

Оглавление

0.1	Критерий Коши, существование конечного предела последовательности	3
0.2	Подпоследовательности	6
0.3	Верхний и нижний предел последовательности	11
0.4	Свойства верхних и нижних пределов	13

Лекция 5: Продолжение (Часть 1)

05.10.2023

Для того чтобы вывести все слагаемые, мы полагаем, что $n \geq 3$, тогда

$$x_n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (5)(1)$$

Пример. (Пример умножения из предыдущей суммы)

Если $k = 3$, то

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \quad (2)$$

Замечание. Слагаемое из (2) $\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$, также оно же в виде $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ больше нуля.

Замечание. Если $r > 0$, то $1 - \frac{r}{n+1} > 1 - \frac{r}{n}$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Замечание. Получается, что в (1) и (2) одинаковое количество слагаемых. При этом, соответствующие слагаемые относящихся к $n+1$ будет строго больше чем слагаемые относящихся к n .

Следовательно, равенство (2) больше, чем равенство (1).
Кроме того, в сумме относящийся к $n+1$ есть ещё $n+1$ слагаемое, которые положительно.

$$(1), (2) \Rightarrow x_{n+1} > x_n \quad (3)$$

Примем во внимание неравенства для y и неравенства для x_n .
Тогда мы будем иметь следующее неравенство:

$$(3) \Rightarrow x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n < y_{n-1} < \dots < y_1 \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow x_n < y_1, y_n > x, \forall n \quad (5)$$

Последовательность x_n строго возрастает и ограничена сверху. Мы можем применить критерий существования конечного предела у строго монотонной возрастающей последовательности.

$$(5) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Если мы посмотрим на последовательность y_n , она ограничена снизу в отношении пяти и мы знаем что она строго монотонно убывает. По теореме о предельной последовательности получаем, что:

$$(5) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Теперь,

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

(Воспользуемся свойством предела произведения пределов)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Таким образом,

$$a = b = e \quad (6)$$

Замечание. Пользуемся свойствами пределов строго монотонной последовательностей.

Последовательность y_n строго убывает, а последовательность x_n строго возрастает поэтому её предел меньше любого y_n

$$(6) \Rightarrow x_n < e < y_n \forall n \quad (7)$$

$$(7) \Rightarrow e > x_1 = 2, e < y_5 < 3$$

$$y_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6$$

Примечание. Нужно посчитать и понять намного ли это меньше 3 или нет.

$$e = 2.718...$$

Замечание. Число e - одно из фундаментальных констант на которой держится вся математика.

Первые две - это 0 и 1. А третья - это π

0.1 Критерий Коши, существование конечного предела последовательности

Теорема 1. Пусть имеется некоторая последовательность x_n .

$$x_{n=1}^{\infty}$$

Для того чтобы $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ такой, что $\forall m, \forall n > N$ выполнено

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad (8)$$

Замечание. Важное обстоятельство содержащееся в формулировке.

В формулировке не сказано чему будет равен этот предел. Какой именно он будет - неизвестно. Известно только то что он существует.

Это так называемая теорема существования.

Доказательства начнём с необходимости.

Примечание. Необходимость означает что предел существует.

Доказательство. Предположим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in \mathbb{R}$$

Тогда, по определению предела для любого $\varepsilon > 0 \exists N$ такой, что $\forall n > N$ выполнено

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

Тогда,

$$(9) \Rightarrow \text{при } n > N, m > N$$

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow (8)$$

То-есть, необходимость доказана. Если конечный предел существует, то соотношение 8 выполнено.

Теперь докажем достаточность.

Когда мы будем доказывать достаточность, то мы не знаем, существует предел или нет.

Замечание. Не каждая последовательность имеет предел (например, $x_n = -1^n$).

Для доказательства мы будем использовать теорему Дедекинда. Определим сечение множества вещественных чисел.

Нижний класс A - это

$$A = \alpha \in \mathbb{R} : \exists N \text{ такое, что } \forall n > N x_n > \alpha \quad (10)$$

Замечание. Номер n от α зависит.

Каждому α соответствует свой номер n .

Верхний класс A' - это

$$A' = \mathbb{R} \setminus A \quad (10')$$

Множества, получившиеся в (10) и (10') - это сечения, и это нужно проверить.

Нужно проверить, что A и A' не пустые и не совпадают с множеством вещественных чисел.

Возьмём

$$\varepsilon = 1$$

Тогда,

$$\exists N_0 \text{ такой, что } \forall m, n > N_0$$

$$|x_m - x_n| < 1$$

В частности, при $m = N + 1$ и при $n > N + 1$ имеем

$$|x_n - x_{N+1}| < 1 \Leftrightarrow x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1 \quad (11)$$

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} - 1 \in A \quad (12)$$

(по определению)

Пример. Если мы возьмем любой n который $> N + 1$, тогда получается что x_n больше чем число (12)

С другой стороны,

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} + 1 \notin A, \text{ то-есть, } x_{N+1} + 1 \in A' \quad (13)$$

При всех n , начиная с $N + 1$ x_n будет меньше чем то число. Оно никак не может удовлетворять соотношению (10).

Значит, это не может быть число из A , значит это число из A' .

$$(12), (13) \Rightarrow A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$$

Никакое из них не может быть множеством вещественных чисел.

Давайте возьмём $\forall \alpha \in A, \forall \beta \in A'$. Нужно доказать, что α всегда меньше β . В этом состоит условие определения сечения.

$$\alpha \in A = (10) \Rightarrow \exists N \text{ такой, что } \forall n > N x_n > \alpha \quad (14)$$

Если бы для любого $\forall n > N$ выполнялось $x_n > \beta$, то $\beta \in A$. Однако, это не так, т.к. $\beta \in A'$.

То-есть,

$$\exists n_0 > N \text{ такое, что } x_{n_0} \leq \beta \quad (15)$$

Примечание. Если бы всё время неравенство было в другую сторону ($x_n > \beta$), тогда бы по определению (10), мы бы получили, что $\beta \in A$, но мы взяли $\beta \in A'$, то есть $\beta \notin A$, значит свойства выше выполняться не может и выполняется свойство (15).

$$(14), (15) \Rightarrow \alpha \leq x_{n_0} \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta$$

То-есть, мы действительно получили сечение.

Теперь можно применить теорему Дедекинда.

По теореме Дедекинда, существует некое число

$$\exists a \in R \text{ такое, что } \forall \alpha \in A, \forall \beta \in A'$$

$$\alpha \leq a \leq \beta \quad (16)$$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$

Тогда,

$$(8) \Rightarrow \exists N \text{ такое, что выполнено (8)}$$

$$m = N + 1$$

Тогда,

$$(8) \Rightarrow \forall n > N + 1$$

$$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x_{N+1} - \varepsilon, x_{N+1} + \varepsilon) \quad (17)$$

Теперь, если посмотреть на соотношение (17),

$$(17) \Leftrightarrow x_n > x_{N+1} - \varepsilon \text{ и } x_n < x_{N+1} + \varepsilon$$

Примечание. при $\forall n > N + 1$, выполнена правая часть неравенства (17) $x_n > x_{N+1} - \varepsilon$.

Теперь рассмотрим (10) и (18).

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \in A \quad (19)$$

Теперь обратимся ко второму неравенству в соотношении (18).

Получается, что правая часть неравенства $x_n < x_{N+1}$ принадлежит A' , потому что если бы принадлежало A , должно было бы быть другое неравенство в другую сторону/

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon \in A' \quad (20)$$

Возьмём (19) $\Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon$ как α ,

а (20) $\Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon$ как β ,

Тогда, применяем (16), получаем что:

$$(16), (19), (20) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \leq a \leq x_{N+1} + \varepsilon \quad (21)$$

Обратимся к соотношению (17)

$$(17) : x_{N+1} < x_n < x_{N+1} + \varepsilon$$

Получаем, что a удовлетворяет этому неравенству и x_n удовлетворяет этому неравенству (лежит на промежутке) при $\forall n > N + 1$.

Поэтому, (21) и (17') \Rightarrow

$$|x_n - a| < 2\varepsilon = (x_{N+1} + \varepsilon) - (x_{N+1} - \varepsilon) \quad (22)$$

Примечание. То-есть, если x_n и a лежат на этом промежутке, то длина отрезка между a и x_n меньше чем длина промежутка, на котором они лежат. Длина промежутка равна 2ε

Мы получили, что существует некоторое a такое, что для любого $n > N + 1$ выполняется неравенство (22). А это определение предела.

По определению предела,

$$(22) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Тем самым, достаточность в критерии доказано. доказать конкретно a мы не смогли, но оно существует. □

0.2 Подпоследовательности

Последовательность - это отображение $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Допустим, что у нас имеется некоторое отображение $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 которое не является тождественным.
 g не тождественное отображение.
 Когда каждому n сопоставляется тоже самое n .

$$\forall n < m \quad g(n) < g(m)$$

Тогда, подпоследовательностью называется суперпозиция этих выражений.

$$f(g) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Примечание. Классический вид:

$$x_{n_{k=1}}^{\infty}$$

$$g(k) = n_k$$

$$n_1 < n_2 < \dots$$

Тем самым, вместо всей последовательности x_n мы рассматриваем только с такими номерами:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$$

Это только часть первоначальной последовательности.

Обозначение. Если эти номера определены, то последовательность обозначают

$$x_{n_k}^{\infty}_{k=1}$$

Предел последовательности определяется как предел подпоследовательности по нижним индексам.

Если есть такая последовательность, говорят что:

$A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом, то-есть $x_{n_k} \rightarrow A$, при $k \rightarrow \infty$, если $\forall \Omega(A)$ существует такой номер K , что для любого $k > K$ выполнено $x_{n_k} \in \Omega(A)$

Теорема 2. Пусть $x_n \rightarrow A$, при $n \rightarrow \infty$, где $A \in \overline{\mathbb{R}}$
 и пусть мы имеем любой подпоследовательность
 $x_{n_k}^{\infty}_{k=1}$ выбранную из этой последовательности. $\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow A$, при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Возьмём любую окрестность A .

$$\forall \Omega(A) \Rightarrow \exists N \text{ такое, что } \forall n > N$$

будет выполняться

$$x_n \in \Omega(A)$$

Воспользуемся тем, что последовательность n_k строго возрастает,

$$\rightarrow n_1 \geq 1, n_2 > 1, n_2 \geq 2$$

(Шаг индукции)

$$n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > n_k \geq k \rightarrow n_{k+1} > k + 1$$

То-есть, если мы выберем подпоследовательность, то n_k будет больше или равно k . Начиная с какого-то индекса, будет строго больше.

Возьмём $K = N$.

Тогда, при $k > N$ $n_k \geq k > N$

То-есть, при $k > N$, $x_{n_k} \in \Omega(A)$

$$\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow A, \text{ при } k \rightarrow \infty$$

□

Лекция 5: Продолжение (Часть 2)

05.10.2023

Теорема 3. (Больцано-Вейерштрасса)

Замечание. Эту теорему обычно называют принципом выбора Больцано-Вейерштрасса.

Пусть имеется некоторая последовательность x_n , которая ограничена.

Примечание. Ограниченность означает ограниченность и сверху и снизу.

$$a \leq x_n \leq b \forall n \quad (1)$$

$$x_{n=1}^{\infty}$$

Тогда,

$$\alpha \in [a, b] \text{ и } x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha$$

Такая, что

$$x_{n_k} \rightarrow \alpha \text{ при } k \rightarrow \infty \quad (2)$$

Замечание. Такое α может быть только одним, если последовательность ограничена и имеет некоторый предел.

Доказательство. определим последовательность промежутков.

$$I_1 = [a, b]$$

$$I'_2 = [a, \frac{a+b}{2}], I''_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$$

Примечание. $\frac{a+b}{2}$ - это центр отрезка $[a, b]$

В последовательности x_n имеется бесконечно много номеров (начиная с 1).

Рассмотрим множество номеров n таких, что $x'_n \in I'_2$ и n такие что $x_n \in I''_2$

(Какое-то из них, или оба бесконечны.)

Если бы первое и второе множество n выше было конечно, то мы получили бы что у нас есть конечное множество номеров n .

А в силу соотношения 1 на всем промежутке I_1 лежит вся последовательность.

поэтому, если бы и первое и второе множество было бы конечно, мы бы получили что рассматриваем конечно множество номеров x_n , которые лежат на всем отрезке I_1 , а на I_1 лежит вся последовательность.

Пусть I_2 - тот из I'_2, I''_2 , для которого \exists бесконечно n таких что $x_n \in I_2$

Примечание. Это может быть либо I'_1 , либо I'_2 , либо I''_2 если оба удовлетворяем, то любой возьмем. Произвольно. Можно например всегда брать только I'_2 , но по крайней мере для одного, таких номеров будет бесконечно много.

Имеется некоторое множество натуральных чисел, таких что x_n принадлежит I_2

Пусть n_1 - минимальные n , такие что $x_n \in I_2$

$I_2 = [a_2, b_2]$

Примечание. Снова рассмотрим середину, $\frac{a_2+b_2}{2}$

$$I'_3 = [a_2, \frac{a_2 + b_2}{2}]$$

$$I''_3 = [\frac{a_2 + b_2}{2}, b_2]$$

Нам известно, что множество тех n , таких что лежат на I_2 , множество таких n - бесконечно.

По крайней мере в одном из этих множеств тоже будет находится бесконечное множество номеров n .

Пусть I_3 - тот из I'_3, I''_3 , для которого \exists бесконечно n таких что $x_n \in I_3$

n_2 - минимальное n такое, что $x_n \in I_3$, и $n_2 > n_1$.

Примечание. Точка x_{n_1} может попасть на этот промежуток I_3 , но поскольку для этого промежутка существует бесконечно много n , таких что n принадлежит промежутку I_3 , то мы можем взять следующую, больше чем n_1 , и называем её n_2

И так далее по индукции. Предположим, что мы уже выбрали промежутки

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_m \quad (3')$$

При этом мы всё время делим пополам.

$$k + 1 \leq m$$

длина $I_{k+1} = \frac{1}{2}$ длины

$$I_k = \frac{b-a}{2^k} \quad (3)$$

$$n_1 < n_2 < \dots < n_m < n_{m+1} \quad (4)$$

$$x_{n_1} \in I_2, x_{n_2} \in I_2, \dots, x_{n_{m-1}} \in I_m \quad (5)$$

Предположим, что по индукции такое построение уже произошло
Пусть

$$I_m = [a_m, b_m] \quad (6)$$

Индуктивное предположение (индуктивный шаг)

Существует бесконечно много n , таких что

$$x_n \in I_m \quad (7)$$

Для двух и трёх мы это проделали. Предположим, что это проделано для n и будем выполнять индуктивный шаг.

$$I'_{m+1} = [a_m, \frac{a_m + b_m}{2}]$$

$$I''_{m+1} = [\frac{a_m + b_m}{2}, b_m]$$

Мы снова взяли и разделили промежуток $[a_m, b_m]$ пополам.

Рассмотрим множество номеров в множестве n таких, что $x'_n \in I'_{m+1}$ и n такие что $x_n \in I''_{m+1}$

(Хотя бы одно из них бесконечно, по той причине что объединение этих множеств это множество тех n таких что x_n принадлежит I_m , потому что вместе они дают на I_m , в силу предположения (7). Если бы и то и другое было бы конечно, то на множестве I_m было бы конечно множество номеров таких что x_n лежит на I_m , а по предположении индукции их должно быть бесконечно.)

Тогда по определению I_{m+1} - тот ищ I'_m, I''_m , для которого \exists бесконечно много n таких что $x_n \in I_{m+1}$

Пускай n_{m+1} - это наименьшее n такое что $x_{n_m} \in I_{m+1}$ и $n_{m+1} > n_m$

Примечание. Если элемент x_{n_m} лежит на I_{m+1} , то мы вычеркиваем его и рассматриваем минимальный следующий (их бесконечно много).

И так мы получили в итоге этих рассуждений:

$$n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$$

$$x_{n_m} \in I_{m+1}$$

$$(3) \Rightarrow \text{длина } I_m \rightarrow 0, \text{ при } m \rightarrow \infty \quad (8)$$

Примечание. Получается, что это вложенные промежутки.

$$(3') \text{ и } (8)$$

По теореме о вложенных пределах:

$$\exists \alpha \text{ такое что } \alpha \in I_m \forall m \quad (9)$$

$$(5) \Rightarrow x_{n_m} \in I_{m+1}$$

Точка α лежит на этом промежутке и точка с номером x_{n_m} лежит на этом же промежутке.

$$(5), (9) \Rightarrow |x_{n_m} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^m} \quad (10)$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$k : \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$$

Возьмём $m > K$

$$(10), (11) \Rightarrow \text{при } m > K$$

выполнено

$$x_{n_m} - \alpha \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \quad (12)$$

Таким образом мы доказали, что существует подпоследовательность у которой есть конечный предел.

$$a \in I_1$$

, т.е.

$$a \leq \alpha \leq e$$

□

0.3 Верхний и нижний предел последовательности

Определение 1. Пусть есть произвольная последовательность x_n .

$$x_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}$$

Если $x_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху, то верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x = +\infty$, по определению.

Если $x_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху, т.е.

$$\exists M \text{ т.ч. } x_n \leq M \forall \quad (1)$$

$$E_n = \{a \in \mathbb{R} : a = x_m, m \geq n\}$$

(множество всех значений последовательности x_n начиная с множества n)

$$g_n = \sup E_n$$

$$(1) \Rightarrow E_n \text{ ограничена сверху} \Rightarrow$$

$$g_n \leq M \forall n \quad (2)$$

Обратим внимание, что

$$E_{n+1} \subset E_n \Rightarrow g_{n+1} \leq g_n \quad (3)$$

Потому что может быть они совпадают, но мы рассматриваем элементов на 1 больше.

$$(3) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \geq -\infty \quad (4)$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \leq M \quad (5)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \text{ по определению}$$

Если мы посмотрим на определение верхнего предела, видно, что верхний предел, в отличие от просто предела существует в нулевой последовательности. Т.к. последовательность либо ограничена сверху, либо не ограничена сверху.

Если $x_{n=1}^\infty$ не ограничена снизу, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ по определению равно } -\infty$$

Если $x_{n=1}^\infty$ ограничена снизу, то-есть

$$\exists L, \text{ т.ч. } x_n \geq L \forall n \quad (7)$$

$$h_n = \inf E_n$$

$$(7) \Rightarrow h_n > -\infty$$

$$h_{n+1} \geq h_n \quad (8)$$

h_n - это монотонно возрастающая последовательность, а у любой такой последовательности есть предел. Может быть равный $+\infty$

$$(8) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \leq +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ по определению равен } \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \quad (9)$$

Таким образом, если мы рассматриваем любую последовательность x_n , то у неё существуют верхний и нижний предел.

0.4 Свойства верхних и нижних пределов

1.

$$h_n = \inf E_n \leq \sup E_n = g_n \quad (10)$$

и последовательность g_n и h_n имеют пределы.

Для всякого n справедливо это неравенство (10)

$$(10) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \quad (11)$$

$$(11) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (12)$$

Примечание. В отличие от обычных пределов, верхние и нижние пределы существуют у любой последовательности.

Теорема 4. Есть некоторая последовательность, тогда для того чтобы существовал предел

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = a \quad (13)$$

Примечание. Здесь нужно рассмотреть все случаи, когда соответствующие пределы и какой-то из них является символами $+$ или $-\infty$, но мы рассмотрим только когда речь идет о том, когда оба предела это вещественные числа.

Предположим, что существует предел.

Хотим проверить, что верхний предел равен нижнему пределу.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ т.ч. } \forall n > N$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad (14)$$

Посмотрим на определение g_n и h_n .

$$(14) \Rightarrow \text{при } n > N E_n \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_n \leq a + \varepsilon, h_n \geq a - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - \varepsilon \leq \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n \leq a + \varepsilon$$

$$\underline{\lim} x_n \geq a - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \underline{\lim} x_n - \overline{\lim} x_n \leq 2\varepsilon \quad (15)$$

Получается, что некоторое не отрицательное число не превосходит 2ε при любом положительном ε . Это может быть только тогда, когда это число равно 0.

$$(15) \Rightarrow \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = \lim x_n$$

И нижние и верхние пределы на самом деле равны a .

Тогда мы получаем следующие суждения

$$g_n \rightarrow a, h_n \rightarrow a$$

$$g_n \geq a \forall n$$

$$h_n \leq a \forall n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \text{ т.ч. } a \leq g_n < a + \varepsilon \text{ при } n > N_1 \quad (16)$$

и

$$\exists N_2 \text{ т.ч. } a - \varepsilon < h_n \leq a \text{ при } n > N_2 \quad (17)$$

$$N = \max(N_1, N_2) n > N$$

$$(16), (17) \Rightarrow a - \varepsilon < \inf E_n \leq \sup E_n < a + \varepsilon \quad (18)$$

$$(18) \Rightarrow \forall m \geq n \text{ выполнено } a - \varepsilon < x_m < a + \varepsilon \quad (19)$$

В частности,

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad (20)$$

$$(20) : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \underline{\lim} x_n = \lim x$$

Теорема доказана.

□