

Геометрия и топология

Сольнин А. А.¹

11.09.2023 - ...

¹"Записал Сергей Киселев"

Оглавление

1	Векторное пространство	2
1.1	Определение векторного пространства	2
1.2	Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная неза- висимость	3

Лекция 1: Векторное пространство

09.09.2023

Глава 1

Векторное пространство

1.1 Определение векторного пространства

Определение 1. Пусть V - множество;

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$\forall u, w, v \in V : \forall \alpha, \beta$$

1. $(u+v)+w=(u+v)+w$ (ассоциативность сложения)
2. $u+v=v+u$ (коммутативность сложения)
3. $\exists! 0 \in V : u+0=0+u=u$ (нейтральный элемент по сложению)
4. $\exists u; -u : u+(-u)=0$ (обратный элемент по сложению)
5. $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$ (дистрибутивность)
6. $(\alpha \cdot \beta)u=\alpha(\beta \cdot u)$ (ассоциативность умножения)
7. $1 \cdot u=u$ (нейтральный элемент по умножению)

Если 1-8 выполняются, то V - (вещественное) векторное пространство.

Пример. 1. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ - n -мерное пространство $(a_1 \dots a_n) + (b_1 \dots b_n) = (a_1 + b_1 \dots a_n + b_n)$

2. Множество многочленов V
Множество многочленов n степени — не векторное пространство, т. к. $(x^n + 1) + (-x^n + x) = x + 1$ — сложение не определено
Множество многочленов степени $n \leq n$ — векторное пространство.
3. Множество определенных на $[a..b]$, непрерывных и имеющих непрерывную производную функций — векторное пространство.
4. Матрицы $n \times m$ — векторное пространство.

5. Множество вращений шара (сложение — композиция, умножение — умножение угла на число на число) — не векторное пространство. (Упражнение: докажите почему)

Свойство. (Доказуемые свойства)

1. $\bar{1}$ — единственный.
2. $\begin{cases} u + v = 0 \\ u + w = 0 \end{cases} \Rightarrow v = w$
3. $-\bar{1} \cdot u = -u$
4. $u \cdot 0 = 0$

1.2 Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная независимость

Определение 2. V - векторное пространство и векторы $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$. Система v_1, \dots, v_n называется линейно независимой (ЛНЗ), если из $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Определение 3. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, v_1, \dots, v_n \in V$. То $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ — линейная комбинация (ЛК) векторов v_1, \dots, v_n .

Определение 4. Если $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$, не все $= 0$, но $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, то система v_1, \dots, v_n называется линейно зависимой (ЛЗ).

Теорема 1. v_1, \dots, v_n — ЛЗ \Leftrightarrow один из этих векторов можно представить как ЛК остальных. $\exists i : v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n$

Доказательство. $\Rightarrow : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n (\exists i : \alpha_i \neq 0)$

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \\ \alpha_i v_i &= -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \dots - \alpha_n v_n \\ \alpha_i \neq 0 \quad v_i &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n \\ \Leftrightarrow : v_i &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \text{ без } i\text{-ого слагаемого} \\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + (-1) v_i + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \\ \text{ЛК} &= 0 \text{ не все коэффициенты} = 0 \end{aligned}$$

□

Предположение 1. v_1, \dots, v_n — ЛНЗ, то любой его поднабор тоже ЛНЗ. v_1, \dots, v_n — ЛЗ, то при добавлении векторов, набор останется ЛЗ.

Теорема 2. v_1, \dots, v_n – ЛНЗ \Leftrightarrow если

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \\ \Rightarrow \alpha_1 &= \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; \dots; \alpha_n = \beta_n\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n &= 0 \\ \alpha_i - \beta_i &= 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n \text{ – ЛНЗ}\end{aligned}$$

□