Оглавление

Лекция 4: Ортонормированный базис и ориентация базиса

02.10.2023

0.1 Построение ортонормированного базиса

Теорема 1. Ортонормированный баис существует.

Доказательство. (Ортогонализация Грама-Шмидта)
Есть $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \qquad |\mathbf{u}_1| = 1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{w}_2 \perp \mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|}$$

$$|\mathbf{u}_2| = 1 \qquad \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2) = 0$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{u}_1) = 0$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - \alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 0$$

$$\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)$$

Пусть $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{k-1}$ построены
Построим $\mathbf{u}_k$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \alpha_1\mathbf{u}_1 - \alpha_2\mathbf{u}_2 - ... - \alpha_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{w}_k \perp \mathbf{u}_i \qquad (i \leq k-1)$$

$$0 = (\mathbf{w}_k, \mathbf{u}_i) = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i) - \alpha_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)$$

$$\alpha_i = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i)$$

$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{w}_k}{|\mathbf{w}_k|}$$

Строим $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ с помощью данного алгоритма.

Замечание. $\mathbf{u}_i$ – ЛК $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i$

Вывод. Если $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ – базис $\Rightarrow$ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ — ОНБ, т.е. если $\dim V = n$, то $\exists$ ОНБ

Пусть V - евклидово пространство, $\dim V = n$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ – ОНБ, $\mathbf{w} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_n\mathbf{u}_n$, то можем записать $\mathbf{w} = (a_1, \dots, a_n)$, соответственно $\mathbf{v} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \dots + b_n\mathbf{u}_n$, тогда

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_n\mathbf{u}_n, b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \dots + b_n\mathbf{u}_n) = \\ = a_1b_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) + a_1b_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + \dots + a_1b_n(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n) + \\ + a_2b_1(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + a_2b_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + \dots + a_2b_n(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_n) + \\ + a_nb_1(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + a_nb_2(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + \dots + a_nb_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = \\ = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n\end{aligned}$$

$\square$

0.2 Ориентация базиса

Определение 1 (Неформальное). На плоскости: $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = S_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \text{ (ориентированная площадь)}$$

В пространстве: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$; $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}} \text{ (ориентированный объем)}$$

Определение 2 (Формальное).

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

Мнемоническое правило:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}\right|$$

По бирюзовой стрелке сложение, по зеленой – вычитание.

Замечание. Данные свойства справедливы для матриц любого порядка.

Свойства.

1. Если строку или столбец умножить на α, то определитель тоже умножится на α.
2. Если меняем 2 строки или столбца, то знак определителя меняется.
3. Если есть 2 одинаковых строки, то определитель равен 0.
4. Если к одному из векторов прибавить вектор кратный другому, то определитель не поменяется.
5. Определитель единичной матрицы равен 1.

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha b_1 & a_2+\alpha b_2 & a_3+\alpha b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Теорема 2. (Доказательство будет на алгебре)

$$\exists! f : M_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$$

такая, что, удовлетворяет свойствам 1-5.

Теорема 3.

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Определение 3 (Ориентация). $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – ОНБ («правая тройка»), $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется правой тройкой векторов.

Если $\det < 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется левой тройкой векторов.
Если $\det = 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ – ЛЗ.

Выводы:

1. Ориентация бывает только у ЛНЗ троек – у базисов.
2. Ориентаций бывает ровно 2.
3. Одинаковость ориентаций является эквивалентностью.