Математический анализ

Широков Николай Алексеевич[1]

07.09.2023 - ...

[1] "Записал Сергей Киселев, Гараев Тагир"

Оглавление

Глава 1

Построение множества вещественных чисел

Лекция 1: Введение

14.09.2023

1.1 Множества

Определение 1. Множества X и У равны, если:
$\forall a \in X : a \in Y$
$\forall b \in Y : b \in X$

Определение 2. $X \subset Y$ если:
$\forall a \in X : a \in Y$

Определение 3.
1. $a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \vee a \in B$
2. $a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \in B$
3. $a \in A \setminus B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \notin B$

Определение 4. (Декартово произведение множеств)
$A \times B = \{(a, b) : \forall a \in A, \forall \in B\}; A, B \neq \varnothing$

Определение 5. $F : A \to B$ - функция, такая, что: $\forall a \in A$ сопостовляет $b = F(a) \in B$

1.2 Сечения

Определение 6. Множество $\alpha \subset \mathbb{Q}$ называется сечением, если:

- I. $\alpha \neq \varnothing$

- II. если $p \in \alpha$, то $q < p \Leftrightarrow q \in \alpha$
- III. в α нет наибольшего

Пример. 1. $p^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < p\}$ - нет наибольшего

2. $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 0 \vee p > 0 \wedge p^2 < 2\}$

Теорема 1. (Утверждение 1)
Если $p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$, то $q > p$

Доказательство. Если $p \in \alpha$ и $q \leq p$, то из (II.) следует. что $q \in \alpha$ □

Теорема 2. (Утверждение 2) $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

Доказательство. $\begin{cases} \alpha < \beta \Rightarrow \exists p \in \beta, p \notin \alpha \\ \beta < \gamma \Rightarrow \exists p \in \gamma, q \notin \beta \end{cases} \Rightarrow p < q \Rightarrow \alpha < \gamma$ □

Теорема 3. Пусть α, β - сечения. Между ними существует одно из нескольких отношений: $\left[\begin{array}{l} \alpha < \beta \\ \beta > \alpha \\ \alpha = \beta \end{array}\right.$

Доказательство. Предположим, что $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$, тогда:
$\begin{cases} \exists p \in \alpha, p \notin \beta \\ \exists q \in \beta, q \notin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p > q \\ q > p \end{cases}$ - Противоречие, тогда $\alpha \neq \beta$ □

1.3 Сумма сечений

Теорема 4. Пусть α, β - сечения, тогда:
$\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha, q \in \beta\}$ - тоже сечение.

Доказательство.

- (I.) Пусть $\exists s \notin \alpha, \exists t \notin \beta$, тогда:

  $\forall p \in \alpha, q \in \beta : \begin{cases} p < s \\ q < t \end{cases} \Rightarrow p + q < s + t \Rightarrow \alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$

- (II.)

  $r \in \alpha + \beta, r_1 < r$

  $r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$

  $r_1 = p + q_1, r_1 < r \Rightarrow q_1 < q \Rightarrow q_1 \in \beta \Rightarrow p + q_1 \in \alpha + \beta$

- (III.)

$\exists p_1 \in \alpha, p > p_1 \Rightarrow p_1+q > p+q = r, p_1+q \in \alpha+\beta$ - нет наибольшего $\square$

Теорема 5. (Свойства суммы сечений)

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\gamma + \beta)$
3. $\alpha + 0^* = \alpha$, где $0^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}$

Доказательство. Свойства 1 и 2 справедливы в силу коммутативности и ассоциативности рациональных чисел.

Докажем свойство 3:

1. Пусть $p \in \alpha, q \in 0^*$, тогда: $p + q < p \Rightarrow p + q \in \alpha$, т.е. $\alpha + 0^* \subset \alpha$
2. Пусть $p \in \alpha$, тогда: $\exists p_1 > p \Rightarrow p_1 \in \alpha, p = p_1 + (p - p_1)$, при том $p_1 \in \alpha, p - p_1 \in 0^* \Rightarrow p \in \alpha + 0^* \Rightarrow \alpha \subset \alpha + 0^*$

$$\begin{cases} \alpha \subset \alpha + 0^* \\ \alpha + 0^* \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \alpha + 0^*$$ $\square$

1.4 Теоремы сечений

Теорема 6. (Теорема 2) Пусть α - сечение, $r \in \mathbb{Q}^+$, тогда $\exists p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$:
q - не наименьшее верхнее (не входящее в сечение) число
$q - p = r$

Доказательство. Пусть $p_0 \in \alpha, p_1 = p_0 + r$

1. Возможно, $p_1 \notin \alpha$, тогда:
   (a) если p_1 - не наименьшее в верхнем классе, то $q = p_1$
   (b) если же наименьшее, то $p = p_0 + \frac{r}{2}, q = p_1 + \frac{r}{2}$
2. Если $p_1 \in \alpha$, тогда:
   Положим $p_n = p_1 + nr$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда $\exists! m$:
   $p_m \in \alpha$ и $p_{m+1} \notin \alpha$
   (a) Если p_{m+1} - не наименьшее в верхнем классе, то выберем $p = p_m, q = p_{m+1}$
   (b) Если же наименьшее, то $p = p_m + \frac{r}{2}, q = p_{m+1} + \frac{r}{2}$

$\square$

Теорема 7. (Существование противоположного элемента) Пусть α - сечение, тогда $\exists! \beta : \alpha + \beta = 0^*$

Доказательство. (нужно доказать единственность и существование)

1. Докажем единственность: пусть $\exists \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющие условию, тогда:

   $\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1$

2. Докажем существование: пусть

   $\beta = \{p : -p \notin \alpha, -p$ не является наименьшим в верхнем классе $\alpha\}$

   - (I.) Очевидно, что $\beta \neq \varnothing, \mathbb{Q}$
   - (II.) Возьмем $p \in \beta, q < p \Leftrightarrow -q > -p \Rightarrow -q$ в верхнем классе α, но не наименьшее $\Rightarrow q \in \beta$
   - (III.) Если $p \in \beta$, то -p - не наименьшее в верхнем классе α, значит $\exists q : -q < -p$ и $-q \notin \alpha$
     Положим $r = \frac{p+q}{2}$, тогда:
     $-q < -r < -p \Rightarrow$ -r – не наименьшее в верхнем классе α. Значит, нашли такое r $>$ p, что $r \in \beta$

Теперь проверим, что $\alpha + \beta = 0^*$:

1. Возьмем $p \in \alpha, q \in \beta$

   По определению $\beta : -q \notin \alpha \underset{\text{Утв. 1}}{\Rightarrow} -q > p \Leftrightarrow p + q < 0 \Rightarrow p + q \in 0^* \Rightarrow \alpha + \beta \subset 0^*$

2. Возьмем по Теореме (2) $q - p = r \Leftrightarrow p - q = -r \in 0^*$

   т.к. $q \notin \alpha$, то $-q \in \beta$, значит $p - q = p + (-q) \in \alpha + \beta \Rightarrow 0^* \subset \alpha + \beta$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \subset 0^* \\ 0^* \subset \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 0^*$$ □

Лекция 2: Сечения

21.09.2023

Теорема 8. Пусть α, β — сечения. Тогда $\exists!\ \gamma$ — сечение : $\alpha + \gamma = \beta$

Доказательство. Пусть имеем $\gamma_1 \neq \gamma_2$, удовлетворяющие условию. Тогда: $\alpha + \gamma_1 = \beta = \alpha + \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$ — противоречие.

Положим $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Тогда в силу свойств сечений имеем:
$\alpha + \gamma = \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0^* + \beta = \beta$ □

Определение 7. Сечение γ, построенное в предыдущей теореме обозначается через $\beta - \alpha$

Определение 8. (Абсолютная величина) $|a| = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha \geq 0^* \\ -\alpha, \text{ если } \alpha < 0^* \end{cases}$

Определение 9. (Произведение) Пусть α, β — сечения, причем $\alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^*$

Тогда $\alpha\beta = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0 \vee r = pq, \text{ где } p \in \alpha, q \in \beta\}$

Пример. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^*$

Теорема 9. (Любые 3 из них необходимо доказать самостоятельно) Для любых сечений α, β, γ имеем:

1. $\alpha\beta = \beta\alpha$
2. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
4. $\alpha 0^* = 0^*$
5. $\alpha 1^* = \alpha$
6. если $\alpha < \beta$ и $\gamma > 0^*$, то $\alpha\gamma < \beta\gamma$
7. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta : \alpha \cdot \beta = 1^*, \beta = \frac{1^*}{\alpha}$
8. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta, \gamma : \alpha \cdot \gamma = \beta, \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$

Теорема 10. (Свойства рациональных сечений)

1. $p^* + q^* = (p + q)^*$
2. $p^* q^* = (pq)^*$
3. $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

Доказательство.

1. Возьмем $r \in (p + q)^* \Rightarrow r < p + q$

   Положим $h = p + q - r$:

   $\begin{cases} p_1 = p - \frac{h}{2} \\ q_1 = q - \frac{h}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in p^* + q^* \Rightarrow (p^* + q^*) \subset p^* + q^*$

   Теперь возьмем $r \in p^* + q^* \Rightarrow r = p_1 + q_1$:

   $\begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 < p + q \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in (p^* + q^*) \Rightarrow p^* + q^* \subset (p^* + q^*)$

   $\begin{cases} p^* + q^* \subset (p + q)^* \\ (p + q)^* \subset p^* + q^* \end{cases} \Rightarrow p^* + q^* = (p^* + q^*)$

2. Для умножения доказательство аналогично.

3. Если $p < q$, то $p \in q^*, p \notin p^* \Rightarrow p^* < q^*$

   Если $p^* < q^*$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in q^*, r \notin p^* \Rightarrow p \leq r < q \Rightarrow p < q$

   Значит $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

□

Теорема 11. Пусть α, β — сечения, $\alpha < \beta$. Тогда $\exists\, r^*$ — рациональное сечение : $\alpha < r^* < \beta$

Доказательство. $\alpha < \beta \Rightarrow \exists\, p : p \in \beta, p \notin \alpha$

Выберем такое $r > p$, так, что $r \in \beta$. Поскольку $r \in \beta, r \notin r^*$, то $r^* < \beta$

Поскольку $p \in r^*, p \notin \alpha$, то $\alpha < r^*$ □

Глава 2

Вещественные числа

Определение 10. В дальнейшем сечения будут называться вещественными числами. Рациональные сечения будут отождествляться с рациональными числами. Все другие сечения будут называться иррациональными числами.

Таким образом, множество всех рациональных чисел оказывается подмножеством системы вещественных чисел.

Теорема 12. (Дедекинда) Пусть A и B — такие множества вещественных чисел, что:

1. $A \cup B = \mathbb{R}$
2. $A \cap B = \varnothing$
3. $A, B \neq \varnothing, A \neq B$
4. $\forall \alpha \in A, \beta \in B : a < b$

Тогда $\exists!\ \gamma \in \mathbb{R} : \alpha \leq \gamma \leq \beta\ \forall \alpha \in A, \forall \beta \in B$

Доказательство.

1. Докажем единственность.

   Пусть γ_1, γ_2 — два числа, причем $\gamma_1 < \gamma_2$. Тогда $\exists\ \gamma_3 : \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2 \Rightarrow \gamma_3 \in A, \gamma_3 \in B$ — противоречие. Значит $\gamma_1 = \gamma_2$.

2. Проверим, является ли γ сечением.

   $\gamma = \{p \in \mathbb{Q} : \exists \alpha \in A : p \in \alpha\}$

   I. $\gamma \neq \varnothing$, т.к. $A \neq \varnothing$
   $\gamma \neq \mathbb{Q}$, т.к. $\exists q \in \mathbb{Q} : q \notin B \Rightarrow q \notin \gamma$

   II. Пусть $p_1 < p, p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p_1 \in \alpha \Rightarrow p_1 \in \gamma$

   III. Пусть $p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p \in \alpha$. Поскольку α — сечение, то $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \alpha, q > p \Rightarrow q \in \gamma$

   Ясно, что $\alpha \leq \gamma \forall \alpha \in A$.

Предположим, что $\exists \beta \in B : \beta < \gamma$. Тогда $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \gamma, q \notin \beta \Rightarrow \exists \alpha \in A : q \in \alpha \Rightarrow \alpha > \beta$ — противоречие. Значит $\gamma \leq \beta \,\forall\, \beta \in B$. $\square$

2.1 Супремумы и инфимумы

Определение 11. $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \varnothing$
E - ограничено сверху, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq y$

Определение 12. $G \subseteq \mathbb{R}, G \neq \varnothing$
G - ограничено снизу, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \geq y$

Замечание. Если множество ограничено сверху и снизу, оно называется ограниченным.

Определение 13. Пусть E ограничено сверху. Тогда y называется точной верхней границей (верхней гранью) E, если:

1. y — верхняя граница множества E.
2. если $x < y$, то x не является верхней границей множества E.

Определение 14. Пусть E ограничено снизу. Тогда y называется точной нижней границей (нижней гранью) E, если:

1. y — нижняя граница множества E.
2. если $x > y$, то x не является нижней границей множества E.

Определение 15. Точная верхняя граница — $y \sup E$
Точная нижняя граница — $y \inf E$

Пример. E состоит из всех чисел $\frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда множество ограничено, верхняя грань равна 1 и принадлежит множеству, а нижняя равна 0 и множеству не принадлежит.

Теорема 13. Пусть E ограничено сверху. Тогда $\sup E$ существует.

Доказательство. Пусть есть множества:
$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in E : x > \alpha\}$
$B = \mathbb{R} \setminus A$
Тогда $A \cap B = \varnothing, A \cup B = \mathbb{R}, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$

$$\begin{cases} \beta \in B \\ \alpha \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in E : x \leq \beta \\ \exists x_0 \in E : x_0 > \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha < \beta$$

Ясно, что никакой элемент множества A не является верхней границей множества E, а любой элемент множества B является верхней границей множества E. Поэтому достаточно доказать, что B содержит наименьшее число.

По теореме Дедекинда: $\exists\gamma : \begin{cases}\alpha \le \gamma\ \forall\alpha \in A\\ \beta \ge \gamma\ \forall\beta \in B\end{cases}$

Предположим, что $\gamma \in A$. Тогда $\exists x \in E : x > \gamma$.

Возьмем $\gamma_1 : \gamma < \gamma_1 < x \Rightarrow \gamma_1 \in A$ — противоречие.

Значит $\gamma \in B$. □

Теорема 14. Пусть E ограничено снизу. Тогда $\inf E$ существует.

Доказательство. Доказательство тривиально и предоставляется читателю в качестве упражнения $\odot \smile \odot$. □

Теорема 15. (Существование корня из вещественного числа) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n > 0\ \exists!\ y \in \mathbb{R}, y > 0 : y^n = x, y = \sqrt[n]{x}$

Доказательство. 1. Единственность.

Пусть $y_2 > y_1 : y_2^n = x = y_1^n \Rightarrow y_2^n - y_1^n = 0$

$\overset{>0}{(y_2 - y_1)} \cdot \overset{>0}{(y_2^{n-1} + y_2^{n-2} \cdot y_1 + \ldots + y_1^{n-1})} = 0$ — противоречие.

2. Существование.

Пусть $E = \{t \in \mathbb{R} : t \ge 0, t^n < x\}$

$0 \in E \Rightarrow E \ne \varnothing$

Положим $t_0 = 1 + x, t_0^n = (1 + x)^n$

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = 1 + nx + \underset{>0}{\ldots} > x \Rightarrow E$ — ограничено сверху.

Пусть $y = \sup E$ (она существует по теореме о Существовании супремума).

- Допустим, что $y^n < x$. Возьмем $h : 0 < h < 1$ и $h < \frac{x-y^n}{(1+y)^n - y^n}$
  Тогда
  $$(y+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y^{n-k} h^k =$$
  $$= y^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k y^{n-k} h^k =$$
  $$= y^n + h\sum_{k=1}^{n} C_n^k y^{n-k} h^{k-1} < y^n + h\sum_{k=1}^{n} C_n^k y^{n-k} =$$
  $$= y^n + h \cdot ((1+y)^n - y^n) < (y+1)^n - y^n < y^n + x - y^n = x$$
  — y не вехрняя граница.

- Допустим, что $y^n > x$. Возьмем $k : 0 < k < 1$, $k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$ и $k < y$. Тогда аналогично с $y^n < x$ получаем, что $y - k$ — верхняя граница E, что противоречит тому, что $y = \sup E$.

Значит $y^n = x$.

□

Лекция 3: Степень, логарифм, десятичные дроби. Последовательности.

28.09.2023

2.2 Неравенство Бернулли

Теорема 16 (Неравенство Бернулли)**.** Пусть $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$ неравенство очевидно. Пусть оно верно для $n = k$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку $kx^2 \geq 0$. □

2.3 Определение степени и логарифма

Определение 16. Пусть $a > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0; r = \frac{n}{m}$. Тогда
$a^r = (a^{\frac{1}{m}})^n$.
Если $m > 0$, то: $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m}$
Если $m < 0$, то $x^m = \frac{1}{a^{|m|}}$.

Определение 17. Пусть $p \in \mathbb{Q}, p \neq 0, a > 1$
Тогда $a^p = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \neq 0, r < p\}$
$a^0 = 1$

Определение 18. Пусть $a > 1, \alpha \in \mathbb{R}$
$E = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < \alpha, r \neq 0\}$
Тогда $\sup E = a^\alpha$.
И $\forall a \in \mathbb{R} : 0 < a < 1 : a^\alpha = (\frac{1}{a})^{-\alpha}$

Определение 19. Пусть $a > 0, a \neq 0, x > 0$. Тогда
Если $a > 1 : \log_a x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : a^r < x\}$.
Если $0 < a < 1 : \log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$

Теорема 17. (Без доказательства) Для степени и логарифма справедливы все ранее встречавшиеся свойства. (имеется в виду школьный курс)

Глава 3

Последовательности

Определение 20. Пусть X — множество, $X \neq \varnothing$. Тогда последовательностью элементов множества X называется функция $f : \mathbb{N} \to X$.

$x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots; x_n \in X$ Последовательность — $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

3.1 Сопоставление вещественным числам десятичных дробей

Алгоритм. (Построение дроби по числу)

Рассматриваем только $x > 0, x \in \mathbb{R}$

Возьмем $n_0 \in \mathbb{Z}_+ : n_0 \leq x, n_0$ — максимальное число с таким свойством.

- Если $n_0 = x$ — алгоритм закончен.
- Если $n_0 < x$ — продолжаем: выбираем $n_1 \in \mathbb{Z} : n_0 + \frac{n_1}{10} \leq x$

Аналогично с n_0, проверяем равенство с x. Так вплоть до n_k:
$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} \leq x$

Если ни на одном шаге равенство не выполняется, то задаем последовательность:
$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = n_0, \frac{n_1}{10}, \frac{n_2}{10^2}, \ldots$

Теорема 18. (О супремуме десятичных дробей) Рассмотрим $E = \{r : r = \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k}, k \in \mathbb{N}\}$

Тогда $\sup E = x$ (из алгоритма).

Доказательство. Так как $n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} < x$, то $\sup E \leq x$

Предположим, что $\sup E < x$. Тогда $\exists r : r = x - \sup E > 0$.

Выберем такое k, что $\frac{1}{k^9} < r \Leftrightarrow k > \frac{1}{r^9}$.

$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} < x < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k+1}{10^k} \Rightarrow$

$\Rightarrow n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} > x - \frac{1}{10^k} > x - \frac{1}{9^k} > x - r = \sup E$, значит

$x = \sup E$ $\square$

Лемма 1. (доказать самостоятельно) Пусть есть $E \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, E_a = \{x + a : x \in E\}$

Тогда $\sup E_a = a + \sup E$

Дальше шла какая-то теорема, смысл которой я не понял. Если найдете адекватную запись или сможете объяснить — пишите $\odot \smile \odot$

3.2 Предел последовательности

Определение 21. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Тогда $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$.

Замечание. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : |z - x| \leq |z - y| + |y - x|$

Определение 22. Пусть X — множество, функция ρ: $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$

X — метрическое пространство, если: $\forall a, b \in X : \rho(a, b) \geq 0$

И выполнены следующие свойства:

1. $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$
3. $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b)$

Тогда ρ — метрика X.

Пример. $\mathbb{R}$ — метрическое пространство, $\rho(x, y) = |x - y|$

Определение 23. Пусть X — метрическое пространство, $a \in X$, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, x_n \in X$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < \varepsilon$

Теорема 19. (Единственность предела) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то $a = b$

Доказательство. Пусть $a \neq b$. Тогда $\delta = \rho(a, b) > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$.

1. Так как $\underset{n\to\infty}{x_n} \to a : \exists N_1 : \forall n > N_1 : \rho(x_n, a) < \varepsilon$
2. И так как $\underset{n\to\infty}{x_n} \to b : \exists N_2 : \forall n > N_2 : \rho(x_n, b) < \varepsilon$.

Пусть $n = N_1 + N_2 + 1$. Тогда для n выполнены (1) и (2)

Имеем $0 < \delta = \rho(a,b) \le \rho(a,x_n) + \rho(x_n,b) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{\delta}{2}$ — противоречие. □

Теорема 20. (Ограниченность сходящейся последовательности) X — метрическое пространство с метрикой ρ

$x_n \in X, a \in X$ Пусть $\underset{n\to\infty}{x_n} \to a$. Тогда $\exists\, R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, a) < R$

Доказательство. Возьмем

$\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < 1$ (1)

Определим R как $R = \max(\rho(x_1,a)+1, \rho(x_2,a)+1, \dots, \rho(x_N,a)+1, 1)$ (2)

Тогда:

- если $n > N$, то из (1) следует (2), значит $R \ge 1$
- если $1 \le n \le N$, то $R \ge \rho(x_n, a)$

В обоих случаях R удовлетворяет условию теоремы. □

3.3 Арифметические операции над пределами

Свойства. Для $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b, c \in \mathbb{R}$ справедливы следующие свойства:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
2. $c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c \cdot a$
3. $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\to} a + b$
4. $x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\to} a \cdot b$

Доказательство.

1. $\forall \varepsilon > 0, \forall n > 1 : |x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |cx_n - ca| = |c(x_n - a)| = |c||x_n - a| < |c|\varepsilon$
3. $\begin{cases} \forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon_1 \\ \forall \varepsilon_2 > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \varepsilon_2 \end{cases} \Rightarrow$ при $n > N_1 + N_2 + 1 :$
   $|x_n + y_n - a - b| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$
4. Аналогично (3) при $n > N_1 + N_2 + 1 : |x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \le |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b|$

   т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\exists R : \forall n : |y_n| \le R$ (из предыдущей теоремы)

   Тогда $|x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| < \varepsilon_1 R + |a|\varepsilon_2$

□

Лекция 4: Продолжение

27.09.2023

Свойства. (Продолжение)

5 $x_n \neq c\, \forall n, x_n \to a, a \neq 0 => \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

6 $\begin{cases} x_n \to a \text{из п. 5} \\ y_n \to b \end{cases} \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \to \frac{a}{b}$

7 $x_n \le y_n \forall n, x_n \to a, y_n b \Rightarrow a \le b$

Доказательство. (5, 6, 7)

5 I. Возьмем $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$, тогда:
$\exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon_0 \Rightarrow |x_n| \ge |a| - |x_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$

II. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon$

$N_0 = max(N_1, N)$. При $n > N_0$ получаем:
$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| = |\frac{a - x_n}{x_n \cdot a}| = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot |x_n - a| \underset{(I),(II)}{<} \frac{1}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} \cdot \varepsilon$

6 $\frac{y_n}{x_n} = y_n \cdot \frac{1}{x_n}$ — далее по п. (4), (5).

7 Предположим, что $a > b$. Тогда $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon_0 \\ \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \varepsilon_0 \end{cases} \Rightarrow$
$\forall n > N_1 + N_2 + 1 : y_n < \varepsilon_0 + b = b + \frac{a-b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon_0 < x_n \Rightarrow y_n < x_n$ — противоречие с условием.

□

Замечание. (Различные промежутки)

1. $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток)
2. $[a, b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$ — замкнутный промежуток
3. $[a, b) = \{x \in R : a \le x < b\}$ — полуоткрытый промежуток
4. $(a, b] = \{x \in R : a < x \le b\}$ — полуоткрытый промежуток

3.4 Расширенное множество вещественных чисел

Определение 24. $\overline{R} = R \cup \{+\infty, -\infty\}$ — расширенное множество вещественных чисел. При этом:
$\forall x \in \mathbb{R} : x < +\infty, x > -\infty$

Замечание. (Еще промежутки)

1. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
2. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
3. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
4. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

Свойства. (Продолжение свойств пределов)

$$8 \begin{cases} \forall n : x_n \leq y_n \leq z_n \\ x_n \to a \\ z_n \to a \end{cases} \Rightarrow y_n \to a \text{ — теорема о двух миллионерах}$$

Доказательство. $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n > N_2 : |z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow z \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$

$\forall n > max(N_1, N_2)$:

$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$

□

3.5 Бесконечные пределы

Определение 25. (Бесконечные пределы)

- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to \infty$, $n \to \infty$

  $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$, если:

  $\forall L \in \mathbb{R}\ \exists N : \forall n > N : x_n > L$

- $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y_n \to -\infty$, $n \to \infty$

  $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = -\infty$, если:

  $\forall L \in \mathbb{R} :\ \exists N : \forall n > N : y_n < L$

  (возможно сокращение записи n-> далее.)

3.6 Единообразная запись определения пределов

Определение 26. Окрестостью вещественного числа a называется любой интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ (обозначается как $\omega(a)$).

Определение 27. Окрестность $+\infty : (L, +\infty), L \in \mathbb{R}$

Окрестность $-\infty : (-\infty, L), L \in \mathbb{R}$

Определение 28. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $x_n \to a$, если:
$\forall \omega(\alpha): \ \exists N : \forall n > N : x_n \in \omega(\alpha)$

Свойства. (Доказать самостоятельно)
Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a \to +\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, b \to -\infty$, тогда:

1. $c > 0 : ca_n \to +\infty, cb_n \to -\infty$
   $c < 0 : ca_n \to -\infty, cb_n \to +\infty$
2. $x_n \to x, x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Rightarrow a_n + x_n \to +\infty$
   $y_n \to y, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \Rightarrow b_n + y_n \to -\infty$
3. Возьмем x_n, y_n из п. (2), тогда:
   $x > 0 \Rightarrow a_n x_n \to +\infty, b_n x_n \to -\infty$
   $y < 0 \Rightarrow a_n y_n \to -\infty, b_n y_n \to +\infty$
4. Если $\forall n : a_n \neq 0, b_n \neq 0$, тогда:
   $\dfrac{1}{a_n} \to 0$
   $\dfrac{1}{b_n} \to 0$
   Если $x_n > 0, x_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} \to +\infty$
   Если $x_n < 0, x_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} \to -\infty$
5. $\forall n : x_n \leq y_n, x \to \alpha, y_n \to \beta; \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \alpha \leq \beta$
6. $\begin{cases} \forall n : x_n \leq y_n \leq z_n \\ x_n \to \alpha, \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \\ z_n \to \alpha \end{cases} \Rightarrow y_n \to \alpha$

Замечание. $+\infty = +\infty$
$-\infty = -\infty$
$-\infty < +\infty$

Доказательство. (2, 6)

2 $\begin{cases} x \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists M : \forall n : |x_n - x| < M \Rightarrow x_n > x - M \\ \forall L \in \overline{\mathbb{R}} : \exists N : \forall n > N : a_n > L \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n + x_n > L + x - M$, где правая часть — любое число.

6 $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n > N_2 : z_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$
$N_0 = max(N_1, N_2)$

$$\forall n > N_0 : x_n \le y_n \le z_n \Rightarrow y_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

$\square$

3.7 Асимптотика

Определение 29. (О-большая и о-малая)

1. $x_n = o(1)$, если $x_n \to 0$
2. $y_n = O(1)$, если $\exists C : \forall n : |y_n| \le C$
3. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n : b_n \neq 0$, тогда:
   $a_n = o(b_n)$, если $\frac{a_n}{b_n} \to 0$
4. Пусть есть $\{c_n\}, \{d_n\}$, тогда:
   $c_n = O(d_n)$, если $\exists C : |c_n| \le C|d_n|$

Замечание. Это не равенство в привычном смысле, следует читать его только слева направо.

3.8 Монотонные последовательности

Определение 30. (монотонные последовательности)

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастает, если $\forall n : a_n \le a_{n+1}$ (возрастает строго если $a_n < a_{n+1}$)
- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает, если $\forall n : b_n \le b_{n+1}$

Замечание. Говорят, что поледовательнотсть c_n монотонна, если она либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает.

Теорема 21. (Теорема о пределе монотонной последовательности)

- Пусть есть последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Для того, чтобы монотонно возрастающая последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы последовательность была ограничена сверху.
- Для того, чтобы монотонно убывающая последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно, чтобы последовательность была ограничена снизу.

При этом справелдивы неравенства:

- $\forall m : c_m \le \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ — если последовательность возрастает. (или $<$ если строго возрастает)
- $\forall m : c_m \ge \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ — если последовательность убывает.

Доказательство.

1. Предположим, что проследовательность c_n не ограничена сверху, тогда:

   $\forall L \in \mathbb{R} : \exists N : c_N > L$

   $\forall n > N : c_n \ge c_{n-1} \ge c_{n-2} \ge ... \ge c_N + 1 \ge c_N > L$, значит $c_n > L$

   Значит по определению предела: $\lim c_n = +\infty$

2. Предположим теперь, что последовательность c_n возрастает и ограничена сверху, тогда:

   $\begin{cases} c_n \le c_{n+1} \\ \exists M : \forall n : c_n \le M \end{cases}$

   Пусть $E = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : \alpha = c_n\}$ — множество из всех элементов последовательности c_n.

   Значит E — ограничено сверху. Положим $C = \sup E$, тогда имеем $\forall n : c_n \le C$

   $\forall \varepsilon > 0 : C - \varepsilon$ — не верхняя граница, значит $\exists N : c_N > C - \varepsilon \Rightarrow \forall n > N : c_n \ge c_{n-1} \ge \ldots \ge c_N > C - \varepsilon \Rightarrow C - \varepsilon < c_n \le C < C + \varepsilon \Rightarrow |c_n - C| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = C$

   В обратную сторону: если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = C \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M : \forall n : |c_n - C| < M \Rightarrow \forall n : c_n \le C + M$

3. Доказательство для убывающей последовательности аналогично.

$\square$

Теорема 22. (Теорема о вложенных промежутках)
Пусть $\forall n : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ и $b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
Тогда $\exists! c : \forall n : c \in [a_n, b_n]$

Доказательство.

1. существование

   имеем неравенства:

   $$\forall n : \begin{cases} a_n \le a_{n+1} \\ b_n \ge b_{n+1} \\ a_n < b_n \end{cases} \Rightarrow a_n < b_1, b_n > a_1$$

   Тогда в силу возрастания a_n и убывания b_n по предыдущей теореме $\exists a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\exists b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

   По свойству перехода к пределу в неравенствах: $a_n < b_n \Rightarrow a \le b$

Имеем $\begin{cases} \forall n : a_n \geq a \\ \forall n : b \leq b_n \end{cases} \Rightarrow \forall n : b - a \leq b_n - a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty}(b-a) \leq \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ — в силу условия.

Значит $b - a = 0 \Rightarrow a = b \overset{def}{=} c$

Имеем $a_n \leq c \leq b_n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$

2. Единственность

   Если бы $\exists c_0 \in [a_n, b_n]$, то $|c_0 - c| \leq b_n - a_n \Rightarrow |c_0 - c| < \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow c_0 = c$

$\square$

Замечание. Условие замкнутости промежутков существенно:
Имеем $(0, \frac{1}{n+1}] \supset (0, \frac{1}{n}]$, $\frac{1}{n} - 0 \underset{n\to\infty}{\to} 0$
Но $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n}] = \varnothing$

3.9 Число e

Теорема 23. Пусть $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ и $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$
Тогда $\forall n : x_n < y_n$ и $x_n \to e, y_n \to e, 2 < e < 3$

Доказательство. Рассмотрим:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^{n+1} \cdot (\frac{n}{n-1})^n = (\frac{n}{n+1})^n \cdot (\frac{n}{n+1})^n \cdot (\frac{n}{n-1})^n =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2-1+1}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n$$

Возьмем за $x = \frac{1}{n^2-1}$, тогда по неравенству Бернулли:

$$\frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n > \frac{1}{n+1} \cdot (1 + \frac{n}{n^2-1}) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^2-1+n}{n^2-1} =$$

$$\frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$$

$\Rightarrow y_n < y_{n-1} \Rightarrow y_n$ — строго монотонно убывающая.

Теперь рассмотрим x_n : (считаем, что $n \geq 3$)

$$x_n = (1 + \frac{1}{n}^n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\frac{1}{n})^k = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{k! \cdot n^k} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot (1 - \frac{k-1}{n}) \cdot (1 - \frac{k-2}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{n})$$

(Продолжение на следующей лекции) □

Лекция 5: Продолжение

05.10.2023

Доказательство. (Продолжение доказательства)

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1 - \frac{k-1}{n+1}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{(n+1)!}(1 - \frac{n}{n+1}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) \quad (2)$$

$$\forall r > 0 : 1 - \frac{r}{n+1} > 1 - \frac{r}{n} \Rightarrow (1 - \frac{k-1}{n+1}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) > (1 - \frac{k-1}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{n}) \quad (1)$$

$(1), (2) \Rightarrow x_{n+1} > x_n$

Примем во внимание неравенства для y_n и неравенства для x_n. Тогда мы будем иметь следующее неравенство:

$$\Rightarrow x_1 < x_2 < \cdots < x_n < y_n < y_{n-1} < \cdots < y_1 \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow x_n < y_1, y_n > x, \forall n \quad (5)$$

Последовательность x_n строго возрастает и ограниченна сверху. Мы можем применить критерий существования конечного предела у строго монотонной возрастающей последовательности.

$$\exists \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

Если мы посмотрим на последовательность y_n, она ограничена снизу в отношении пять и мы знаем что она строго монотонно убвает. По теореме о предельной последовательности получаем, что:

$$\exists \lim_{n\ to\infty} y_n = b$$

Теперь,

$$b = \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 1+\cdot\lim_{n\to\infty}x_n = a$$

Таким образом,

$$a = b = e \tag{6}$$

.

$$(6) \Rightarrow x_n < e < y_n \forall n \tag{7}$$

$$(7) \Rightarrow e > x_1 = 2, e < y_5 < 3$$

$$y_5 = (\frac{6}{5})^6$$

$$e = 2.718...$$

□

Замечание. Число e — одно из фундаментальных констант на которой держится вся математика.

Первые две - это 0 и 1. А третья — это π

3.10 Критерий Коши, существование конечного предела последовательности

Теорема 24. Пусть имеется некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для того чтобы $\exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0, \exists N : \forall m, \forall n > N$:

$$|x_m - x_m| < \varepsilon \tag{8}$$

Замечание. В формулировке не сказано чему будет равен этот предел. Какой именно он будет - неизвесто. Известно только то что он существует. Это так называемая теорема существования.

Примечание. Необходимость означает что предел существует.

Доказательство. Докажем необходимость. Предположим, что

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \in \mathbb{R}$$

Тогда, по определению предела для любого $\varepsilon > 0 \exists N$ такой, что $\forall n > N$ выполнено

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

Тогда,

$$(9) \Rightarrow \text{при } n > N, m > N$$

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow (8)$$

То-есть, необходимость доказана. Если конечный предел существует, то соотношение 8 выполнено.

Теперь докажем достаточность.
Когда мы будем доказывать достаточность, то мы не знаем, существует предел или нет.

> **Замечание.** Не каждая последовательность имеет предел (например, $x_n = -1^n$).

Для доказательства мы будем использовать теорему Дедекинда.
Определим сечение множества вещественных чисел.
Нижний класс A — это

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists N : \forall n > N : x_n > \alpha\} \tag{10}$$

Верхний класс A'' — это

$$A' = \mathbb{R} \setminus A \tag{10'}$$

Множества, получившиеся в (10) и (10') - это сечения, и это нужно проверить.

- Возьмём $\varepsilon = 1$, тогда: $\exists N_0 : \forall m, n > N_0 : |x_m - x_n| < 1$
  В частности, при $m = N + 1$ и при $n > N + 1$ имеем

  $$|x_n - x_{N+1}| < 1 \Leftrightarrow x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1 \tag{11}$$

  $$(11) \Rightarrow x_{N+1} - 1 \in A \tag{12}$$

  С другой стороны,

  $$(11) \Rightarrow x_{N+1} + 1 \notin A, \text{ то-есть, } x_{N+1} + 1 \in A' \tag{13}$$

$$(12), (13) \Rightarrow A \neq \varnothing, A' \neq \varnothing$$

- Никакое из них не может быть множеством вещественных чисел.
  Давайте возьмём $\forall \alpha \in A, \forall \beta \in A'$. Нужно доказать, что α всегда меньше β. В этом состоит условие определения сечения.

  $$\alpha \in A = (10) > \exists N : \forall n > N x_n > \alpha \tag{14}$$

Если бы для любого $\forall n > N$ выполнялось $x_n > \beta$, то $\beta \in A$. Однако, это не так, т.к. $\beta \in A'$.

То-есть,

$$\exists n_0 > N : x_{n_0} \leq \beta \tag{15}$$

> **Примечание.** Если бы всё время неравенство было в другую сторону ($x_n > \beta$), тогда бы по определению (10), мы бы получили, что $\beta \in A$, но мы взяли $\beta \in A'$, то есть $\beta \notin A$, значит свойства выше выполнятся не может и выполняется свойство (15).

$$(14), (15) \Rightarrow \alpha \leq x_{n_0} \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta$$

То-есть, мы действительно получили сечение.

Теперь можно применить теорему Дедекинда. По теореме Дедекинда:

$$\exists a \in R : \forall \alpha \in A, \forall \beta \in A' : \alpha < a < \beta \tag{16}$$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$, тогда:

$$(8) \Rightarrow \exists N \text{ такое, что выполнено } (8)$$

$m = N + 1$
Тогда, $(8) \Rightarrow \forall n > N + 1$

$$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x_{N+1} - \varepsilon, x_{N+1} + \varepsilon) \tag{17}$$

Теперь, если посмотреть на соотношение (17),

$$(17) \Leftrightarrow x_n > x_{N+1} - \varepsilon \text{ и } x_n < x_{N+1} + \varepsilon \tag{18}$$

> **Примечание.** при $\forall n > N + 1$, выполнена правая счасть неравенства (17) $x_n > x_{N+1} - \varepsilon$.

Теперь рассмотрим (10) и (18).

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \in A \tag{19}$$

Теперь обратимся ко второму неравенству в соотношении (18).

Получается, что правая часть неравенства $x_n < x_{N+1}$ принадлежит A', потому что если бы принадлежало A, должно было бы быть другое неравенство в другую сторону

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon \in A' \tag{20}$$

Возьмём $(19) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon$ как α,
а $(20) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon$ как β,
Тогда, применяем (16), получаем что:

$$(16), (19), (20) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \leq a \leq x_{N+1} + \varepsilon \tag{21}$$

Обратимся к соотношению (17)

$$(17) : x_{N+1} < x_n < x_{N+1} + \varepsilon$$

Получаем, что a удовлетворяет этому неравенству и x_n удовлетворяет этому неравенству (лежит на промежутке) при $\forall n > N + 1$.

Поэтому, (21) и (17) $\Rightarrow$

$$|x_n - a| < 2\varepsilon = (x_{N+1} + \varepsilon) - (x_{N+1} - \varepsilon) \tag{22}$$

Примечание. То-есть, если x_n и a лежат на этом промежутке, то длина отрезка между a и x_n меньше чем длина промежутка, на котором они лежат. Длина промежутка равна 2ε

Мы получили, что существует некоторое a такое, что для любого n > N+1 выполняется неравенство (22). А это определение предела.

По определению предела,

$$(22) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

Тем самым, достаточность в критерии доказана.

□

3.11 Подпоследовательности

Определение 31. Пусть есть отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и нетождественное отображение $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. При этом выполняется: $\forall n < m : g(n) < g(m)$

Тогда последовательность отображений $f(g) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — подпоследовательность.

Примечание. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Берем $g(1) = n_1, g(2) = n_2, \ldots, g(k) = n_k$ и получаем подпоследовательность:

$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$

Обозначение. Если эти номера определены, то последовательность обозначают как: $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

Определение 32. Предел последовательности определяется как предел подпоследовательности по нижним индексам.

Если есть такая последовательность, говорят что:

$A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом, то есть $x_{n_k} \to A$, при $k \to \infty$, если $\forall \Omega(A)\ \exists K : \forall k > K : x_{n_k} \in \Omega(A)$

Теорема 25. Пусть $x_n \to A$, при $n \to \infty$, где $A \in \overline{\mathbb{R}}$ и пусть мы имеем любую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, выбранную из этой последовательности.

Тогда $x_{n_k} \to A$, при $k \to \infty$.

Доказательство. Возьмём любую окрестность A.

$$\forall \Omega(A) \Rightarrow \exists N : \forall n > N : x_n \in \Omega(A)$$

Воспользуемся тем, что поледовательность n_k строго возрастает:

$$n_1 \geq 1, n_2 > n_1, n_2 \geq 2$$

Тогда по индукции:

$$n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > n_k \geq k \to n_{k+1} > k+1$$

То есть, если мы выберем подпоследовательность, то n_k будет больше или равно k. Начиная с какого-то индекса, будет строго больше.

Возьмём $k = N$.

Тогда, при $k > N : n_k \geq k > N$

То есть, при $k > N : x_{n_k} \in \Omega(A)$

$$\Rightarrow x_{n_k} \to A, \text{ при } k \to \infty$$

□

Теорема 26. (Больцано-Вейерштрасса)

Пусть имеется некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая ограничена, т.е. $\forall n : a \leq x_n \leq b$.

Тогда: $\exists \alpha \in [a, b]$ и $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что: $x_{n_k} \to \alpha$ при $k \to \infty$

> **Замечание.** Такое α может быть только одним, если последовательность ограниченна и имеет некоторый предел.

Доказательство. определим последовательность промежутков.

$$I_1 = [a, b]$$

$$I_2' = [a, \frac{a+b}{2}], I_2'' = [\frac{a+b}{2}, b]$$

Рассмотрим множества номеров n:

$$\begin{cases} \text{таких, что } : x_n \in I_2' \\ \text{таких, что } : x_n \in I_2'' \end{cases} \text{ — какое-то из них, или оба бесконечны}$$

Если бы первое и второе множество n выше было конечно, то мы получили бы, что последовательность, лежащая в I_1 конечна, что противоречит условию. Тогда возьмем I_2 — одно из множеств из I_1', I_2''

Примечание. Это может быть либо I_1', либо I_2', либо I_2'' если оба удовлетворяем, то любой возьмем. Произвольно. Можно например всегда брать только I_2', но по крайней мере для одного, таких номеров будет бесконечно много.

Имеется некоторое множество натуральных чисел, таких что x_n принадлежит I_2

Пусть n_1 - минимальное $n : x_n \in I_2$

Возьмем $I_2 = [a_2, b_2]$ и поделим этот отрезок на:

$I_3' = [a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

$I_3'' = [\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

По крайней мере в одном из этих отрезков тоже будет находится бесконечное множество номеров n.

Пусть I_3 - тот из I_3', I_3'', для которого $\exists$ бесконечно n таких что $x_n \in I_3$

n_2 - минимальное n такое, что $x_n \in I_3$, и $n_2 > n_1$.

И так далее по индукции. Предположим, что мы уже выбрали промежутки

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_m \tag{3'}$$

$$I_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\frac{b-a}{2^k}}_{=I_k}) \tag{3'}$$

$$n_1 < n_2 < \dots n_m < n_{m+1} \tag{4}$$

$$x_{n_1} \in I_2, x_{n_2} \in I_2, \dots x_{n_{m-1}} \in I_m \tag{5}$$

Предположим, что по индукции такое построение уже произошло

Пусть

$$I_m = [a_m, b_m] \tag{6}$$

Существует бесконечно много n, таких что

$$x_n \in I_m \tag{7}$$

Предположим, что это проделано для n и будем выполнять индукционный шаг.

$$I'_{m+1} = [a_m, \frac{a_m + b_m}{2}]$$

$$I''_{m+1} = [\frac{a_m + b_m}{2}, b_m]$$

Мы снова взяли и разделили промежуток $[a_m, b_m]$ пополам.

Рассмотрим множество номеров в множестве n таких, что $x_n \in I'_{m+1}$ и n такие что $x_n \in I''_{m+1}$

Тогда по определению I_{m+1} - тот из I'_m, I''_m, для которого $\exists$ бесконечно много n таких что $x_n \in I_{m+1}$

Пускай n_{m+1} - это наименьшее n такое что $x_{n_m} \in I_{m+1}$ и $n_{m+1} > n_m$

И так мы получили в итоге этих рассуждений:

$$n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$$

$$x_{n_m} \in I_{m+1}$$

$$(3) \Rightarrow \text{ длина } I_m \to 0, \text{ при } m \to \infty \tag{8}$$

Получается, что это вложенные промежутки.
По теореме о вложенных промежутках:

$$\exists! \ \alpha \text{ такое что } \alpha \in I_m \forall m \tag{9}$$

$$(5) \Rightarrow x_{n_m} \in I_{m+1}$$

Точка α лежит на этом промежутке и точка с номером x_{n_m} лежит на этом же промежутке, справедливо неравенство:

$$|x_{n_m} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^m} \tag{10}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists k : \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \tag{11}$$

$$(10), (11) \Rightarrow |x_{n_m} - \alpha| < \varepsilon \text{ при } m > k$$

Таким образом мы доказали, что существует подпоследовательность у которой есть конечный предел.
$a \in I_1$, т.е. $a \leq \alpha \leq \varepsilon$ □

3.12 Верхний и нижний предел последовательности

Определение 33. Пусть есть произвольная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху, то верхний предел

$$\varlimsup_{n\to\infty} := +\infty$$

.

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху, то верхний предел

$$\varlimsup_{n\to\infty} := \lim_{n\to\infty} (\sup\{x_m : m \geq n\})$$

.

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена снизу, то нижний предел

$$\varliminf_{n\to\infty} := -\infty$$

.

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу, то нижний предел

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} := \lim_{n\to\infty}(\inf\{x_m : m \geq n\})$$

.

Таким образом,если мы рассматриваем любую последовательность x_n, то у неё существуют верхний и нижний предел.

Замечание. Нижний и верхний пределы в дальнейшем будут обозначаться как lim inf и lim sup соответственно. (простите, так удобней)

3.13 Свойства верхних и нижних пределов

Замечание. Пусть есть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определим E_n как множество $\{x_m : m \geq n\}, h_n = \inf E_n, g_n = \sup E_n$. Справедливо неравенство:

$$h_n \leq g_n, \text{ откуда получаем: } \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

Теорема 27. Есть некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда:

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{R} \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n \tag{13}$$

Доказательство. Предположим, что существует предел. Хотим проверить, что верхний предел равен нижнему пределу.

$$\forall\varepsilon > 0\exists N : \forall n > N|x_n - a| < \varepsilon$$

Посмотрим на определение g_n и h_n.

$$(14) \Rightarrow \text{ при } n > N : E_n \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup x_n - \liminf x_n \leq 2\varepsilon \tag{15}$$

Получается, что некоторое не отрицательное число не превосходит 2ε при любом положительном ε. Это может быть только тогда, когда это число равно 0.

$$(15) \Rightarrow limsupx_n = \liminf x_n = \lim x_n$$

В обратную сторону:
$\forall n : g_n \leq a, h_n \geq a$
Рассмотрим последовательности g_n, h_n, такие, что:

$$g_n \to a, h_n \to a$$

По определенеию предела: $\begin{cases} \forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 : a - \varepsilon < g_n < a + \varepsilon \\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N_2 : a - \varepsilon < h_n < a + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$
$a - \varepsilon < \inf E_n \leq \sup E_n < a + \varepsilon$

При $N = \max(N_1, N_2)$ из этого следует, что $\forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$

а это значит, что: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \limsup x_n = \liminf x_n$

□

Лекция 6: Верхний и нижний пределы. Предел функции.

12.10.2023

Теорема 28. (свойства пределов) Пусть есть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\exists N : \forall n > N : a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon \quad (1)$$

$$\forall N \exists n > N : a_n > \limsup_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \quad (2)$$

$$\exists N_2 : \forall n > N_2 : a_n > \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \quad (3)$$

$$\forall N_3 \exists n > N_3 : a_n < \liminf_{n\to\infty} a_n + \varepsilon \quad (4)$$

Доказательство. (Все пределы при $n \to \infty$)

Докажем только (1) и (2), другие свойства доказываются аналогично.

1. Возьмем $E_n = \{a_n : m \geq n\}$ и $g_n = \sup E_n$.
   Тогда $\limsup a_n = \lim g_n$, и $\forall n : a_n \leq g_n$.
   При этом $\exists N : \forall n > N : g_n < g_n + \varepsilon$
   Имеем $\forall n > N : a_n \leq g_n < g_n + \varepsilon = \limsup a_n + \varepsilon$
2. Имеем $g_N = \sup E_N$ и $g_{N+1} \geq g_N$,
   значит $\exists a_n \in E_{N+1} : a_n \geq g_n > g_n - \varepsilon \Rightarrow$
   $\Rightarrow a_n > \limsup a_n - \varepsilon$

□

Свойства. (Без доказательств)

Пусть есть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда:

$$\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} \limsup a_n$$

$$\exists \{a_{n_l}\}_{l=1}^{\infty} : a_{n_l} \underset{l\to\infty}{\to} \liminf a_n$$

Теорема 29. (Последнее свойство) Пусть есть подпоследовательность

$$\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} : \exists \lim_{m\to\infty} a_{n_m} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{m\to\infty} a_{n_m} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Доказательство. Пусть $h_n = \inf E_n, g_n = \sup E_n$. Имеем неравенство:

$$h_{n_m} \leq a_{n_m} \leq g_{n_m} \Rightarrow \lim_{m\to\infty} h_{n_m} \leq \lim_{m\to\infty} a_{n_m} \leq \lim_{m\to\infty} g_{n_m}$$

.

В силу существования пределов у последовательностей g_n, h_n имеем:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{m\to\infty} a_{n_m} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

□

Глава 4

Функции. Предел функции, монотонность, непрерывность

4.1 Предел функции

Определение 34. Пусть X — метрическтое простанство с метрикой ρ, $\alpha \in X$. Окрестностью точки α называется:
$\omega(\alpha) = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 : \rho(x, \alpha) < \varepsilon\}$

Определение 35. α — точка сгущения множества X, если:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_1 \in X : x_1 \neq \alpha \wedge \rho(x_1, \alpha) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \omega(\alpha) \ \exists x_1 \in \omega(\alpha), x_1 \neq \alpha$

Определение 36. α — точка сгущения для $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, если:
$\forall \omega(\alpha) \ \exists b \in (E \cap \omega(\alpha)), b \neq \alpha$

Пример. $E = \mathbb{N}, +\infty$ — точка сгущения для E.

Теорема 30. Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ, $\alpha \in X$ — точка сгущения, тогда:

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \underset{n \to \infty}{\to} \alpha, \ \forall x_n : x_n \neq \alpha, x_n \in X$$

Доказательство. Возьмем $x_1 \neq \alpha$, пусть $\varepsilon_1 = \rho(x_1, \alpha) > 0$. $\exists x_2 \neq \alpha : \rho(x_2, \alpha) < \frac{1}{2}\varepsilon_1$. Положим $\varepsilon_2 = \rho(x_2, \varepsilon)$.

Пусть уже выбрали выбрали $x_1, \ldots, x_n$ так, что $x_k \neq \alpha, 2 \leq k \leq n, \varepsilon_k = \rho(x_k, \alpha) < \frac{1}{2}\varepsilon_{k-1}$

Тогда $\exists x_{n+1} \neq \alpha : \rho(x_{n+1}, \alpha) < \frac{1}{2}\varepsilon_n$.

Имеем $\varepsilon_n < \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1} < \frac{1}{2^2}\varepsilon_{n-2} < \ldots < \frac{1}{2^{n-1}}\varepsilon_1$, т.е. $\rho(x_n, \alpha) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha$ □

Определение 37. (Предел функции) Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\rho, \alpha \in X$ — точка сгущения, определна функция $f : X \to \mathbb{R}$ и $A \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда:

$$f(x) \underset{x\to\alpha}{\to} A \Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha} f(x) = A, \text{ если выполнено:}$$

$$\forall\omega(A)\ \exists\Omega(\alpha) : \forall x \in \Omega(\alpha), x \neq \alpha : f(x) \in \omega(A)$$

Теорема 31. (единственность предела) Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\rho, \alpha \in X$ — точка сгущения, определна функция $f : X \to \mathbb{R}$. Тогда:

$$\exists! A \in \overline{\mathbb{R}} : \lim_{x\to\alpha} f(x) = A$$

Доказательство. Предположим, что есть $A, B \in \overline{\mathbb{R}}, B \neq A$ и
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = B$.
Тогда: $\exists\omega_1(A), \omega_2(B) : (\omega_1(A) \cap \omega_2(B)) = \varnothing$
А также: $\begin{cases} \exists\Omega_1(\alpha) : \forall x \in \Omega_1(\alpha) : f(x) \in \omega_1(A) \\ \exists\Omega_2(\alpha) : \forall x \in \Omega_2(\alpha) : f(x) \in \omega_2(B) \end{cases}$
Рассмотрим $\Omega(\alpha) = \Omega_1(\alpha) \cap \Omega_2(\alpha)$:
$\exists x \in \Omega(\alpha), x \neq \alpha : \begin{cases} f(x) \in \omega_1(A) \\ f(x) \in \omega_2(B) \end{cases}$ — противоречие, т.к. $\omega_1(A) \cap \omega_2(B) = \varnothing$. □

4.2 Односторонние пределы

Определение 38. Пусть есть $E = (p, q), p, q \in \mathbb{R}, a \in E, E_- = (p, a), E_+ = (a, q)$
А также определены функции:
$f : E \to \mathbb{R}$.
$f_- : E_- \to \mathbb{R}, \quad f_-(x) = f(x)$, при $x \in E_-$
$f_+ : E_+ \to \mathbb{R}, \quad f_+(x) = f(x)$, при $x \in E_+$
Тогда пределом справа функции f в точке a называется:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = c_+$$

А пределом слева функции f в точке a называется:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = c_-$$

Теорема 32. (обозначения из определения выше)

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x)$$

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$. Тогда:

$\forall \omega(c)\ \exists \Omega(a) : \forall x \in \Omega(a) \cap E, x \neq a : f(x) \in \omega(c)$

При этом $\begin{cases} \Omega(a) \cap E_+ \in \Omega(a) \cap E \\ \Omega(a) \cap E_- \in \Omega(a) \cap E \end{cases}$

Значит получаем $\begin{cases} \forall x \in \Omega(a) \cap E_+ : f(x) \in \omega(c) \\ \forall x \in \Omega(a) \cap E_- : f(x) \in \omega(c) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$

$\Leftarrow$: Пусть $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = c$. Тогда:

$\begin{cases} \forall \omega(c) \exists \Omega(a) : \forall x \in \Omega_1(a) \cap E_+, x \neq a : f(x) \in \omega(c) \\ \forall \omega(c) \exists \Omega(a) : \forall x \in \Omega_2(a) \cap E_-, x \neq a : f(x) \in \omega(c) \end{cases}$

Возьмем $\Omega(a) = \Omega_1(a) \cap \Omega_2(a)$

Имеем $((\Omega_1(a) \cap E_+) \setminus \{a\}) \cup ((\Omega_2(a) \cap E_-) \setminus \{a\}) = ((\Omega(a) \cap E) \setminus \{a\})$

Тогда справедливо: $\forall x \in \Omega(a) \cap E, x \neq a : f(x) \in \omega(c)$

$\square$

4.3 Существование предела

Теорема 33. (Соответствие предела функции пределу последовательности) Пусть есть X — метрическое пространство с метрикой $\rho, \alpha \in X$ — точка сгущения, определна функция $F : X \to \mathbb{R}$.

И пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}, a$ — точка сгущения, определена функция $f : E \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим последовательности:
$\{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}, x_n \to \alpha, \forall n : x_n \neq \alpha$
$\{f(b_n)\}_{n=1}^{\infty}, b_n \to a, \forall n : b_n \neq a$
Тогда:

$$\exists \lim_{x \to \alpha} F(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\} : F(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} A$$

$$\exists \lim_{b \to a} f(x) = c \Leftrightarrow \forall \{b_n\} : f(b_n) \underset{n \to \infty}{\to} A$$

Доказательство. (Будем доказывать для метрического пространства, для множества E доказательство аналогично)

$\Rightarrow$: Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} F(x) = A$. Тогда:

$\forall\omega(A)\ \exists\Omega(\alpha) : \forall x \in \dot{\Omega}(\alpha) : F(x) \in \omega(A)$

Поскольку $x_n \to \alpha$, то $\exists N : \forall n > N : x_n \in \Omega(\alpha)$

Имеем, что $\forall n > N : F(x_n) \in \omega(A) \Rightarrow F(x_n) \to A$

$\Leftarrow$: Предположим, что $\forall\{x_n\} : F(x_n) \to A$ — неверно. Тогда:

$\exists\omega_0(A) : \forall\Omega_0(\alpha)\ \exists x \in \dot{\Omega}_0(\alpha) : F(x) \notin \omega_0(A)$

Будем брать $\Omega_{1/n}(\alpha) = \{x \in X : \rho(x,\alpha) < \frac{1}{n}\}$

$\exists x_n \in \ldots\Omega_{1/n}(\alpha) : F(x) \notin \omega_0(A)$

Это означает, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha \Rightarrow F(x_n) \underset{n\to\infty}{\not\to} A$ — противоречие.

$\square$

4.4 Свойства пределов функции

Свойства. (обозначения как в теореме выше) Для метрического пространства и для множества E:

1. $F(x) \equiv A \Rightarrow F(x) \to A, A \in \overline{\mathbb{R}}$
2. $\lim qF(x) = q\lim F(x), q \in \mathbb{R}$
3. $\lim(F(x) + G(x)) = \lim F(x) + \lim G(x)$
4. $\lim(F(x) \cdot G(x)) = \lim F(x) \cdot \lim G(x)$
5. $\lim \frac{1}{F(x)} = \frac{1}{\lim F(x)}$, если $\lim F(x) \neq 0$
6. $\lim \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\lim F(x)}{\lim G(x)}$, если $\lim G(x) \neq 0$
7. $\forall x : F(x) \leq G(x) \Rightarrow \lim F(x) \leq \lim G(x)$
8. $F(x) \leq G(x) \leq H(x)$ и $\lim F(x) = \lim H(x) \Rightarrow \exists\lim G(x) = \lim F(x)$

UPD: для множества E свойства аналогичны.

Доказательство. Все эти свойства доказываются аналогично свойствам пределов последовательностей, так как была доказана теорема о соответствии предела функции пределу последовательности.

Докажем 5 свойство для метрического пространства:
Возьмем последовательность $\{x_n\}$ из теоремы.

По теореме: $F(x_n) \to A, A \neq 0$
Получаем, что $\forall n : F(x_n) \neq 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{F(x_n)} = \frac{1}{A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \alpha} \frac{1}{F(x)} = \frac{1}{A}$$

□

Лекция 7: Монотонность функции. Критерий Коши. Замечательные пределы.

19.10.2023

4.5 Монотонность функции

Определение 39. Пусть задана функция $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Функция называется (строго, если строгий знак) монотонно возрастающей, если:

$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

И (строго, если строгий знак) монотонно убывающей, если:

$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Замечание. Если функция монотонна, то она либо возрастающая, либо убывающая.

Теорема 34. Пусть a — точка сгущения множества E и $\forall x \in E : x < a$.

Задана функция $f : E \to \mathbb{R}$, f — монотонна, тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

Если f — монотонно возрастающая, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in E : f(x) \leq M \tag{1}$$

Если f — монотонно убывающая, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in E : f(x) \geq M \tag{2}$$

Пусть $a_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ — точка сгущения множества E_1 и $\forall x \in E : x > a$.

Если f — монотонно возрастающая, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in E : f(x) \geq M \tag{3}$$

Если f — монотонно убывающая, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in E : f(x) \leq M \tag{4}$$

Доказательство. Докажем (1). Остальные доказываются аналогично.

Пусть $\nexists M$ из (1), тогда $\forall L > 0 :\ \exists x_0 \in E : f(x_0) > L \Rightarrow \forall x > x_0 : f(x) \geq f(x_0) > L \Rightarrow f(x) \underset{x \to \infty}{\to} +\infty$

Пусть $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in E : f(x) \leq M$. Пусть $c = \sup\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in E : f(x) = y\}$. Тогда:

$c \leq M, \forall x \in E : f(x) \leq c$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$, тогда $\exists x_1 \in E : f(x_1) > c - \varepsilon$. Имеем неравенство:

$$c-\varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq c < c+\varepsilon \Rightarrow f(x) \underset{x\to\infty}{\to} c, \text{ при этом } f(x) \leq \lim_{x\to\infty} f(x)$$

$\square$

4.6 Критерий Коши

Теорема 35. (Критерий Коши) Пусть есть множество $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — точка сгущения E. Тогда:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \omega(a) : \forall x_1, x_2 \in \dot{\omega}(a) \cap E : |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = c \in \mathbb{R}$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \omega(a) : \forall x \in \dot{\omega}(a) \cap E : |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$

Имеем, что $\forall x_1, x_2 \in \dot{\omega}(a) \cap E : |f(x_2) - f(x_1)| = |(f(x_2) - c) - (f(x_1) - c)| \leq |f(x_2) - c| + |f(x_1) - c| < \varepsilon$

$\Leftarrow$: Возьмем $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in E, x_n \neq a, x_n \underset{x\to\infty}{\to} a$. Возьмем окрестность из условия, тогда:

$\exists N : \forall n > N : x_n \in \omega(a)$, значит, $\forall n, m > N, \varepsilon > 0 : |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ — выполнен критерий Коши для последовательностей. А значит:

$\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \in \mathbb{R}$ — необоходимо проверить, что все последовательности сходятся к c.

Предположим, что есть такая последовательность $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}, x'_n \in E, x'_n \neq a, x'_n \underset{x'\to\infty}{\to} a$, что $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = c' \neq c$

Тогда возьмем последовательность: $\begin{cases} \overline{x}_{2n-1} = x_n \\ \overline{x}_{2n} = x'_n \end{cases}$

$\overline{x}_n \to a \overline{x}_n \in E, \overline{x}_n \neq a$, тогда по критерию Коши $\lim_{n\to\infty} f(\overline{x}_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} f(\overline{x}_{2n}) = \overline{c}$, но $\lim_{n\to\infty} f(\overline{x}_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ — противоречие.

$\square$

4.7 Некоторые существенные неравенства

Свойство. (неравенство для $\ln(1+x)$) Пусть $0 < x \le \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}, n \ge 2$. Тогда имеем неравенства:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \ge 1 \Leftrightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \quad (2)$$

$$\frac{1}{x} - 1 < n \le \frac{1}{x} \quad (3)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \ln(x+1) \le \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1-x}{x}} = \frac{x}{1-x} \quad (4)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \ln(x+1) > \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+2} \ge \frac{1}{\frac{1}{x}+2} = \frac{x}{1+2x} \quad (5)$$

$$\text{т.е. при } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ имеем: } \frac{x}{1+2x} < \ln(1+x) < \frac{1}{1-x} \quad (6)$$

Пусть теперь $-\frac{1}{3} \le x < 0$ (7), $y > 0$ и выполнено $1 + x = \frac{1}{1+y}$ (8)

$$(7),(8) \Rightarrow 0 < y \le \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$(6),(8),(9) \Rightarrow \ln(1+x) = \ln\left(\frac{1}{1+y}\right) = -\ln(1+y) < -\frac{1}{1+2y} = \frac{-\frac{x}{1+x}}{1-\frac{2x}{1+x}} = \frac{x}{1-x} \quad (10)$$

$$(10) \Rightarrow \ln(1+x) < \frac{x}{1-x} \quad (11)$$

$$(6),(8),(9) \Rightarrow \ln(1+x) = -\ln(1+y) > -\frac{y}{1-y} = \frac{-\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x} \quad (12)$$

$$(10),(12) \Rightarrow \frac{1}{1+2x} < \ln(1+x) < \frac{x}{1-x} \quad (13)$$

$$(6),(13) \Rightarrow \text{ при } -\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}, x \ne 0 : \frac{1}{1+2x} < \ln(1+x) < \frac{x}{1-x} \quad (14)$$

> **Замечание.** (2 полезных неравенства (15))
> при $x > 0 : \frac{1}{1+2x} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2}$
> при $x < 0 : -\frac{1}{4} \le \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le x$

Свойство. (неравенство для экспоненты)
Возьмем $y = \ln(1+x)$, тогда $x = e^y - 1$:

$$(15) \Rightarrow \text{ при } y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right], y \neq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], x \neq 0 \tag{16}$$

$$\text{при (16:)(13)} \Leftrightarrow \frac{e^y - 1}{1 + 2(e^y - 1)} < y < \frac{e^y - 1}{1 - (e^y - 1)} \Leftrightarrow \frac{e^y - 1}{2e^y - 1} < y < \frac{e^y - 1}{-e^y + 2} \tag{17}$$

$$(17) \Rightarrow e^y - 1 > y(2 - e^y) \Leftrightarrow e^y(1+y) > 1 + 2y \Leftrightarrow e^y > \frac{1+2y}{1+y} \tag{18}$$

$$(17) \Rightarrow e^y - 1 < y(2e^y - 1) \Leftrightarrow e^y < \frac{1-y}{1-2y} \tag{19}$$

$$(18), (19) \text{ при } y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right], y \neq 0 : \frac{1+2y}{1+y} < e^y < \frac{1-y}{1-2y} \tag{20}$$

$$(20) \Rightarrow \text{ при } |x| \leq \frac{1}{3} : \frac{-2|x|}{1-2|x|} < \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 < \frac{2|x|}{1-2|x|} \tag{21}$$

Замечание.

$$|x| \leq \frac{1}{10}, x \neq 0 \Rightarrow \frac{2|x|}{1-2|x|} \leq \frac{1}{4} \tag{22}$$

Свойство. (неравенство для $(1+x)^{\frac{1}{x}}$)

$$(22) \Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{1 + \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)}$$

$$(21) \Rightarrow e^{1 - \frac{2|x|}{1-2|x|}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e^{1 + \frac{2|x|}{1-2|x|}} \tag{23}$$

$$(18), (22) \Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{x}} > e \cdot \frac{1 + 2 \cdot \left(-\frac{2|x|}{1-2|x|}\right)}{1 + \left(-\frac{2|x|}{1-2|x|}\right)} = e \cdot \frac{1 - 6|x|}{1 - 4|x|} \tag{24}$$

$$(18), (22), (23) \Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{x}} < e \cdot \frac{1 - \left(-\frac{2|x|}{1-2|x|}\right)}{1 - 2 \cdot \left(-\frac{2|x|}{1-2|x|}\right)} = e \cdot \frac{1 - 4|x|}{1 - 6|x|} \tag{25}$$

$$(24), (25) \Rightarrow e \cdot \frac{1 - 6|x|}{1 - 4|x|} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e \cdot \frac{1 - 4|x|}{1 - 6|x|} \tag{26}$$

4.8 Замечательные пределы

Теорема 36. (Следствие из второго замечательного предела)

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$$

Доказательство. Возьмем $f(x) = 1-\frac{2|x|}{1-2|x|}, g(x) =, h(x) = 1+\frac{2|x|}{1-2|x|}, \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$

Из (21) имеем неравенство:

$$1 - \frac{2|x|}{1-2|x|} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 + \frac{2|x|}{1-2|x|}$$

По теореме о двух милиционерах получаем, что:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$$

□

Теорема 37. (Снова следствие из второго замечательного предела)

$$\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$$

Доказательство. Из (20) получаем:

$$\frac{1+2x}{1+x} - 1 < e^x - 1 < \frac{1-x}{1-2x} - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{1+x} < e^x - 1 < \frac{x}{1-2x} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{2|x|}{1-2|x|} < \frac{e^x-1}{x} < 1 + \frac{2|x|}{1-2|x|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1 \text{ — аналогично пределу выше}$$

□

Теорема 38. (Второй замечательный предел)

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\to} e$$

Доказательство. (23):

$$e^{1-\frac{2|x|}{1-2|x|}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e^{1+\frac{2|x|}{1-2|x|}}$$

Значит, по теореме о двух милиционерах аналогично двум предыдущим пределам:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\to} e$$

$\square$

Теорема 39. (И снова следствие из второго замечательного предела)

$$\frac{(1+x)^r - 1}{x} \underset{x\to 0}{\to} r$$

Доказательство. Пусть $x_n \to 0, \forall n : x_n \neq 0$ и $y_n = \ln(1+x_n), y_n \neq 0$
При $x_n \to 0, y_n \to 0$:

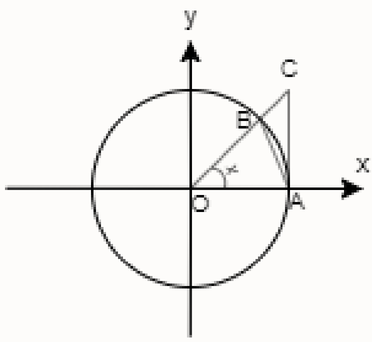
$$\frac{(1+x_n)^r - 1}{x_n} = \frac{e^{r\ln(1+x_n)}}{x_n} = \frac{e^{ry_n} - 1}{x_n} = \frac{e^{ry_n} - 1}{r \cdot y_n} \cdot r\frac{y_n}{x_n} = r$$

$\square$

Теорема 40. (Первый замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. (Простите за шакалов, я не смог засунуть сюда вектор, поэтому это всратая растровая картинка. (может исправим...))



Пусть дан угол $x : 0 < x < \frac{\pi}{2}$, тогда.

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сектора } OAB} < S_{\triangle AOC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2} < \tan x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

При $1 < x \leq 1$:

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} > \sqrt{1-x^2} \geq 1 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x > x\cos x > x(1-x)$$

Значит получаем неравенство:

$$1 - x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

При $|x| < 1, x \neq 0$ неравенство имеет вид:

$$1 - |x| < \frac{\sin x}{x} < 1$$

А значит по теореме о двух милиционерах:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

□

Лекция 8: Непрерывность. Точки разрыва.

26.10.2023

4.9 Непрерывность функции

Определение 40. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$ и X — метрическое пространство с метрикой ρ, A — точка сгущения. Тогда f непрерывна в точке сгущения a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Определение 41. (определение в другом виде)

- на языке $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, \rho(x, A) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(A)| < \varepsilon$;
- окрестности: $\forall \omega(f(A)) \exists \Omega(A) : \forall x \in \Omega(A) : f(x) \in \omega(f(A))$

4.10 Арифметические свойства функций, непрерывных в точке

Свойства. Задано метрическое пространство X и функция f. Справедливы следующие свойства:

1. $f(x) \equiv c, \forall x \in X \Rightarrow f-$ непрерывна в A
2. f - непрерывно в $A \Rightarrow cf$ непрерывно в A
3. f, g непрерывны в $A \Rightarrow f + g$ непрерывна в A
4. f, g непрерывна в $A \Rightarrow fg$ непрерывна в A

5. f непрерывна в A, $f(x) \neq 0, \forall x \in X \Rightarrow \dfrac{1}{f}$ непрерывна в A

6. f, как и в 5 g непрерывна в $A \Rightarrow \dfrac{g}{f}$ непрерывна в A

Доказательство. Докажем (5), остальное предоставляется читателю в качестве упражнения ⊙ ⌣ ⊙.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(A) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to A} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f(x)}$ □

4.11 Непрерывность композиции функций

Теорема 41. (Теорема о непрерывности композиции функций)

Пусть $E \subset \mathbb{R}, a \in E, a-$ точка сгущения E, $F \subset \mathbb{R}, b \in F, b-$ точка сгущения F и определены неперывные в a и b соответственно функции $f : E \to \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \in F, f(a) = b, g : F \to \mathbb{R}$.

Тогда $h(x) = g(f(x)), h : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в a.

Доказательство.

$$h(a) = g(f(a)) = g(b) \tag{5}$$

$$\text{Возьмем } \forall\omega : (h(a)) = \omega(g(b)) \text{ по (5). Тогда:}$$

$$\exists\Omega(b) : \forall y \in \Omega(b) \cap F : g(y) \in \omega(g(b)) \tag{6}$$

$$\text{По условию: } b = f(a), \text{ тогда: } \Omega(b) = \Omega(f(a))$$

$$\exists\lambda(a) \text{ — окрестность а: } \forall x \in E \cap \lambda(a) : f(x) \in \Omega(f(a)) \tag{7}$$

$$(7) \Rightarrow \forall x \in E \cap \lambda(a) : f(x) \in \Omega(f(a)) \cap F = \Omega(b) \cap F$$

$$(6) \Rightarrow g(f(x)) \in \omega(g(b)) = \omega(h(a))$$

Значит имеем:

$$g(f(x)) = h(x) \in \omega(h(a))$$

□

Определение 42. $f : X \to \mathbb{R}, f$ непрерывно на X, если она непрерывна в каждой точке сгущения множества X

Обозначается как $f \in C(X)$ $(a, b) = [a, b]$

Пример. (Непрерывные функции)

1. $f(x) \equiv c, x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = x, f \in C(\mathbb{R})$
3. $x^2 = x \cdot x \in C(\mathbb{R}), x^{n+1} = x^n \cdot x \in C(\mathbb{R})$

4. $c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n \in C(\mathbb{R})$

5. $x \neq 0 \Rightarrow x^n \neq 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{1}{x^n} \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}$

6. Пусть $p(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n$, пусть $a_1, \ldots, a_m, m \leq n, a_k \neq a_e, k \neq l-$ все числа: $p(a_k) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{p(x)} \in C(\mathbb{R} \setminus U_{k=1}^m \{a_k\}$

7. $p(x)$, как в (6), $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_xx^t$
   $\dfrac{q(x)}{p(x)} \in C(\mathbb{R} \setminus U_{k=1}^m \{a_k\})$

8. $f(x) = e^x$
   из прошлой лекции: $\lim\limits_{h \to 0} e^h = 1 = e^0 \Rightarrow e^x-$ непрерывна в 0
   Рассмотрим $\forall x_0 \neq 0 \Rightarrow e^x = e^{x_0} \cdot e^{x-x_0}(x - x_0 \in C(\mathbb{R})) \Rightarrow$ непрерывно в $x_0 \Rightarrow e^x \in C(\mathbb{R})$

9. $(\lim\limits_{h \to 0} \ln(1+h) = 0 = \ln 1 \quad \ln(1+h) = \dfrac{\ln(1+h)}{h}h \Rightarrow \ln x-$ непрерывно при $x = 1)$
   $x_0 \neq_1, x_0 > 0, \ln x = \ln \dfrac{x}{x_0} + \ln x_0$
   $\dfrac{x}{x_0} \in C(\mathbb{R}), \quad \dfrac{x_0}{x_0} = 1 \Rightarrow \ln x-$ непрерывен при $x = x_0 \Rightarrow \ln x \in C(\{x : x > 0\})$

10. $x > 0, r \in \mathbb{R}, \Rightarrow x^r \in C(\{x : x > 0\}) \Rightarrow x^r = e^{r \ln x}$

10' Пусть $r > 0, 0^r := 0 \Rightarrow x^r-$ непрерывно при $x = 0$

Доказательство 10': если x^r монотонно возрастает при $x > 0$

$\forall \varepsilon > 0, \delta^r = \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon^r \Rightarrow$ при $x < \delta : 0 < x^r < \delta^r = (\varepsilon^{\frac{1}{2}})^2 = \varepsilon (r = \dfrac{1}{2}$

11. $\sin x, \cos x$ непрерывно при $x = 0$
    $\sin x = \dfrac{\sin x}{x} = x \to 0 (x \to 0), \sin 0 = 0$
    $\sqrt{1 - x^2} \leq \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \leq 1$
    $\cos x \to 1 (x \to 0), cos_0 = 1$

12. $\sin x, \cos x$ непрерывно при $x = x_0, x_0 \neq 0$
    $\sin x = \sin((x - x_0) + x_0) = \sin(x - x_0)\cos(x_0) + \cos(x - x_0)\sin(x_0)$
    $\cos x = \cos((x - x_0) + x_0) = \cos(x - x_0)\cos x - \sin(x - x_0)\sin(x_0)$
    $\sin x \cdot \cos x \in C(\mathbb{R})$

13. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ непрерывен при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

14. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ непрерывен при $x \neq \pi n$

Теорема 42. (об обращении непрерывной функции в 0 (Коши))
Пусть $f \in C([a,b]), f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = 0$

Доказательство. Пусть $a_1 = a, b_1 = b$, значит $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ (3)
$c_1 = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a_1+b_1}{2}$
если $f(c_1) = 0$, то полагаем $c = c_1$
если $f(c_1) \neq 0$, то по (3) $\Rightarrow f(a_1)f(c_1) < 0$ или $f(c_1)f(b_1) < 0$

$[a_2, b_2]-$ тот из $[a_1, c_1], [c_1, b_1]$ для которого $f(a_2)f(b_2) < 0$ (4)
$c_2 = \dfrac{a_2+b_2}{2}$, если $f(c_2) = 0$, то полагаем $c = c_2$
если $f(c_2) \neq 0$, то $f(a_2)f(c_2) < 0$ или $f(c_2)f(b_2) < 0$ в силу (4)

$[a_n, b_n] : f(a_n)f(b_n) < 0, c_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, если $f(c_n) = 0$, полагаем $c = c_n$,
если $f(c_n) \neq 0$, то либо $f(a_n)f(c_n) < 0$, либо $f(c_n)f(b_n) < 0$
$[a_{n+1}, b_{n+1}]-$ тот из $[a_n, c_n], [c_n, b_n]$ для которого $f(a_{n+1})f(bn+1) < 0$ (6)

Пусть $\forall n, c_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ и $f(c_n) \neq 0$ и $f(a_n)f(b_n) < 0$
$b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \to 0 (n \to \infty)$ (7)
$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \forall n$ (8)
(7),(8) $\Rightarrow \exists c \in [a_n, b_n] \forall n$ (9)
$$\begin{cases} a_n \to c(n \to \infty) \\ b_n \to c(n_. \infty) \end{cases} \quad (10)$$
$f \in C([a,b]) \Rightarrow f$ непрерывно в с (11)
$$(10),(11) \Rightarrow \begin{cases} f(a_n) \to f(c)(n \to \infty) \\ f(b_n) \to f(c)(n \to \infty) \end{cases} \quad (12)$$
(12) $\Rightarrow f(a_n)f(b_n) \to f^2(c)(n \to \infty)$ (13)

$f(a_n)f(b_n) < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$ (14)
(13),(14) $\Rightarrow f^2(c) \leq 0 \Rightarrow f(c) = 0$ □

Теорема 43. (Теорема о промежуточных значениях)
Пусть $f \in C([a,b])$ и $f(a) = q \neq f(b) = pm \in (p,q) < r < \max(p,q) \Rightarrow \exists c \in [a,b] : f(c) = r$

Доказательство. Рассмотрим $g(x) = f(x) - r :$

$$g(a)g(b) = (f(a) - r)(f(b) - r) = (p - r)(q - r) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists c \in [a,b] : g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - r = 0$$

□

4.12 Классификация точек разрыва непрерывной функции

Определение 43. Пусть $E \subset \mathbb{R}, a \in E, a-$ точка сгущения E, $f : E \to \mathbb{R}, f$ ненепрерывна в a
Тогда точка a — точка разрыва функции f

Свойства. (Классификация точек разрыва)

1. $a \in (p,q), f : (p,q) \to \mathbb{R}$
$\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to q+0} f(x) \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, но $f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$
тогда a – устранимая точка разрыва
$f(x) = \begin{cases} f(x), x \neq a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \end{cases} \Rightarrow f$ непрерывна в a

2. **разрыв 1 рода или скачок:** $a \in (p,q), \exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \in \mathbb{R}, \exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$
$f : [a,q] \to \mathbb{R}, \exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq f(a)$
$f : (p,a] \exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq f(a)$

3. **разрыв 2 рода:** – если по крайней мере $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не существует или бесконечен

Теорема 44. (Теорема о разрывах монотонной фукнции)
$f : [a,b]$ и монотонна $\Rightarrow \forall x_0 \in [a,b]$ f либо непрерывна в x_0, либо имеет в x_0 разрыв 1 рода

Доказательство. Пусть f возрастает и $x_0 \in (a,b)$
Предположим, что x_0 – точка разрыва f (*)

$$\text{Рассматрим } a < x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \tag{17}$$

$$(17) \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0-0} f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow (18)$$

$$\text{Пусть } x_0 < x < b, \text{тогда } f(x_0) \leq f(x) \tag{19}$$

$$(19) \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0+0} f(x) \geq f(x_0) \tag{20}$$

$$(18), (20) : \lim_{x\to x_0-0} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0+0} f(x) \tag{21}$$

$$(*), (21) \Rightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) < \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

$\square$

Теорема 45. (Об отображении отрезков)
Пусть $f : [a,b], f$ монотонна, $f(a) = p, f(b) = q, p \neq q$, тогда

$$f([a,b]) = [\min(p,q), \max(p,q)] \Leftrightarrow f \in C([a,b])$$

Доказательство. Пусть f непрерывна на $[a,b]$
$\forall r : \min(p,q) < r < \max(p,q)$
по теореме о промежуточных значениях: $\exists c \in (a,b) : f(c) = r$ (23)
$\forall x \in [a,b] : min(p,q) \leq f(x) \leq map(p,q)$
то есть $f([a,b]) \subset [\min(p,q), \max(p,q)]$
(23) $\Rightarrow f([a,b]) = [\min(p,q), \max(p,q)]$

Пусть $f([a,b]) = [\min(p,q), \max(p,q)]$ (24)
$\exists x_0 \in [a,b] : f$ разрывна в x_0 (25)
Пусть $x_0 \in (a,b)$ и f возрастает
по доказанной теормеме x_0 – развыв первого рода
$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A < B = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ (26)
Рассмотрим $y \in (A,B), y_0 \neq f(x_0)$ (27)
По теореме о пределе монотонной функции (когда возрастает): $\forall x < x_0, f(x) \leq A$ (28)
По той же теореме $\forall x > x_0 : f(x) \geq B$ (29)
(27),(28),(29) $\Rightarrow \forall x \in [a,b], x \neq x_0$ будет $f(x) \neq y_0$ (30) и $A < y_0 < B$
если $x = x_0$, то $f(x_0) \neq y_0$ (31)
(30),(31) $\Rightarrow y_0 \notin f([a,b])$ (32)
(24) и (32) противоречат

$\square$