Оглавление

Лекция 4: Продолжение

27.09.2023

Свойства. (Продолжение)

5 $x_n \neq c\, \forall n, x_n \to a, a \neq 0 => \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

6 $\begin{cases} x_n \to a \text{из п. 5} \\ y_n \to b \end{cases} \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \to \frac{a}{b}$

7 $x_n \leq y_n \forall n, x_n \to a, y_n b \Rightarrow a \leq b$

Доказательство. (5, 6, 7)

5 I. Возьмем $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$, тогда:
$\exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon_0 \Rightarrow |x_n| \geq |a| - |x_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$

II. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon$

$N_0 = max(N_1, N)$. При $n > N_0$ получаем:
$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| = |\frac{a - x_n}{x_n \cdot a}| = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot |x_n - a| \underset{(I),(II)}{<} \frac{1}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} \cdot \varepsilon$

6 $\frac{y_n}{x_n} = y_n \cdot \frac{1}{x_n}$ — далее по п. (4), (5).

7 Предположим, что $a > b$. Тогда $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon_0 \\ \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \varepsilon_0 \end{cases} \Rightarrow$
$\forall n > N_1 + N_2 + 1 : y_n < \varepsilon_0 + b = b + \frac{a-b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon_0 < x_n \Rightarrow y_n < x_n$ — противоречие с условием.

□

Замечание. (Различные промежутки)

1. $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток)
2. $[a, b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$ — замкнутный промежуток
3. $[a, b) = \{x \in R : a \le x < b\}$ — полуоткрытый промежуток
4. $(a, b] = \{x \in R : a < x \le b\}$ — полуоткрытый промежуток

0.1 Расширенное множество вещественных чисел

Определение 1. $\overline{R} = R \cup \{+\infty, -\infty\}$ — расширенное множество вещественных чисел. При этом:
$\forall x \in \mathbb{R} : x < +\infty, x > -\infty$

Замечание. (Еще промежутки)

1. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
2. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$
3. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
4. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}$

Свойства. (Продолжение свойств пределов)

$$8 \quad \begin{cases} \forall n : x_n \le y_n \le z_n \\ x_n \to a \\ z_n \to a \end{cases} \Rightarrow y_n \to a \text{ — теорема о двух миллиционерах}$$

Доказательство. $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n > N_2 : |z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow z \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$
$\forall n > max(N_1, N_2) :$
$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$

□

0.2 Бесконечные пределы

Определение 2. (Бесконечные пределы)

- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to \infty$, $n \to \infty$
  $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$, если:

$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists N : \forall n > N : x_n > L$

- $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y_n \to -\infty$, $n \to \infty$

  $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, если:

  $\forall L \in \mathbb{R}: \ \exists N : \forall n > N : y_n < L$

  (возможно сокращение записи n-> далее.)

0.3 Единообразная запись определения пределов

Определение 3. Окрестостью вещественного числа a называется любой интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ (обозначается как $\omega(a)$).

Определение 4. Окрестность $+\infty : (L, +\infty), L \in \mathbb{R}$
Окрестность $-\infty : (-\infty, L), L \in \mathbb{R}$

Определение 5. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $x_n \to a$, если:
$\forall \omega(\alpha): \ \exists N : \forall n > N : x_n \in \omega(\alpha)$

Свойства. (Доказать самостоятельно)
Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a \to +\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, b \to -\infty$, тогда:

1. $c > 0 : ca_n \to +\infty, cb_n \to -\infty$
   $c < 0 : ca_n \to -\infty, cb_n \to +\infty$
2. $x_n \to x, x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Rightarrow a_n + x_n \to +\infty$
   $y_n \to y, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \Rightarrow b_n + y_n \to -\infty$
3. Возьмем x_n, y_n из п. (2), тогда:
   $x > 0 \Rightarrow a_n x_n \to +\infty, b_n x_n \to -\infty$
   $y < 0 \Rightarrow a_n y_n \to -\infty, b_n y_n \to +\infty$
4. Если $\forall n : a_n \neq 0, b_n \neq 0$, тогда:
   $\dfrac{1}{a_n} \to 0$
   $\dfrac{1}{b_n} \to 0$
   Если $x_n > 0, x_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} \to +\infty$
   Если $x_n < 0, x_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} \to -\infty$
5. $\forall n : x_n \leq y_n, x \to \alpha, y_n \to \beta; \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \alpha \leq \beta$

6. $\begin{cases} \forall n : x_n \le y_n \le z_n \\ x_n \to \alpha, \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \\ z_n \to \alpha \end{cases} \Rightarrow y_n \to \alpha$

Замечание. $+\infty = +\infty$
$-\infty = -\infty$
$-\infty < +\infty$

Доказательство. (2, 6)

2 $\begin{cases} x \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists M : \forall n : |x_n - x| < M \Rightarrow x_n > x - M \\ \forall L \in \overline{\mathbb{R}} : \exists N : \forall n > N : a_n > L \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n + x_n > L + x - M$, где правая часть — любое число.

6 $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n > N_2 : z_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$

$N_0 = max(N_1, N_2)$

$\forall n > N_0 : x_n \le y_n \le z_n \Rightarrow y_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$

□

0.4 Асимптотика

Определение 6. (О-большая и о-малая)

1. $x_n = o(1)$, если $x_n \to 0$
2. $y_n = O(1)$, если $\exists C : \forall n : |y_n| \le C$
3. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n : b_n \ne 0$, тогда:
   $a_n = o(b_n)$, если $\frac{a_n}{b_n} \to 0$
4. Пусть есть $\{c_n\}, \{d_n\}$, тогда:
   $c_n = O(d_n)$, если $\exists C : |c_n| \le C|d_n|$

Замечание. Это не равенство в привычном смысле, следует читать его только слева направо.

0.5 Монотонные последовательности

Определение 7. (монотонные последовательности)

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастает, если $\forall n : a_n \le a_{n+1}$ (возрастает строго если $a_n < a_{n+1}$)

- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает, если $\forall n : b_n \leq b_{n+1}$

Замечание. Говорят, что поледовательностть c_n монотонна, если она либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает.

Теорема 1. (Теорема о пределе монотонной последовательности)

- Пусть есть последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Для того, чтобы монотонно возрастающая последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы последовательность была ограничена сверху.
- Для того, чтобы монотонно убывающая последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно, чтобы последовательность была ограничена снизу.

При этом справелдивы неравенства:

- $\forall m : c_m \leq \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ — если последовательность возрастает. (или $<$ если строго возрастает)
- $\forall m : c_m \geq \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ — если последовательность убывает.

Доказательство.

1. Предположим, что проследовательность c_n не ограничена сверху, тогда:

   $\forall L \in \mathbb{R} : \exists N : c_N > L$

   $\forall n > N : c_n \geq c_{n-1} \geq c_{n-2} \geq ... \geq c_N + 1 \geq c_N > L$, значит $c_n > L$

   Значит по определению предела: $\lim c_n = +\infty$

2. Предположим теперь, что последовательность c_n возрастает и ограничена сверху, тогда:

   $\begin{cases} c_n \leq c_{n+1} \\ \exists M : \forall n : c_n \leq M \end{cases}$

   Пусть $E = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : \alpha = c_n\}$ — множество из всех элементов последовательности c_n.

   Значит E — ограничено сверху. Положим $C = \sup E$, тогда имеем $\forall n : c_n \leq C$

   $\forall \varepsilon > 0 : C - \varepsilon$ — не верхняя граница, значит $\exists N : c_N > C - \varepsilon \Rightarrow \forall n > N : c_n \geq c_{n-1} \geq \ldots \geq c_N > C - \varepsilon \Rightarrow C - \varepsilon < c_n \leq C < C + \varepsilon \Rightarrow |c_n - C| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = C$

   В обратную сторону: если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = C \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M : \forall n : |c_n - C| < M \Rightarrow \forall n : c_n \leq C + M$

3. Доказательство для убывающей последовательности аналогично. □

Теорема 2. (Теорема о вложенных промежутках)
Пусть $\forall n : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ и $b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
Тогда $\exists! c : \forall n : c \in [a_n, b_n]$

Доказательство. 1. существование

имеем неравенства:

$$\forall n : \begin{cases} a_n \le a_{n+1} \\ b_n \ge b_{n+1} \\ a_n < b_n \end{cases} \Rightarrow a_n < b_1, b_n > a_1$$

Тогда в силу возрастания a_n и убывания b_n по предыдущей теореме $\exists a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\exists b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

По свойству перехода к пределу в неравенствах: $a_n < b_n \Rightarrow a \le b$

Имеем $\begin{cases} \forall n : a_n \ge a \\ \forall n : b \le b_n \end{cases} \Rightarrow \forall n : b - a \le b_n - a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le \lim\limits_{n\to\infty} (b-a) \le \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ — в силу условия.

Значит $b - a = 0 \Rightarrow a = b \overset{def}{=} c$

Имеем $a_n \le c \le b_n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$

2. Единственность

Если бы $\exists c_0 \in [a_n, b_n]$, то $|c_0 - c| \le b_n - a_n \Rightarrow |c_0 - c| < \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow c_0 = c$

□

Замечание. Условие замкнутости промежутков существенно:
Имеем $(0, \frac{1}{n+1}] \supset (0, \frac{1}{n}]$, $\frac{1}{n} - 0 \underset{n\to\infty}{\to} 0$
Но $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}] = \varnothing$

0.6 Число e

Теорема 3. Пусть $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ и $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$
Тогда $\forall n : x_n < y_n$ и $x_n \to e, y_n \to e, 2 < e < 3$

Доказательство. Рассмотрим:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^{n+1} \cdot (\frac{n}{n-1})^n = (\frac{n}{n+1})^n \cdot (\frac{n}{n+1})^n \cdot (\frac{n}{n-1})^n =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2-1+1}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n$$

Возьмем за $x = \frac{1}{n^2-1}$, тогда по неравенству Бернулли:

$$\frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n > \frac{1}{n+1} \cdot (1 + \frac{n}{n^2-1}) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^2-1+n}{n^2-1} =$$

$$\frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$$

$\Rightarrow y_n < y_{n-1} \Rightarrow y_n$ — строго монотонно убывающая.

Теперь рассмотрим x_n : (считаем, что $n \geq 3$)

$$x_n = (1 + \frac{1}{n}^n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\frac{1}{n})^k = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{k! \cdot n^k} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot (1 - \frac{k-1}{n}) \cdot (1 - \frac{k-2}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{n})$$

(Продолжение на следующей лекции) $\square$