Оглавление

Лекция 9: Непрерывность и производная.

02.11.2023

0.1 Непрерывность и существование предела обратной функции

Теорема 1.
$$\begin{cases} f \in C([a,b]) \\ f\text{– строго монотонна} \\ [p,q] = f([a,b]) \end{cases} \Rightarrow \exists g : [p,q] \to \mathbb{R}, g \in C([p,q])$$
И g – обратная функция к f, то есть:
$\forall x \in [a,b] : \quad g(f(x)) = x$
$\forall y \in [p,q] : \quad f(g(y)) = y$
если f возрастает, то g возрастает (убывание аналогично)

Доказательство. Возьмем $\forall y \in (p,q) \Rightarrow \exists x \in (a,b) : f(x) = y$
$$\begin{cases} \text{если } x_1 < x \Rightarrow f(x_1) < f(x) = y \\ \text{если } x_2 > x \Rightarrow f(x_2) > f(x) \end{cases}$$
Значит $\Rightarrow \forall y \in [p,q] \exists! x : f(x) = y$

Определим $g(y)$ как $g(y) := x : f(x) = y$. Значит, у f существовует обратная g.

Проверим, что g, при возрастающем f, будет возрастать:
$y_1 < y_2; \quad g(y_1) = x_1, g(y_2) = x_2$, где $g(y_1) \neq g(y_2) \quad (x_1 \neq x_2)$
Если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) = y_1 > f(x_2) = y_2 \Rightarrow$ противоречие
$\Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow g(y)$ строго возрастает
$\forall x_0 \in [a,b], g([p,q]) \subset [a,b]$ в силу определения g

$\forall x_0 \in [a, b]$ пусть $y_0 = f(x_0)$
$y_0 \in [p, q]$, значит $g(y_0) = x_0 \Rightarrow g([p, q]) = [a, b]$
А значит, в силу возрастания g: $g \in C([p, q])$ $\square$

Свойства. (Из теоремы следуют свойства:)

1. $f(x) = \sin x, f$ определена на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], f$ – строго возрастает. Тогда обратной к f будет функция $g(f(x)) = \arcsin(f(x)), f(x) \in [-1, 1]$

2. $f(x) = \cos x, f$ определена на $[0, \pi], f$ – строго возрастает. Тогда обратной к f будет функция $g(f(x)) = \arccos(f(x)), f(x) \in [-1, 1]$

3. Возьмем $a_n = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n}, b_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n}$ $\forall n : [a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $f(x) = \tan x, f : [a_n, b_n] \to [p_n, q_n], p_n = \tan a_n, q_n = \tan b_n$ Обратной к f будет функция $g(f(x)) = \arctan(f(x))$ причем g определена на $\bigcup_{n=1}^{\infty} [p_n, q_n] = \mathbb{R}$

4. Аналогично пункту выше, возьмем $a_n = \frac{\pi}{4n}, b_n = \pi - \frac{\pi}{4n}, f(x) = \cot x, f$ определена на $[a_n, b_n]$ и получим обратную к f функцию $g = \operatorname{arccot}(f(x))$, опрделенная на $\bigcup_{n=1}^{\infty} [p_n, q_n] = \mathbb{R}$

0.2 Теоремы Вейерштрасса и Кантора

Теорема 2 (I Теорема Вейерштрасса). Пусть $f \in C([a, b])$, тогда $\exists M, L : \forall x \in [a, b]$:

$$L \leq f(x) \leq M$$

Доказательство. Пусть $\nexists M : f(x) \leq M; \quad \forall x \in [a, b]$, тогда:

$$\left.\begin{aligned} &\exists x_1 \in [a, b] : f(x_1) > 1 \\ &\exists x_2 \in [a, b] : f(x_2) > f(x_1) + 2 \\ &\qquad\vdots \\ &\exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > f(x_{n-1}) + n \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x_n) \to +\infty \Rightarrow \exists x^* \in [a, b]$ и $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : x_{n_k} \to x^* (k \to \infty)$ по принципу выбора Больцано-Вейерштрасса
f непрерывна в x^* по определению, а значит:
$\Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x^*) \quad (k \to \infty) \Rightarrow \exists A : |f(x_{n_k})| \leq A; \quad \forall k$
из выбора $x_1, \ldots, x_n$ в начале следует, что: $f(x_{n_k}) > n_k \geq k \Rightarrow k < A; \quad \forall k$ — противоречие.

Для L доказательство аналогично. $\square$

Теорема 3 (II Теорема Вейерштрасса). Пусть $f \in C([a, b])$ тогда $\exists x_- \in [a, b]$ и $\exists x_+ \in [a, b]$ такие, что:

$$f(x_-) \le f(x) \le f(x_+); \quad \forall x \in [a,b]$$

Доказательство. Пусть $\nexists x_+ \in [a,b]$: $f(x) \le f(x_+); \quad \forall x \in [a,b]$
Возьем $E = f([a,b]) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [a,b], f(x) = y\}$
По 2: $\exists M : f(x) \le M; \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow E$ ограничено сверху
Путсь $y_0 = \sup E$, тогда $\forall x \in [a,b] : f(x) \le y_0$
Т.к. мы предположили в начале, что $\nexists x_+$, то: $f(x) < y_0; \quad \forall x \in [a,b]$
Возьмем φ: $\varphi(x) = y_0 - f(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \varphi \in C([a,b])$
Значит, $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \in C([a,b])$
По 2: $\exists Q > 0 : \dfrac{1}{\varphi(x)} \le Q; \quad \forall x \in [a,b]$, т.е.

$$\frac{1}{Q} \le \varphi(x) \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] : \frac{1}{Q} \le y_0 - f(x)$$

Значит, $y_0 - \frac{1}{Q}$ — верхняя граница E, но это противоречит, тому, что $y_0 = \sup E$.

Для x_- доказательство аналогично. □

0.3 Теорема Кантора

Определение 1. $E \subset \mathbb{R}; \quad f : E \to \mathbb{R}$
f равномерно непрерывна на E, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E : |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Теорема 4. Если $f \in C([a,b])$, то f равномерно непрерывна на $[a,b]$

Доказательство. пусть $f(x)$ неравномерно непрерывна на $[a,b]$, тогда $\exists \varepsilon_0$ и последовательности $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x''_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n : x'_n, x''_n \in [a,b]$ такие, что:

$$\forall n : |x''_n - x'_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \qquad f(x''_n) - f(x'_n)| \ge \varepsilon_0$$

По принципу выбора Больцано-Вейерштрасса $\exists x^* \in [a,b]$ и $\exists \{x'_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $x'_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x^*$. Поскольку $\forall k : a \le x'_{n_k} \le b$, то $a \le x^* \le b$. Поскольку $|x''_n - x'_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то $x''_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x^*$. Так как f непрерывна в x^*, то:

$$\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \omega_{\delta_0}(x^*) \cap [a,b] : |f(x) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

Тогда $\forall x_1, x_2 \in \omega_{\delta_0}(x^*) \cap [a, b]$ имеем:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(x_2) - f(x^*)| + |f(x_1) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2}$$

Поскольку $x'_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x^*$ и $x''_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x^*$, то:

$$\exists N : \forall k > N : x'_{n_k}, x''_{n_k} \in \omega_{\delta_0}(x^*) \cap [a, b] \Rightarrow |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

Противоречие. $\square$

Глава 1

Производная

1.1 Дифференцируемость функции

Определение 2. $f : (a, b) \to \mathbb{R}; \quad x_0 \in (a, b)$
f имеет производную в точке x_0

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Определение 3. $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ имеет правую производную в a, если

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

Определение 4. $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ имеет левую производную в b, если

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(b + h) - f(b)}{h} \in \mathbb{R}$$

Теорема 5. Пусть f имеет производную, тогда $\exists \delta > 0$ и $M > 0$: при $x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|$.

Доказательство. По определению производной: $\Rightarrow \exists \delta > 0 : h \neq 0, |h| < \delta$ имеем:

$$|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h| < |h| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq |f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h| +$$

$$+ |f'(x_0)h| < |h| + |f'(x_0)||h| = (1 + f'(x_0))|h|$$

Выберем $M = 1 + |f'(x_0)|$ и $x - x_0 = h : \quad |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow |h| < \delta$

$\square$

Следствие. f непрерывна в x_0.

Определение 5. $f:(a,b)\to\mathbb{R}; \quad x_0\in(a,b)$
f дифференцируема в x_0, если:

$$\exists A\in\mathbb{R}, r:(a,b)\to\mathbb{R}: f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+r(x) \text{ и } \frac{r(x)}{x-x_0}\to 0(x\to x_0)$$

Теорема 6. f дифференцируема в $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$, при этом для A из (8)(8') имеем $A=f'(x_0)$ (10)

Доказательство. $\exists f'(x_0)\Rightarrow \delta(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\to 0(h\to 0)$ (11)
$\rho(h)=h\delta(h)$ (12)
(11)(12) $\Rightarrow f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h=h\delta(h)=\rho(h)$ (13)
(13'): $f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\rho(h)$
$\dfrac{\rho(h)}{h}=\delta(h)\to 0(h\to 0)$ (14)
$A=f'(x_0)$
Доказали, что если f имеет $f'(x)$, то она дифференцируема и $A=f'(x_0)$ □

Доказательство. Докажем в обратную сторону
Пусть f дифференцируема в $x_0, h\neq 0$
(8') $\Rightarrow \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A+\dfrac{\rho(h)}{h}\to A\in\mathbb{R}(h\to 0)$ (15)
(15) $\Rightarrow \exists f'(x_0)=A$ □

1.2 Свойства дифференцируемых функций

Свойства.
1. $(a,b); \quad x_0\in(a,b)$
   f дифференцируема в $x_0\Rightarrow cf$ дифферованна в x_0
$$(cf)'(x_0)=cf'(x_0)$$
$$\frac{cf(x_0+h)-cf(x_0)}{h}=cf'(x_0)$$
2. f,g дифференцированны в $x_0\Rightarrow f+g$ дифференцированна в x_0
$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$
$$\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-(f(x_0)+g(x_0))}{h}=f'(x_0)+g'(x_0)$$