

Геометрия и топология

Сольнин А. А.¹

11.09.2023 - ...

¹"Записал Сергей Киселев"

Оглавление

0.1	Матрицы	1
0.2	Скалярное произведение	4

Лекция 2: Матрицы

25.09.2023

0.1 Матрицы

Пусть V - Это конечно мерно пространство

$v_1 \dots v_n$ - базис V

$w \in V \Rightarrow \exists! v_1, v_2, v_3$

$w = k_1 * v_1 + k_2 * v_2 + \dots + k_n * v_n$

Определение 1. $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ - координаты
w в базисе $v_1 v_2$

$w \leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$

$u \leftrightarrow (\beta_1 \dots \beta_n)$

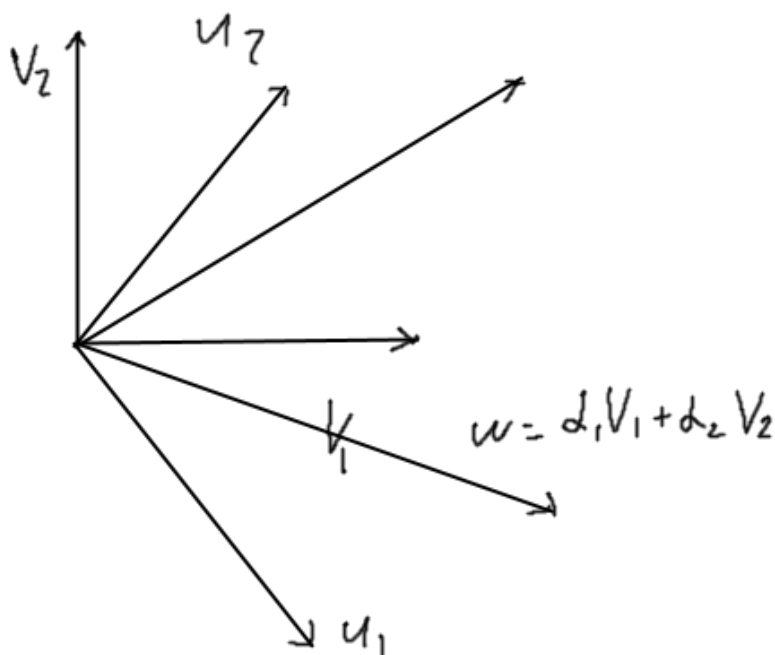
$u + w \leftrightarrow (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2 \dots \alpha_n + \beta_n)$

$f * w \leftrightarrow (f * \alpha_1, f * \alpha_2 \dots f * \alpha_n)$

$v_1 \dots v_n$ - Базис

$u_1, u_2, \dots u_n$ - базис

$w = \alpha_1 * v_1 + \alpha_2 * v_2 + \dots + \alpha_n * v_n = \beta_1 * u_1 + \dots + \beta_n * u_n$



Определение 2. (*)

$$U_1 = a_1 * v_1 + a_2 * v_2 + \dots + a_n * v_n$$

$$U_2 = a_2 * v_1 + a_2 * v_2 + \dots + a_{2n} * v_n$$

...

$$U_n = a_n * v_1 + a_{n2} * v_2 + \dots + a_{nr} * v_n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

матрица перехода от $(v_1 \dots v_n) * k$
 $u_1 \dots u_n$

Определение 3. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$

Матрица $N * R$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

$$k \times l$$

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & \dots & c_{nl} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + \dots + a_{1k} * b_{kl}$$

$$c_{12} = a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} + \dots + a_{1k} * b_{k2}$$

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{zk}b_{kj}$$

$$(*) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$$w_1 \dots w_n - \text{базис}$$

$$V_i = b_{11} * w_1 + \dots + b_{1n} * w_n$$

$$\dots$$

$$v_n = b_{n1} * w_1 + \dots + b_{nn} * w_n$$

$$u_q = a_{11} * v_1 + a_{12} v_2 + \dots + a_{1n} v_n = a_{11}(b_{11}w_1 + \dots + b_{1n}w_n) + \dots + a_{1n}(b_{n1}w_1 + \dots + b_{nn}w_n) = w_1(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}) \dots$$

Теорема 1. Если A - Это матрица перехода от $\{v_i\}$ $\{u_i\}$
 B - матрица перехода от $\{w_i\}$ $\{v_i\}$
 $\Rightarrow A \cdot B$ - м. п. от $\{w_i\}$ $\{u_i\}$

$$A \setminus B : A \cdot B \neq B \cdot A!$$

Теорема 2. $A(BC) = (AB)C$

Умножение матриц хоть и не коммутативно, но ассоциативно.

$$w_1 \dots w_n \rightarrow v_1 \dots v_k \rightarrow u_1 \dots u_e \rightarrow t_1 \dots t_m$$

$$w_1 \dots w_n \rightarrow w_1 \dots w_n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная матрица}$$

$$u_1 \dots u_n - \text{базис}$$

$$v_1 \dots v_n - \text{базис}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = E$$

$$B \cdot A = E$$

(A и B) - обратные матрицы

0.2 Скалярное произведение

Определение 4. V - векторное пространство

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

1. $(u, u) \geq 0 \quad (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v) \quad (u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$
3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v)$
4. $(u, v) = (v, u)$

V - евклидово пространство (\cdot, \cdot) - скалярное произведение

Для комплексных чисел \mathbb{C}

$$(u, v) = \overline{(v, u)}$$

$$(u, \alpha v) = \overline{\alpha} (u, v)$$

Пример. 1. $V = \mathbb{R}^n$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2. V - пространство функций $(\dots) (f(x), g(x)) := \int_a^b f(x)g(x)dx$

Определение 5. Пусть V - евклидово пространство

v - элемент V

$$|v| := \sqrt{(v, v)}$$

$$\cos \angle(u, v) := \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|}$$

$$(u, v) \geq 0$$

Теорема 3. (Неравенство КБШ)

$$|(u, v)| \leq |u| \cdot |v|$$

$$0 \leq (\overline{u} + f\overline{v}, \overline{u} + f\overline{v}) = (\overline{u}, \overline{u}) + (\overline{u}, t\overline{v}) + (t\overline{v}, \overline{u}) + \forall t + (t\overline{v}, t\overline{v}) = t^2(v, v) + 2t(u, v) + (u, u)$$

$$D \leq 0$$

$$\frac{D}{u} = (u; v)^2 - (u, u)(v, v) \leq 0$$

$$(u, v)^2 \leq (u, u) \cdot (v, v)$$

Определение 6. 1. $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$

$$2. \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b g(x)dx \right)$$

Определение 7. $u \perp v$, если $(u, v) = 0$

$v_1 \dots v_n$ - ортогональная, если
 $v_i \perp v_j (i \neq j)$

Теорема 4. $v_1 \dots v_n$ - ортогональная система, нет нулевых векторов
 $\Rightarrow v_1 \dots v_n$ линейно не зависимы.

Доказательство. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$

$$(v_1, v_i) = 0 \quad \alpha_1 (v_1, v_i) + \alpha_2 (v_2, v_i) + \dots + \alpha_i (v_i, v_i) + \dots = 0$$

$$\alpha_i (v_i, v_i)^2 = 0$$

$$\alpha_i = 0$$

□

Определение 8. u - нормированный или единичный если $|u| = 1$

$v_1 \dots v_n$ - ортонормированные системы, если $v_i \perp v_j$ и $|v_i| = 1$

$v_1 \dots v_n$ - ОНБ ортонормированный базис