Оглавление

Лекция 10: Парабола. Кривые второго порядка

04.12.2023

Теорема 1. (x_0, y_0) – точка на параболе $y^2 = 2px$, тогда

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

– уравнение касательной в (x_0, y_0)

Доказательство.

$$px = yy_0 - px_0$$
$$y^2 = 2px = 2yy_0 - 2px_0$$
$$y^2 - 2yy_0 + 2px_0 = 0$$
$$\frac{D}{4} = y_0^2 - 2px_0 = 0$$

1 решение □

Теорема 2 (Оптическое свойство параболы)**.** ...

Доказательство. ... □

Глава 1

Кривые второго порядка.

1.1 Приведение уравнения II порядка к каноническому виду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1 + 2b_2y + b_3 = 0$$
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$$

I шаг. Поворот на угол α, чтобы избавиться от a_{12}

Теорема 3. (x', y') получено поворотом (x, y) на α:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Доказательство. Для доказательства используем полярную систему координат $(r, \varphi) \to (r', \varphi')$

$$r' = r \qquad \varphi' = \varphi - \alpha$$
$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$
$$\begin{cases} x' = r'\cos\varphi' = r\cos(\varphi - \alpha) = r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha \\ y' = r'\sin\varphi' = r\sin(\varphi - \alpha) = -r\cos\varphi\sin\alpha + r\sin\varphi\cos\alpha \end{cases}$$
$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$
$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

□

Получили такое выражение, выясним при каком αa_{12} станет нулем

$$a_{11}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2a_{12}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + \\ + a_{22}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + ... = 0$$

Коэффициент при $x'y'$:

$$a_{11}(-2\cos\alpha\sin\alpha) + 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22}(2\sin\alpha\cos\alpha) = 0$$
$$-a_{11}\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha + a_{22}\sin 2\alpha = 0| : \cos 2\alpha$$
$$-a_{11}\operatorname{tg} 2\alpha + a_{22}\operatorname{tg} 2\alpha = -2a_{12}$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$
$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

Если $a_{12} \neq 0$, то $\operatorname{ctg} 2\alpha$ найдется, то найдем $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Если $a_{12} = 0$, то $\alpha = 0$

II шаг. Теперь рассмотрим уравнение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + b_3 = 0$$

(вообще-то везде штрихи)

Лемма 1. Если $a_{11} \neq 0$, то считаем $b_1 = 0$ (иначе сдвинем переменные: $x' = x - x_0$)

$$a_{11}x^2 + 2b_1x = a_{11}\left(x^2 + 2\frac{b_1}{a_{11}}x + \frac{b_1^2}{a_{11}^2} - \frac{b_1^2}{a_{11}^2}\right) = a_{11}x'^2 - \frac{b_1^2}{a_{11}}$$
$$x' = x + \frac{b_1}{a_{11}}$$

Аналогично если $a_{22} \neq 0$, то считаем $b_2 = 0$

1.2 Виды кривых

1.2.1 Эллиптический тип

$a_{11} > 0, a_{22} > 0$ (иначе умножим на -1)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + b^3 = 0$$

1. $b_3 < 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс

$$a = \sqrt{\frac{-b_3}{a_{11}}}; b = \sqrt{\frac{-b_3}{a_{22}}}$$

2. $b_3 = 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – точка
3. $b_3 > 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – пустое множество или мнимый эллипс

1.2.2 Гиперболический тип

$a_{11} > 0, a_{22} < 0$ (или наоборот)

4. $b_3 \neq 0$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_2} = 1$ – гипербола

5. $b_3 = 0$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_2} = 0$ – пара пересекающихся прямых

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$
$$\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$$

1.2.3 Параболический тип

$a_{11} = 0, a_{22} \neq 0$, считаем, что $b_2 = 0$

$$a_{22}y^2 + 2b_1x + b_3 = 0$$

6. Если $b_1 \neq 0$, то считаем $b_3 = 0$

$$2b_1x + b_3 = 2b_1\left(x + \frac{b_3}{2b_1}\right) = 2b_1x'$$

   $y^2 = 2px$ – парабола

7. Если $b_1 = 0, a_{22} > 0$ $\quad a_{22}y^2 + b_3 = 0$
   $b_3 < 0$ $\frac{y^2}{b^2} = 1$ – пара параллельных прямых

$$\frac{y}{b} = \pm 1$$

8. $b_3 = 0$ $\frac{y^2}{b^2} = 0$ – одна прямая

9. $b_3 > 0$ $\frac{y^2}{b^2} = -1$ – пустое множество или пара мнимых прямых