

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Построение множества вещественных чисел</b>	<b>2</b>
1.1	Множества . . . . .	2
1.2	Сечения . . . . .	2
1.3	Сумма сечений . . . . .	3
1.4	Теоремы сечений . . . . .	4

# Глава 1

## Построение множества вещественных чисел

Лекция 1: Введение

14.09.2023

### 1.1 Множества

**Определение 1.** Множества  $X$  и  $Y$  равны, если:

$$\forall a \in X : a \in Y$$

$$\forall b \in Y : b \in X$$

**Определение 2.**  $X \subset Y$  если:

$$\forall a \in X : a \in Y$$

**Определение 3.** 1.  $a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \vee a \in B$

$$2. a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \in B$$

$$3. a \in A \setminus B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \notin B$$

**Определение 4.** (Декартово произведение множеств)

$$A \times B = \{(a, b) : \forall a \in A, \forall b \in B\}; A, B \neq \emptyset$$

**Определение 5.**  $F : A \rightarrow B$  - функция, такая, что:  $\forall a \in A$  сопоставляет  $b = F(a) \in B$

### 1.2 Сечения

**Определение 6.** Множество  $\alpha \subset \mathbb{Q}$  называется сечением, если:

- I.  $\alpha \neq \emptyset$

- II. если  $p \in \alpha$ , то  $q < p \Leftrightarrow q \in \alpha$
- III. в  $\alpha$  нет наибольшего

**Пример.** 1.  $p^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < p\}$  - нет наибольшего

2.  $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 0 \vee p > 0 \wedge p^2 < 2\}$

**Теорема 1.** (Утверждение 1)

Если  $p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$ , то  $q > p$

**Доказательство.** Если  $p \in \alpha$  и  $q \leq p$ , то из (II.) следует, что  $q \in \alpha$   $\square$

**Теорема 2.** (Утверждение 2)  $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

**Доказательство.**  $\begin{cases} \alpha < \beta \Rightarrow \exists p \in \beta, p \notin \alpha \\ \beta < \gamma \Rightarrow \exists p \in \gamma, p \notin \beta \end{cases} \Rightarrow p < q \Rightarrow \alpha < \gamma$   $\square$

**Теорема 3.** Пусть  $\alpha, \beta$  - сечения. Между ними существует одно из

нескольких отношений:  $\begin{cases} \alpha < \beta \\ \beta > \alpha \\ \alpha = \beta \end{cases}$

**Доказательство.** Предположим, что  $\alpha < \beta$  и  $\beta < \alpha$ , тогда:

$$\begin{cases} \exists p \in \alpha, p \notin \beta \\ \exists q \in \beta, q \notin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p > q \\ q > p \end{cases} \text{ - Противоречие, тогда } \alpha \neq \beta \quad \square$$

### 1.3 Сумма сечений

**Теорема 4.** Пусть  $\alpha, \beta$  - сечения, тогда:

$\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha, q \in \beta\}$  - тоже сечение.

**Доказательство.** • (I.) Пусть  $\exists s \notin \alpha, \exists t \notin \beta$ , тогда:

$$\forall p \in \alpha, q \in \beta : \begin{cases} p < s \\ q < t \end{cases} \Rightarrow p + q < s + t \Rightarrow \alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$$

• (II.)

$$r \in \alpha + \beta, r_1 < r$$

$$r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$$

$$r_1 = p + q_1, r_1 < r \Rightarrow q_1 < q \Rightarrow q_1 \in \beta \Rightarrow p + q_1 \in \alpha + \beta$$

• (III.)

$\exists p_1 \in \alpha, p > p_1 \Rightarrow p_1 + q > p + q = r, p_1 + q \in \alpha + \beta$  - нет наибольшего  $\square$

**Теорема 5.** (Свойства суммы сечений)

1.  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2.  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\gamma + \beta)$
3.  $\alpha + 0^* = \alpha$ , где  $0^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}$

**Доказательство.** Свойства 1 и 2 справедливы в силу коммутативности и ассоциативности рациональных чисел.

Докажем свойство 3:

1. Пусть  $p \in \alpha, q \in 0^*$ , тогда:  $p + q < p \Rightarrow p + q \in \alpha$ , т.е.  $\alpha + 0^* \subset \alpha$
2. Пусть  $p \in \alpha$ , тогда:  $\exists p_1 > p \Rightarrow p_1 \in \alpha, p = p_1 + (p - p_1)$ , при том  $p_1 \in \alpha, p - p_1 \in 0^* \Rightarrow p \in \alpha + 0^* \Rightarrow \alpha \subset \alpha + 0^*$

$$\begin{cases} \alpha \subset \alpha + 0^* \\ \alpha + 0^* \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \alpha + 0^* \quad \square$$

## 1.4 Теоремы сечений

**Теорема 6.** (Теорема 2) Пусть  $\alpha$  - сечение,  $r \in \mathbb{Q}^+$ , тогда  $\exists p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$ :  
 $q$  - не наименьшее верхнее (не входящее в сечение) число  
 $q - p = r$

**Доказательство.** Пусть  $p_0 \in \alpha, p_1 = p_0 + r$

1. Возможно,  $p_1 \notin \alpha$ , тогда:
  - (а) если  $p_1$  - не наименьшее в верхнем классе, то  $q = p_1$
  - (б) если же наименьшее, то  $p = p_0 + \frac{r}{2}, q = p_1 + \frac{r}{2}$
2. Если  $p_1 \in \alpha$ , тогда:  
 Положим  $p_n = p_1 + nr$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда  $\exists! m$ :  
 $p_m \in \alpha$  и  $p_{m+1} \notin \alpha$ 
  - (а) Если  $p_{m+1}$  - не наименьшее в верхнем классе, то выберем  $p = p_m, q = p_{m+1}$
  - (б) Если же наименьшее, то  $p = p_m + \frac{r}{2}, q = p_{m+1} + \frac{r}{2}$

$\square$

**Теорема 7.** (Существование противоположного элемента) Пусть  $\alpha$  - сечение, тогда  $\exists! \beta : \alpha + \beta = 0^*$

**Доказательство.** (нужно доказать единственность и существование)

1. Докажем единственность: пусть  $\exists \beta_1, \beta_2$ , удовлетворяющие условию, тогда:

$$\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1$$

2. Докажем существование: пусть

$$\beta = \{p : -p \notin \alpha, -p \text{ не является наименьшим в верхнем классе } \alpha\}$$

- (I.) Очевидно, что  $\beta \neq \emptyset, \mathbb{Q}$
- (II.) Возьмем  $p \in \beta, q < p \Leftrightarrow -q > -p \Rightarrow -q$  в верхнем классе  $\alpha$ , но не наименьшее  $\Rightarrow q \in \beta$
- (III.) Если  $p \in \beta$ , то  $-p$  - не наименьшее в верхнем классе  $\alpha$ , значит  $\exists q : -q < -p$  и  $-q \notin \alpha$

Положим  $r = \frac{p+q}{2}$ , тогда:

$$-q < -r < -p \Rightarrow -r \text{ - не наименьшее в верхнем классе } \alpha.$$

Значит, нашли такое  $r > p$ , что  $r \in \beta$

Теперь проверим, что  $\alpha + \beta = 0^*$ :

1. Возьмем  $p \in \alpha, q \in \beta$

$$\text{По определению } \beta : -q \notin \alpha \xrightarrow{\text{утв. 1}} -q > p \Leftrightarrow p + q < 0 \Rightarrow p + q \in 0^* \Rightarrow \alpha + \beta \subset 0^*$$

2. Возьмем по Теореме (2)  $q - p = r \Leftrightarrow p - q = -r \in 0^*$

$$\text{т.к. } q \notin \alpha, \text{ то } -q \in \beta, \text{ значит } p - q = p + (-q) \in \alpha + \beta \Rightarrow 0^* \subset \alpha + \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \subset 0^* \\ 0^* \subset \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 0^* \quad \square$$