

Математический анализ

Широков Николай Алексеевич¹

07.09.2023 - ...

¹"Записал Сергей Киселев, Гараев Тагир"

Оглавление

1	Построение множества вещественных чисел	2
1.1	Множества	2
1.2	Сечения	2
1.3	Сумма сечений	3
1.4	Теоремы сечений	4
2	Вещественные числа	8
2.1	Супремумы и инфимумы	9
2.2	Неравенство Бернулли	11
2.3	Определение степени и логарифма	11
3	Последовательности	13
3.1	Сопоставление вещественным числам десятичных дробей . . .	13
3.2	Предел последовательности	14
3.3	Арифметические операции над пределами	15
3.4	Расширенное множество вещественных чисел	16
3.5	Бесконечные пределы	17
3.6	Единообразная запись определения пределов	17
3.7	Асимптотика	19
3.8	Монотонные последовательности	19
3.9	Число e	21
3.10	Критерий Коши, существование конечного предела последо- вательности	23
3.11	Подпоследовательности	26
3.12	Верхний и нижний предел последовательности	30
3.13	Свойства верхних и нижних пределов	32

Глава 1

Построение множества вещественных чисел

Лекция 1: Введение

14.09.2023

1.1 Множества

Определение 1. Множества X и Y равны, если:

$$\forall a \in X : a \in Y$$

$$\forall b \in Y : b \in X$$

Определение 2. $X \subset Y$ если:

$$\forall a \in X : a \in Y$$

Определение 3. 1. $a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \vee a \in B$

$$2. a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \in B$$

$$3. a \in A \setminus B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \notin B$$

Определение 4. (Декартово произведение множеств)

$$A \times B = \{(a, b) : \forall a \in A, \forall b \in B\}; A, B \neq \emptyset$$

Определение 5. $F : A \rightarrow B$ - функция, такая, что: $\forall a \in A$ сопоставляет $b = F(a) \in B$

1.2 Сечения

Определение 6. Множество $\alpha \subset \mathbb{Q}$ называется сечением, если:

- I. $\alpha \neq \emptyset$

- II. если $p \in \alpha$, то $q < p \Leftrightarrow q \in \alpha$
- III. в α нет наибольшего

Пример. 1. $p^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < p\}$ - нет наибольшего

2. $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 0 \vee p > 0 \wedge p^2 < 2\}$

Теорема 1. (Утверждение 1)

Если $p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$, то $q > p$

Доказательство. Если $p \in \alpha$ и $q \leq p$, то из (II.) следует, что $q \in \alpha$ \square

Теорема 2. (Утверждение 2) $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

Доказательство. $\begin{cases} \alpha < \beta \Rightarrow \exists p \in \beta, p \notin \alpha \\ \beta < \gamma \Rightarrow \exists p \in \gamma, p \notin \beta \end{cases} \Rightarrow p < q \Rightarrow \alpha < \gamma$ \square

Теорема 3. Пусть α, β - сечения. Между ними существует одно из

нескольких отношений: $\begin{cases} \alpha < \beta \\ \beta > \alpha \\ \alpha = \beta \end{cases}$

Доказательство. Предположим, что $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$, тогда:

$$\begin{cases} \exists p \in \alpha, p \notin \beta \\ \exists q \in \beta, q \notin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p > q \\ q > p \end{cases} \text{ - Противоречие, тогда } \alpha \neq \beta \quad \square$$

1.3 Сумма сечений

Теорема 4. Пусть α, β - сечения, тогда:

$\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha, q \in \beta\}$ - тоже сечение.

Доказательство. • (I.) Пусть $\exists s \notin \alpha, \exists t \notin \beta$, тогда:

$$\forall p \in \alpha, q \in \beta : \begin{cases} p < s \\ q < t \end{cases} \Rightarrow p + q < s + t \Rightarrow \alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$$

• (II.)

$$r \in \alpha + \beta, r_1 < r$$

$$r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$$

$$r_1 = p + q_1, r_1 < r \Rightarrow q_1 < q \Rightarrow q_1 \in \beta \Rightarrow p + q_1 \in \alpha + \beta$$

• (III.)

$\exists p_1 \in \alpha, p > p_1 \Rightarrow p_1 + q > p + q = r, p_1 + q \in \alpha + \beta$ - нет наибольшего \square

Теорема 5. (Свойства суммы сечений)

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\gamma + \beta)$
3. $\alpha + 0^* = \alpha$, где $0^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}$

Доказательство. Свойства 1 и 2 справедливы в силу коммутативности и ассоциативности рациональных чисел.

Докажем свойство 3:

1. Пусть $p \in \alpha, q \in 0^*$, тогда: $p + q < p \Rightarrow p + q \in \alpha$, т.е. $\alpha + 0^* \subset \alpha$
2. Пусть $p \in \alpha$, тогда: $\exists p_1 > p \Rightarrow p_1 \in \alpha, p = p_1 + (p - p_1)$, при том $p_1 \in \alpha, p - p_1 \in 0^* \Rightarrow p \in \alpha + 0^* \Rightarrow \alpha \subset \alpha + 0^*$

$$\begin{cases} \alpha \subset \alpha + 0^* \\ \alpha + 0^* \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \alpha + 0^* \quad \square$$

1.4 Теоремы сечений

Теорема 6. (Теорема 2) Пусть α - сечение, $r \in \mathbb{Q}^+$, тогда $\exists p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$:
 q - не наименьшее верхнее (не входящее в сечение) число
 $q - p = r$

Доказательство. Пусть $p_0 \in \alpha, p_1 = p_0 + r$

1. Возможно, $p_1 \notin \alpha$, тогда:
 - (а) если p_1 - не наименьшее в верхнем классе, то $q = p_1$
 - (б) если же наименьшее, то $p = p_0 + \frac{r}{2}, q = p_1 + \frac{r}{2}$
2. Если $p_1 \in \alpha$, тогда:
 Положим $p_n = p_1 + nr$ для $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $\exists! m$:
 $p_m \in \alpha$ и $p_{m+1} \notin \alpha$
 - (а) Если p_{m+1} - не наименьшее в верхнем классе, то выберем $p = p_m, q = p_{m+1}$
 - (б) Если же наименьшее, то $p = p_m + \frac{r}{2}, q = p_{m+1} + \frac{r}{2}$

\square

Теорема 7. (Существование противоположного элемента) Пусть α - сечение, тогда $\exists! \beta : \alpha + \beta = 0^*$

Доказательство. (нужно доказать единственность и существование)

1. Докажем единственность: пусть $\exists \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющие условию, тогда:

$$\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1$$

2. Докажем существование: пусть

$$\beta = \{p : -p \notin \alpha, -p \text{ не является наименьшим в верхнем классе } \alpha\}$$

- (I.) Очевидно, что $\beta \neq \emptyset, \mathbb{Q}$
- (II.) Возьмем $p \in \beta, q < p \Leftrightarrow -q > -p \Rightarrow -q$ в верхнем классе α , но не наименьшее $\Rightarrow q \in \beta$
- (III.) Если $p \in \beta$, то $-p$ - не наименьшее в верхнем классе α , значит $\exists q : -q < -p$ и $-q \notin \alpha$

Положим $r = \frac{p+q}{2}$, тогда:

$$-q < -r < -p \Rightarrow -r \text{ - не наименьшее в верхнем классе } \alpha.$$

Значит, нашли такое $r > p$, что $r \in \beta$

Теперь проверим, что $\alpha + \beta = 0^*$:

1. Возьмем $p \in \alpha, q \in \beta$

$$\text{По определению } \beta : -q \notin \alpha \underset{\text{утв. 1}}{\Rightarrow} -q > p \Leftrightarrow p + q < 0 \Rightarrow p + q \in 0^* \Rightarrow \alpha + \beta \subset 0^*$$

2. Возьмем по Теореме (2) $q - p = r \Leftrightarrow p - q = -r \in 0^*$

$$\text{т.к. } q \notin \alpha, \text{ то } -q \in \beta, \text{ значит } p - q = p + (-q) \in \alpha + \beta \Rightarrow 0^* \subset \alpha + \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \subset 0^* \\ 0^* \subset \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 0^* \quad \square$$

Лекция 2: Сечения

21.09.2023

Теорема 8. Пусть α, β — сечения. Тогда $\exists! \gamma$ — сечение : $\alpha + \gamma = \beta$

Доказательство. Пусть имеем $\gamma_1 \neq \gamma_2$, удовлетворяющие условию. Тогда: $\alpha + \gamma_1 = \beta = \alpha + \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$ — противоречие.

Положим $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Тогда в силу свойств сечений имеем:

$$\alpha + \gamma = \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0^* + \beta = \beta \quad \square$$

Определение 7. Сечение γ , построенное в предыдущей теореме обозначается через $\beta - \alpha$

Определение 8. (Абсолютная величина) $|a| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geq 0^* \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0^* \end{cases}$

Определение 9. (Произведение) Пусть α, β — сечения, причем $\alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^*$

Тогда $\alpha\beta = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0 \vee r = pq, \text{ где } p \in \alpha, q \in \beta\}$

Пример. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^*$

Теорема 9. (Любые 3 из них необходимо доказать самостоятельно)
Для любых сечений α, β, γ имеем:

1. $\alpha\beta = \beta\alpha$
2. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
4. $\alpha 0^* = 0^*$
5. $\alpha 1^* = \alpha$
6. если $\alpha < \beta$ и $\gamma > 0^*$, то $\alpha\gamma < \beta\gamma$
7. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta : \alpha \cdot \beta = 1^*, \beta = \frac{1^*}{\alpha}$
8. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta, \gamma : \alpha \cdot \gamma = \beta, \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$

Теорема 10. (Свойства рациональных сечений)

1. $p^* + q^* = (p + q)^*$
2. $p^* q^* = (pq)^*$
3. $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

Доказательство. 1. Возьмем $r \in (p + q)^* \Rightarrow r < p + q$

Положим $h = p + q - r$:

$$\begin{cases} p_1 = p - \frac{h}{2} \\ q_1 = q - \frac{h}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in p^* + q^* \Rightarrow (p^* + q^*) \subset p^* + q^*$$

Теперь возьмем $r \in p^* + q^* \Rightarrow r = p_1 + q_1$:

$$\begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 < p + q \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in (p + q)^* \Rightarrow p^* + q^* \subset (p + q)^*$$

$$\begin{cases} p^* + q^* \subset (p + q)^* \\ (p + q)^* \subset p^* + q^* \end{cases} \Rightarrow p^* + q^* = (p + q)^*$$

2. Для умножения доказательство аналогично.

3. Если $p < q$, то $p \in q^*, p \notin p^* \Rightarrow p^* < q^*$

Если $p^* < q^*$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in q^*, r \notin p^* \Rightarrow p \leq r < q \Rightarrow p < q$

Значит $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

□

Теорема 11. Пусть α, β — сечения, $\alpha < \beta$. Тогда $\exists r^*$ — рациональное сечение :
 $\alpha < r^* < \beta$

Доказательство. $\alpha < \beta \Rightarrow \exists p : p \in \beta, p \notin \alpha$

Выберем такое $r > p$, так, что $r \in \beta$. Поскольку $r \in \beta, r \notin r^*$, то $r^* < \beta$

Поскольку $p \in r^*, p \notin \alpha$, то $\alpha < r^*$

□

Глава 2

Вещественные числа

Определение 10. В дальнейшем сечения будут называться вещественными числами. Рациональные сечения будут отождествляться с рациональными числами. Все другие сечения будут называться иррациональными числами.

Таким образом, множество всех рациональных чисел оказывается подмножеством системы вещественных чисел.

Теорема 12. (Дедекинда) Пусть A и B — такие множества вещественных чисел, что:

1. $A \cup B = \mathbb{R}$
2. $A \cap B = \emptyset$
3. $A, B \neq \emptyset, A \neq B$
4. $\forall \alpha \in A, \beta \in B : \alpha < \beta$

Тогда $\exists! \gamma \in \mathbb{R} : \alpha \leq \gamma \leq \beta \forall \alpha \in A, \forall \beta \in B$

Доказательство. 1. Докажем единственность.

Пусть γ_1, γ_2 — два числа, причем $\gamma_1 < \gamma_2$. Тогда $\exists \gamma_3 : \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2 \Rightarrow \gamma_3 \in A, \gamma_3 \in B$ — противоречие. Значит $\gamma_1 = \gamma_2$.

2. Проверим, является ли γ сечением.

$$\gamma = \{p \in \mathbb{Q} : \exists \alpha \in A : p \in \alpha\}$$

I. $\gamma \neq \emptyset$, т.к. $A \neq \emptyset$

$\gamma \neq \mathbb{Q}$, т.к. $\exists q \in \mathbb{Q} : q \notin B \Rightarrow q \notin \gamma$

II. Пусть $p_1 < p, p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p_1 \in \alpha \Rightarrow p_1 \in \gamma$

III. Пусть $p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p \in \alpha$. Поскольку α — сечение, то $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \alpha, q > p \Rightarrow q \in \gamma$

Ясно, что $\alpha \leq \gamma \forall \alpha \in A$.

Предположим, что $\exists \beta \in B : \beta < \gamma$. Тогда $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \gamma, q \notin \beta \Rightarrow \exists \alpha \in A : q \in \alpha \Rightarrow \alpha > \beta$ — противоречие. Значит $\gamma \leq \beta \forall \beta \in B$. \square

2.1 Супремумы и инфимумы

Определение 11. $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \emptyset$

E — ограничено сверху, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq y$

Определение 12. $G \subseteq \mathbb{R}, G \neq \emptyset$

G — ограничено снизу, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \geq y$

Замечание. Если множество ограничено сверху и снизу, оно называется ограниченным.

Определение 13. Пусть E ограничено сверху. Тогда y называется точной верхней границей (верхней гранью) E , если:

1. y — верхняя граница множества E .
2. если $x < y$, то x не является верхней границей множества E .

Определение 14. Пусть E ограничено снизу. Тогда y называется точной нижней границей (нижней гранью) E , если:

1. y — нижняя граница множества E .
2. если $x > y$, то x не является нижней границей множества E .

Определение 15. Точная верхняя граница — $y \sup E$

Точная нижняя граница — $y \inf E$

Пример. E состоит из всех чисел $\frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда множество ограничено, верхняя грань равна 1 и принадлежит множеству, а нижняя равна 0 и множеству не принадлежит.

Теорема 13. Пусть E ограничено сверху. Тогда $\sup E$ существует.

Доказательство. Пусть есть множества:

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in E : x > \alpha\}$$

$$B = \mathbb{R} \setminus A$$

Тогда $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

$$\begin{cases} \beta \in B \\ \alpha \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in E : x \leq \beta \\ \exists x_0 \in E : x_0 > \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha < \beta$$

Ясно, что никакой элемент множества A не является верхней гра-

ницей множества E , а любой элемент множества B является верхней границей множества E . Поэтому достаточно доказать, что B содержит наименьшее число.

По теореме Дедекинда: $\exists \gamma : \begin{cases} \alpha \leq \gamma \ \forall \alpha \in A \\ \beta \geq \gamma \ \forall \beta \in B \end{cases}$

Предположим, что $\gamma \in A$. Тогда $\exists x \in E : x > \gamma$.

Возьмем $\gamma_1 : \gamma < \gamma_1 < x \Rightarrow \gamma_1 \in A$ — противоречие.

Значит $\gamma \in B$. □

Теорема 14. Пусть E ограничено снизу. Тогда $\inf E$ существует.

Доказательство. Доказательство тривиально и предоставляется читателю в качестве упражнения $\odot \smile \odot$. □

Теорема 15. (Существование корня из вещественного числа) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n > 0 \exists! y \in \mathbb{R}, y > 0 : y^n = x, y = \sqrt[n]{x}$

Доказательство. 1. Единственность.

Пусть $y_2 > y_1 : y_2^n = x = y_1^n \Rightarrow y_2^n - y_1^n = 0$

$(y_2 - y_1) \cdot \overset{>0}{(y_2^{n-1} + y_2^{n-2} \cdot y_1 + \dots + y_1^{n-1})} = 0$ — противоречие.

2. Существование.

Пусть $E = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0, t^n < x\}$

$0 \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$

Положим $t_0 = 1 + x, t_0^n = (1 + x)^n$

$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = 1 + nx + \dots > x \Rightarrow E$ — ограничено сверху.

Пусть $y = \sup E$ (она существует по теореме о Существовании супремума).

- Допустим, что $y^n < x$. Возьмем $h : 0 < h < 1$ и $h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}$
Тогда

$$\begin{aligned} (y + h)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k y^{n-k} h^k = \\ &= y^n + \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^k = \\ &= y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^{k-1} < y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} = \\ &= y^n + h \cdot ((1+y)^n - y^n) < (y+1)^n - y^n < y^n + x - y^n = x \\ &\text{— } y \text{ не верхняя граница.} \end{aligned}$$

- Допустим, что $y^n < x$. Возьмем $k : 0 < k < 1$, $k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$ и $k < y$. Тогда аналогично с $y^n < x$ получаем, что $y - k$ — верхняя граница E , что противоречит тому, что $y = \sup E$.

Значит $y^n = x$.

□

Лекция 3: Степень, логарифм, десятичные дроби. Последовательности.

28.09.2023

2.2 Неравенство Бернулли

Теорема 16 (Неравенство Бернулли). Пусть $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$ неравенство очевидно. Пусть оно верно для $n = k$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку $kx^2 \geq 0$.

□

2.3 Определение степени и логарифма

Определение 16. Пусть $a > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$; $r = \frac{n}{m}$. Тогда

$$a^r = (a^{\frac{1}{m}})^n.$$

Если $m > 0$, то: $a^m = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$

Если $m < 0$, то $x^m = \frac{1}{a^{|m|}}$.

Определение 17. Пусть $p \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$, $a > 1$

Тогда $a^p = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \neq 0, r < p\}$

$$a^0 = 1$$

Определение 18. Пусть $a > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$E = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < \alpha, r \neq 0\}$$

Тогда $\sup E = a^\alpha$.

И $\forall a \in \mathbb{R} : 0 < a < 1 : a^\alpha = (\frac{1}{a})^{-\alpha}$

Определение 19. Пусть $a > 0$, $a \neq 0$, $x > 0$. Тогда

Если $a > 1 : \log_a x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : a^r < x\}$.

Если $0 < a < 1 : \log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$

Теорема 17. (Без доказательства) Для степени и логарифма справед-

ливы все ранее встречавшиеся свойства. (имеется в виду школьный курс)

Глава 3

Последовательности

Определение 20. Пусть X — множество, $X \neq \emptyset$. Тогда последовательностью элементов множества X называется функция $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \dots; x_n \in X$ Последовательность — $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

3.1 Сопоставление вещественным числам десятичных дробей

Алгоритм. (Построение дроби по числу)

Рассматриваем только $x > 0, x \in \mathbb{R}$

Возьмем $n_0 \in \mathbb{Z}_+ : n_0 \leq x, n_0$ — максимальное число с таким свойством.

- Если $n_0 = x$ — алгоритм закончен.
- Если $n_0 < x$ — продолжаем: выбираем $n_1 \in \mathbb{Z} : n_0 + \frac{n_1}{10} \leq x$

Аналогично с n_0 , проверяем равенство с x . Так вплоть до n_k :

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} \leq x$$

Если ни на одном шаге равенство не выполняется, то задаем последовательность:

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = n_0, \frac{n_1}{10}, \frac{n_2}{10^2}, \dots$$

Теорема 18. (О супремуме десятичных дробей) Рассмотрим $E = \{r : r = \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k}, k \in \mathbb{N}\}$

Тогда $\sup E = x$ (из алгоритма).

Доказательство. Так как $n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} < x$, то $\sup E \leq x$

Предположим, что $\sup E < x$. Тогда $\exists r : r = x - \sup E > 0$.

Выберем такое k , что $\frac{1}{k^9} < r \Leftrightarrow k > \frac{1}{r^9}$.

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} < x < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k+1}{10^k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} > x - \frac{1}{10^k} > x - \frac{1}{9^k} > x - r = \sup E, \text{ значит}$$

$$x = \sup E$$

□

Лемма 1. (доказать самостоятельно) Пусть есть $E \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, E_a = \{x + a : x \in E\}$
Тогда $\sup E_a = a + \sup E$

Дальше шла какая-то теорема, смысл которой я не понял. Если найдете адекватную запись или сможете объяснить — пишите ☺ ◡ ☺

3.2 Предел последовательности

Определение 21. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Тогда $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$.

Замечание. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : |z - x| \leq |z - y| + |y - x|$

Определение 22. Пусть X — множество, функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$
 X — метрическое пространство, если: $\forall a, b \in X : \rho(a, b) \geq 0$
И выполнены следующие свойства:

1. $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$
3. $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b)$

Тогда ρ — метрика X .

Пример. \mathbb{R} — метрическое пространство, $\rho(x, y) = |x - y|$

Определение 23. Пусть X — метрическое пространство, $a \in X, \{x_n\}_{n=0}^{\infty}, x_n \in X$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < \varepsilon$

Теорема 19. (Единственность предела) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, то $a = b$

Доказательство. Пусть $a \neq b$. Тогда $\delta = \rho(a, b) > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$.

1. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a : \exists N_1 : \forall n > N_1 : \rho(x_n, a) < \varepsilon$
2. И так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b : \exists N_2 : \forall n > N_2 : \rho(x_n, b) < \varepsilon$.

Пусть $n = N_1 + N_2 + 1$. Тогда для n выполнены (1) и (2)
 Имеем $0 < \delta = \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{\delta}{2}$ — противоречие. \square

Теорема 20. (Ограниченность сходящейся последовательности) X — метрическое пространство с метрикой ρ

$x_n \in X, a \in X$ Пусть $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. Тогда $\exists R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, a) < R$

Доказательство. Возьмем

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < 1 \quad (1)$$

$$\text{Определим } R \text{ как } R = \max(\rho(x_1, a) + 1, \rho(x_2, a) + 1, \dots, \rho(x_N, a) + 1, 1) \quad (2)$$

Тогда:

- если $n > N$, то из (1) следует (2), значит $R \geq 1$
- если $1 \leq n \leq N$, то $R \geq \rho(x_n, a)$

В обоих случаях R удовлетворяет условию теоремы. \square

3.3 Арифметические операции над пределами

Свойства. Для $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, c \in \mathbb{R}$ справедливы следующие свойства:

$$1. \forall n \in \mathbb{N} : x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$2. c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \cdot a$$

$$3. x_n + y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$$

$$4. x_n \cdot y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b$$

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0, \forall n > 1 : |x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |cx_n - ca| = |c(x_n - a)| = |c||x_n - a| < |c|\varepsilon$$

$$3. \begin{cases} \forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon_1 \\ \forall \varepsilon_2 > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \varepsilon_2 \end{cases} \Rightarrow \text{при } n > N_1 + N_2 + 1 : \\ |x_n + y_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$4. \text{Аналогично (3) при } n > N_1 + N_2 + 1 : |x_n y_n - ab| = |x_n y_n - ay_n + ay_n - ab| \leq |x_n y_n - ay_n| + |ay_n - ab| = |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b|$$

т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то $\exists R : \forall n : |y_n| \leq R$ (из предыдущей теоремы)

$$\text{Тогда } |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| < \varepsilon_1 R + |a|\varepsilon_2$$

\square

Лекция 4: Продолжение

27.09.2023

Свойства. (Продолжение)

$$5 \quad x_n \neq c \quad \forall n, x_n \rightarrow a, a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{a}$$

$$6 \quad \begin{cases} x_n \rightarrow a \\ y_n \rightarrow b \end{cases} \text{ из п. 5} \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

$$7 \quad x_n \leq y_n \quad \forall n, x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b \Rightarrow a \leq b$$

Доказательство. (5, 6, 7)

5 I. Возьмем $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$, тогда:

$$\exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon_0 \Rightarrow |x_n| \geq |a| - |x_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$$

II. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon$

$N_0 = \max(N_1, N)$. При $n > N_0$ получаем:

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - x_n}{x_n \cdot a} \right| = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot |x_n - a| \underset{(I), (II)}{<} \frac{1}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} \cdot \varepsilon$$

6 $\frac{y_n}{x_n} = y_n \cdot \frac{1}{x_n}$ — далее по п. (4), (5).

7 Предположим, что $a > b$. Тогда $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon_0 \\ \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \varepsilon_0 \end{cases} \Rightarrow$
 $\forall n > N_1 + N_2 + 1 : y_n < \varepsilon_0 + b = b + \frac{a-b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon_0 <$
 $x_n \Rightarrow y_n < x_n$ — противоречие с условием.

□

Замечание. (Различные промежутки)

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток)
2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ — замкнутый промежуток
3. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ — полуоткрытый промежуток
4. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ — полуоткрытый промежуток

3.4 Расширенное множество вещественных чисел

Определение 24. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ — расширенное множество вещественных чисел. При этом:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x < +\infty, x > -\infty$$

Замечание. (Еще промежутки)

1. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
2. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
3. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
4. $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Свойства. (Продолжение свойств пределов)

$$8 \quad \begin{cases} \forall n : x_n \leq y_n \leq z_n \\ x_n \rightarrow a \\ z_n \rightarrow a \end{cases} \Rightarrow y_n \rightarrow a \text{ — теорема о двух милиционерах}$$

Доказательство. $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n > N_2 : |z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow z \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$
 $\forall n > \max(N_1, N_2) :$
 $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$

□

3.5 Бесконечные пределы

Определение 25. (Бесконечные пределы)

- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, если:
 $\forall L \in \mathbb{R} \exists N : \forall n > N : x_n > L$
- $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, если:
 $\forall L \in \mathbb{R} : \exists N : \forall n > N : y_n < L$
 (возможно сокращение записи $n \rightarrow \infty$ далее.)

3.6 Единообразная запись определения пределов

Определение 26. Окрестностью вещественного числа a называется любой интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ (обозначается как $\omega(a)$).

Определение 27. Окрестность $+\infty : (L, +\infty), L \in \mathbb{R}$
 Окрестность $-\infty : (-\infty, L), L \in \mathbb{R}$

Определение 28. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $x_n \rightarrow a$, если:
 $\forall \omega(\alpha) : \exists N : \forall n > N : x_n \in \omega(\alpha)$

Свойства. (Доказать самостоятельно)

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a \rightarrow +\infty, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, b \rightarrow -\infty$, тогда:

1. $c > 0 : ca_n \rightarrow +\infty, cb_n \rightarrow -\infty$
 $c < 0 : ca_n \rightarrow -\infty, cb_n \rightarrow +\infty$
2. $x_n \rightarrow x, x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Rightarrow a_n + x_n \rightarrow +\infty$
 $y_n \rightarrow y, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \Rightarrow b_n + y_n \rightarrow -\infty$
3. Возьмем x_n, y_n из п. (2), тогда:
 $x > 0 \Rightarrow a_n x_n \rightarrow +\infty, b_n x_n \rightarrow -\infty$
 $y < 0 \Rightarrow a_n y_n \rightarrow -\infty, b_n y_n \rightarrow +\infty$
4. Если $\forall n : a_n \neq 0, b_n \neq 0$, тогда:
 $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$
 $\frac{1}{b_n} \rightarrow 0$
 Если $x_n > 0, x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$
 Если $x_n < 0, x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow -\infty$
5. $\forall n : x_n \leq y_n, x \rightarrow \alpha, y_n \rightarrow \beta; \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \alpha \leq \beta$
6. $\begin{cases} \forall n : x_n \leq y_n \leq z_n \\ x_n \rightarrow \alpha, \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \\ z_n \rightarrow \alpha \end{cases} \Rightarrow y_n \rightarrow \alpha$

Замечание. $+\infty = +\infty$

$$-\infty = -\infty$$

$$-\infty < +\infty$$

Доказательство. (2, 6)

$$2 \quad \begin{cases} x \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists M : \forall n : |x_n - x| < M \Rightarrow x_n > x - M \\ \forall L \in \overline{\mathbb{R}} : \exists N : \forall n > N : a_n > L \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n + x_n > L + x - M, \text{ где правая часть — любое число.}$$

$$6 \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n > N_2 : z_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

$$N_0 = \max(N_1, N_2)$$

$$\forall n > N_0 : x_n \leq y_n \leq z_n \Rightarrow y_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

□

3.7 Асимптотика

Определение 29. (О-большая и о-малая)

1. $x_n = o(1)$, если $x_n \rightarrow 0$
2. $y_n = O(1)$, если $\exists C : \forall n : |y_n| \leq C$
3. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n : b_n \neq 0$, тогда:
 $a_n = o(b_n)$, если $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$
4. Пусть есть $\{c_n\}, \{d_n\}$, тогда:
 $c_n = O(d_n)$, если $\exists C : |c_n| \leq C|d_n|$

Замечание. Это не равенство в привычном смысле, следует читать его только слева направо.

3.8 Монотонные последовательности

Определение 30. (монотонные последовательности)

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастает, если $\forall n : a_n \leq a_{n+1}$ (возрастает строго если $a_n < a_{n+1}$)
- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает, если $\forall n : b_n \geq b_{n+1}$

Замечание. Говорят, что последовательность c_n монотонна, если она либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает.

Теорема 21. (Теорема о пределе монотонной последовательности)

- Пусть есть последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Для того, чтобы монотонно возрастающая последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы последовательность была ограничена сверху.
- Для того, чтобы монотонно убывающая последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно, чтобы последовательность была ограничена снизу.

При этом справедливы неравенства:

- $\forall m : c_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ — если последовательность возрастает. (или $<$ если строго возрастает)
- $\forall m : c_m \geq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ — если последовательность убывает.

Доказательство. 1. Предположим, что последовательность c_n не ограничена сверху, тогда:

$$\forall L \in \mathbb{R} : \exists N : c_N > L$$

$$\forall n > N : c_n \geq c_{n-1} \geq c_{n-2} \geq \dots \geq c_N + 1 \geq c_N > L, \text{ значит } c_n > L$$

Значит по определению предела: $\lim c_n = +\infty$

2. Предположим теперь, что последовательность c_n возрастает и ограничена сверху, тогда:

$$\begin{cases} c_n \leq c_{n+1} \\ \exists M : \forall n : c_n \leq M \end{cases}$$

Пусть $E = \{c_n \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : c_n = c_n\}$ — множество из всех элементов последовательности c_n .

Значит E — ограничено сверху. Положим $C = \sup E$, тогда имеем $\forall n : c_n \leq C$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 : C - \varepsilon &\text{ — не верхняя граница, значит } \exists N : c_N > C - \varepsilon \Rightarrow \\ \forall n > N : c_n &\geq c_{n-1} \geq \dots \geq c_N > C - \varepsilon \Rightarrow C - \varepsilon < c_n \leq C < \\ C + \varepsilon &\Rightarrow |c_n - C| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C \end{aligned}$$

В обратную сторону: если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M : \forall n : |c_n - C| < M \Rightarrow \forall n : c_n \leq C + M$

3. Доказательство для убывающей последовательности аналогично. \square

Теорема 22. (Теорема о вложенных промежутках)

Пусть $\forall n : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ и $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Тогда $\exists ! c : \forall n : c \in [a_n, b_n]$

Доказательство. 1. существование

имеем неравенства:

$$\forall n : \begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \\ b_n \geq b_{n+1} \\ a_n < b_n \end{cases} \Rightarrow a_n < b_1, b_n > a_1$$

Тогда в силу возрастания a_n и убывания b_n по предыдущей теореме $\exists a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\exists b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

По свойству перехода к пределу в неравенствах: $a_n < b_n \Rightarrow a \leq b$

Имеем $\begin{cases} \forall n : a_n \geq a \\ \forall n : b \leq b_n \end{cases} \Rightarrow \forall n : b - a \leq b_n - a_n \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b - a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ — в силу условия.

Значит $b - a = 0 \Rightarrow a = b \stackrel{\text{def}}{=} c$

Имеем $a_n \leq c \leq b_n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$

2. Единственность

Если бы $\exists c_0 \in [a_n, b_n]$, то $|c_0 - c| \leq b_n - a_n \Rightarrow |c_0 - c| < \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow c_0 = c$

□

Замечание. Условие замкнутости промежутков существенно:

Имеем $(0, \frac{1}{n+1}] \supset (0, \frac{1}{n}]$, $\frac{1}{n} - 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Но $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}] = \emptyset$

3.9 Число e

Теорема 23. Пусть $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ и $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

Тогда $\forall n : x_n < y_n$ и $x_n \rightarrow e, y_n \rightarrow e, 2 < e < 3$

Доказательство. Рассмотрим:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^{n+1} \cdot (\frac{n}{n-1})^n = (\frac{n}{n+1})^n \cdot (\frac{n}{n+1})^n \cdot (\frac{n}{n-1})^n =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2-1+1}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n$$

Возьмем за $x = \frac{1}{n^2-1}$, тогда по неравенству Бернулли:

$$\frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n > \frac{1}{n+1} \cdot (1 + \frac{n}{n^2-1}) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^2-1+n}{n^2-1} =$$

$$\frac{n^3 + n^2 - n}{n^3 + n^2 - n - 1} > 1$$

$\Rightarrow y_n < y_{n-1} \Rightarrow y_n$ — строго монотонно убывающая.

Теперь рассмотрим x_n : (считаем, что $n \geq 3$)

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \\
&= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{(n-k+1) \cdot \dots \cdot n}{k! \cdot n^k} = \\
&= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

(Продолжение на следующей лекции)

□

Лекция 5: Продолжение

Доказательство. (Продолжение доказательства)

05.10.2023

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \quad (2)$$

$$\forall r > 0 : 1 - \frac{r}{n+1} > 1 - \frac{r}{n} \Rightarrow \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (1)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x_{n+1} > x_n$$

Примем во внимание неравенства для y_n и неравенства для x_n . Тогда мы будем иметь следующее неравенство:

$$\Rightarrow x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n < y_{n-1} < \dots < y_1 \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow x_n < y_1, y_n > x, \forall n \quad (5)$$

Последовательность x_n строго возрастает и ограничена сверху. Мы можем применить критерий существования конечного предела у строго монотонной возрастающей последовательности.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Если мы посмотрим на последовательность y_n , она ограничена снизу в отношении пяти и мы знаем что она строго монотонно убывает. По теореме о предельной последовательности получаем, что:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Теперь,

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Таким образом,

$$a = b = e \quad (6)$$

$$(6) \Rightarrow x_n < e < y_n \forall n \quad (7)$$

$$(7) \Rightarrow e > x_1 = 2, e < y_5 < 3$$

$$y_5 = (\frac{6}{5})^6$$

$$e = 2.718...$$

□

Замечание. Число e — одно из фундаментальных констант на которой держится вся математика.

Первые две - это 0 и 1. А третья — это π

3.10 Критерий Коши, существование конечного предела последовательности

Теорема 24. Пусть имеется некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для того чтобы $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall m, \forall n > N :$

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad (8)$$

Замечание. В формулировке не сказано чему будет равен этот предел. Какой именно он будет - неизвестно. Известно только то что он существует. Это так называемая теорема существования.

Примечание. Необходимость означает что предел существует.

Доказательство. Докажем необходимость. Предположим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in \mathbb{R}$$

Тогда, по определению предела для любого $\varepsilon > 0 \exists N$ такой, что $\forall n > N$ выполнено

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

Тогда,

$$(9) \Rightarrow \text{при } n > N, m > N$$

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow (8)$$

То-есть, необходимость доказана. Если конечный предел существует, то соотношение 8 выполнено.

Теперь докажем достаточность.

Когда мы будем доказывать достаточность, то мы не знаем, существует предел или нет.

Замечание. Не каждая последовательность имеет предел (например, $x_n = -1^n$).

Для доказательства мы будем использовать теорему Дедекинда. Определим сечение множества вещественных чисел. Нижний класс A — это

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists N : \forall n > N : x_n > \alpha\} \quad (10)$$

Верхний класс A' — это

$$A' = \mathbb{R} \setminus A \quad (10')$$

Множества, получившиеся в (10) и (10') — это сечения, и это нужно проверить.

- Возьмём $\varepsilon = 1$, тогда: $\exists N_0 : \forall m, n > N_0 : |x_m - x_n| < 1$

В частности, при $m = N + 1$ и при $n > N + 1$ имеем

$$|x_n - x_{N+1}| < 1 \Leftrightarrow x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1 \quad (11)$$

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} - 1 \in A \quad (12)$$

С другой стороны,

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} + 1 \notin A, \text{ то-есть, } x_{N+1} + 1 \in A' \quad (13)$$

$$(12), (13) \Rightarrow A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$$

- Никакое из них не может быть множеством вещественных чисел.

Давайте возьмём $\forall \alpha \in A, \forall \beta \in A'$. Нужно доказать, что α всегда меньше β . В этом состоит условие определения сечения.

$$\alpha \in A = (10) \Rightarrow \exists N : \forall n > N : x_n > \alpha \quad (14)$$

Если бы для любого $\forall n > N$ выполнялось $x_n > \beta$, то $\beta \in A$. Однако, это не так, т.к. $\beta \in A'$.

То-есть,

$$\exists n_0 > N : x_{n_0} \leq \beta \quad (15)$$

Примечание. Если бы всё время неравенство было в другую сторону ($x_n > \beta$), тогда бы по определению (10), мы бы получили, что $\beta \in A$, но мы взяли $\beta \in A'$, то есть $\beta \notin A$, значит свойства выше выполняться не может и выполняется свойство (15).

$$(14), (15) \Rightarrow \alpha \leq x_{n_0} \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta$$

То-есть, мы действительно получили сечение.

Теперь можно применить теорему Дедекинда. По теореме Дедекинда:

$$\exists a \in R : \forall \alpha \in A, \forall \beta \in A' : \alpha < a < \beta \quad (16)$$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$, тогда:

$$(8) \Rightarrow \exists N \text{ такое, что выполнено (8)}$$

$$m = N + 1$$

Тогда, (8) $\Rightarrow \forall n > N + 1$

$$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x_{N+1} - \varepsilon, x_{N+1} + \varepsilon) \quad (17)$$

Теперь, если посмотреть на соотношение (17),

$$(17) \Leftrightarrow x_n > x_{N+1} - \varepsilon \text{ и } x_n < x_{N+1} + \varepsilon \quad (18)$$

Примечание. при $\forall n > N + 1$, выполнена правая часть неравенства (17) $x_n > x_{N+1} - \varepsilon$.

Теперь рассмотрим (10) и (18).

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \in A \quad (19)$$

Теперь обратимся ко второму неравенству в соотношении (18).

Получается, что правая часть неравенства $x_n < x_{N+1}$ принадлежит A' , потому что если бы принадлежало A , должно было бы быть другое неравенство в другую сторону

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon \in A' \quad (20)$$

Возьмём (19) $\Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon$ как α ,

а (20) $\Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon$ как β ,

Тогда, применяем (16), получаем что:

$$(16), (19), (20) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \leq a \leq x_{N+1} + \varepsilon \quad (21)$$

Обратимся к соотношению (17)

$$(17) : x_{N+1} < x_n < x_{N+1} + \varepsilon$$

Получаем, что a удовлетворяет этому неравенству и x_n удовлетворяет этому неравенству (лежит на промежутке) при $\forall n > N + 1$.

Поэтому, (21) и (17) \Rightarrow

$$|x_n - a| < 2\varepsilon = (x_{N+1} + \varepsilon) - (x_{N+1} - \varepsilon) \quad (22)$$

Примечание. То-есть, если x_n и a лежат на этом промежутке, то длина отрезка между a и x_n меньше чем длина промежутка, на котором они лежат. Длина промежутка равна 2ε

Мы получили, что существует некоторое a такое, что для любого $n > N+1$ выполняется неравенство (22). А это определение предела.

По определению предела,

$$(22) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Тем самым, достаточность в критерии доказана. \square

3.11 Подпоследовательности

Определение 31. Пусть есть отображение $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ и нетождественное отображение $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. При этом выполняется: $\forall n < m : g(n) < g(m)$

Тогда последовательность отображений $f(g) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ — подпоследовательность.

Примечание. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Берем $g(1) = n_1, g(2) = n_2, \dots, g(k) = n_k$ и получаем подпоследовательность:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$$

Обозначение. Если эти номера определены, то последовательность обозначают как: $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

Определение 32. Предел последовательности определяется как предел подпоследовательности по нижним индексам.

Если есть такая последовательность, говорят что:

$A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом, то есть $x_{n_k} \rightarrow A$, при $k \rightarrow \infty$, если $\forall \Omega(A) \exists K : \forall k > K : x_{n_k} \in \Omega(A)$

Теорема 25. Пусть $x_n \rightarrow A$, при $n \rightarrow \infty$, где $A \in \overline{\mathbb{R}}$ и пусть мы имеем любую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, выбранную из этой последовательности.

Тогда $x_{n_k} \rightarrow A$, при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Возьмём любую окрестность A .

$$\forall \Omega(A) \Rightarrow \exists N : \forall n > N : x_n \in \Omega(A)$$

Воспользуемся тем, что последовательность n_k строго возрастает:

$$n_1 \geq 1, n_2 > n_1, n_2 \geq 2$$

Тогда по индукции:

$$n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > n_k \geq k \rightarrow n_{k+1} > k + 1$$

То есть, если мы выберем подпоследовательность, то n_k будет больше или равно k . Начиная с какого-то индекса, будет строго больше.

Возьмём $k = N$.

Тогда, при $k > N : n_k \geq k > N$

То есть, при $k > N : x_{n_k} \in \Omega(A)$

$$\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow A, \text{ при } k \rightarrow \infty$$

□

Теорема 26. (Больцано-Вейерштрасса)

Пусть имеется некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая ограничена, т.е. $\forall n : a \leq x_n \leq b$.

Тогда: $\exists \alpha \in [a, b]$ и $x_{n_k} \rightarrow \alpha$ при $k \rightarrow \infty$

Замечание. Такое α может быть только одним, если последовательность ограничена и имеет некоторый предел.

Доказательство. определим последовательность промежутков.

$$I_1 = [a, b]$$

$$I'_2 = [a, \frac{a+b}{2}], I''_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$$

Примечание. $\frac{a+b}{2}$ - это центр отрезка $[a, b]$

В последовательности x_n имеется бесконечно много номеров (начиная с 1).

Рассмотрим множество номеров n таких, что $x'_n \in I'_2$ и n такие что $x_n \in I''_2$

(Какое-то из них, или оба бесконечны.)

Если бы первое и второе множество n выше было конечно, то мы получили бы что у нас есть конечное множество номеров n .

А в силу соотношения 1 на всем промежутке I_1 лежит вся последовательность.

поэтому, если бы и первое и второе множество было бы конечно, мы бы получили что рассматриваем конечно множество номеров x_n , которые лежат на всем отрезке I_1 , а на I_1 лежит вся последовательность.

Пусть I_2 - тот из I'_2, I''_2 , для которого \exists бесконечно n таких что $x_n \in I_2$

Примечание. Это может быть либо I'_1 , либо I'_2 , либо I''_2 если оба удовлетворяем, то любой возьмем. Произвольно. Можно например всегда брать только I'_2 , но по крайней мере для одного, таких номеров будет бесконечно много.

Имеется некоторое множество натуральных чисел, таких что x_n принадлежит I_2

Пусть n_1 - минимальные n , такие что $x_n \in I_2$

$I_2 = [a_2, b_2]$

Примечание. Снова рассмотрим середину, $\frac{a_2+b_2}{2}$

$$I'_3 = [a_2, \frac{a_2 + b_2}{2}]$$

$$I''_3 = [\frac{a_2 + b_2}{2}, b_2]$$

Нам известно, что множество тех n , таких что лежат на I_2 , множество таких n - бесконечно.

По крайней мере в одном из этих множеств тоже будет находится бесконечное множество номеров n .

Пусть I_3 - тот из I'_3, I''_3 , для которого \exists бесконечно n таких что $x_n \in I_3$

n_2 - минимальное n такое, что $x_n \in I_3$, и $n_2 > n_1$.

Примечание. Точка x_{n_1} может попасть на этот промежуток I_3 , но поскольку для этого промежутка существует бесконечно много n , таких что n принадлежит промежутку I_3 , то мы можем взять следующую, больше чем n_1 , и называем её n_2

И так далее по индукции. Предположим, что мы уже выбрали промежутки

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_m \quad (3')$$

При этом мы всё время делим пополам.

$k + 1 \leq m$

длина $I_{k+1} = \frac{1}{2}$ длины

$$I_k = \frac{b-a}{2^k} \quad (3)$$

$$n_1 < n_2 < \dots < n_m < n_{m+1} \quad (4)$$

$$x_{n_1} \in I_2, x_{n_2} \in I_2, \dots, x_{n_{m-1}} \in I_m \quad (5)$$

Предположим, что по индукции такое построение уже произошло
Пусть

$$I_m = [a_m, b_m] \quad (6)$$

Индуктивное предположение (индуктивный шаг)

Существует бесконечно много n , таких что

$$x_n \in I_m \quad (7)$$

Для двух и трёх мы это проделали. Предположим, что это проделано для n и будем выполнять индуктивный шаг.

$$I'_{m+1} = [a_m, \frac{a_m + b_m}{2}]$$

$$I''_{m+1} = [\frac{a_m + b_m}{2}, b_m]$$

Мы снова взяли и разделили промежуток $[a_m, b_m]$ пополам.

Рассмотрим множество номеров n в множестве n таких, что $x'_n \in I'_{m+1}$ и n такие что $x_n \in I''_{m+1}$

(Хотя бы одно из них бесконечно, по той причине что объединение этих множеств это множество тех n таких что x_n принадлежит I_m ,

потому что вместе они дают на I_m , в силу предположения (7). Если бы и то и другое было бы конечно, то на множестве I_m было бы конечно множество номеров таких что x_n лежит на I_m , а по предположению индукции их должно быть бесконечно.)

Тогда по определению I_{m+1} - тот ищ I'_m, I''_m , для которого \exists бесконечно много n таких что $x_n \in I_{m+1}$

Пускай n_{m+1} - это наименьшее n такое что $x_{n_m} \in I_{m+1}$ и $n_{m+1} > n_m$

Примечание. Если элемент x_{n_m} лежит на I_{m+1} , то мы вычеркиваем его и рассматриваем минимальный следующий (их бесконечно много).

И так мы получили в итоге этих рассуждений:

$$n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$$

$$x_{n_m} \in I_{m+1}$$

$$(3) \Rightarrow \text{длина } I_m \rightarrow 0, \text{ при } m \rightarrow \infty \quad (8)$$

Примечание. Получается, что это вложенные промежутки.

$$(3') \text{ и } (8)$$

По теореме о вложенных пределах:

$$\exists! \alpha \text{ такое что } \alpha \in I_m \forall m \quad (9)$$

$$(5) \Rightarrow x_{n_m} \in I_{m+1}$$

Точка α лежит на этом промежутке и точка с номером x_{n_m} лежит на этом же промежутке.

$$(5), (9) \Rightarrow |x_{n_m} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^m} \quad (10)$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$k : \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$$

Возьмём $m > K$

$$(10), (11) \Rightarrow \text{при } m > K$$

выполнено

$$x_{n_m} - \alpha \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \quad (12)$$

Таким образом мы доказали, что существует подпоследовательность у которой есть конечный предел.

$$a \in I_1$$

, т.е.

$$a \leq \alpha \leq e$$

□

3.12 Верхний и нижний предел последовательности

Определение 33. Пусть есть произвольная последовательность x_n .

$$x_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}$$

Если $x_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху, то верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x = +\infty$, по определению.

Если $x_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху, т.е.

$$\exists M \text{ т.ч. } x_n \leq M \forall \quad (1)$$

$$E_n = \{a \in \mathbb{R} : a = x_m, m \geq n\}$$

(множество всех значений последовательности x_n начиная с номера n)

$$g_n = \sup E_n$$

$$(1) \Rightarrow E_n \text{ ограничена сверху} \Rightarrow$$

$$g_n \leq M \forall n \quad (2)$$

Обратим внимание, что

$$E_{n+1} \subset E_n \Rightarrow g_{n+1} \leq g_n \quad (3)$$

Потому что может быть они совпадают, но мы рассматриваем элементов на 1 больше.

$$(3) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \geq -\infty \quad (4)$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \leq M \quad (5)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \text{ по определению}$$

Если мы посмотрим на определение верхнего предела, видно, что верхний предел, в отличие от просто предела существует в нулевой последовательности. Т.к. последовательность либо ограничена сверху, либо не ограничена сверху.

Если $x_{n=1}^\infty$ не ограничена снизу, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ по определению равно } -\infty$$

Если $x_{n=1}^\infty$ ограничена снизу, то-есть

$$\exists L, \text{ т.ч. } x_n \geq L \forall n \quad (7)$$

$$h_n = \inf E_n$$

$$(7) \Rightarrow h_n > -\infty$$

$$h_{n+1} \geq h_n \quad (8)$$

h_n - это монотонно возрастающая последовательность, а у любой такой последовательности есть предел. Может быть равный $+\infty$

$$(8) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \leq +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ по определению равен } \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \quad (9)$$

Таким образом, если мы рассматриваем любую последовательность x_n , то у неё существуют верхний и нижний предел.

3.13 Свойства верхних и нижних пределов

1.

$$h_n = \inf E_n \leq \sup E_n = g_n \quad (10)$$

и последовательность g_n и h_n имеют пределы.

Для всякого n справедливо это неравенство (10)

$$(10) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \quad (11)$$

$$(11) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (12)$$

Примечание. В отличие от обычных пределов, верхние и нижние пределы существуют у любой последовательности.

Теорема 27. Есть некоторая последовательность, тогда для того чтобы существовал предел

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = a \quad (13)$$

Примечание. Здесь нужно рассмотреть все случаи, когда соответствующие пределы и какой-то из них является символами $+$ или $-\infty$, но мы рассмотрим только когда речь идет о том, когда оба предела это вещественные числа.

Предположим, что существует предел.

Хотим проверить, что верхний предел равен нижнему пределу.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ т.ч. } \forall n > N$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad (14)$$

Посмотрим на определение g_n и h_n .

$$(14) \Rightarrow \text{при } n > N E_n \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_n \leq a + \varepsilon, h_n \geq a - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - \varepsilon \leq \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n \leq a + \varepsilon$$

$$\underline{\lim} x_n \geq a - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \underline{\lim} x_n - \overline{\lim} x_n \leq 2\varepsilon \quad (15)$$

Получается, что некоторое не отрицательное число не превосходит 2ε при любом положительном ε . Это может быть только тогда, когда это число равно 0.

$$(15) \Rightarrow \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = \lim x_n$$

И нижние и верхние пределы на самом деле равны a .

Тогда мы получаем следующие суждения

$$g_n \rightarrow a, h_n \rightarrow a$$

$$g_n \geq a \forall n$$

$$h_n \leq a \forall n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \text{ т.ч. } a \leq g_n < a + \varepsilon \text{ при } n > N_1 \quad (16)$$

и

$$\exists N_2 \text{ т.ч. } a - \varepsilon < h_n \leq a \text{ при } n > N_2 \quad (17)$$

$$N = \max(N_1, N_2) n > N$$

$$(16), (17) \Rightarrow a - \varepsilon < \inf E_n \leq \sup E_n < a + \varepsilon \quad (18)$$

$$(18) \Rightarrow \forall m \geq n \text{ выполнено } a - \varepsilon < x_m < a + \varepsilon \quad (19)$$

В частности,

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad (20)$$

$$(20) : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \underline{\lim} x_n = \lim x$$

Теорема доказана.

□