Оглавление

Лекция 10: Продолжение свойств производных

9.11.2023

Свойства. (дальнейшие свойства производных)

3 $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4 Пусть $\forall x \in (a,b) : f(x) \neq 0$, тогда:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

5 Пусть f как в (4), и есть g тогда:

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)}$$

6 Производная суперпозиции: пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}, f(x) \in (p,q)$

$g : (p,q) \to \mathbb{R}, f(x) \overset{\text{def}}{=} y \in (p,q)$

Положим $\phi(x) = g(f(x))$, Тогда:

$$\phi'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$$

7 Производная обратной функции: пусть f непрерывна на отрезке (a,b) и строго монотонна, $x_0 \in (a,b)$, f имеет производную в x_0, не равную нулю. g — обратная к f функция. Положим $f(x_0) = y_0$, тогда:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство. (Доказательства свойств)

3

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g(x)$$

4
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} =$$
$$= -\frac{1}{f(x)} \cdot \lim_{h\to 0}\frac{1}{f(x+h)} \cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)f(x)}{h} = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

5 Используя (3) и (4) получаем:

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \left(g\cdot\frac{1}{f}\right)(x) = g'(x)\cdot\frac{1}{f(x)} + g(x)\left(\frac{1}{f}\right)'(x) =$$
$$= \frac{g'(x)}{f(x)} - \frac{g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)}$$

6 используя связь производной с дифференцируемостью функции, получаем:

$$g(y+l) = g(y) + g'(y)\cdot l + g(l),\text{ где } \lim_{l\to 0}\frac{g(l)}{l} = 0$$

Положим $\delta(l) \overset{\text{def}}{=} \frac{g(l)}{l}, l \in \dot{\omega}(0)$

Положим $\delta(0) = 0$, тогда функция $\delta(l)$ определена в $\omega(0)$ и непрерывна в 0, $\omega(0)$ — окрестость из определения дифференцируемости функции g.

Возьмем теперь $h \neq 0$ и положим

$$l \overset{\text{def}}{=} f(x+h) - f(x) = f(x+h) - y$$

В отличие от h, возможно, что $l = 0$ при каких-то значениях h. Теперь имеем, используя дифференцируемость f:

$$\phi(x+h) = g(f(x+h)) = g(f(x) + f'(x)h + \overline{\rho}(h)),\text{ где } \lim_{l\to 0}\frac{\overline{\rho}(l)}{l} = 0$$

Пусть $f'(x)h + \overline{\rho}(h) = q$, тогда:

$$g(f(x)+q) = g(y+q) = g(y) + g'(y)q + q\delta(q) =$$
$$= \phi(x) + g'(y)(f'(x)h + \overline{\rho}(h)) + (f'(x)h + \overline{\rho}(h))\cdot\delta(f'(x)h + \overline{\rho}(h)) \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \phi(x) + g'(y)f'(x) + R(h)$$

Где $R(h) = g'(y)\overline{\rho}(h) + f'(x)h\cdot\delta(f'(x)h + \overline{\rho}(h)) + \overline{\rho}(h)\cdot\delta(f'(x)h + \overline{\rho}(h))$

При $h \to 0$ имеем $f'(x)h + \overline{\rho}(h) \to 0$, поэтому $\frac{R(h)}{h} \underset{h\to 0}{\to} g'(y)\cdot 0 + f'(x)\cdot 0 + 0 = 0$

Таким образом, функция ϕ дифференцируема в x, и по теореме о связи производной и дифференцируемости:

$$\phi'(x) = g'(y)f'(x)$$

7 Возьмем последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n : h_n \neq 0$ и $h_n \to 0$. Положим $l_n = f(x+h_n) - f(x)$. В силу строгой монотонности функции f имеем $\forall n : l_n \neq 0$ и $l_n \to 0$ при $n \to \infty$ в силу непрерывности f на $[a, b]$. l_n и h_n связаны также соотношением:

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + l_n = y + l_n \\ g(f(x+h)) = g(y+l_n) \\ x + h_n = g(y+l_n) \\ h_n = g(y+l_n) - x = g(y+l_n) - g(y) \end{cases}$$

Это соотношение показывает, что мы можем произвольно задать $l_n, \forall n : l_n \neq 0, l_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ и получим $h_n \neq 0, h_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Возьмем теперь произвольную последовательность $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n : l_n \neq 0, l_n \underset{n\to\infty}{\to} 0, h_n$ — соответствующая ей последовательность имеет:

$$\frac{g(y+l) - g(y)}{l_n} = \frac{h_n}{l_n} = \frac{h_n}{f(x+h_n) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h_n}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{f'(x)}$$

В силу произвольности $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ получаем: $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

$\square$