

# Геометрия и топология

Солынин А. А.<sup>1</sup>

11.09.2023 - ...

<sup>1</sup>"Записал Сергей Киселев"

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Векторное пространство</b>	<b>2</b>
1.1	Определение векторного пространства . . . . .	2
1.2	Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная неза- висимость . . . . .	3
1.3	Матрицы . . . . .	7
1.4	Скалярное произведение . . . . .	10

## Лекция 1: Векторное пространство

09.09.2023

# Глава 1

## Векторное пространство

### 1.1 Определение векторного пространства

**Определение 1.** Пусть  $V$  - множество;

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$\forall u, w, v \in V : \forall \alpha, \beta$$

1.  $(u+v)+w=(u+v)+w$  (ассоциативность сложения)
2.  $u+v=v+u$  (коммутативность сложения)
3.  $\exists! 0 \in V : u+0=0+u=u$  (нейтральный элемент по сложению)
4.  $\exists u; -u : u+(-u)=0$  (обратный элемент по сложению)
5.  $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$  (дистрибутивность)
6.  $(\alpha \cdot \beta)u=\alpha(\beta \cdot u)$  (ассоциативность умножения)
7.  $1 \cdot u=u$  (нейтральный элемент по умножению)

Если 1-8 выполняются, то  $V$  - (вещественное) векторное пространство.

**Пример.** 1.  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  -  $n$ -мерное пространство  $(a_1 \dots a_n) + (b_1 \dots b_n) = (a_1 + b_1 \dots a_n + b_n)$

2. Множество многочленов  $V$   
Множество многочленов  $n$  степени — не векторное пространство, т. к.  $(x^n + 1) + (-x^n + x) = x + 1$  — сложение не определено  
Множество многочленов степени  $n \leq n$  — векторное пространство.
3. Множество определенных на  $[a..b]$ , непрерывных и имеющих непрерывную производную функций — векторное пространство.
4. Матрицы  $n \times m$  — векторное пространство.

5. Множество вращений шара (сложение — композиция, умножение — умножение угла на число на число) — не векторное пространство. (Упражнение: докажете почему)

**Свойство.** (Доказуемые свойства)

1.  $\bar{1}$  — единственный.
2.  $\begin{cases} u + v = 0 \\ u + w = 0 \end{cases} \Rightarrow v = w$
3.  $-\bar{1} \cdot u = -u$
4.  $u \cdot 0 = 0$

## 1.2 Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная независимость

**Определение 2.**  $V$  - векторное пространство и векторы  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$ . Система  $v_1, \dots, v_n$  называется линейно независимой (ЛНЗ), если из  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**Определение 3.** Если  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, v_1, \dots, v_n \in V$ . То  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$  — линейная комбинация (ЛК) векторов  $v_1, \dots, v_n$ .

**Определение 4.** Если  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , не все  $= 0$ , но  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ , то система  $v_1, \dots, v_n$  называется линейно зависимой (ЛЗ).

**Теорема 1.**  $v_1, \dots, v_n$  — ЛЗ  $\Leftrightarrow$  один из этих векторов можно представить как ЛК остальных.  $\exists i : v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n$

**Доказательство.**  $\Rightarrow : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n (\exists i : \alpha_i \neq 0)$

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \\ \alpha_i v_i &= -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \dots - \alpha_n v_n \\ \alpha_i \neq 0 \quad v_i &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n \\ \Leftrightarrow : v_i &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \text{ без } i\text{-ого слагаемого} \\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + (-1) v_i + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \\ \text{ЛК} &= 0 \text{ не все коэффициенты} = 0 \end{aligned}$$

□

**Предположение 1.**  $v_1, \dots, v_n$  — ЛНЗ, то любой его поднабор тоже ЛНЗ.  $v_1, \dots, v_n$  — ЛЗ, то при добавлении векторов, набор останется ЛЗ.

**Теорема 2.**  $v_1, \dots, v_n$  – ЛНЗ  $\Leftrightarrow$  если

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \\ \Rightarrow \alpha_1 &= \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; \dots; \alpha_n = \beta_n\end{aligned}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n &= 0 \\ \alpha_i - \beta_i &= 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n \text{ – ЛНЗ}\end{aligned}$$

□

## Лекция 2: Базис векторного пространства

18.09.2023

Пусть  $V$  – это конечно мерно пространство

**Определение 5.** Набор  $v_1, v_2, \dots, v_n$  называется порождающим для  $V$ , если  $\forall w \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

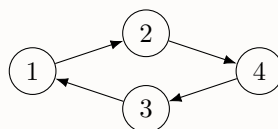
**Замечание.** Если к порождающему набору прибавить вектор, то он останется порождающим. Если убрать векторы из непорождающего набора векторы, то набор останется непорождающим.

**Определение 6.**  $v_1, v_2, \dots, v_n$  называется базисом  $V$ , если этот набор ЛНЗ и порождающий.

**Теорема 3 (О базисе).** Следующие определения базиса равносильны:

1. ЛНЗ и порождающий набор
2. Минимальный порождающий набор (минимальный по включению)
3. Максимальный ЛНЗ набор (максимальный по включению)
4. Порождающий набор  $\forall w \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

**Доказательство.** Цепочка доказательств:



1  $\rightarrow$  2. Дан  $v_1, \dots, v_n$  – ЛНЗ и порождающий набор. Доказать, что он минимальный порождающий.

Допустим, что  $v_i$  выкинули, оставшийся набор остался порождающим  $\Rightarrow v_i$  – ЛК остальных  $\Rightarrow$  ЛЗ.

2  $\rightarrow$  4. Дан  $v_1, \dots, v_n$  – минимальный порождающий набор. Доказать  $v_1, \dots, v_n$  – порождающий с единственностью коэффициентов.

Допустим противное:  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

$$\alpha_i \neq \beta_i$$

$$(\alpha_i - \beta_i)v_i = (\beta_1 - \alpha_1)v_1 + \dots \text{ (без } i\text{-ого)} + (\beta_n - \alpha_n)v_n$$

$$v_i = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_i - \beta_i} + \dots \text{ (без } i\text{-ого)} + \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_i - \beta_i}$$

$v_i$  – выкинем. В любой ЛК с  $v_i$  заменим  $v_i$  на выражение выше  $\Rightarrow$  набор порождающий. Значит без единственности коэффициентов получаем противоречие с дано

4  $\rightarrow$  3. Дан  $v_1, \dots, v_n$  – порождающий набор с единственностью коэффициентов. Доказать:  $v_1, \dots, v_n$  – максимальный ЛНЗ (ЛНЗ уже доказана)

Допустим противное:  $v_1, v_2, \dots, v_n; u$  – ЛНЗ набор

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n (\alpha_1, \dots, \alpha_n \exists!) \Rightarrow v_1, \dots, v_n, u - \text{ЛЗ}$$

3  $\rightarrow$  1. Дан  $v_1, \dots, v_n$  – максимальный ЛНЗ. Доказать  $v_1, \dots, v_n$  – ЛНЗ и порождающий набор.

$$\forall w \in V$$

$$v_1, v_2, \dots, v_n, w - \text{ЛЗ набор}$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta w = 0$$

$$\text{Если } \beta = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\text{не все коэффициенты} = 0 (\alpha_i \neq 0)$$

$$\Rightarrow v_1, \dots, v_n - \text{ЛЗ}$$

$$\beta \neq 0 \Rightarrow$$

$$w = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} v_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} v_n$$

□

**Замечание.** (Следствия) Любую конечную порождающую систему можно сузить до базиса.

Если есть конечный порождающий набор, то любую ЛНЗ систему можно расширить до базиса.

**Определение 7.** Размерность пространства равна количеству элементов в базисе. (пока нет доказательств корректности)

**Лемма 1.** Система линейных уравнений:  $(a_{ij} \in \mathbb{R}; x_i \in \mathbb{R}; 0 \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Имеет ненулевые решения, если  $n > k$ .

**Доказательство.** Индукция по  $k$ . База  $k = 1$ :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$\text{Пусть } a_{11} \neq 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

$$\forall x_2, \dots, x_n : x_1 \text{ выражается через них}$$

$$a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$$

Переход

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$\exists i : a_{1i} \neq 0$ , иначе выкинем предыдущее уравнение

$$x_i = -\frac{a_{11}}{a_{1i}}x_1 - \dots \text{ (без } i\text{-ого)} - \frac{a_{1n}}{a_{1i}}x_n$$

Подставим выраженное  $x_i$  во все остальные уравнения. Уравнений на 1 меньше, переменных на 1 меньше.  $\square$

**Теорема 4.** Если  $v_1, \dots, v_k$  и  $w_1, \dots, w_n$  базисы  $\in V$ , то  $k = n$ .

**Доказательство.**  $v_1, \dots, v_n$  – порождающая система.

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + \dots + a_{k1}v_k$$

$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + \dots + a_{k2}v_k$$

...

$$w_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + \dots + a_{kn}v_k$$

$$x_1w_1 + x_2w_2 + \dots + x_nw_n = 0, x_i \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

т.к.  $w_1, \dots, w_n$  – ЛНЗ  $\Rightarrow$  все  $x_i = 0$

$$\begin{aligned} x_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{k1}v_k) + x_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{k2}v_k) \\ + \dots + x_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{kn}v_k) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + v_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \\ + \dots + v_k(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n) = 0 \end{aligned}$$

$v_1, v_2, \dots, v_k$  — ЛНЗ  $\Rightarrow$  все коэффициенты равны 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Если  $n > k \Rightarrow \exists$  ненулевые решения  $\Rightarrow$  противоречие с (1.1) и ЛНЗ  
 $w_i \Rightarrow n \leq k$ . Аналогично  $k \leq n \Rightarrow n = k$ .  $\square$

## Лекция 3: Матрицы

25.09.2023

### 1.3 Матрицы

**Определение 8.** Пусть  $V$  — это конечно мерно пространство

$v_1 \dots v_n$  — базис  $V$

$w \in V \Rightarrow \exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n :$

$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$

Тогда  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — координаты  $w$  в базисе  $u_1 \dots u_n$

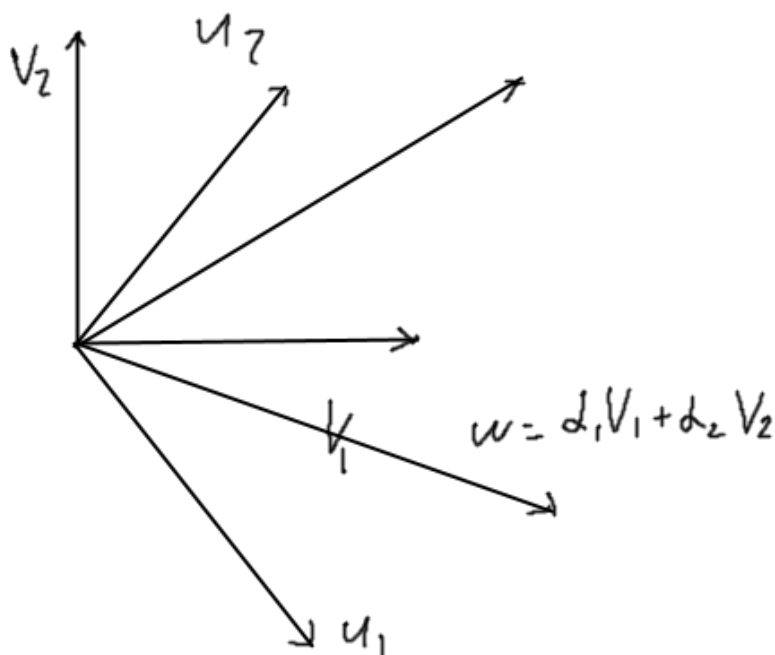
- $w \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$
- $u \Leftrightarrow (\beta_1 \dots \beta_n)$
- $u + w \Leftrightarrow (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2 \dots \alpha_n + \beta_n)$
- $f \cdot w \Leftrightarrow (f \cdot \alpha_1, f \cdot \alpha_2 \dots f \cdot \alpha_n)$

**Определение 9.** Пусть  $v_1 \dots v_n$  и  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — базисы

Тогда  $w$  может выражаться как:

$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot u_1 + \dots + \beta_n \cdot u_n$





**Определение 10.** (\*) Пусть  $v_1 \dots v_n$  и  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — базисы

Выразим базис  $u_1 \dots u_n$  через  $v_1 \dots v_n$ :

$$u_1 = a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + \dots + a_{1n} \cdot v_n$$

$$u_2 = a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \dots + a_{2n} \cdot v_n$$

$\vdots$

$$u_n = a_{n1} \cdot v_1 + a_{n2} \cdot v_2 + \dots + a_{nn} \cdot v_n$$

Тогда  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  — матрица перехода от  $v_1 \dots v_n$  к  $u_1 \dots u_n$

**Определение 11.** Пусть есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \text{ — Матрица } n \times K$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nl} \end{pmatrix} \text{ — Матрица } k \times l$$

Умножение матриц определяется как:

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \dots & \dots & c_{kl} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы равны:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1k} \cdot b_{kl}$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \dots + a_{1k} \cdot b_{k2}$$

$\vdots$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$\vdots$

**Замечание.** Выражение базиса через базис можно записать так:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

**Теорема 5.** Пусть  $v_1 \dots v_n$  и  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — базисы.

$A$  — матрица перехода от  $v_1 \dots v_n$  к  $u_1 \dots u_n$

$B$  — матрица перехода от  $w_1 \dots w_n$  к  $v_1 \dots v_n$

Тогда матрица перехода от  $w_1 \dots w_n$  к  $u_1 \dots u_n$  равна  $A \times B$

**Доказательство.** Выразим базис  $v_1 \dots v_n$  через  $w_1 \dots w_n$ :

$$v_1 = b_{11}w_1 + \dots + b_{1n}w_n$$

$\vdots$

$$v_n = b_{n1}w_1 + \dots + b_{nn}w_n$$

Выразим базис  $u_1 \dots u_n$  через  $v_1 \dots v_n$ :

$$u_1 = a_{11}(b_{11}w_1 + \dots + b_{1n}w_n) + \dots + a_{1n}(b_{n1}w_1 + \dots + b_{nn}w_n) =$$

$$w_1(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}) + \dots + w_n(a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \dots + a_{nn}b_{nn})$$

Мы видим, что базис  $u_1 \dots u_n$  выражается через  $w_1 \dots w_n$ , а матрица перехода —  $A \times B$ .  $\square$

**Теорема 6.**  $A(BC) = (AB)C$

Умножение матриц не коммутативно, но ассоциативно.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ — единичная матрица}$$

**Замечание.**  $u_1 \dots u_n, v_1 \dots v_n$  — базисы, выражаются как:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$A \times B = E$$

$$B \times A = E$$

(A и B) — обратные матрицы

## 1.4 Скалярное произведение

**Определение 12.**  $V$  - векторное пространство

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

1.  $(u, u) \geq 0 \quad (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2.  $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v) \quad (u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$
3.  $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v)$
4.  $(u, v) = (v, u)$

$V$  - евклидово пространство  $(\cdot, \cdot)$  - скалярное произведение

**Пример.** 1.  $V = \mathbb{R}^n$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2.  $V$  - пространство функций  $(\dots) (f(x), g(x)) := \int_a^b f(x)g(x)dx$

**Определение 13.** Пусть  $V$  - евклидово пространство,  $v \in V$

$$|v| := \sqrt{(v, v)}$$

$$\cos \angle(u, v) := \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|}$$

**Теорема 7.** (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ))

$$|(u, w)| \leq |u| \cdot |v|$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
(u + tv, u + tv) &\geq 0 \quad \forall t \\
(u, u) + (u, tv) + (tv, u) + (tv, tv) &\geq 0 \\
|u|^2 + 2t(u, v) + t^2|v|^2 &\geq 0 \quad \forall t \\
\frac{D}{4} \leq 0 \quad (u, v)^2 - |u|^2|v|^2 &\leq 0 \\
|(u, v)| &\leq |u||v|
\end{aligned}$$

□

**Вывод.** (Следствие из КБШ)

1.  $|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$
2.  $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b g(x)dx) \cdot (\int_a^b f(x)dx)$

**Определение 14.**  $u \perp v$ , если  $(u, v) = 0$ **Определение 15.**  $v_1 \dots v_n$  — ортогональная система, если:

$$\forall v_i, v_j : v_i \perp v_j, (i \neq j)$$

**Теорема 8.**  $v_1 \dots v_n$  - ортогональная система и в ней нет нулевых векторов  $\Rightarrow v_1 \dots v_n$  линейно не зависимы.

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \\
\alpha_1(v_1, v_i) + \alpha_2(v_2, v_i) + \dots + \alpha_i(v_i, v_i) + \dots &= 0 \\
\alpha_i|v_i|^2 &= 0 \\
\alpha_i &= 0
\end{aligned}$$

□

**Определение 16.**  $u$  — нормированный или единичный если  $|u| = 1$   
 $v_1 \dots v_n$  — ортонормированные системы, если  $v_i \perp v_j$  и  $|v_i| = 1$   
 $v_1 \dots v_n$  — ОНБ ортонормированный базис