

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Векторное пространство</b>	<b>2</b>
1.1	Определение векторного пространства . . . . .	2
1.2	Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная неза- висимость . . . . .	3

## Лекция 1: Векторное пространство

09.09.2023

# Глава 1

## Векторное пространство

### 1.1 Определение векторного пространства

**Определение 1.** Пусть  $V$  - множество;

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$\forall u, w, v \in V : \forall \alpha, \beta$$

1.  $(u+v)+w=(u+v)+w$  (ассоциативность сложения)
2.  $u+v=v+u$  (коммутативность сложения)
3.  $\exists! 0 \in V : u+0=0+u=u$  (нейтральный элемент по сложению)
4.  $\exists u; -u : u+(-u)=0$  (обратный элемент по сложению)
5.  $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$  (дистрибутивность)
6.  $(\alpha \cdot \beta)u=\alpha(\beta \cdot u)$  (ассоциативность умножения)
7.  $1 \cdot u=u$  (нейтральный элемент по умножению)

Если 1-8 выполняются, то  $V$  - (вещественное) векторное пространство.

**Пример.** 1.  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  -  $n$ -мерное пространство  $(a_1 \dots a_n) + (b_1 \dots b_n) = (a_1 + b_1 \dots a_n + b_n)$

2. Множество многочленов  $V$   
Множество многочленов  $n$  степени — не векторное пространство, т. к.  $(x^n + 1) + (-x^n + x) = x + 1$  — сложение не определено  
Множество многочленов степени  $n \leq n$  — векторное пространство.
3. Множество определенных на  $[a..b]$ , непрерывных и имеющих непрерывную производную функций — векторное пространство.
4. Матрицы  $n \times m$  — векторное пространство.

5. Множество вращений шара (сложение — композиция, умножение — умножение угла на число на число) — не векторное пространство. (Упражнение: докажите почему)

**Свойство.** (Доказуемые свойства)

1.  $\bar{1}$  — единственный.
2.  $\begin{cases} u + v = 0 \\ u + w = 0 \end{cases} \Rightarrow v = w$
3.  $-\bar{1} \cdot u = -u$
4.  $u \cdot 0 = 0$

## 1.2 Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная независимость

**Определение 2.**  $V$  — векторное пространство и векторы  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$ . Система  $v_1, \dots, v_n$  называется линейно независимой (ЛНЗ), если из  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**Определение 3.** Если  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, v_1, \dots, v_n \in V$ . То  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$  — линейная комбинация (ЛК) векторов  $v_1, \dots, v_n$ .

**Определение 4.** Если  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , не все  $= 0$ , но  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ , то система  $v_1, \dots, v_n$  называется линейно зависимой (ЛЗ).

**Теорема 1.**  $v_1, \dots, v_n$  — ЛЗ  $\Leftrightarrow$  один из этих векторов можно представить как ЛК остальных.  $\exists i : v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n$

**Доказательство.**  $\Rightarrow : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n (\exists i : \alpha_i \neq 0)$

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \\ \alpha_i v_i &= -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \dots - \alpha_n v_n \\ \alpha_i \neq 0 \quad v_i &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n \\ \Leftrightarrow : v_i &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \text{ без } i\text{-ого слагаемого} \\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + (-1) v_i + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \\ \text{ЛК} &= 0 \text{ не все коэффициенты} = 0 \end{aligned}$$

□

**Предположение 1.**  $v_1, \dots, v_n$  — ЛНЗ, то любой его поднабор тоже ЛНЗ.  $v_1, \dots, v_n$  — ЛЗ, то при добавлении векторов, набор останется ЛЗ.

**Теорема 2.**  $v_1, \dots, v_n$  – ЛНЗ  $\Leftrightarrow$  если

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \\ \Rightarrow \alpha_1 &= \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; \dots; \alpha_n = \beta_n\end{aligned}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n &= 0 \\ \alpha_i - \beta_i &= 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n \text{ – ЛНЗ}\end{aligned}$$

□