

# Математический анализ

Широков Николай Алексеевич<sup>1</sup>

07.09.2023 - ...

<sup>1</sup>"Записал Сергей Киселев, Гараев Тагир"

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Построение множества вещественных чисел</b>	<b>2</b>
1.1	Множества . . . . .	2
1.2	Сечения . . . . .	2
1.3	Сумма сечений . . . . .	3
1.4	Теоремы сечений . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Вещественные числа</b>	<b>8</b>
2.1	Супремумы и инфимумы . . . . .	9
2.2	Неравенство Бернулли . . . . .	11
2.3	Определение степени и логарифма . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Последовательности</b>	<b>13</b>
3.1	Сопоставление вещественным числам десятичных дробей . . .	13
3.2	Предел последовательности . . . . .	14
3.3	Арифметические операции над пределами . . . . .	15
3.4	Расширенное множество вещественных чисел . . . . .	16
3.5	Бесконечные пределы . . . . .	17
3.6	Единообразная запись определения пределов . . . . .	17
3.7	Асимптотика . . . . .	19
3.8	Монотонные последовательности . . . . .	19
3.9	Число $e$ . . . . .	21
3.10	Критерий Коши, существование конечного предела последо- вательности . . . . .	23
3.11	Подпоследовательности . . . . .	26
3.12	Верхний и нижний предел последовательности . . . . .	29
3.13	Свойства верхних и нижних пределов . . . . .	30

# Глава 1

## Построение множества вещественных чисел

Лекция 1: Введение

14.09.2023

### 1.1 Множества

**Определение 1.** Множества  $X$  и  $Y$  равны, если:

$$\forall a \in X : a \in Y$$

$$\forall b \in Y : b \in X$$

**Определение 2.**  $X \subset Y$  если:

$$\forall a \in X : a \in Y$$

**Определение 3.** 1.  $a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \vee a \in B$

$$2. a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \in B$$

$$3. a \in A \setminus B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \notin B$$

**Определение 4.** (Декартово произведение множеств)

$$A \times B = \{(a, b) : \forall a \in A, \forall b \in B\}; A, B \neq \emptyset$$

**Определение 5.**  $F : A \rightarrow B$  - функция, такая, что:  $\forall a \in A$  сопоставляет  $b = F(a) \in B$

### 1.2 Сечения

**Определение 6.** Множество  $\alpha \subset \mathbb{Q}$  называется сечением, если:

- I.  $\alpha \neq \emptyset$

- II. если  $p \in \alpha$ , то  $q < p \Leftrightarrow q \in \alpha$
- III. в  $\alpha$  нет наибольшего

**Пример.** 1.  $p^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < p\}$  - нет наибольшего

2.  $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 0 \vee p > 0 \wedge p^2 < 2\}$

**Теорема 1.** (Утверждение 1)

Если  $p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$ , то  $q > p$

**Доказательство.** Если  $p \in \alpha$  и  $q \leq p$ , то из (II.) следует, что  $q \in \alpha$   $\square$

**Теорема 2.** (Утверждение 2)  $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

**Доказательство.**  $\begin{cases} \alpha < \beta \Rightarrow \exists p \in \beta, p \notin \alpha \\ \beta < \gamma \Rightarrow \exists p \in \gamma, q \notin \beta \end{cases} \Rightarrow p < q \Rightarrow \alpha < \gamma$   $\square$

**Теорема 3.** Пусть  $\alpha, \beta$  - сечения. Между ними существует одно из

нескольких отношений:  $\begin{cases} \alpha < \beta \\ \beta > \alpha \\ \alpha = \beta \end{cases}$

**Доказательство.** Предположим, что  $\alpha < \beta$  и  $\beta < \alpha$ , тогда:

$$\begin{cases} \exists p \in \alpha, p \notin \beta \\ \exists q \in \beta, q \notin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p > q \\ q > p \end{cases} \text{ - Противоречие, тогда } \alpha \neq \beta \quad \square$$

### 1.3 Сумма сечений

**Теорема 4.** Пусть  $\alpha, \beta$  - сечения, тогда:

$\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha, q \in \beta\}$  - тоже сечение.

**Доказательство.** • (I.) Пусть  $\exists s \notin \alpha, \exists t \notin \beta$ , тогда:

$$\forall p \in \alpha, q \in \beta : \begin{cases} p < s \\ q < t \end{cases} \Rightarrow p + q < s + t \Rightarrow \alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$$

• (II.)

$$r \in \alpha + \beta, r_1 < r$$

$$r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$$

$$r_1 = p + q_1, r_1 < r \Rightarrow q_1 < q \Rightarrow q_1 \in \beta \Rightarrow p + q_1 \in \alpha + \beta$$

• (III.)

$\exists p_1 \in \alpha, p > p_1 \Rightarrow p_1 + q > p + q = r, p_1 + q \in \alpha + \beta$  - нет наибольшего  $\square$

**Теорема 5.** (Свойства суммы сечений)

1.  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2.  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\gamma + \beta)$
3.  $\alpha + 0^* = \alpha$ , где  $0^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}$

**Доказательство.** Свойства 1 и 2 справедливы в силу коммутативности и ассоциативности рациональных чисел.

Докажем свойство 3:

1. Пусть  $p \in \alpha, q \in 0^*$ , тогда:  $p + q < p \Rightarrow p + q \in \alpha$ , т.е.  $\alpha + 0^* \subset \alpha$
2. Пусть  $p \in \alpha$ , тогда:  $\exists p_1 > p \Rightarrow p_1 \in \alpha, p = p_1 + (p - p_1)$ , при том  $p_1 \in \alpha, p - p_1 \in 0^* \Rightarrow p \in \alpha + 0^* \Rightarrow \alpha \subset \alpha + 0^*$

$$\begin{cases} \alpha \subset \alpha + 0^* \\ \alpha + 0^* \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \alpha + 0^* \quad \square$$

## 1.4 Теоремы сечений

**Теорема 6.** (Теорема 2) Пусть  $\alpha$  - сечение,  $r \in \mathbb{Q}^+$ , тогда  $\exists p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$ :  
 $q$  - не наименьшее верхнее (не входящее в сечение) число  
 $q - p = r$

**Доказательство.** Пусть  $p_0 \in \alpha, p_1 = p_0 + r$

1. Возможно,  $p_1 \notin \alpha$ , тогда:
  - (а) если  $p_1$  - не наименьшее в верхнем классе, то  $q = p_1$
  - (б) если же наименьшее, то  $p = p_0 + \frac{r}{2}, q = p_1 + \frac{r}{2}$
2. Если  $p_1 \in \alpha$ , тогда:  
 Положим  $p_n = p_1 + nr$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда  $\exists! m$ :  
 $p_m \in \alpha$  и  $p_{m+1} \notin \alpha$ 
  - (а) Если  $p_{m+1}$  - не наименьшее в верхнем классе, то выберем  $p = p_m, q = p_{m+1}$
  - (б) Если же наименьшее, то  $p = p_m + \frac{r}{2}, q = p_{m+1} + \frac{r}{2}$

$\square$

**Теорема 7.** (Существование противоположного элемента) Пусть  $\alpha$  - сечение, тогда  $\exists! \beta : \alpha + \beta = 0^*$

**Доказательство.** (нужно доказать единственность и существование)

1. Докажем единственность: пусть  $\exists \beta_1, \beta_2$ , удовлетворяющие условию, тогда:

$$\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1$$

2. Докажем существование: пусть

$$\beta = \{p : -p \notin \alpha, -p \text{ не является наименьшим в верхнем классе } \alpha\}$$

- (I.) Очевидно, что  $\beta \neq \emptyset, \mathbb{Q}$
- (II.) Возьмем  $p \in \beta, q < p \Leftrightarrow -q > -p \Rightarrow -q$  в верхнем классе  $\alpha$ , но не наименьшее  $\Rightarrow q \in \beta$
- (III.) Если  $p \in \beta$ , то  $-p$  - не наименьшее в верхнем классе  $\alpha$ , значит  $\exists q : -q < -p$  и  $-q \notin \alpha$

Положим  $r = \frac{p+q}{2}$ , тогда:

$$-q < -r < -p \Rightarrow -r \text{ - не наименьшее в верхнем классе } \alpha.$$

Значит, нашли такое  $r > p$ , что  $r \in \beta$

Теперь проверим, что  $\alpha + \beta = 0^*$ :

1. Возьмем  $p \in \alpha, q \in \beta$

$$\text{По определению } \beta : -q \notin \alpha \underset{\text{утв. 1}}{\Rightarrow} -q > p \Leftrightarrow p + q < 0 \Rightarrow p + q \in 0^* \Rightarrow \alpha + \beta \subset 0^*$$

2. Возьмем по Теореме (2)  $q - p = r \Leftrightarrow p - q = -r \in 0^*$

$$\text{т.к. } q \notin \alpha, \text{ то } -q \in \beta, \text{ значит } p - q = p + (-q) \in \alpha + \beta \Rightarrow 0^* \subset \alpha + \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \subset 0^* \\ 0^* \subset \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 0^* \quad \square$$

## Лекция 2: Сечения

21.09.2023

**Теорема 8.** Пусть  $\alpha, \beta$  — сечения. Тогда  $\exists! \gamma$  — сечение :  $\alpha + \gamma = \beta$

**Доказательство.** Пусть имеем  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , удовлетворяющие условию. Тогда:  $\alpha + \gamma_1 = \beta = \alpha + \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$  — противоречие.

Положим  $\gamma = \beta + (-\alpha)$ . Тогда в силу свойств сечений имеем:

$$\alpha + \gamma = \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0^* + \beta = \beta \quad \square$$

**Определение 7.** Сечение  $\gamma$ , построенное в предыдущей теореме обозначается через  $\beta - \alpha$

**Определение 8.** (Абсолютная величина)  $|a| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geq 0^* \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0^* \end{cases}$

**Определение 9.** (Произведение) Пусть  $\alpha, \beta$  — сечения, причем  $\alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^*$

Тогда  $\alpha\beta = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0 \vee r = pq, \text{ где } p \in \alpha, q \in \beta\}$

**Пример.**  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^*$

**Теорема 9.** (Любые 3 из них необходимо доказать самостоятельно)  
Для любых сечений  $\alpha, \beta, \gamma$  имеем:

1.  $\alpha\beta = \beta\alpha$
2.  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
3.  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
4.  $\alpha 0^* = 0^*$
5.  $\alpha 1^* = \alpha$
6. если  $\alpha < \beta$  и  $\gamma > 0^*$ , то  $\alpha\gamma < \beta\gamma$
7. если  $\alpha \neq 0^*$ , то  $\exists \beta : \alpha \cdot \beta = 1^*, \beta = \frac{1^*}{\alpha}$
8. если  $\alpha \neq 0^*$ , то  $\exists \beta, \gamma : \alpha \cdot \gamma = \beta, \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$

**Теорема 10.** (Свойства рациональных сечений)

1.  $p^* + q^* = (p + q)^*$
2.  $p^* q^* = (pq)^*$
3.  $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

**Доказательство.** 1. Возьмем  $r \in (p + q)^* \Rightarrow r < p + q$

Положим  $h = p + q - r$ :

$$\begin{cases} p_1 = p - \frac{h}{2} \\ q_1 = q - \frac{h}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in p^* + q^* \Rightarrow (p^* + q^*) \subset p^* + q^*$$

Теперь возьмем  $r \in p^* + q^* \Rightarrow r = p_1 + q_1$ :

$$\begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 < p + q \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in (p + q)^* \Rightarrow p^* + q^* \subset (p + q)^*$$

$$\begin{cases} p^* + q^* \subset (p + q)^* \\ (p + q)^* \subset p^* + q^* \end{cases} \Rightarrow p^* + q^* = (p + q)^*$$

2. Для умножения доказательство аналогично.

3. Если  $p < q$ , то  $p \in q^*, p \notin p^* \Rightarrow p^* < q^*$

Если  $p^* < q^*$ , то  $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in q^*, r \notin p^* \Rightarrow p \leq r < q \Rightarrow p < q$

Значит  $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

□

**Теорема 11.** Пусть  $\alpha, \beta$  — сечения,  $\alpha < \beta$ . Тогда  $\exists r^*$  — рациональное сечение :  
 $\alpha < r^* < \beta$

**Доказательство.**  $\alpha < \beta \Rightarrow \exists p : p \in \beta, p \notin \alpha$

Выберем такое  $r > p$ , так, что  $r \in \beta$ . Поскольку  $r \in \beta, r \notin r^*$ , то  $r^* < \beta$

Поскольку  $p \in r^*, p \notin \alpha$ , то  $\alpha < r^*$

□



## Глава 2

# Вещественные числа

**Определение 10.** В дальнейшем сечения будут называться вещественными числами. Рациональные сечения будут отождествляться с рациональными числами. Все другие сечения будут называться иррациональными числами.

Таким образом, множество всех рациональных чисел оказывается подмножеством системы вещественных чисел.

**Теорема 12.** (Дедекинда) Пусть  $A$  и  $B$  — такие множества вещественных чисел, что:

1.  $A \cup B = \mathbb{R}$
2.  $A \cap B = \emptyset$
3.  $A, B \neq \emptyset, A \neq B$
4.  $\forall \alpha \in A, \beta \in B : \alpha < \beta$

Тогда  $\exists! \gamma \in \mathbb{R} : \alpha \leq \gamma \leq \beta \forall \alpha \in A, \forall \beta \in B$

**Доказательство.** 1. Докажем единственность.

Пусть  $\gamma_1, \gamma_2$  — два числа, причем  $\gamma_1 < \gamma_2$ . Тогда  $\exists \gamma_3 : \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2 \Rightarrow \gamma_3 \in A, \gamma_3 \in B$  — противоречие. Значит  $\gamma_1 = \gamma_2$ .

2. Проверим, является ли  $\gamma$  сечением.

$$\gamma = \{p \in \mathbb{Q} : \exists \alpha \in A : p \in \alpha\}$$

I.  $\gamma \neq \emptyset$ , т.к.  $A \neq \emptyset$

$\gamma \neq \mathbb{Q}$ , т.к.  $\exists q \in \mathbb{Q} : q \notin B \Rightarrow q \notin \gamma$

II. Пусть  $p_1 < p, p \in \gamma$ . Тогда  $\exists \alpha \in A : p_1 \in \alpha \Rightarrow p_1 \in \gamma$

III. Пусть  $p \in \gamma$ . Тогда  $\exists \alpha \in A : p \in \alpha$ . Поскольку  $\alpha$  — сечение, то  $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \alpha, q > p \Rightarrow q \in \gamma$

Ясно, что  $\alpha \leq \gamma \forall \alpha \in A$ .

Предположим, что  $\exists \beta \in B : \beta < \gamma$ . Тогда  $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \gamma, q \notin \beta \Rightarrow \exists \alpha \in A : q \in \alpha \Rightarrow \alpha > \beta$  — противоречие. Значит  $\gamma \leq \beta \forall \beta \in B$ .  $\square$

## 2.1 Супремумы и инфимумы

**Определение 11.**  $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \emptyset$

$E$  — ограничено сверху, если  $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq y$

**Определение 12.**  $G \subseteq \mathbb{R}, G \neq \emptyset$

$G$  — ограничено снизу, если  $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \geq y$

**Замечание.** Если множество ограничено сверху и снизу, оно называется ограниченным.

**Определение 13.** Пусть  $E$  ограничено сверху. Тогда  $y$  называется точной верхней границей (верхней гранью)  $E$ , если:

1.  $y$  — верхняя граница множества  $E$ .
2. если  $x < y$ , то  $x$  не является верхней границей множества  $E$ .

**Определение 14.** Пусть  $E$  ограничено снизу. Тогда  $y$  называется точной нижней границей (нижней гранью)  $E$ , если:

1.  $y$  — нижняя граница множества  $E$ .
2. если  $x > y$ , то  $x$  не является нижней границей множества  $E$ .

**Определение 15.** Точная верхняя граница —  $y \sup E$

Точная нижняя граница —  $y \inf E$

**Пример.**  $E$  состоит из всех чисел  $\frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$ . Тогда множество ограничено, верхняя грань равна 1 и принадлежит множеству, а нижняя равна 0 и множеству не принадлежит.

**Теорема 13.** Пусть  $E$  ограничено сверху. Тогда  $\sup E$  существует.

**Доказательство.** Пусть есть множества:

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in E : x > \alpha\}$$

$$B = \mathbb{R} \setminus A$$

Тогда  $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

$$\begin{cases} \beta \in B \\ \alpha \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in E : x \leq \beta \\ \exists x_0 \in E : x_0 > \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha < \beta$$

Ясно, что никакой элемент множества  $A$  не является верхней гра-

ницей множества  $E$ , а любой элемент множества  $B$  является верхней границей множества  $E$ . Поэтому достаточно доказать, что  $B$  содержит наименьшее число.

По теореме Дедекинда:  $\exists \gamma : \begin{cases} \alpha \leq \gamma \ \forall \alpha \in A \\ \beta \geq \gamma \ \forall \beta \in B \end{cases}$

Предположим, что  $\gamma \in A$ . Тогда  $\exists x \in E : x > \gamma$ .

Возьмем  $\gamma_1 : \gamma < \gamma_1 < x \Rightarrow \gamma_1 \in A$  — противоречие.

Значит  $\gamma \in B$ . □

**Теорема 14.** Пусть  $E$  ограничено снизу. Тогда  $\inf E$  существует.

**Доказательство.** Доказательство тривиально и предоставляется читателю в качестве упражнения  $\odot \smile \odot$ . □

**Теорема 15.** (Существование корня из вещественного числа)  $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n > 0 \exists! y \in \mathbb{R}, y > 0 : y^n = x, y = \sqrt[n]{x}$

**Доказательство.** 1. Единственность.

Пусть  $y_2 > y_1 : y_2^n = x = y_1^n \Rightarrow y_2^n - y_1^n = 0$

$(y_2 - y_1) \cdot (y_2^{n-1} + y_2^{n-2} \cdot y_1 + \dots + y_1^{n-1}) = 0$  — противоречие.

2. Существование.

Пусть  $E = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0, t^n < x\}$

$0 \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$

Положим  $t_0 = 1 + x, t_0^n = (1 + x)^n$

$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = 1 + nx + \dots > x \Rightarrow E$  — ограничено сверху.

Пусть  $y = \sup E$  (она существует по теореме о Существовании супремума).

- Допустим, что  $y^n < x$ . Возьмем  $h : 0 < h < 1$  и  $h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}$

Тогда

$$\begin{aligned} (y + h)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k y^{n-k} h^k = \\ &= y^n + \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^k = \\ &= y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^{k-1} < y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} = \\ &= y^n + h \cdot ((1+y)^n - y^n) < (y+1)^n - y^n < y^n + x - y^n = x \\ &\text{— } y \text{ не верхняя граница.} \end{aligned}$$

- Допустим, что  $y^n > x$ . Возьмем  $k : 0 < k < 1$ ,  $k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$  и  $k < y$ . Тогда аналогично с  $y^n < x$  получаем, что  $y - k$  — верхняя граница  $E$ , что противоречит тому, что  $y = \sup E$ .

Значит  $y^n = x$ .

□

## Лекция 3: Степень, логарифм, десятичные дроби. Последовательности.

28.09.2023

### 2.2 Неравенство Бернулли

**Теорема 16 (Неравенство Бернулли).** Пусть  $x > -1$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

**Доказательство.** Докажем по индукции. При  $n = 1$  неравенство очевидно. Пусть оно верно для  $n = k$ . Тогда

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку  $kx^2 \geq 0$ .

□

### 2.3 Определение степени и логарифма

**Определение 16.** Пусть  $a > 0$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$ ;  $r = \frac{n}{m}$ . Тогда

$$a^r = (a^{\frac{1}{m}})^n.$$

Если  $m > 0$ , то:  $a^m = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$   $m$

Если  $m < 0$ , то  $x^m = \frac{1}{a^{|m|}}$ .

**Определение 17.** Пусть  $p \in \mathbb{Q}$ ,  $p \neq 0$ ,  $a > 1$

Тогда  $a^p = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \neq 0, r < p\}$

$$a^0 = 1$$

**Определение 18.** Пусть  $a > 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$E = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < \alpha, r \neq 0\}$$

Тогда  $\sup E = a^\alpha$ .

И  $\forall a \in \mathbb{R} : 0 < a < 1 : a^\alpha = (\frac{1}{a})^{-\alpha}$

**Определение 19.** Пусть  $a > 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $x > 0$ . Тогда

Если  $a > 1 : \log_a x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : a^r < x\}$ .

Если  $0 < a < 1 : \log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$

**Теорема 17.** (Без доказательства) Для степени и логарифма справед-

ливы все ранее встречавшиеся свойства. (имеется в виду школьный курс)

## Глава 3

# Последовательности

**Определение 20.** Пусть  $X$  — множество,  $X \neq \emptyset$ . Тогда последовательностью элементов множества  $X$  называется функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ .

$x_1, x_2, \dots, x_n \dots; x_n \in X$  Последовательность —  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

### 3.1 Сопоставление вещественным числам десятичных дробей

**Алгоритм.** (Построение дроби по числу)

Рассматриваем только  $x > 0, x \in \mathbb{R}$

Возьмем  $n_0 \in \mathbb{Z}_+ : n_0 \leq x, n_0$  — максимальное число с таким свойством.

- Если  $n_0 = x$  — алгоритм закончен.
- Если  $n_0 < x$  — продолжаем: выбираем  $n_1 \in \mathbb{Z} : n_0 + \frac{n_1}{10} \leq x$

Аналогично с  $n_0$ , проверяем равенство с  $x$ . Так вплоть до  $n_k$ :

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} \leq x$$

Если ни на одном шаге равенство не выполняется, то задаем последовательность:

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = n_0, \frac{n_1}{10}, \frac{n_2}{10^2}, \dots$$

**Теорема 18.** (О супремуме десятичных дробей) Рассмотрим  $E = \{r : r = \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k}, k \in \mathbb{N}\}$

Тогда  $\sup E = x$  (из алгоритма).

**Доказательство.** Так как  $n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} < x$ , то  $\sup E \leq x$

Предположим, что  $\sup E < x$ . Тогда  $\exists r : r = x - \sup E > 0$ .

Выберем такое  $k$ , что  $\frac{1}{k \cdot 9} < r \Leftrightarrow k > \frac{1}{r \cdot 9}$ .

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} < x < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k+1}{10^k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} > x - \frac{1}{10^k} > x - \frac{1}{9^k} > x - r = \sup E, \text{ значит}$$

$$x = \sup E$$

□

**Лемма 1.** (доказать самостоятельно) Пусть есть  $E \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, E_a = \{x + a : x \in E\}$   
Тогда  $\sup E_a = a + \sup E$

Дальше шла какая-то теорема, смысл которой я не понял. Если найдете адекватную запись или сможете объяснить — пишите ☺ ◡ ☺

## 3.2 Предел последовательности

**Определение 21.** Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность вещественных чисел. Тогда  $a \in \mathbb{R}$  называется пределом последовательности, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$ .

**Замечание.**  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : |z - x| \leq |z - y| + |y - x|$

**Определение 22.** Пусть  $X$  — множество, функция  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$   
 $X$  — метрическое пространство, если:  $\forall a, b \in X : \rho(a, b) \geq 0$   
И выполнены следующие свойства:

1.  $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2.  $\rho(a, b) = \rho(b, a)$
3.  $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b)$

Тогда  $\rho$  — метрика  $X$ .

**Пример.**  $\mathbb{R}$  — метрическое пространство,  $\rho(x, y) = |x - y|$

**Определение 23.** Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $a \in X, \{x_n\}_{n=0}^{\infty}, x_n \in X$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < \varepsilon$

**Теорема 19.** (Единственность предела) Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , то  $a = b$

**Доказательство.** Пусть  $a \neq b$ . Тогда  $\delta = \rho(a, b) > 0$ . Положим  $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$ .

1. Так как  $x_n \rightarrow a : \exists N_1 : \forall n > N_1 : \rho(x_n, a) < \varepsilon$
2. И так как  $x_n \rightarrow b : \exists N_2 : \forall n > N_2 : \rho(x_n, b) < \varepsilon$ .

Пусть  $n = N_1 + N_2 + 1$ . Тогда для  $n$  выполнены (1) и (2)  
 Имеем  $0 < \delta = \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{\delta}{2}$  — противоречие.  $\square$

**Теорема 20.** (Ограниченность сходящейся последовательности)  $X$  — метрическое пространство с метрикой  $\rho$

$x_n \in X, a \in X$  Пусть  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ . Тогда  $\exists R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, a) < R$

**Доказательство.** Возьмем

$\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < 1$  (1)

Определим  $R$  как  $R = \max(\rho(x_1, a) + 1, \rho(x_2, a) + 1, \dots, \rho(x_N, a) + 1, 1)$   
 (2)

Тогда:

- если  $n > N$ , то из (1) следует (2), значит  $R \geq 1$
- если  $1 \leq n \leq N$ , то  $R \geq \rho(x_n, a)$

В обоих случаях  $R$  удовлетворяет условию теоремы.  $\square$

### 3.3 Арифметические операции над пределами

**Свойства.** Для  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, c \in \mathbb{R}$  справедливы следующие свойства:

$$1. \forall n \in \mathbb{N} : x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$2. c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \cdot a$$

$$3. x_n + y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$$

$$4. x_n \cdot y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b$$

**Доказательство.** 1.  $\forall \varepsilon > 0, \forall n > 1 : |x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |cx_n - ca| = |c(x_n - a)| = |c||x_n - a| < |c|\varepsilon$$

$$3. \begin{cases} \forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon_1 \\ \forall \varepsilon_2 > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \varepsilon_2 \end{cases} \Rightarrow \text{при } n > N_1 + N_2 + 1 : \\ |x_n + y_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$4. \text{Аналогично (3) при } n > N_1 + N_2 + 1 : |x_n y_n - ab| = |x_n y_n - ay_n + ay_n - ab| \leq |x_n y_n - ay_n| + |ay_n - ab| = |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b|$$

т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то  $\exists R : \forall n : |y_n| \leq R$  (из предыдущей теоремы)

$$\text{Тогда } |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| < \varepsilon_1 R + |a|\varepsilon_2$$

$\square$



## Лекция 4: Продолжение

27.09.2023

**Свойства.** (Продолжение)

$$5 \quad x_n \neq c \quad \forall n, x_n \rightarrow a, a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{a}$$

$$6 \quad \begin{cases} x_n \rightarrow a \\ y_n \rightarrow b \end{cases} \text{ из п. 5} \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

$$7 \quad x_n \leq y_n \quad \forall n, x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b \Rightarrow a \leq b$$

**Доказательство.** (5, 6, 7)

5 I. Возьмем  $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$ , тогда:

$$\exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon_0 \Rightarrow |x_n| \geq |a| - |x_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$$

II.  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon$

$N_0 = \max(N_1, N)$ . При  $n > N_0$  получаем:

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - x_n}{x_n \cdot a} \right| = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot |x_n - a| \underset{(I), (II)}{<} \frac{1}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} \cdot \varepsilon$$

6  $\frac{y_n}{x_n} = y_n \cdot \frac{1}{x_n}$  — далее по п. (4), (5).

7 Предположим, что  $a > b$ . Тогда  $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon_0 \\ \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \varepsilon_0 \end{cases} \Rightarrow$   
 $\forall n > N_1 + N_2 + 1 : y_n < \varepsilon_0 + b = b + \frac{a-b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon_0 <$   
 $x_n \Rightarrow y_n < x_n$  — противоречие с условием.

□

**Замечание.** (Различные промежутки)

1.  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  — интервал (открытый промежуток)
2.  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  — замкнутый промежуток
3.  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  — полуоткрытый промежуток
4.  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  — полуоткрытый промежуток

### 3.4 Расширенное множество вещественных чисел

**Определение 24.**  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  — расширенное множество вещественных чисел. При этом:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x < +\infty, x > -\infty$$

**Замечание.** (Еще промежутки)

1.  $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
2.  $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
3.  $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
4.  $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

**Свойства.** (Продолжение свойств пределов)

$$8 \quad \begin{cases} \forall n : x_n \leq y_n \leq z_n \\ x_n \rightarrow a \\ z_n \rightarrow a \end{cases} \Rightarrow y_n \rightarrow a \text{ — теорема о двух милиционерах}$$

**Доказательство.**  $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n > N_2 : |z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow z \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$   
 $\forall n > \max(N_1, N_2) :$   
 $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$

□

### 3.5 Бесконечные пределы

**Определение 25.** (Бесконечные пределы)

- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , если:  
 $\forall L \in \mathbb{R} \exists N : \forall n > N : x_n > L$
- $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$ , если:  
 $\forall L \in \mathbb{R} : \exists N : \forall n > N : y_n < L$   
(возможно сокращение записи  $n \rightarrow \infty$  далее.)

### 3.6 Единообразная запись определения пределов

**Определение 26.** Окрестностью вещественного числа  $a$  называется любой интервал  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$  (обозначается как  $\omega(a)$ ).

**Определение 27.** Окрестность  $+\infty : (L, +\infty), L \in \mathbb{R}$   
Окрестность  $-\infty : (-\infty, L), L \in \mathbb{R}$

**Определение 28.** Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , тогда  $x_n \rightarrow a$ , если:  
 $\forall \omega(\alpha) : \exists N : \forall n > N : x_n \in \omega(\alpha)$

**Свойства.** (Доказать самостоятельно)

Пусть  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a \rightarrow +\infty, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, b \rightarrow -\infty$ , тогда:

1.  $c > 0 : ca_n \rightarrow +\infty, cb_n \rightarrow -\infty$   
 $c < 0 : ca_n \rightarrow -\infty, cb_n \rightarrow +\infty$
2.  $x_n \rightarrow x, x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Rightarrow a_n + x_n \rightarrow +\infty$   
 $y_n \rightarrow y, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \Rightarrow b_n + y_n \rightarrow -\infty$
3. Возьмем  $x_n, y_n$  из п. (2), тогда:  
 $x > 0 \Rightarrow a_n x_n \rightarrow +\infty, b_n x_n \rightarrow -\infty$   
 $y < 0 \Rightarrow a_n y_n \rightarrow -\infty, b_n y_n \rightarrow +\infty$
4. Если  $\forall n : a_n \neq 0, b_n \neq 0$ , тогда:  
 $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$   
 $\frac{1}{b_n} \rightarrow 0$   
 Если  $x_n > 0, x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$   
 Если  $x_n < 0, x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow -\infty$
5.  $\forall n : x_n \leq y_n, x \rightarrow \alpha, y_n \rightarrow \beta; \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \alpha \leq \beta$
6.  $\begin{cases} \forall n : x_n \leq y_n \leq z_n \\ x_n \rightarrow \alpha, \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \\ z_n \rightarrow \alpha \end{cases} \Rightarrow y_n \rightarrow \alpha$

**Замечание.**  $+\infty = +\infty$

$$-\infty = -\infty$$

$$-\infty < +\infty$$

**Доказательство.** (2, 6)

$$2 \quad \begin{cases} x \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists M : \forall n : |x_n - x| < M \Rightarrow x_n > x - M \\ \forall L \in \overline{\mathbb{R}} : \exists N : \forall n > N : a_n > L \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n + x_n > L + x - M, \text{ где правая часть — любое число.}$$

$$6 \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n > N_2 : z_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

$$N_0 = \max(N_1, N_2)$$

$$\forall n > N_0 : x_n \leq y_n \leq z_n \Rightarrow y_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

□

### 3.7 Асимптотика

**Определение 29.** (О-большая и о-малая)

1.  $x_n = o(1)$ , если  $x_n \rightarrow 0$
2.  $y_n = O(1)$ , если  $\exists C : \forall n : |y_n| \leq C$
3. Пусть  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n : b_n \neq 0$ , тогда:  
 $a_n = o(b_n)$ , если  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$
4. Пусть есть  $\{c_n\}, \{d_n\}$ , тогда:  
 $c_n = O(d_n)$ , если  $\exists C : |c_n| \leq C|d_n|$

**Замечание.** Это не равенство в привычном смысле, следует читать его только слева направо.

### 3.8 Монотонные последовательности

**Определение 30.** (монотонные последовательности)

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  монотонно возрастает, если  $\forall n : a_n \leq a_{n+1}$  (возрастает строго если  $a_n < a_{n+1}$ )
- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  монотонно убывает, если  $\forall n : b_n \geq b_{n+1}$

**Замечание.** Говорят, что последовательность  $c_n$  монотонна, если она либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает.

**Теорема 21.** (Теорема о пределе монотонной последовательности)

- Пусть есть последовательность  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ , тогда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \in \overline{\mathbb{R}}$ .
- Для того, чтобы монотонно возрастающая последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы последовательность была ограничена сверху.
- Для того, чтобы монотонно убывающая последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно, чтобы последовательность была ограничена снизу.

При этом справедливы неравенства:

- $\forall m : c_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  — если последовательность возрастает. (или  $<$  если строго возрастает)
- $\forall m : c_m \geq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  — если последовательность убывает.

**Доказательство.** 1. Предположим, что последовательность  $c_n$  не ограничена сверху, тогда:

$$\forall L \in \mathbb{R} : \exists N : c_N > L$$

$$\forall n > N : c_n \geq c_{n-1} \geq c_{n-2} \geq \dots \geq c_N + 1 \geq c_N > L, \text{ значит } c_n > L$$

Значит по определению предела:  $\lim c_n = +\infty$

2. Предположим теперь, что последовательность  $c_n$  возрастает и ограничена сверху, тогда:

$$\begin{cases} c_n \leq c_{n+1} \\ \exists M : \forall n : c_n \leq M \end{cases}$$

Пусть  $E = \{c_n \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : c_n = c_n\}$  — множество из всех элементов последовательности  $c_n$ .

Значит  $E$  — ограничено сверху. Положим  $C = \sup E$ , тогда имеем  $\forall n : c_n \leq C$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 : C - \varepsilon &\text{ — не верхняя граница, значит } \exists N : c_N > C - \varepsilon \Rightarrow \\ \forall n > N : c_n &\geq c_{n-1} \geq \dots \geq c_N > C - \varepsilon \Rightarrow C - \varepsilon < c_n \leq C < \\ C + \varepsilon &\Rightarrow |c_n - C| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C \end{aligned}$$

В обратную сторону: если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M : \forall n : |c_n - C| < M \Rightarrow \forall n : c_n \leq C + M$

3. Доказательство для убывающей последовательности аналогично.  $\square$

**Теорема 22.** (Теорема о вложенных промежутках)

Пусть  $\forall n : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$  и  $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Тогда  $\exists ! c : \forall n : c \in [a_n, b_n]$

**Доказательство.** 1. существование

имеем неравенства:

$$\forall n : \begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \\ b_n \geq b_{n+1} \\ a_n < b_n \end{cases} \Rightarrow a_n < b_1, b_n > a_1$$

Тогда в силу возрастания  $a_n$  и убывания  $b_n$  по предыдущей теореме  $\exists a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  и  $\exists b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

По свойству перехода к пределу в неравенствах:  $a_n < b_n \Rightarrow a \leq b$

Имеем  $\begin{cases} \forall n : a_n \geq a \\ \forall n : b \leq b_n \end{cases} \Rightarrow \forall n : b - a \leq b_n - a_n \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b - a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  — в силу условия.

Значит  $b - a = 0 \Rightarrow a = b \stackrel{\text{def}}{=} c$

Имеем  $a_n \leq c \leq b_n$ , т.е.  $c \in [a_n, b_n]$

## 2. Единственность

Если бы  $\exists c_0 \in [a_n, b_n]$ , то  $|c_0 - c| \leq b_n - a_n \Rightarrow |c_0 - c| < \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow c_0 = c$

□

**Замечание.** Условие замкнутости промежутков существенно:

Имеем  $(0, \frac{1}{n+1}] \supset (0, \frac{1}{n}]$ ,  $\frac{1}{n} - 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Но  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}] = \emptyset$

## 3.9 Число $e$

**Теорема 23.** Пусть  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  и  $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

Тогда  $\forall n : x_n < y_n$  и  $x_n \rightarrow e, y_n \rightarrow e, 2 < e < 3$

**Доказательство.** Рассмотрим:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^{n+1} \cdot (\frac{n}{n-1})^n = (\frac{n}{n+1})^n \cdot (\frac{n}{n+1})^n \cdot (\frac{n}{n-1})^n =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2-1+1}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n$$

Возьмем за  $x = \frac{1}{n^2-1}$ , тогда по неравенству Бернулли:

$$\frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n > \frac{1}{n+1} \cdot (1 + \frac{n}{n^2-1}) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^2-1+n}{n^2-1} =$$

$$\frac{n^3 + n^2 - n}{n^3 + n^2 - n - 1} > 1$$

$\Rightarrow y_n < y_{n-1} \Rightarrow y_n$  — строго монотонно убывающая.

Теперь рассмотрим  $x_n$  : (считаем, что  $n \geq 3$ )

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \\
&= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{(n-k+1) \cdot \dots \cdot n}{k! \cdot n^k} = \\
&= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

(Продолжение на следующей лекции)

□

## Лекция 5: Продолжение

**Доказательство.** (Продолжение доказательства)

05.10.2023

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \quad (2)$$

$$\forall r > 0 : 1 - \frac{r}{n+1} > 1 - \frac{r}{n} \Rightarrow \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (1)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x_{n+1} > x_n$$

Примем во внимание неравенства для  $y_n$  и неравенства для  $x_n$ . Тогда мы будем иметь следующее неравенство:

$$\Rightarrow x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n < y_{n-1} < \dots < y_1 \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow x_n < y_1, y_n > x, \forall n \quad (5)$$

Последовательность  $x_n$  строго возрастает и ограничена сверху. Мы можем применить критерий существования конечного предела у строгой монотонной возрастающей последовательности.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Если мы посмотрим на последовательность  $y_n$ , она ограничена снизу в отношении пяти и мы знаем что она строго монотонно убывает. По теореме о предельной последовательности получаем, что:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Теперь,

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Таким образом,

$$a = b = e \quad (6)$$

$$(6) \Rightarrow x_n < e < y_n \forall n \quad (7)$$

$$(7) \Rightarrow e > x_1 = 2, e < y_5 < 3$$

$$y_5 = (\frac{6}{5})^6$$

$$e = 2.718...$$

□

**Замечание.** Число  $e$  — одно из фундаментальных констант на которой держится вся математика.

Первые две - это 0 и 1. А третья — это  $\pi$

### 3.10 Критерий Коши, существование конечного предела последовательности

**Теорема 24.** Пусть имеется некоторая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Для того чтобы  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$  необходимо и достаточно, чтобы  $\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall m, \forall n > N :$

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad (8)$$

**Замечание.** В формулировке не сказано чему будет равен этот предел. Какой именно он будет - неизвестно. Известно только то что он существует. Это так называемая теорема существования.

**Примечание.** Необходимость означает что предел существует.

**Доказательство.** Докажем необходимость. Предположим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in \mathbb{R}$$

Тогда, по определению предела для любого  $\varepsilon > 0 \exists N$  такой, что  $\forall n > N$  выполнено

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$



Тогда,

$$(9) \Rightarrow \text{при } n > N, m > N$$

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow (8)$$

То-есть, необходимость доказана. Если конечный предел существует, то соотношение 8 выполнено.

Теперь докажем достаточность.

Когда мы будем доказывать достаточность, то мы не знаем, существует предел или нет.

**Замечание.** Не каждая последовательность имеет предел (например,  $x_n = -1^n$ ).

Для доказательства мы будем использовать теорему Дедекинда. Определим сечение множества вещественных чисел. Нижний класс  $A$  — это

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists N : \forall n > N : x_n > \alpha\} \quad (10)$$

Верхний класс  $A'$  — это

$$A' = \mathbb{R} \setminus A \quad (10')$$

Множества, получившиеся в (10) и (10') — это сечения, и это нужно проверить.

- Возьмём  $\varepsilon = 1$ , тогда:  $\exists N_0 : \forall m, n > N_0 : |x_m - x_n| < 1$

В частности, при  $m = N + 1$  и при  $n > N + 1$  имеем

$$|x_n - x_{N+1}| < 1 \Leftrightarrow x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1 \quad (11)$$

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} - 1 \in A \quad (12)$$

С другой стороны,

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} + 1 \notin A, \text{ то-есть, } x_{N+1} + 1 \in A' \quad (13)$$

$$(12), (13) \Rightarrow A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$$

- Никакое из них не может быть множеством вещественных чисел.

Давайте возьмём  $\forall \alpha \in A, \forall \beta \in A'$ . Нужно доказать, что  $\alpha$  всегда меньше  $\beta$ . В этом состоит условие определения сечения.

$$\alpha \in A = (10) \Rightarrow \exists N : \forall n > N : x_n > \alpha \quad (14)$$

Если бы для любого  $\forall n > N$  выполнялось  $x_n > \beta$ , то  $\beta \in A$ . Однако, это не так, т.к.  $\beta \in A'$ .

То-есть,

$$\exists n_0 > N : x_{n_0} \leq \beta \quad (15)$$

**Примечание.** Если бы всё время неравенство было в другую сторону ( $x_n > \beta$ ), тогда бы по определению (10), мы бы получили, что  $\beta \in A$ , но мы взяли  $\beta \in A'$ , то есть  $\beta \notin A$ , значит свойства выше выполняться не может и выполняется свойство (15).

$$(14), (15) \Rightarrow \alpha \leq x_{n_0} \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta$$

То-есть, мы действительно получили сечение.

Теперь можно применить теорему Дедекинда. По теореме Дедекинда:

$$\exists a \in R : \forall \alpha \in A, \forall \beta \in A' : \alpha < a < \beta \quad (16)$$

Возьмём  $\forall \varepsilon > 0$ , тогда:

$$(8) \Rightarrow \exists N \text{ такое, что выполнено (8)}$$

$$m = N + 1$$

Тогда, (8)  $\Rightarrow \forall n > N + 1$

$$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x_{N+1} - \varepsilon, x_{N+1} + \varepsilon) \quad (17)$$

Теперь, если посмотреть на соотношение (17),

$$(17) \Leftrightarrow x_n > x_{N+1} - \varepsilon \text{ и } x_n < x_{N+1} + \varepsilon \quad (18)$$

**Примечание.** при  $\forall n > N + 1$ , выполнена правая часть неравенства (17)  $x_n > x_{N+1} - \varepsilon$ .

Теперь рассмотрим (10) и (18).

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \in A \quad (19)$$

Теперь обратимся ко второму неравенству в соотношении (18).

Получается, что правая часть неравенства  $x_n < x_{N+1}$  принадлежит  $A'$ , потому что если бы принадлежало  $A$ , должно было бы быть другое неравенство в другую сторону

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon \in A' \quad (20)$$

Возьмём (19)  $\Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon$  как  $\alpha$ ,

а (20)  $\Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon$  как  $\beta$ ,

Тогда, применяем (16), получаем что:

$$(16), (19), (20) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \leq a \leq x_{N+1} + \varepsilon \quad (21)$$

Обратимся к соотношению (17)

$$(17) : x_{N+1} < x_n < x_{N+1} + \varepsilon$$

Получаем, что  $a$  удовлетворяет этому неравенству и  $x_n$  удовлетворяет этому неравенству (лежит на промежутке) при  $\forall n > N + 1$ .

Поэтому, (21) и (17)  $\Rightarrow$

$$|x_n - a| < 2\varepsilon = (x_{N+1} + \varepsilon) - (x_{N+1} - \varepsilon) \quad (22)$$

**Примечание.** То-есть, если  $x_n$  и  $a$  лежат на этом промежутке, то длина отрезка между  $a$  и  $x_n$  меньше чем длина промежутка, на котором они лежат. Длина промежутка равна  $2\varepsilon$

Мы получили, что существует некоторое  $a$  такое, что для любого  $n > N+1$  выполняется неравенство (22). А это определение предела.

По определению предела,

$$(22) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Тем самым, достаточность в критерии доказана.  $\square$

### 3.11 Подпоследовательности

**Определение 31.** Пусть есть отображение  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  и нетождественное отображение  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . При этом выполняется:  $\forall n < m : g(n) < g(m)$

Тогда последовательность отображений  $f(g) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  — подпоследовательность.

**Примечание.**  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Берем  $g(1) = n_1, g(2) = n_2, \dots, g(k) = n_k$  и получаем подпоследовательность:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$$

**Обозначение.** Если эти номера определены, то последовательность обозначают как:  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

**Определение 32.** Предел последовательности определяется как предел подпоследовательности по нижним индексам.

Если есть такая последовательность, говорят что:

$A \in \overline{\mathbb{R}}$  является пределом, то есть  $x_{n_k} \rightarrow A$ , при  $k \rightarrow \infty$ , если  $\forall \Omega(A) \exists K : \forall k > K : x_{n_k} \in \Omega(A)$

**Теорема 25.** Пусть  $x_n \rightarrow A$ , при  $n \rightarrow \infty$ , где  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  и пусть мы имеем любую подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , выбранную из этой последовательности.

Тогда  $x_{n_k} \rightarrow A$ , при  $k \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Возьмём любую окрестность  $A$ .

$$\forall \Omega(A) \Rightarrow \exists N : \forall n > N : x_n \in \Omega(A)$$

Воспользуемся тем, что последовательность  $n_k$  строго возрастает:

$$n_1 \geq 1, n_2 > n_1, n_2 \geq 2$$

Тогда по индукции:

$$n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > n_k \geq k \rightarrow n_{k+1} > k + 1$$

То есть, если мы выберем подпоследовательность, то  $n_k$  будет больше или равно  $k$ . Начиная с какого-то индекса, будет строго больше.

Возьмём  $k = N$ .

Тогда, при  $k > N : n_k \geq k > N$

То есть, при  $k > N : x_{n_k} \in \Omega(A)$

$$\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow A, \text{ при } k \rightarrow \infty$$

□

**Теорема 26.** (Больцано-Вейерштрасса)

Пусть имеется некоторая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , которая ограничена, т.е.  $\forall n : a \leq x_n \leq b$ .

Тогда:  $\exists \alpha \in [a, b]$  и  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  такие, что:  $x_{n_k} \rightarrow \alpha$  при  $k \rightarrow \infty$

**Замечание.** Такое  $\alpha$  может быть только одним, если последовательность ограничена и имеет некоторый предел.

**Доказательство.** определим последовательность промежутков.

$$I_1 = [a, b]$$

$$I'_2 = [a, \frac{a+b}{2}], I''_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$$

Рассмотрим множества номеров  $n$ :

$$\begin{cases} \text{таких, что } : x_n \in I'_2 \\ \text{таких, что } : x_n \in I''_2 \end{cases} \quad \text{— какое-то из них, или оба бесконечны}$$

Если бы первое и второе множество  $n$  выше было конечно, то мы получили бы, что последовательность, лежащая в  $I_1$  конечна, что противоречит условию. Тогда возьмем  $I_2$  — одно из множеств из  $I'_1, I''_2$

**Примечание.** Это может быть либо  $I'_1$ , либо  $I'_2$ , либо  $I''_2$  если оба удовлетворяем, то любой возьмем. Произвольно. Можно например всегда брать только  $I'_2$ , но по крайней мере для одного, таких номеров будет бесконечно много.

Имеется некоторое множество натуральных чисел, таких что  $x_n$  принадлежит  $I_2$

Пусть  $n_1$  - минимальное  $n : x_n \in I_2$

Возьмем  $I_2 = [a_2, b_2]$  и поделим этот отрезок на:

$$I'_3 = [a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$$

$$I''_3 = [\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$$

По крайней мере в одном из этих отрезков тоже будет находиться бесконечное множество номеров  $n$ .

Пусть  $I_3$  - тот из  $I'_3, I''_3$ , для которого  $\exists$  бесконечно  $n$  таких что  $x_n \in I_3$

$n_2$  - минимальное  $n$  такое, что  $x_n \in I_3$ , и  $n_2 > n_1$ .

И так далее по индукции. Предположим, что мы уже выбрали промежутки

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_m \quad (3')$$

$$I_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{b-a}{2^k} \right) \quad (3')$$

$= I_k$

$$n_1 < n_2 < \dots n_m < n_{m+1} \quad (4)$$

$$x_{n_1} \in I_2, x_{n_2} \in I_2, \dots x_{n_{m-1}} \in I_m \quad (5)$$

Предположим, что по индукции такое построение уже произошло

Пусть

$$I_m = [a_m, b_m] \quad (6)$$

Существует бесконечно много  $n$ , таких что

$$x_n \in I_m \quad (7)$$

Предположим, что это проделано для  $n$  и будем выполнять индукционный шаг.

$$I'_{m+1} = [a_m, \frac{a_m + b_m}{2}]$$

$$I''_{m+1} = [\frac{a_m + b_m}{2}, b_m]$$

Мы снова взяли и разделили промежуток  $[a_m, b_m]$  пополам.

Рассмотрим множество номеров  $n$  таких, что  $x_n \in I'_{m+1}$

и  $n$  такие что  $x_n \in I''_{m+1}$

Тогда по определению  $I_{m+1}$  - тот из  $I'_m, I''_m$ , для которого  $\exists$  бесконечно много  $n$  таких что  $x_n \in I_{m+1}$

Пусть  $n_{m+1}$  - это наименьшее  $n$  такое что  $x_{n_m} \in I_{m+1}$  и  $n_{m+1} > n_m$

И так мы получили в итоге этих рассуждений:

$$n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$$

$$x_{n_m} \in I_{m+1}$$

$$(3) \Rightarrow \text{длина } I_m \rightarrow 0, \text{ при } m \rightarrow \infty \quad (8)$$

Получается, что это вложенные промежутки.

По теореме о вложенных промежутках:

$$\exists! \alpha \text{ такое что } \alpha \in I_m \forall m \quad (9)$$

$$(5) \Rightarrow x_{n_m} \in I_{m+1}$$

Точка  $\alpha$  лежит на этом промежутке и точка с номером  $x_{n_m}$  лежит на этом же промежутке, справедливо неравенство:

$$|x_{n_m} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^m} \quad (10)$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists k : \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \quad (11)$$

$$(10), (11) \Rightarrow |x_{n_m} - \alpha| < \varepsilon \text{ при } m > k$$

Таким образом мы доказали, что существует подпоследовательность у которой есть конечный предел.

$$a \in I_1, \text{ т.е. } a \leq \alpha \leq \varepsilon$$

□

### 3.12 Верхний и нижний предел последовательности

**Определение 33.** Пусть есть произвольная последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}$

Если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  не ограничена сверху, то верхний предел

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} := +\infty$$

.

Если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена сверху, то верхний предел

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{x_m : m \geq n\})$$

.

Если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  не ограничена снизу, то нижний предел

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} := -\infty$$

Если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена снизу, то нижний предел

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} := \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf \{x_m : m \geq n\})$$

Таким образом, если мы рассматриваем любую последовательность  $x_n$ , то у неё существуют верхний и нижний предел.

**Замечание.** Нижний и верхний пределы в дальнейшем будут обозначаться как  $\liminf$  и  $\limsup$  соответственно. (простите, так удобней)

### 3.13 Свойства верхних и нижних пределов

**Замечание.** Пусть есть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Определим  $E_n$  как множество  $\{x_m : m \geq n\}$ ,  $h_n = \inf E_n$ ,  $g_n = \sup E_n$ . Справедливо неравенство:

$$h_n \leq g_n, \text{ откуда получаем: } \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

**Теорема 27.** Есть некоторая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , тогда:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (13)$$

**Доказательство.** Предположим, что существует предел. Хотим проверить, что верхний предел равен нижнему пределу.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$$

Посмотрим на определение  $g_n$  и  $h_n$ .

$$(14) \Rightarrow \text{при } n > N : E_n \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup x_n - \liminf x_n \leq 2\varepsilon \quad (15)$$

Получается, что некоторое не отрицательное число не превосходит  $2\varepsilon$  при любом положительном  $\varepsilon$ . Это может быть только тогда, когда это число равно 0.

$$(15) \Rightarrow \limsup x_n = \liminf x_n = \lim x_n$$

В обратную сторону:

$$\forall n : g_n \leq a, h_n \geq a$$

Рассмотрим последовательности  $g_n, h_n$ , такие, что:

$$g_n \rightarrow a, h_n \rightarrow a$$

По определению предела:  $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : a - \varepsilon < g_n < a + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : a - \varepsilon < h_n < a + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$   
 $a - \varepsilon < \inf E_n \leq \sup E_n < a + \varepsilon$   
 При  $N = \max(N_1, N_2)$  из этого следует, что  $\forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$

а это значит, что:  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \limsup x_n = \liminf x_n$

□