarrow e^y - 1 < y(2e^y-1) \Leftrightarrow e^y < \frac{1-y}{1-2y} \tag{19}$$

$$(18),(19) \text{ при } y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right], y \neq 0: \frac{1+2y}{1+y} < e^y < \frac{1-y}{1-2y} \tag{20}$$

$$(20) \Rightarrow \text{ при } |x| \leq \frac{1}{3}: \frac{-2|x|}{1-2|x|} < \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 < \frac{2|x|}{1-2|x|} \tag{21}$$

Замечание.

$$|x| \leq \frac{1}{10}, x \neq 0 \Rightarrow \frac{2|x|}{1-2|x|} \leq \frac{1}{4} \tag{22}$$

Свойство. (неравенство для $(1+x)^{\frac{1}{x}}$)

$$(22) \Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{1+\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)}$$

$$(21) \Rightarrow e^{1-\frac{2|x|}{1-2|x|}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e^{1+\frac{2|x|}{1-2|x|}} \tag{23}$$

$$(18),(22) \Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{x}} > e \cdot \frac{1+2\cdot\left(-\frac{2|x|}{1-2|x|}\right)}{1+\left(-\frac{2|x|}{1-2|x|}\right)} = e \cdot \frac{1-6|x|}{1-4|x|} \tag{24}$$

$$(18),(22),(23) \Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{x}} < e \cdot \frac{1-\left(-\frac{2|x|}{1-2|x|}\right)}{1-2\cdot\left(-\frac{2|x|}{1-2|x|}\right)} = e \cdot \frac{1-4|x|}{1-6|x|} \tag{25}$$

$$(24),(25) \Rightarrow e \cdot \frac{1-6|x|}{1-4|x|} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e \cdot \frac{1-4|x|}{1-6|x|} \tag{26}$$

0.4 Замечательные пределы

Теорема 3. (Следствие из второго замечательного предела)

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$$

Доказательство. Возьмем $f(x) = 1-\frac{2|x|}{1-2|x|}, g(x) =, h(x) = 1+\frac{2|x|}{1-2|x|}, \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$

Из (21) имеем неравенство:

$$1-\frac{2|x|}{1-2|x|} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1+\frac{2|x|}{1-2|x|}$$

По теореме о двух милиционерах получаем, что:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$$

$\square$

Теорема 4. (Снова следствие из второго замечательного предела)

$$\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$$

Доказательство. Из (20) получаем:

$$\frac{1+2x}{1+x} - 1 < e^x - 1 < \frac{1-x}{1-2x} - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{1+x} < e^x - 1 < \frac{x}{1-2x} \Rightarrow$$

$$1-\frac{2|x|}{1-2|x|} < \frac{e^x-1}{x} < 1+\frac{2|x|}{1-2|x|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1 \text{ — аналогично пределу выше}$$

□

Теорема 5. (Второй замечательный предел)

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\to} e$$

Доказательство. (23):

$$e^{1-\frac{2|x|}{1-2|x|}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e^{1+\frac{2|x|}{1-2|x|}}$$

Значит, по теореме о двух милиционерах аналогично двум предыдущим пределам:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\to} e$$

□

Теорема 6. (И снова следствие из второго замечательного предела)

$$\frac{(1+x)^r - 1}{x} \underset{x\to 0}{\to} r$$

Доказательство. Пусть $x_n \to 0, \forall n : x_n \neq 0$ и $y_n = \ln(1+x_n), y_n \neq 0$

При $x_n \to 0, y_n \to 0$:

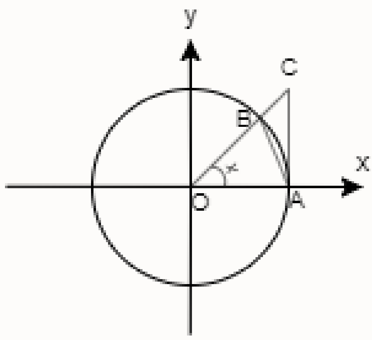
$$\frac{(1+x_n)^r - 1}{x_n} = \frac{e^{r\ln(1+x_n)}}{x_n} = \frac{e^{ry_n} - 1}{x_n} = \frac{e^{ry_n} - 1}{r \cdot y_n} \cdot r\frac{y_n}{x_n} = r$$

□

Теорема 7. (Первый замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. (Простите за шакалов, я не смог засунуть сюда вектор, поэтому это всратая растровая картинка. (может исправим...))



Пусть дан угол $x : 0 < x < \frac{\pi}{2}$, тогда.

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сектора } OAB} < S_{\triangle AOC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} < \tan x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

При $1 < x \leq 1$:

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > \sqrt{1 - x^2} \geq 1 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x > x \cos x > x(1 - x)$$

Значит получаем неравенство:

$$1 - x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

При $|x| < 1, x \neq 0$ неравенство имеет вид:

$$1 - |x| < \frac{\sin x}{x} < 1$$

А значит по теореме о двух милиционерах:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

□