Оглавление

Лекция 11

17.11.2023

0.1 Интерполя

Теорема 1. (Интерполяционная формула Лагранжа)
Пусть K — поле. $\forall x_1, \ldots, x_n \in K$ и $\forall y_1, \ldots, y_n \in K$, тогда :

$$\exists ! F \in K[x] : \forall i : F(x_i) = y_i$$

Многочлен можно найти по формуле:

$$F(x) = L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + \ldots + L_n(x)y_n$$

$$\text{где } L_i(x) = \frac{(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n)}$$

Доказательство.

1. Существование. Проверим, что многочлен, заданный формулой, подходит:

   $\deg L_i = n-1 \Rightarrow \begin{cases} \deg(L_i(x)y_i) = n-1 \\ L_i(x)y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \deg F \leq \max\{\deg L_i\} = n-1$

   $\forall i : L_i(x_i) = 1$ и $\forall i \neq j : L_i(x_j) = 0$

   $F(x_i) = L_1(x_i)y_1 + \ldots + L_i(x_i)y_i + \ldots + L_n(x_i)y_n = 0 \cdot y_1 + \ldots + 1 \cdot y_i + \ldots + 0 \cdot y_n = y_i$

2. Единственность. Пусть $F(x), G(x) : \forall i : F(x_i) = y_i \wedge G(x_i) = y_i$ тогда:

   $\deg F \neq n-1, \deg G \neq n-1$

Пусть $H(x) = F(x) - G(x) \Rightarrow \deg H \neq n-1$

$H(x_i) = y_i - y_i = 0$ — у H есть n корней, значит $H = 0 \Rightarrow F = G$

$\square$

Пример.

x	1	2	3
$F(x)$	1	4	9

$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$
$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -x^2 + 4x - 3$
$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-2)(3-2)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$
$F(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3) \cdot 1 + (-x^2 + 4x - 3) \cdot 4 + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1) \cdot 9 = x^2$

0.2 Метод интерполяции Ньютона

Алгоритм. (Ньютона)

Для данных различных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и данных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ требуется построить многочлен $F(x)$ (он уже существует и единственен) такой, что:

$$\forall i : F(x_i) = y_i, \deg F \leq n-1$$

Построим последовательно многочлены $f_1, f_2, \ldots, f_n$ так, что: $\deg f_k(x) \leq k-1$ и $f_k(x_1) = y_1, \ldots, f_k(x_k) = y_k$

На n-ом шагу подойдет многочлен $f_n(x) = F(x)$

В начале возьмем $f_1(x) = y_1$. Многочлен $f_k(x)$ определим по формуле:

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) + A_{k-1} \cdot g_{k-1}(x), \text{ где } g_{k-1}$$

$$g_{k-1}(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1}), \quad A_{k-1} = \frac{y_k - f_{k-1}(x_k)}{g_{k-1}(x_k)}$$

Пример.

x	1	2	3
$F(x)$	1	4	9

- $f_1(x) = 1$
- $f_2(X) = 1 + A(x-1)$.
  Найдем А: $x = 2 \Rightarrow 4 = 1 + A(2-1) \Rightarrow A = 3$. Значит, $f_2(x) = 3x - 2$

- $f_3(x) = (3x-2) + A(x-1)(x-2)$
  Найдем A: $x = 3 \Rightarrow 9 = (3 \cdot 3 - 2) + A(3-1)(3-2) \Rightarrow A = 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow f_3(x) = (3x-2) + 1 \cdot (x-1)(x-2) = x^2$. Значит, $F(x) = x^2$

Теорема 2. Метод интерполяции Ньютона работает корректно определен и результат его применения — нужный многочлен.

Доказательство. Имеем $g_{k-1} = (x_k - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1}) \neq 0 \Rightarrow A_k$ — определено.

Докажем по индукции, что $\deg f_k \leq k-1$:

База: $\deg f_1 = \left[\begin{array}{l} 0 \\ -\infty \end{array}\right. \leq 1-1$

Переход $k-1 \to k$: $\deg f_k \leq \max\{\underbrace{\deg f_{k-1}}_{\leq k-2}, \underbrace{\deg(A_k \cdot g_{k-1})}_{=k-1}\} \leq k-1$

Докажем по индукции, что $f_k(x_1) = y_1, \ldots, f_k(x_n) = y_n$: $\square$

0.3 Делимость в области целостности

(По учебнику Кострикина)

Определение 1. Пусть A — область целостности, $a, b \in A$. a делится на b, если $\exists c \in A : a = bc$. Обозначается как $a \vdots b$

Свойства. (доказательство в качестве упражнения)

1. $a, b \vdots c \Rightarrow a + b \vdots c, a - b \vdots c$
2. $a \vdots b \Rightarrow \forall k \in A : ak \vdots b$
3. $a \vdots b, b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$

Определение 2. Пусть A — область целостности. Элементы a, b называются ассоциированными, если $a \vdots b, b \vdots a$

Пример.

1. в $\mathbb{Z}$: a ассоциировано с a и с $-a$
2. в $\mathbb{R}[x]$: $P(x), Q(x)$ ассоциированы, если $P(x) = c \cdot Q(x), c \neq 0$

Свойства. Пусть A — область целостности с единицей. Тогда:

1. a и b — ассоциированы $\Leftrightarrow \exists u$: u - обратим и $a = b \cdot u$

2. $\begin{cases} a \vdots b \\ a, a_1 \text{ — ассоциированы} \\ b, b_1 \text{ — ассоциированы} \end{cases} \Rightarrow a_1 \vdots b_1$

Доказательство.

1. $\Rightarrow$: $a = bc, b = ad \Rightarrow a = b \cdot c = (ad) \cdot c = a(dc) \Rightarrow 1 = dc \Rightarrow$ c — обратим

   $\Leftarrow$: $a = bu \Rightarrow a \vdots b$
   $\exists u^{-1}$, т.к. u обратим
   $au^{-1} = b \cdot u \cdot u^{-1} = b \cdot 1 = b \Rightarrow b \vdots a$

2. $a = bc, a = u \cdot a_1$, где u — обратим и $b = v \cdot b_1$, где v — обратим
   $a_1 = u^{-1}a = u^{-1}bc = u^{-1}vb_1c = (u^{-1}vc)b_1 \Rightarrow a_1 \vdots b_1$

□

Определение 3. Пусть A — область целостности с единицей. Элемент $p \in A$ называется неразложимим или простым, если его нельзя представить в виде $p = ab$, где a, b — необратимы.

Пример. 1. в $\mathbb{Z} : \pm p$, где p — простое

Определение 4. Пусть K — поле, $A = K[x]$. неразложимый в $K[x]$ многочлен называется неприводимым над K (или в $K[x]$)

Пример.

1. $x^2 + 1$ приводим над $\mathbb{C}$, неприводим над $\mathbb{R}$
2. $x^2 - 2$ приводим над $\mathbb{R}$, неприводим над $\mathbb{Q}$

Определение 5. Пусть A — область целостности, $a, b \in A$. Элемент $d \in A$ называется НОД(a, b), если:

1. $a, b \vdots d$
2. выполнено условие: $a, b \vdots x \Rightarrow d \vdots x$

Свойства.

1. Если d является НОД(a, b) и d_1 ассоциировано с d, то d_1 является

НОД(a, b)

2. Если d_1, d_2 являются НОД(a, b), то d_1, d_2 ассоциированы

Доказательство.

1. $a, b \vdots d \Rightarrow a, b \vdots d_1$
   $d \vdots x \Rightarrow d_1 \vdots x$
2. $a, b \vdots d$
   $\begin{cases} a, b \vdots d_1 \\ d \text{ - НОД(a, b)} \end{cases} \Rightarrow d \vdots d_1$. Аналогично $d_1 \vdots d$

□

Определение 6. Пусть A — область целостности с единицей. Элементы a, b называются взаимно простыми, если 1 является НОД(a, b)

Определение 7. Кольцо A называется факториальным, если A — область целостности с единицей и любой элемент $a \in A$ можно представить в виде произведения $a = u \cdot p_1 p_2 \dots p_k$, где u обратим, p_i неразложим

Такое представление единственно с точностью до замены сомножителей на ассоциированные, т.е. если $a = vq_1 \dots q_m$ — другое представление, то $k = m$ и можно так перенумеровать Элементы, что $\forall i : q_i$ ассоциирован с p_i