Геометрия и топология

Солынин А. А.[1]

11.09.2023 - ...

[1] "Большая часть конспектов была честно украдена, пожалуйста, не бейте. Ссылка"

Оглавление

Лекция 1: Векторное пространство

09.09.2023

Глава 1

Векторное пространство

1.1 Определение векторного пространства

Определение 1. Пусть V - множество;
$+ : V \times V \longrightarrow V$
$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$
$\forall u, w, v \in V : \forall \alpha, \beta$

1. (u+v)+w=(u+v)+w (ассоциативность сложения)
2. u+v=v+u (коммутативность сложения)
3. $\exists! 0 \in V : u + 0 = 0 + u = u$ (нейтральный элемент по сложению)
4. $\exists u; -u : u + (-u) = 0$ (обратный элемент по сложению)
5. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (дистрибутивность)
6. $(\alpha \cdot \beta)u = \alpha(\beta \cdot u)$ (ассоциативность умножения)
7. $1 \cdot u = u$ (нейтральный элемент по умножению)

Если 1-8 выполняются, то V - (вещественное) векторное пространство.

Пример.

1. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ - n-мерное пространство $(a_1 ... a_n) + (b_1 ... b_n) = (a_1 + b_1 ... a_n + b_n)$
2. Множество многочленов V
   Множество многочленов n степени — не верkторное пространство, т. к. $(x^n + 1) + (-x^n + x) = x + 1$ — сложение не определено
   Множество многочленов степени $n \leqslant n$ — векторное пространство.
3. Множество определенных на $[a..b]$, непрерывных и имеющих непрерывную производную функций — векторное пространство.
4. Матрицы $n \times m$ — векторное пространство.

5. Множество вращений шара (сложение — композиция, умножение — умножение угла на число на число) — не векторное пространство. (Упражнение: докажите почему)

Свойство. (Доказуемые свойства)

1. $\overline{1}$ — единственный.
2. $\begin{cases} u+v=0 \\ u+w=0 \end{cases} \Rightarrow v=w$
3. $-\overline{1}\cdot u=-u$
4. $u\cdot 0=0$

1.2 Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная независимость

Определение 2. V - векторное пространство и векторы $v_1, v_2, v_3, ..., v_n \in V$. Система $v_1, ..., v_n$ называется линейно независимой (ЛНЗ), если из $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Определение 3. Если $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, $v_1, ..., v_n \in V$. То $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ – линейная комбинация (ЛК) векторов $v_1, ..., v_n$.

Определение 4. Если $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n$, не все $= 0$, но $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$, то система $v_1, ..., v_n$ называется линейно зависимой (ЛЗ).

Теорема 1. $v_1, ..., v_n$ – ЛЗ $\Leftrightarrow$ один из этих векторов можно представить как ЛК остальных. $\exists i : v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + ... + \alpha_n v_n$

Доказательство. $\Rightarrow$: $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n (\exists i : \alpha_i \neq 0)$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$$
$$\alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - ... - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - ... - \alpha_n v_n$$
$$\alpha_i \neq 0 \quad v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n$$
$$\Leftarrow: v_i = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \text{ без } i\text{-ого слагаемого}$$
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + (-1) v_i + ... + \alpha_n v_n = 0$$
$$\text{ЛК } = 0 \text{ не все коэффициенты} = 0$$

□

Предположение 1. $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ, то любой его поднабор тоже ЛНЗ. $v_1, ..., v_n$ – ЛЗ, то при добавлении векторов, набор останется ЛЗ.

Теорема 2. $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ $\Leftrightarrow$ если

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; ...; \alpha_n = \beta_n$$

Доказательство.

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$
$$\alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow v_1, ..., v_n - \text{ЛНЗ}$$

□

Лекция 2: Базис векторого пространства

18.09.2023

Пусть v - Это конечно мерно пространство

Определение 5. Набор $v_1, v_2, ..., v_n$ называется порождающим для V, если $\forall w \in V \exists \alpha_1, ..., \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$

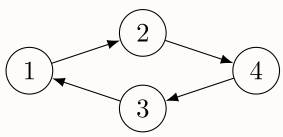
Замечание. Если к порождающему набору прибавить вектор, то он останется порождающим. Если убрать векторы из непорождающего набора векторы, то набор останется непорождающим.

Определение 6. $v_1, v_2, ..., v_n$ называется базисом V, если этот набор ЛНЗ и порождающий.

Теорема 3 (О базисе)**.** Следующие определения базиса равносильны:

1. ЛНЗ и порождающий набор
2. Минимальный порождающий набор (минимальный по включениям)
3. Максимальный ЛНЗ набор (максимальный по включениям)
4. Порождающий набор $\forall w \in V \exists! \alpha_1, ..., \alpha_2 : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$

Доказательство. Цепочка доказательств:



$1 \to 2$. Дан $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ и порождающий набор. Доказать, что он минимальный порождающий.

Допустим, что v_i выкинули, оставшийся набор остался порождающим $\Rightarrow v_i$ – ЛК остальных $\Rightarrow$ ЛЗ.

$2 \to 4$. Дан $v_1, ..., v_n$ – минимальный порождающий набор. Доказать $v_1, ..., v_n$ – порождающий с единственностью коэффициентов.

Допустим противное: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$

$$\alpha_i \neq \beta_i$$

$$(\alpha_i - \beta_i) v_i = (\beta_1 - \alpha_1) v_1 + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + (\beta_n - \alpha_n) v_n$$

$$v_i = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_i - \beta_i} + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_i - \beta_i}$$

v_i – выкинем. В любой ЛК с v_i заменим v_i на выражение выше $\Rightarrow$ набор порождающий. Значит без единственности коэффициентов получаем противоречие с дано

$4 \to 3$. Дан $v_1, ..., v_n$ – порождающий набор с единственностью коэффициентов. Доказать: $v_1, ..., v_n$ – максимальный ЛНЗ (ЛНЗ уже доказана)

Допустим противное: $v_1, v_2, ..., v_n; u$ – ЛНЗ набор

$$u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n (\alpha_1, ... \alpha_n \exists!) \Rightarrow v_1, ..., v_n, u \text{ – ЛЗ}$$

$3 \to 1$. Дан $v_1, ..., v_n$ – максимальный ЛНЗ. Доказать $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ и порождающий набор.

$$\begin{array}{ll}
\forall w \in V & v_1, v_2, ..., v_n, w \text{ – ЛЗ набор} \\
 & \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n + \beta w = 0 \\
\text{Если } \beta = 0 \Rightarrow & \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0 \\
 & \text{не все коэффициенты } = 0 (\alpha_i \neq 0) \\
 & \Rightarrow v_1, ..., v_n \text{ – ЛЗ} \\
\beta \neq 0 \Rightarrow & w = -\dfrac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \dfrac{\alpha_2}{\beta} v_2 - ... - \dfrac{\alpha_n}{\beta} v_n
\end{array}$$

□

Замечание. (Следствия) Любую конечную порождающую систему можно сузить до базиса.

Если есть конечный порождающий набор, то любую ЛНЗ систему можно расширить до базиса.

Определение 7. Размерность пространства равна количеству элементов в базисе. (пока нет доказательств корректности)

Лемма 1. Система линейных уравнений: $(a_{ij} \in \mathbb{R}; x_i \in \mathbb{R}; 0 \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Имеет ненулевые решения, если $n > k$.

Доказательство. Индукция по k. База $k = 1$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$
$$\text{Пусть } a_{11} \neq 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - ... - -\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$
$$\forall x_2, ..., x_n : x_1 \text{ выражается через них}$$
$$a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$$

Переход

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$
$$\exists i : a_{1i} \neq 0, \text{ иначе выкинем предыдущее уравнение}$$
$$x_i = -\frac{a_{11}}{a_{1i}}x_1 - ... \text{ (без } i\text{-ого)} - -\frac{a_{1n}}{a_{1i}}x_n$$

Подставим выраженное x_i во все остальные уравнения. Уравнений на 1 меньше, переменных на 1 меньше. □

Теорема 4. Если $v_1, ..., v_k$ и $w_1, ..., w_n$ базисы $\in V$, то $k = n$.

Доказательство. $v_1, ..., v_n$ – порождающая система.

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + ... + a_{k1}v_k$$
$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + ... + a_{k2}v_k$$
$$...$$
$$w_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + ... + a_{kn}v_k$$

$$x_1w_1 + x_2w_2 + ... + x_nw_n = 0, x_i \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

т.к. $w_1, ..., w_n$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ все $x_i = 0$

$$x_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{k1}v_k) + x_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{k2}v_k)$$
$$+ ... + x_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{kn}v_k) = 0$$
$$v_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) + v_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)$$
$$+ ... + v_k(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n) = 0$$

$v_1, v_2, ..., v_k$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ все коэффициенты равны 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Если $n > k \Rightarrow \exists$ ненулевые решения $\Rightarrow$ противоречие с (1.1) и ЛНЗ $w_i \Rightarrow n \leq k$. Аналогично $k \leq n \Rightarrow n = k$. $\square$

Лекция 3: Матрицы

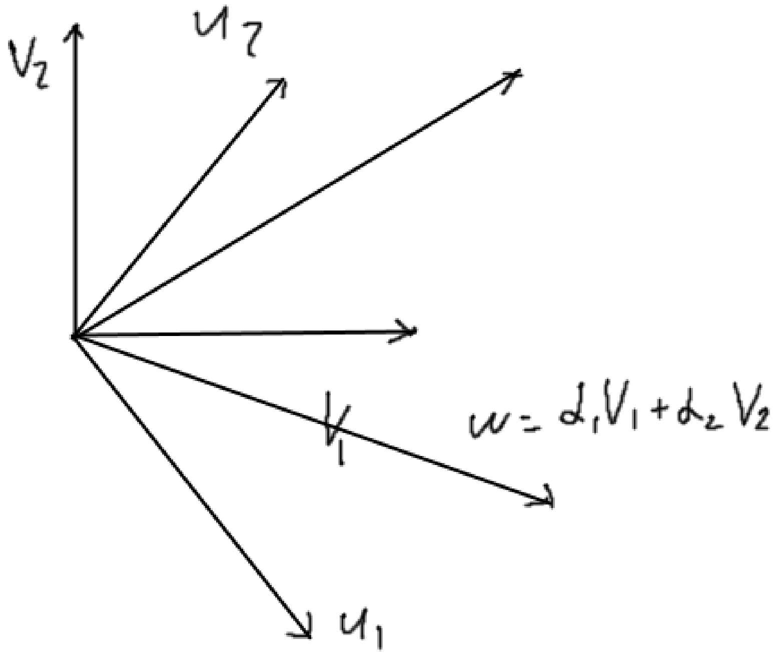
25.09.2023

1.3 Матрицы

Определение 8. Пусть V — конечное мерное пространство
$v_1 \dots v_n$ - базис V
$w \in V \Rightarrow \exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:
$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$
Тогда $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ — координаты w в базисе $u_1 \dots u_n$

- $w \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$
- $u \Leftrightarrow (\beta_1 \dots \beta_n)$
- $u + w \Leftrightarrow (\alpha_1 + \beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \dots \alpha_n \beta_n)$
- $f \cdot w \Leftrightarrow (f \cdot \alpha_1, f \cdot \alpha_2 \dots f \cdot \alpha_n)$

Определение 9. Пусть $v_1 \dots v_n$ и $u_1, u_2, \dots u_n$ — базисы
Тогда w может выражаться как:
$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot u_1 + \dots + \beta_n \cdot u_n$



Определение 10. (*) Пусть $v_1 \dots v_n$ и $u_1, u_2, \dots u_n$ — базисы

Выразим базис $u_1 \dots u_n$ через $v_1 \dots v_n$:

$u_1 = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n$

$u_2 = a_2 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_{2n} \cdot v_n$

$\vdots$

$u_n = a_n \cdot v_1 + a_{n2} \cdot v_2 + \dots + a_{nr} \cdot vn$

Тогда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от $v_1 \dots v_n$ к $u_1 \dots u_n$

Определение 11. Пусть есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \text{— Матрица } n \times K$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nl} \end{pmatrix} \text{— Матрица } k \times l$$

Умножение матриц определяется как:

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \dots & \dots & c_{kl} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы равны:

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \ldots + a_{1k} \cdot b_{kl}$

$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \ldots + a_{1k} \cdot b_{k2}$

$\vdots$

$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj}$

$\vdots$

Замечание. Выражение базиса через базис можно записать так:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Теорема 5. Пусть $v_1 \ldots v_n$ и $u_1, u_2, \ldots u_n$ — базисы.

A — матрица перехода от $v_1 \ldots v_n$ к $u_1 \ldots u_n$

B — матрица перехода от $w_1 \ldots w_n$ к $v_1 \ldots v_n$

Тогда матрица перехода от $w_1 \ldots w_n$ к $u_1 \ldots u_n$ равна $A \times B$

Доказательство. Выразим базис $v_1 \ldots v_n$ через $w_1 \ldots w_n$:

$v_1 = b_{11}w_1 + \ldots + b_{1n}w_n$

$\vdots$

$v_1 = b_{n1}w_1 + \ldots + b_{nn}w_n$

Выразим базис $u_1 \ldots u_n$ через $v_1 \ldots v_n$:

$u_1 = a_{11}(b_{11}w_1 + \ldots + b_{1n}w_n) + \ldots + a_{1n}(b_{n1}w_1 + \ldots + b_{nn}w_n) = w_1(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}) + \ldots + w_1(a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \ldots + a_{nn}b_{nn})$

Мы видим, что базис $u_1 \ldots u_n$ выражается через $w_1 \ldots w_n$, а матрица перехода — $A \times B$. □

Теорема 6. A(BC) = (AB)C

Умножение матриц не коммутативно, но ассоциативно.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & . & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{- единичная матрица}$$

Замечание. $u_1 \dots u_n$, $v_1 \dots v_n$ — базисы, выражаются как:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$A \times B = E$

$B \times A = E$

(A и B) — обратные матрицы

1.4 Скалярное произведение

Определение 12. V - векторное пространство

$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$

1. (u, u) $\geq$ 0 (u, u) = 0 $\Leftrightarrow$ U = 0
2. $(u_1 + u_2; v) = (u_1, v_1) + (u_2, v)$ $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u_1 v_2)$
3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v)$
4. (u, v) = (v, u)

V - евклидово пространство $(\cdot, \cdot)$ - скалярное произведение

Пример.

1. $V = \mathbb{R}^n$

   $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

   $$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2. V - пространство функций $(\dots)$ $(f(x), g(x)) := \int_a^b f(x) g(x) dx$

Определение 13. Пусть V - евклидово пространство, $v \in V$

$|v| := \sqrt{(v, v)}$

$cos\angle(u, v) := \frac{(u,w)}{|u| \cdot |v|}$

Теорема 7. (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ))

$|(u, w)| \leq |u| \cdot |v|$

Доказательство.

$$(u+tv, u+tv) \geq 0 \quad \forall t$$
$$(u,u)+(u,tv)+(tv,u)+(tv,tv) \geq 0$$
$$|u|^2+2t(u,v)+t^2|v|^2 \geq 0 \quad \forall t$$
$$\frac{D}{4} \leq 0 \quad (u,v)^2-|u|^2|v|^2 \leq 0$$
$$|(u,v)| \leq |u||v|$$

□

Вывод. (Следствие из КБШ)

1. $|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$
2. $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b g(x)dx)\cdot(\int_a^b f(x)dx)$

Определение 14. $u \perp v$, если $(u,b)=0$

Определение 15. $v_1 \ldots v_n$ — ортогональная система, если:
$\forall v_i, v_j : v_i \perp v_j, (i \neq j)$

Теорема 8. $v_1 \ldots v_n$ - ортогональная система и в ней нет нулевых векторов $\Rightarrow v_1 \ldots v_n$ линейно не зависимы.

Доказательство.

$$\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n=0$$
$$\alpha_1(v_1v_i)+\alpha_2(v_2,v_i)+\ldots+\alpha_i(v_i,v_i)+\ldots=0$$
$$a_i|v_i|^2=0$$
$$\alpha_i=0$$

□

Определение 16. u — нормированый или единичный если $|u|=1$
$v_1 \ldots v_n$ — ортонормированные системы, если $v_i \perp v_j$ и $|v_i|=1$
$v_1..v_i$ — ОНБ ортонормированный базис

Лекция 4: Ортонормированный базис и ориентация базиса

02.10.2023

1.5 Построение ортонормированного базиса

Теорема 9. Ортонормированный баис существует.

Доказательство. (Ортогонализация Грама-Шмидта)
Есть $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \qquad |\mathbf{u}_1| = 1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{w}_2 \perp \mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|}$$

$$|\mathbf{u}_2| = 1 \qquad \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2) = 0$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{u}_1) = 0$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - \alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 0$$

$$\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)$$

Пусть $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{k-1}$ построены
Построим $\mathbf{u}_k$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \alpha_1\mathbf{u}_1 - \alpha_2\mathbf{u}_2 - ... - \alpha_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{w}_k \perp \mathbf{u}_i \qquad (i \leq k-1)$$

$$0 = (\mathbf{w}_k, \mathbf{u}_i) = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i) - \alpha_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)$$

$$\alpha_i = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i)$$

$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{w}_k}{|\mathbf{w}_k|}$$

Строим $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ с помощью данного алгоритма.

Замечание. $\mathbf{u}_i$ – ЛК $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_i$

Вывод. Если $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ – базис $\Rightarrow \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ — ОНБ, т.е. если $\dim V = n$, то $\exists$ ОНБ

Пусть V - евклидово пространство, $\dim V = n$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ – ОНБ, $\mathbf{w} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_n\mathbf{u}_n$, то можем записать $\mathbf{w} = (a_1, ..., a_n)$, соответственно $\mathbf{v} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + ... + b_n\mathbf{u}_n$, тогда

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_n\mathbf{u}_n, b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + ... + b_n\mathbf{u}_n) = \\ = a_1b_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) + a_1b_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + ... + a_1b_n(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n) + \\ + a_2b_1(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + a_2b_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + ... + a_2b_n(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_n) + \\ + a_nb_1(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + a_nb_2(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + ... + a_nb_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = \\ = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\end{aligned}$$

□

1.6 Ориентация базиса

Определение 17 (Неформальное)**.** На плоскости: $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = S_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \text{ (ориентированная площадь)}$$

В пространстве: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$; $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}} \text{ (ориентированный объем)}$$

Определение 18 (Формальное)**.**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

Мнемоническое правило:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}\right|$$

По бирюзовой стрелке сложение, по зеленой – вычитание.

Замечание. Данные свойства справедливы для матриц любого порядка.

Свойства.

1. Если строку или столбец умножить на α, то определитель тоже умножится на α.
2. Если меняем 2 строки или столбца, то знак определителя меняется.
3. Если есть 2 одинаковых строки, то определитель равен 0.
4. Если к одному из векторов прибавить вектор кратный другому, то определитель не поменяется.
5. Определитель единичной матрицы равен 1.

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha b_1 & a_2+\alpha b_2 & a_3+\alpha b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Теорема 10. (Доказательство будет на алгебре)

$$\exists! f : M_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$$

такая, что, удовлетворяет свойствам 1-5.

Теорема 11.

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Определение 19 (Ориентация)**.** $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – ОНБ («правая тройка»), $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется правой тройкой векторов.

Если $\det < 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется левой тройкой векторов.

Если $\det = 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ – ЛЗ.

Выводы:

1. Ориентация бывает только у ЛНЗ троек – у базисов.
2. Ориентаций бывает ровно 2.
3. Одинаковость ориентаций является эквивалентностью.

Лекция 5: Векторное произведение

09.10.2023

1.7 Векторное произведение

Замечание. Векторное произведение существует, только если $\dim V = 3$ (т.е. пространство трехмерное).

Определение 20 (Формальное)**.** Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}$ – вектор со свойствами:

1. $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}, \mathbf{v} \perp \mathbf{b}$
2. $|\mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ – правая тройка векторов

Вопрос: что такое «правая тройка?» — Ответ: нет «правой» или «левой» троек, но про любые две тройки мы можем сказать одинаково ли они ориентированы.

Определение 21. Пусть $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ – фиксированный ортонормированный базис, будем называть его правой тройкой векторов.

Введем определения:

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	0	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	0	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	0

– таблица умножения базисных векторов

Пусть

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = (b_1, b_2, b_3)$$

Тогда векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = \\ a_1b_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_1b_3\mathbf{i} \times \mathbf{j} + \\ + a_2b_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_2b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_2b_3\mathbf{i} \times \mathbf{j} + \\ + a_3b_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_3b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_3b_3\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \\ = \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Теорема 12. Векторное произведение обладает свойствами:

1. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$
4. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$

Доказательство.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$$

$$1.\qquad \mathbf{b}+\mathbf{c}=(b_1+c_1)\mathbf{i}+(b_2+c_2)\mathbf{j}+(b_3+c_3)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{i}(a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2))+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...)$$
$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...)+\\ +\mathbf{i}(a_2c_3-a_3c_2)+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...)\end{aligned}$$

После преобразований получим то же самое.

2. Аналогично

$$\begin{aligned}3.\qquad &(\mathbf{a}\times\mathbf{b};\mathbf{a})=\\ &=(\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1);a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})=\\ &=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)=0\end{aligned}$$

4. Будем доказывать $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\alpha=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1-\cos^2\alpha)$

$$\begin{aligned}&(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2=\\ &(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\left(1-\frac{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}\right)=\\ &(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\end{aligned}$$

Чтобы не расписывать слагаемые перепишем в другом виде:

$$\sum_{i\neq j}a_i^2b_j^2-2\sum_{i<j}a_ib_ia_jb_j=\sum_i a_i^2b_i^2+\sum_{i\neq j}a_i^2b_j^2-\sum_{i=1}^{3}a_i^2b_i^2-2\sum_{i<j}a_ib_ia_jb_j$$

□

Замечание.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

Теорема 13. $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ – правая тройка

Доказательство.

$$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)\qquad \mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$$
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)+(a_3b_1-a_1b_3)+(a_1b_2-a_2b_1)=$$
$$=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\ b_2&b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3&a_1\\ b_3&b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1&b_1\\ a_2&b_2\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\\ \begin{vmatrix}a_2&a_3\\ b_2&b_3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_3&a_1\\ b_3&b_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_1&a_2\\ b_1&b_2\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\ b_2&b_3\end{vmatrix}(a_2b_3-a_3b_2)-\begin{vmatrix}a_3&a_1\\ b_3&b_1\end{vmatrix}(a_1b_3-a_3b_1)+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\ b_1&b_2\end{vmatrix}(a_1b_2-a_2b_1)$$
$$=(a_2b_3-a_3b_1)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2>0$$

$\square$

Лекция 6: Смешанное произведение. Афинное пространство

30.10.2023

1.8 Смешанное произведение

Определение 22. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы в $\mathbb{R}^3$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c}) \text{ – смешанное произведение}$$

Геометрический смысл: $\pm V_{\text{параллелепипеда}}$

Доказательство.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}| \cos \alpha = S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|\mathbf{c}| \cos \alpha = \pm V_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}$$

$\square$

В координатах:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c}) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)(c_1, c_2, c_3) =$$
$$a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

1.9 Свойства смешанного произведения

(по свойствам определителей)

1. $(\mathbf{e} + \mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{e}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ для каждого аргумента
2. $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha\mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – ЛЗ
4. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$
5. Знак смешанного произведения – ориентация тройки.

Глава 2

Афинное (точечное) пространство

2.1 Определение

Определение 23. V – векторное пространство, E – множество. Назовем E точечным (аффинным) пространством , если определена операция $+ : E \times V \to E$, т.е. $(e; \mathbf{v}) \mapsto (e + \mathbf{v})$ со свойствами:

1. $(e + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = e + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$
2. $e + 0 = e$
3. $\forall e_1, e_2 \in E \exists! \mathbf{v} \in V : e_2 = e_1 + \mathbf{v}$

Такой вектор будем обозначать $\mathbf{v} = \overrightarrow{e_1 e_2}$

Определение 24 (Построение точек)**.** Если в V есть базис $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ и мы зафиксируем $e_0 \in E \Rightarrow \forall e \in E \exists! \mathbf{v} : e_0 + \mathbf{w} = e$, при этом: $\exists! \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n : \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n \Rightarrow e = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – координаты e.

Если имеем $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_n \mathbf{v}_n$, то: $e + \mathbf{v} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$

Определение 25 (Расстояние)**.** Пусть e_0 – начало координат, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ – ОНБ. $e_1 = e_0 + \mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n), e_2 = e_0 + \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$

$$\operatorname{dist}(e_1, e_2) = |\mathbf{u} - \mathbf{w}| = |\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{u}_n - \mathbf{w}_n| = \sqrt{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1)^2 + \ldots + (\mathbf{u}_n - \mathbf{w}_n)^2}$$

Определение 26 (Преобразование начала координат)**.** (Если хотим перейти от начала координат e_0 к e_0')

Есть базис $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ и вектор $e_0' - e_0 = \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$. И пусть точка $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – координаты с началом e_0 и $e = (e'_1, \ldots, e'_n)$ – координаты с началом в e'_0. Тогда:

$$e = e_0 + e_1\mathbf{v}_1 + \ldots + e_n\mathbf{v}_n$$

$$e'_0 = e_0 + e_1\mathbf{w}_1 + \ldots + e_n\mathbf{w}_n \Leftrightarrow e_0 = e'_0 - \mathbf{w}_1\mathbf{v}_1 - \ldots - \mathbf{w}_n\mathbf{v}_n$$

Упражнение: почему равносильно?

$$\text{Имеем } e = e'_0 + (e_1 - \mathbf{w}_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (e_n - \mathbf{w}_n)\mathbf{v}_n$$

$$\text{Значит } (e'_1, \ldots e'_n) = (e_1 - \mathbf{w}_1, \ldots, e_n - \mathbf{w}_n)$$

Глава 3

Прямые на плоскости

3.1 Определения

Определение 27. E – точечное пространство, V – векторное пространство, $\dim V = 2$. Тогда прямая – это подмножество $l \subset E$, если: $\forall e \in E, \mathbf{v} \in V \setminus \{0\}$:

$$l = \{e + \alpha\mathbf{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbf{v}$ – направляющий вектор прямой.

Определение 28 (Параметрическое уравнение прямой)**.**
Пусть $e = (e_1, e_2) \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2)$
$e + t\mathbf{v} = (e_1 + tv_1, e_2 + tv_2) = (x, y)$

$$\begin{cases} x = e_1 + tv_1 \\ y = e_2 + tv_2 \end{cases}$$
– параметрическое уравнение прямой.

Определение 29 (Каноническое уравнение прямой)**.** Если выразить t из параметрического уравнения, то получим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - e_1}{v_1} = \frac{y - e_2}{v_2}$$

Если $v_1 \vee v_2 = 0$ то $x = e_1 \vee y = e_2$, но $v_1 \wedge v_2$ быть не может.

Определение 30 (Построение прямой по точкам)**.** Пусть $e = (x_0, y_0), e_1 = (x_1, y_1) \qquad e\vec{e}_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ – направляющий вектор. Пусть e – начало, тогда уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Теорема 14 (Прямая в стандарнтных координатах)**.** Из канонического уравнения прямой получаем:

$x(v_2) - y(v_1) - e_1v_2 + e_2v_1 = 0 \Leftrightarrow \forall A, B, C : A^2 + B^2 \neq 0 : Ax + By + C = 0$

Доказательство.

$$Ax + C = -By \Rightarrow \frac{x + \frac{C}{A}}{B} = \frac{y - 0}{-A}, \quad A \neq 0$$

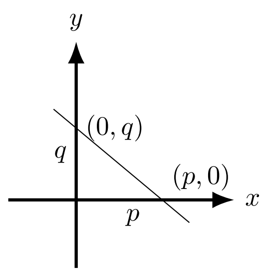
□

Определение 31 (Уравнение в отрезках)**.** Если $A, B, C \neq 0$, то

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$p = -\frac{C}{A}, q = -\frac{C}{B}$

$(p, 0)$ и $(0, q)$ – подходят:



Теорема 15. Если A, B – коэффициенты уравнения прямой, то вектор (нормаль) $(A, B) \perp \mathbf{v}$.

Доказательство.

$$(A, B) = (v_2, -v_1) \perp (v_1, v_2), \text{ т.к. } (v_1, v_2) \cdot (v_2, -v_1) = 0$$

□

Лекция 7: Прямые на плоскости. Плоскости в пространстве

06.11.2023

3.2 Угол между прямыми

Определение 32 (Угол между прямыми). Даны прямые l_1, l_2:

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$\angle(l_1, l_2) = \angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$$
$$\cos\angle(l_1, l_2) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$
$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Определение 33. (другое определение)

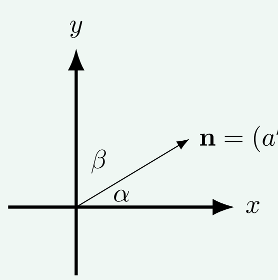
$$l_1 : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} \qquad l_2 : \frac{x - x_1}{w_1} = \frac{y - y_1}{w_2}$$
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \qquad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$
$$\cos\angle(l_1, l_2) = \frac{v_1w_1 + v_2w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}$$
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow v_1w_1 + v_2w_2 = 0$$
$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2}$$

3.3 Уравнение нормали

Определение 34. $(a, b) = \mathbf{n}$ называется вектором нормали к прямой

$$ax + by + c = 0 \qquad | : \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a'x + b'y + c' = 0 \text{ – Нормальное уравнение прямой}$$
$$a'^2 + b'^2 = 1 \qquad a' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad b' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$(a', b') \text{ – единичный вектор}$$

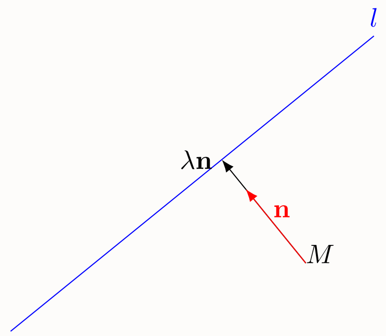
$|c'| = |\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}|$ – расстояние от начала координат до прямой. (?) (a', b') называют направляющими косинусами, т.к.



$$|\mathbf{n}| = 1 \qquad a'^2 + b'^2 = 1$$
$$a' = \cos\alpha$$
$$b' = \sin\alpha = \cos\beta$$

Теорема 16. Насстояние от точки (x_1, y_1) до прямой $ax + by + c = 0$ – это
$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Доказательство. $M + \lambda\mathbf{n} \in l$ – прямая $\mathbf{n}$ – нормаль (a, b)



$$\text{dist}(M, l) = |\lambda| \cdot |\mathbf{n}| \text{ из рисунка}$$
$$M + \lambda\mathbf{n} = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b) \in l \Rightarrow a(x_0\lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c = 0$$
$$ax_0 + by_0 + c + \lambda(a^2 + b^2) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{(ax_0 + by_o + c)}{a^2 + b^2}$$
$$\text{тогда } |\lambda| \cdot |\mathbf{n}| = |-\frac{(ax_0 + by_o + c)}{a^2 + b^2}| \cdot |\sqrt{a^2 + b^2}| = |\frac{(ax_0 + by_o + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}}|$$

□

3.4 Уравнение прямой, проходящей через точку пересечения двух других

Определение 35. Есть 2 прямые: $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ и точка M – точка пересечения. Тогда $\exists\lambda_1, \lambda_2 :$

$l_3 : \lambda_1(a_1x+b_1y+c_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2) = 0$ прямая, проходящая через M

Эта прямая проходит через M, т.к. при подстановке координат M в уравнение, первое и второе слагаемые обращаются в 0.

Глава 4

Плоскости в пространстве

4.1 Уравнение плоскости

$\dim V = 3$

Определение 36 (Плоскость по 3 точкам). Пусть $e_1, e_2, e_3 \in E$, $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{e_1e_2}; \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{e_1e_3}$

Плоскость – множество точек $\{e_1 + \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Определение 37. Плоскость – множество решений линейного уравнения:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Теорема 17. Определение 1 равносильно определению 2.

Теорема 18. $(A, B, C) = \mathbf{n} \perp$ плоскости

Доказательство.

$$e_1 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\mathbf{n} \perp \mathbf{v}_1 \qquad \mathbf{n} \perp \mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{n} = (A, B, C)$$

D такое число, что

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \qquad (D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0)$$

$$\begin{array}{c} - \begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{array} \\ \hline A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \end{array}$$

$$(A; B; C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$$

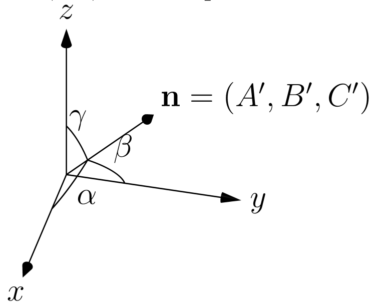
$$(x, y, z) = e_1 + \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$$

□

Определение 38 (Нормальное уравнение плоскости).

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad | : \sqrt{A^2+B^2+C^2} \neq 0$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$
$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1$$

A', B', C' – направляющие косинусы



$$A' = \cos\alpha$$
$$B' = \cos\beta$$
$$C' = \cos\gamma$$

Теорема 19. (доказательство аналогично прямой на плоскости) Пусть $Ax+By+Cz+D=0$ – плоскость, а (x_0, y_0, z_0) – точка, тогда расстояние от точки до плоскости:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Определение 39 (Уравнение плоскости в отрезках).

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

p, q, r – отрезки высекаемые плоскостью на OX, OY, OZ

4.2 Угол между плоскостями

Определение 40 (Угол между плоскостями).

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 = \alpha_1$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 = \alpha_2$$
$$\cos\angle(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$
$$\alpha_1 \perp \alpha_2 : A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$
$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 : \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

4.3 Плоскость через прямую пересечения двух плоскостей

Определение 41.

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$\alpha_3 : \lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

4.4 Плоскость через точку пересечения трех плоскостей

Определение 42.

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$\alpha_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$
$$\alpha_4 : \lambda_1(A_1x + \ldots + D_1) + \lambda_2(A_2x + \ldots + D_2) + \lambda_3(A_3x + \ldots + D_3) = 0$$

Глава 5

Прямая в пространстве

5.1 Уравнение прямой

Определение 43. Прямая – пересечение двух не параллельных плоскостей.

Определение 44 (Каноническое уравнение прямой в пространстве)**.** Если есть (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1), то прямая через эти точки задается уравнением:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Определение 45 (Каноническое уравнение прямой в пространстве)**.** Если есть 2 уравнения плоскости, то прямая задается как

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \qquad \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{n}_1 \qquad \mathbf{v} \perp \mathbf{n}_2 \qquad \mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Определение 46. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – направляющий вектор

Определение 47 (Параметрическое уравнение прямой в пространстве)**.**

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases}$$

Теорема 20. Любая прямая – прямая пересечения двух непараллельных плоскостей, и наоборот.

Доказательство.

$\Rightarrow$: каноническое уравнение:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} \text{ -- плоскость} \\ \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \text{ -- плоскость} \end{cases}$$

$\Leftarrow$: пусть есть 2 плоскости:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_1z \\ y = y_0 + v_2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

□

Лекция 8: Прямые в пространстве. Эллипс.

13.11.2023

Определение 48 (Уравнение прямой через 2 точки). Пусть есть точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_1} = \frac{y-y_0}{y_2-y_1} = \frac{z-z_0}{z_2-z_1}$$

т.к. $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ – направляющий вектор.

5.2 Угол между прямыми

Определение 49 (Угол между прямыми в пространстве).

$$l_1 : \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

$$l_2 : \frac{x-x_1}{w_1} = \frac{y-y_1}{w_2} = \frac{z-z_1}{w_3}$$

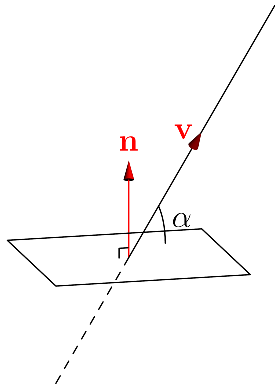
$$\cos\angle(l_1, l_2) = \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}}$$

$$l_1 \perp l_2 : v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0$$

$$l_1 \parallel l_2 : \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$$

Угол между прямой и плоскостью:

$$l_1 : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$
$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$



$$\sin\theta = \cos\angle(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \frac{Av_1 + Bv_2 + Cv_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$
$$\alpha \parallel l_1 : Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$$
$$\alpha \perp l_1 : \frac{A}{v_1} = \frac{B}{v_2} = \frac{C}{v_3}$$

Теорема 21. l_1, l_2 – пересекаются в одной точке или параллельны

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство. l_1 и l_2 – в одной плоскости, только если $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ и $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ в одной плоскости, это равносильно тому, что их смешанное произведение равно 0. $\square$

Глава 6

Кривые второго порядка

6.1 Эллипс

Определение 50 (Стандартный вид прямой II порядка)**.**

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + b_3 = 0$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$$

Определение 51. Эллипс — кривая, которая в подходящих координатах задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Определение 52. Пусть F_1, F_2 – точки (фокусы), если $F_1F_2 = 2c < 2a$, тогда ГМТ M :

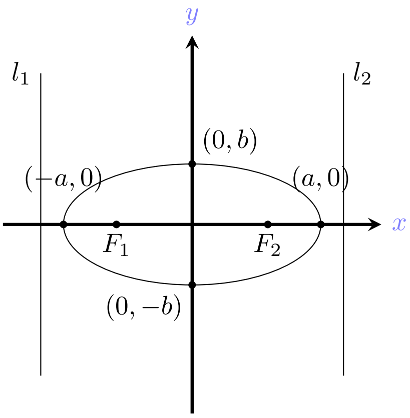
$$F_1M + F_2M = 2a$$

называется эллипсом.

Определение 53. F_1 – фокус, l_1 – прямая (директриса). ГМТ M:

$$\frac{\text{dist}(F_1, M)}{\text{dist}(l_1, M)} = e < 1$$

называется эллипсом.



$$F_2(c, 0) \qquad F_1(-c, 0)$$

$$l_{1,2} : x = \pm\frac{a}{e}$$

- a – большая полуось
- b – малая полуось (по умолчанию $a \geq b$)
- c – фокальный параметр

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- $e = \frac{c}{a} \in [0, 1)$ – эксцентриситет

Доказательство

- В определении 51 задано $a, b \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}, e = \frac{c}{a}$
- В определении 52 задано $a, c \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}, e = \frac{c}{a}$
- В определении 53 задано d расстояние от фокуса до директрисы. Хотим $F(c, 0); l : x = \frac{a}{e}$

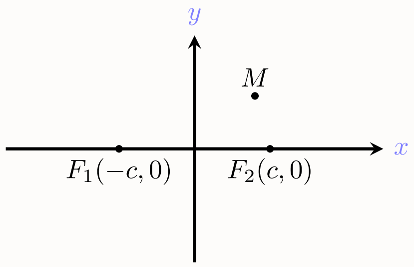
$$d = \frac{a}{e} - c = \frac{a}{e} - ae = a\left(\frac{1}{e} - e\right)$$

$$a = \frac{d}{\frac{1}{e} - e}$$

$$c = ae; b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Теорема 22. Определения 51, 52 и 53 равносильны.

Доказательство. Докажем, что 51 и 52 равносильны:



$$F_1M + F_2M = 2a$$
$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \quad |:4a$$

Расстояние от точки на эллипсе до фокуса

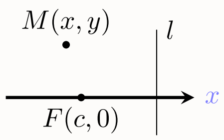
$$\boxed{\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - ex} \qquad \boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + ex}$$
$$(x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$$
$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$$
$$x^2(1-e^2) + y^2 = a^2 - c^2 = b^2$$
$$x^2\frac{1-e^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Нужно доказать, что:

$$\frac{b^2}{1-e^2} = a^2$$
$$b^2 = a^2 - a^2e^2 \qquad a^2e^2 = c^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

□

Доказательство. Докажем, что 51 и 53 равносильны:



$$l : x = \frac{a}{e} \qquad \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a}{e} - x} = e$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ex$$

Далее смотри равносильность 51 и 52. □

Теорема 23. Прямая $Ax + By + C = 0$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$$

Доказательство. Касательная имеет 1 точку пересечения с эллипсом

$$B \neq 0 \qquad y = \frac{-C - Ax}{B} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{C+Ax}{B}\right)^2}{b^2} = 1$$
$$x^2b^2B^2 + a^2C^2 + a^2A^2x^2 + 2a^2ACx = a^2b^2B^2$$
$$x^2(a^2A^2 + b^2B^2) + 2a^2ACx + \left(a^2C^2 - a^2b^2B^2\right) = 0$$

Это уравнение имеет ровно 1 корень

$$\frac{D}{4} = 0 \qquad a^4A^2C^2 - (a^2C^2 - a^2b^2B^2)(a^2A^2 + b^2B^2) = 0$$
$$a^2A^2C^2 - (C^2 - b^2B^2)(a^2A^2 + b^2B^2) = 0$$
$$a^2A^2C^2 - a^2A^2C^2 - b^2B^2C^2 + a^2b^2A^2B^2 + b^4B^4 = 0$$
$$a^2b^2A^2B^2 + b^4B^4 = b^2B^2C^2$$
$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$$

□

Лекция 9: Эллипс. Гипербола. Парабола.

27.11.2023

Теорема 24. Если (x_0, y_0) – точка на эллипсе, тогда касательная

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

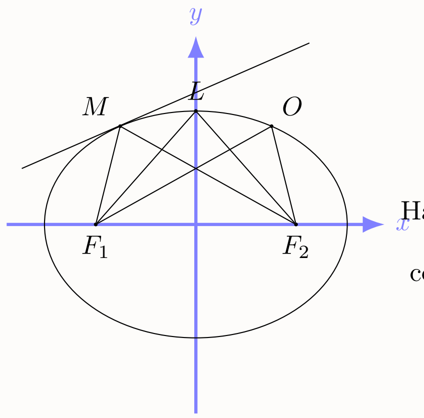
Доказательство.

$$A = \frac{x_0}{a^2} \qquad B = \frac{y_0}{b^2} \qquad C = -1$$
$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$$
$$a^2\frac{x_0^2}{a^4} + b^2\frac{y_0^2}{b^4} = 1$$
$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

Отсюда (x_0, y_0) – точка на эллипсе. □

Теорема 25 (Оптическое свойство эллипса)**.** l –касательная к эллипсу в точке $M \Rightarrow \angle(l, F_1M) = \angle(l, F_2M)$

Доказательство. (Аналитически)



$$l : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$
$$\mathbf{n} = \left(\frac{x_0}{a^2}; \frac{y_0}{b^2}\right)$$

Надо доказать:

$$\cos\angle(\mathbf{n}; \overrightarrow{F_1M}) = \cos\angle(\mathbf{n}; \overrightarrow{F_2M})$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{n}\overrightarrow{F_1M}}{|\mathbf{n}||\overrightarrow{F_1M}|} = \frac{\mathbf{n}\overrightarrow{F_2M}}{|\mathbf{n}||\overrightarrow{F_2M}|}$$

$$\overrightarrow{F_1M}(x_0 + c; y_0) \qquad \overrightarrow{F_2M}(x_0 - c; y_0)$$

Вспомним:

$$|\overrightarrow{F_1M}| = a + ex \qquad |\overrightarrow{F_2M}| = a - ex$$
$$\frac{\frac{x_0}{a^2}(x_0 + c) + \frac{y_0}{b^2}y_0}{a + ex} = \frac{\frac{x_0}{a^2}(x_0 - c) + \frac{y_0}{b^2}y_0}{a - ex}$$
$$\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{x_0c}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right)(a - ex) = \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x_0c}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right)(a + ex)$$
$$\frac{x_0c}{a^2} = \frac{x_0e}{a}$$
$$\left(1 + \frac{x_0e}{a}\right)(a - ex) = \left(1 - \frac{x_0e}{a}\right)(a + ex)$$
$$\frac{1}{a}(a + x_0e)(a - x_0e) = \frac{1}{a}(a - x_0e)(a + x_0e)$$

□

Лемма 2. Если выбрать точку M на прямой l, такую, что $AM + BM = \min$, то $\angle(AM, l) = \angle(BM, l)$

Доказательство.
TODO: рисунок

$$AM + MB \to \min$$
$$M_0 \text{ точка, реализующая } \min$$
$$A' \text{ – отражение } A \text{ относительно } l$$
$$\min(AM + MB) = \min(A'M + MB)$$
$$A'M + MB \geq A'B$$

□

Доказательство. (Геометрически)

TODO: рисунок

$$\underbrace{F_1M_0 + F_2M_0}_{=2a} < \underbrace{F_1M + F_2M}_{>2a}$$
$$M_0 \text{ – искомая точка из леммы}$$

□

6.2 Гипербола

Определение 54. Гипербола – фигура, которая в подходящих координатах задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Определение 55. Гипербола – ГМТ M :

$$|F_1M - F_2M| = 2a$$
$$F_1F_2 = 2c > 2a$$
$$(|F_2M - F_2M| \leq F_1F_2)$$

Определение 56. F_1 – точка, l_1 – прямая. Гипербола – ГМТ M:

$$\frac{F_1M}{\text{dist}(M, l_1)} = e > 1$$

Теорема 26. Определения равносильны

Доказательство. Доказательство аналогично эллипсу, например т.к.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(ib)^2}$$

□

Параметры гиперболы
TODO: рисунок

1. a – вещественная полуось
2. b – мнимая полуось
3. c – фокальный параметр (по определению $c > a$)
4. $e = \frac{c}{a} > 1$ – эксцентриситет

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Теорема 27. Пусть $y = f(x)$ – функция, $y = kx + b$ – прямая. Говорим, что прямая $y = kx + b$ – асимптота функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x) - f(kx + b)| = 0$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{kx+b} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx+b+g(x)}{kx+b} = \text{ если } g(x) \to 0, x \to \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{g(x)}{kx+b}\right) = 1 \text{ если } k \neq 0 \text{ или } b \neq 0$$

$$1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{kx+b} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{kx} \cdot \frac{kx}{kx+b} = \frac{1}{k} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$$

□

Теорема 28. Асимптоты гиперболы:

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

Доказательство.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}(\Rightarrow x \geq a)$$

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \pm\frac{b}{a} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

$$k = \pm\frac{b}{a}$$

$$\mathfrak{b} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{b}{a}x\right) = \frac{b}{a} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2-a^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{b}{a} \cdot 0$$

$\mathfrak{b}$ – коэффициент прямой

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

□

Теорема 29. Прямая $Ax + By + C = 0$ касается гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2A^2 - b^2B^2 = C^2$$

Доказательство. Аналогично эллипсу □

Теорема 30. Если точка (x_0, y_0) лежит на гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то касательная к этой точке:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Доказательство. Аналогично эллипсу □

Лемма 3. Если выбрать точку M на прямой l, такую, что $|AM - BM| = \max$, то $\angle(AM, l) = \angle(BM, l)$

Доказательство. ... □

Теорема 31 (Оптическое свойство гиперболы)**.** TODO: рисунок

Доказательство. ... □

6.3 Парабола

Определение 57. Парабола – кривая, которая в подходящих координатах имеет уравнение:

$$y^2 = 2px$$

где p – параметр параболы

Определение 58. Пусть F – точка, l – прямая, тогда парабола – ГМТ M:

$$\frac{FM}{\mathrm{dist}(M; l)} = e = 1$$

Теорема 32. Определения равносильны

Доказательство.

$$\left(x + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$
$$y^2 = 2px$$

□

Характеристики параболы

- F – фокус
- l – директриса
- $e = 1$ – эксцентриситет

Лекция 10: Парабола. Кривые второго порядка

04.12.2023

Теорема 33. (x_0, y_0) – точка на параболе $y^2 = 2px$, тогда

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

– уравнение касательной в (x_0, y_0)

Доказательство.

$$px = yy_0 - px_0$$
$$y^2 = 2px = 2yy_0 - 2px_0$$
$$y^2 - 2yy_0 + 2px_0 = 0$$
$$\frac{D}{4} = y_0^2 - 2px_0 = 0$$

1 решение □

Теорема 34 (Оптическое свойство параболы)**.** ...

Доказательство. ... □

Глава 7

Кривые второго порядка.

7.1 Приведение уравнения II порядка к каноническому виду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1 + 2b_2y + b_3 = 0$$
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$$

I шаг. Поворот на угол α, чтобы избавиться от a_{12}

Теорема 35. (x', y') получено поворотом (x, y) на α:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Доказательство. Для доказательства используем полярную систему координат $(r, \varphi) \to (r', \varphi')$

$$r' = r \qquad \varphi' = \varphi - \alpha$$
$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$
$$\begin{cases} x' = r'\cos\varphi' = r\cos(\varphi - \alpha) = r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha \\ y' = r'\sin\varphi' = r\sin(\varphi - \alpha) = -r\cos\varphi\sin\alpha + r\sin\varphi\cos\alpha \end{cases}$$
$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$
$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

$\square$

Получили такое выражение, выясним при каком αa_{12} станет нулем

$$a_{11}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2a_{12}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + \\ + a_{22}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + ... = 0$$

Коэффициент при $x'y'$:

$$a_{11}(-2\cos\alpha\sin\alpha) + 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22}(2\sin\alpha\cos\alpha) = 0$$
$$-a_{11}\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha + a_{22}\sin 2\alpha = 0| : \cos 2\alpha$$
$$-a_{11}\operatorname{tg} 2\alpha + a_{22}\operatorname{tg} 2\alpha = -2a_{12}$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$
$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

Если $a_{12} \neq 0$, то $\operatorname{ctg} 2\alpha$ найдется, то найдем $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Если $a_{12} = 0$, то $\alpha = 0$

II шаг. Теперь рассмотрим уравнение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + b_3 = 0$$

(вообще-то везде штрихи)

Лемма 4. Если $a_{11} \neq 0$, то считаем $b_1 = 0$ (иначе сдвинем переменные: $x' = x - x_0$)

$$a_{11}x^2 + 2b_1x = a_{11}\left(x^2 + 2\frac{b_1}{a_{11}}x + \frac{b_1^2}{a_{11}^2} - \frac{b_1^2}{a_{11}^2}\right) = a_{11}x'^2 - \frac{b_1^2}{a_{11}}$$
$$x' = x + \frac{b_1}{a_{11}}$$

Аналогично если $a_{22} \neq 0$, то считаем $b_2 = 0$

7.2 Виды кривых

7.2.1 Эллиптический тип

$a_{11} > 0, a_{22} > 0$ (иначе умножим на -1)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + b^3 = 0$$

1. $b_3 < 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс

$$a = \sqrt{\frac{-b_3}{a_{11}}}; b = \sqrt{\frac{-b_3}{a_{22}}}$$

2. $b_3 = 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – точка

3. $b_3 > 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – пустое множество или мнимый эллипс

7.2.2 Гиперболический тип

$a_{11} > 0, a_{22} < 0$ (или наоборот)

4. $b_3 \neq 0$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_2} = 1$ – гипербола

5. $b_3 = 0$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_2} = 0$ – пара пересекающихся прямых

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$
$$\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$$

7.2.3 Параболический тип

$a_{11} = 0, a_{22} \neq 0$, считаем, что $b_2 = 0$

$$a_{22}y^2 + 2b_1x + b_3 = 0$$

6. Если $b_1 \neq 0$, то считаем $b_3 = 0$

$$2b_1x + b_3 = 2b_1\left(x + \frac{b_3}{2b_1}\right) = 2b_1x'$$

   $y^2 = 2px$ – парабола

7. Если $b_1 = 0, a_{22} > 0$ $\quad a_{22}y^2 + b_3 = 0$
   $b_3 < 0$ $\frac{y^2}{b^2} = 1$ – пара параллельных прямых

$$\frac{y}{b} = \pm 1$$

8. $b_3 = 0$ $\frac{y^2}{b^2} = 0$ – одна прямая

9. $b_3 > 0$ $\frac{y^2}{b^2} = -1$ – пустое множество или пара мнимых прямых