Математический анализ

Широков Николай Алексеевич[1]

07.09.2023 - ...

[1] "Записали Сергей Киселев, Гараев Тагир, Александра Ри"

Оглавление

Глава 1

Построение множества вещественных чисел

Лекция 1: Введение

14.09.2023

1.1 Множества

Определение 1. Множества X и У равны, если:
$\forall a \in X : a \in Y$
$\forall b \in Y : b \in X$

Определение 2. $X \subset Y$ если:
$\forall a \in X : a \in Y$

Определение 3.

1. $a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \vee a \in B$
2. $a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \in B$
3. $a \in A \setminus B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \notin B$

Определение 4. (Декартово произведение множеств)
$A \times B = \{(a, b) : \forall a \in A, \forall \in B\}; A, B \neq \varnothing$

Определение 5. $F : A \to B$ - функция, такая, что: $\forall a \in A$ сопостовляет $b = F(a) \in B$

1.2 Сечения

Определение 6. Множество $\alpha \subset \mathbb{Q}$ называется сечением, если:

- I. $\alpha \neq \varnothing$

- II. если $p \in \alpha$, то $q < p \Leftrightarrow q \in \alpha$
- III. в α нет наибольшего

Пример. 1. $p^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < p\}$ - нет наибольшего

2. $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 0 \vee p > 0 \wedge p^2 < 2\}$

Теорема 1. (Утверждение 1)
Если $p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$, то $q > p$

Доказательство. Если $p \in \alpha$ и $q \leq p$, то из (II.) следует. что $q \in \alpha$ □

Теорема 2. (Утверждение 2) $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

Доказательство. $\begin{cases} \alpha < \beta \Rightarrow \exists p \in \beta, p \notin \alpha \\ \beta < \gamma \Rightarrow \exists p \in \gamma, q \notin \beta \end{cases} \Rightarrow p < q \Rightarrow \alpha < \gamma$ □

Теорема 3. Пусть α, β - сечения. Между ними существует одно из нескольких отношений: $\left[\begin{array}{l} \alpha < \beta \\ \beta > \alpha \\ \alpha = \beta \end{array}\right.$

Доказательство. Предположим, что $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$, тогда:
$\begin{cases} \exists p \in \alpha, p \notin \beta \\ \exists q \in \beta, q \notin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p > q \\ q > p \end{cases}$ - Противоречие, тогда $\alpha \neq \beta$ □

1.3 Сумма сечений

Теорема 4. Пусть α, β - сечения, тогда:
$\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha, q \in \beta\}$ - тоже сечение.

Доказательство.

- (I.) Пусть $\exists s \notin \alpha, \exists t \notin \beta$, тогда:

  $\forall p \in \alpha, q \in \beta : \begin{cases} p < s \\ q < t \end{cases} \Rightarrow p + q < s + t \Rightarrow \alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$

- (II.)

  $r \in \alpha + \beta, r_1 < r$

  $r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$

  $r_1 = p + q_1, r_1 < r \Rightarrow q_1 < q \Rightarrow q_1 \in \beta \Rightarrow p + q_1 \in \alpha + \beta$

- (III.)

$\exists p_1 \in \alpha, p > p_1 \Rightarrow p_1 + q > p + q = r, p_1 + q \in \alpha + \beta$ - нет наибольшего

□

Теорема 5. (Свойства суммы сечений)

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\gamma + \beta)$
3. $\alpha + 0^* = \alpha$, где $0^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}$

Доказательство. Свойства 1 и 2 справедливы в силу коммутативности и ассоциативности рациональных чисел.

Докажем свойство 3:

1. Пусть $p \in \alpha, q \in 0^*$, тогда: $p + q < p \Rightarrow p + q \in \alpha$, т.е. $\alpha + 0^* \subset \alpha$
2. Пусть $p \in \alpha$, тогда: $\exists p_1 > p \Rightarrow p_1 \in \alpha, p = p_1 + (p - p_1)$, при том $p_1 \in \alpha, p - p_1 \in 0^* \Rightarrow p \in \alpha + 0^* \Rightarrow \alpha \subset \alpha + 0^*$

$$\begin{cases} \alpha \subset \alpha + 0^* \\ \alpha + 0^* \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \alpha + 0^*$$

□

1.4 Теоремы сечений

Теорема 6. (Теорема 2) Пусть α - сечение, $r \in \mathbb{Q}^+$, тогда $\exists p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$:
q - не наименьшее верхнее (не входящее в сечение) число
$q - p = r$

Доказательство. Пусть $p_0 \in \alpha, p_1 = p_0 + r$

1. Возможно, $p_1 \notin \alpha$, тогда:
   (a) если p_1 - не наименьшее в верхнем классе, то $q = p_1$
   (b) если же наименьшее, то $p = p_0 + \frac{r}{2}, q = p_1 + \frac{r}{2}$
2. Если $p_1 \in \alpha$, тогда:
   Положим $p_n = p_1 + nr$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда $\exists! m$:
   $p_m \in \alpha$ и $p_{m+1} \notin \alpha$
   (a) Если p_{m+1} - не наименьшее в верхнем классе, то выберем $p = p_m, q = p_{m+1}$
   (b) Если же наименьшее, то $p = p_m + \frac{r}{2}, q = p_{m+1} + \frac{r}{2}$

□

Теорема 7. (Существование противоположного элемента) Пусть α - сечение, тогда $\exists! \beta : \alpha + \beta = 0^*$

Доказательство. (нужно доказать единственность и существование)

1. Докажем единственность: пусть $\exists \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющие условию, тогда:

   $\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1$

2. Докажем существование: пусть

   $\beta = \{p : -p \notin \alpha, -p$ не является наименьшим в верхнем классе $\alpha\}$

   - (I.) Очевидно, что $\beta \neq \varnothing, \mathbb{Q}$
   - (II.) Возьмем $p \in \beta, q < p \Leftrightarrow -q > -p \Rightarrow -q$ в верхнем классе α, но не наименьшее $\Rightarrow q \in \beta$
   - (III.) Если $p \in \beta$, то -p - не наименьшее в верхнем классе α, значит $\exists q : -q < -p$ и $-q \notin \alpha$
     Положим $r = \frac{p+q}{2}$, тогда:
     $-q < -r < -p \Rightarrow$ -r – не наименьшее в верхнем классе α. Значит, нашли такое r $>$ p, что $r \in \beta$

Теперь проверим, что $\alpha + \beta = 0^*$:

1. Возьмем $p \in \alpha, q \in \beta$

   По определению $\beta : -q \notin \alpha \underset{\text{Утв. 1}}{\Rightarrow} -q > p \Leftrightarrow p + q < 0 \Rightarrow p + q \in 0^* \Rightarrow \alpha + \beta \subset 0^*$

2. Возьмем по Теореме (2) $q - p = r \Leftrightarrow p - q = -r \in 0^*$

   т.к. $q \notin \alpha$, то $-q \in \beta$, значит $p - q = p + (-q) \in \alpha + \beta \Rightarrow 0^* \subset \alpha + \beta$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \subset 0^* \\ 0^* \subset \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 0^* \qquad \square$$

Лекция 2: Сечения

21.09.2023

Теорема 8. Пусть α, β — сечения. Тогда $\exists!\ \gamma$ — сечение : $\alpha + \gamma = \beta$

Доказательство. Пусть имеем $\gamma_1 \neq \gamma_2$, удовлетворяющие условию. Тогда: $\alpha + \gamma_1 = \beta = \alpha + \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$ — противоречие.

Положим $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Тогда в силу свойств сечений имеем:
$\alpha + \gamma = \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0^* + \beta = \beta$ $\square$

Определение 7. Сечение γ, построенное в предыдущей теореме обозначается через $\beta - \alpha$

Определение 8. (Абсолютная величина) $|a| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geq 0^* \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0^* \end{cases}$

Определение 9. (Произведение) Пусть α, β — сечения, причем $\alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^*$

Тогда $\alpha\beta = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0 \vee r = pq, \text{ где } p \in \alpha, q \in \beta\}$

Пример. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^*$

Теорема 9. (Любые 3 из них необоходимо доказать самостоятельно) Для любых сечений α, β, γ имеем:

1. $\alpha\beta = \beta\alpha$
2. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
4. $\alpha 0^* = 0^*$
5. $\alpha 1^* = \alpha$
6. если $\alpha < \beta$ и $\gamma > 0^*$, то $\alpha\gamma < \beta\gamma$
7. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta : \alpha \cdot \beta = 1^*, \beta = \frac{1^*}{\alpha}$
8. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta, \gamma : \alpha \cdot \gamma = \beta, \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$

Теорема 10. (Свойства рациональных сечений)

1. $p^* + q^* = (p + q)^*$
2. $p^* q^* = (pq)^*$
3. $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

Доказательство.

1. Возьмем $r \in (p + q)^* \Rightarrow r < p + q$

   Положим $h = p + q - r$:

   $\begin{cases} p_1 = p - \frac{h}{2} \\ q_1 = q - \frac{h}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in p^* + q^* \Rightarrow (p^* + q^*) \subset p^* + q^*$

   Теперь возьмем $r \in p^* + q^* \Rightarrow r = p_1 + q_1$:

   $\begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 < p + q \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in (p^* + q^*) \Rightarrow p^* + q^* \subset (p^* + q^*)$

   $\begin{cases} p^* + q^* \subset (p + q)^* \\ (p + q)^* \subset p^* + q^* \end{cases} \Rightarrow p^* + q^* = (p^* + q^*)$

2. Для умножения доказательство аналогично.

3. Если $p < q$, то $p \in q^*, p \notin p^* \Rightarrow p^* < q^*$

   Если $p^* < q^*$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in q^*, r \notin p^* \Rightarrow p \leq r < q \Rightarrow p < q$

   Значит $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

$\square$

Теорема 11. Пусть α, β — сечения, $\alpha < \beta$. Тогда $\exists\, r^*$ — рациональное сечение : $\alpha < r^* < \beta$

Доказательство. $\alpha < \beta \Rightarrow \exists\, p : p \in \beta, p \notin \alpha$

Выберем такое $r > p$, так, что $r \in \beta$. Поскольку $r \in \beta, r \notin r^*$, то $r^* < \beta$

Поскольку $p \in r^*, p \notin \alpha$, то $\alpha < r^*$ $\square$

Глава 2

Вещественные числа

Определение 10. В дальнейшем сечения будут называться вещественными числами. Рациональные сечения будут отождествляться с рациональными числами. Все другие сечения будут называться иррациональными числами.

Таким образом, множество всех рациональных чисел оказывается подмножеством системы вещественных чисел.

Теорема 12. (Дедекинда) Пусть A и B — такие множества вещественных чисел, что:

1. $A \cup B = \mathbb{R}$
2. $A \cap B = \varnothing$
3. $A, B \neq \varnothing, A \neq B$
4. $\forall \alpha \in A, \beta \in B : a < b$

Тогда $\exists!\ \gamma \in \mathbb{R} : \alpha \leq \gamma \leq \beta\ \forall \alpha \in A, \forall \beta \in B$

Доказательство.

1. Докажем единственность.

   Пусть γ_1, γ_2 — два числа, причем $\gamma_1 < \gamma_2$. Тогда $\exists\ \gamma_3 : \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2 \Rightarrow \gamma_3 \in A, \gamma_3 \in B$ — противоречие. Значит $\gamma_1 = \gamma_2$.

2. Проверим, является ли γ сечением.

   $\gamma = \{p \in \mathbb{Q} : \exists \alpha \in A : p \in \alpha\}$

   I. $\gamma \neq \varnothing$, т.к. $A \neq \varnothing$
   $\gamma \neq \mathbb{Q}$, т.к. $\exists q \in \mathbb{Q} : q \notin B \Rightarrow q \notin \gamma$

   II. Пусть $p_1 < p, p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p_1 \in \alpha \Rightarrow p_1 \in \gamma$

   III. Пусть $p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p \in \alpha$. Поскольку α — сечение, то $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \alpha, q > p \Rightarrow q \in \gamma$

Ясно, что $\alpha \leq \gamma \forall \alpha \in A$.

Предположим, что $\exists \beta \in B : \beta < \gamma$. Тогда $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \gamma, q \notin \beta \Rightarrow \exists \alpha \in A : q \in \alpha \Rightarrow \alpha > \beta$ — противоречие. Значит $\gamma \leq \beta \, \forall \, \beta \in B$. □

2.1 Супремумы и инфимумы

Определение 11. $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \varnothing$
E - ограничено сверху, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq y$

Определение 12. $G \subseteq \mathbb{R}, G \neq \varnothing$
G - ограничено снизу, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \geq y$

Замечание. Если множество ограничено сверху и снизу, оно называется ограниченным.

Определение 13. Пусть E ограничено сверху. Тогда y называется точной верхней границей (верхней гранью) E, если:

1. y — верхняя граница множества E.
2. если $x < y$, то x не является верхней границей множества E.

Определение 14. Пусть E ограничено снизу. Тогда y называется точной нижней границей (нижней гранью) E, если:

1. y — нижняя граница множества E.
2. если $x > y$, то x не является нижней границей множества E.

Определение 15. Точная верхняя граница — $y \sup E$
Точная нижняя граница — $y \inf E$

Пример. E состоит из всех чисел $\frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда множество ограничено, верхняя грань равна 1 и принадлежит множеству, а нижняя равна 0 и множеству не принадлежит.

Теорема 13. Пусть E ограничено сверху. Тогда $\sup E$ существует.

Доказательство. Пусть есть множества:
$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in E : x > \alpha\}$
$B = \mathbb{R} \setminus A$
Тогда $A \cap B = \varnothing, A \cup B = \mathbb{R}, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$

$$\begin{cases} \beta \in B \\ \alpha \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in E : x \leq \beta \\ \exists x_0 \in E : x_0 > \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha < \beta$$

Ясно, что никакой элемент множества A не является верхней границей множества E, а любой элемент множества B является верхней границей множества E. Поэтому достаточно доказать, что B содержит наименьшее число.

По теореме Дедекинда: $\exists \gamma : \begin{cases} \alpha \leq \gamma \ \forall \alpha \in A \\ \beta \geq \gamma \ \forall \beta \in B \end{cases}$

Предположим, что $\gamma \in A$. Тогда $\exists x \in E : x > \gamma$.

Возьмем $\gamma_1 : \gamma < \gamma_1 < x \Rightarrow \gamma_1 \in A$ — противоречие.

Значит $\gamma \in B$. □

Теорема 14. Пусть E ограничено снизу. Тогда $\inf E$ существует.

Доказательство. Доказательство тривиально и предоставляется читателю в качестве упражнения $\odot \smile \odot$. □

Теорема 15. (Существование корня из вещественного числа) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n > 0 \ \exists! \ y \in \mathbb{R}, y > 0 : y^n = x, y = \sqrt[n]{x}$

Доказательство. 1. Единственность.

Пусть $y_2 > y_1 : y_2^n = x = y_1^n \Rightarrow y_2^n - y_1^n = 0$

$\overset{>0}{(y_2 - y_1)} \cdot \overset{>0}{(y_2^{n-1} + y_2^{n-2} \cdot y_1 + \ldots + y_1^{n-1})} = 0$ — противоречие.

2. Существование.

Пусть $E = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0, t^n < x\}$

$0 \in E \Rightarrow E \neq \varnothing$

Положим $t_0 = 1 + x, t_0^n = (1+x)^n$

$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = 1 + nx + \underbrace{\ldots}_{>0} > x \Rightarrow E$ — ограничено сверху.

Пусть $y = \sup E$ (она существует по теореме о Существовании супремума).

- Допустим, что $y^n < x$. Возьмем $h : 0 < h < 1$ и $h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}$

  Тогда

$$(y+h)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k y^{n-k} h^k =$$

$$= y^n + \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^k =$$

$$= y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^{k-1} < y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} =$$

$$= y^n + h \cdot ((1+y)^n - y^n) < (y+1)^n - y^n < y^n + x - y^n = x$$

  — y не вехрняя граница.

- Допустим, что $y^n > x$. Возьмем $k: 0 < k < 1$, $k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$ и $k < y$. Тогда аналогично с $y^n < x$ получаем, что $y - k$ — верхняя граница E, что противоречит тому, что $y = \sup E$.

Значит $y^n = x$.

□

Лекция 3: Степень, логарифм, десятичные дроби. Последовательности.

28.09.2023

2.2 Неравенство Бернулли

Теорема 16 (Неравенство Бернулли). Пусть $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$ неравенство очевидно. Пусть оно верно для $n = k$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку $kx^2 \geq 0$. □

2.3 Определение степени и логарифма

Определение 16. Пусть $a > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0; r = \frac{n}{m}$. Тогда
$a^r = (a^{\frac{1}{m}})^n$.
Если $m > 0$, то: $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m}$
Если $m < 0$, то $a^m = \frac{1}{a^{|m|}}$.

Определение 17. Пусть $p \in \mathbb{Q}, p \neq 0, a > 1$
Тогда $a^p = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \neq 0, r < p\}$
$a^0 = 1$

Определение 18. Пусть $a > 1, \alpha \in \mathbb{R}$
$E = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < \alpha, r \neq 0\}$
Тогда $\sup E = a^\alpha$.
И $\forall a \in \mathbb{R} : 0 < a < 1 : a^\alpha = (\frac{1}{a})^{-\alpha}$

Определение 19. Пусть $a > 0, a \neq 0, x > 0$. Тогда
Если $a > 1 : \log_a x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : a^r < x\}$.
Если $0 < a < 1 : \log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$

Теорема 17. (Без доказательства) Для степени и логарифма справедливы все ранее встречавшиеся свойства. (имеется в виду школьный курс)

Глава 3

Последовательности

Определение 20. Пусть X — множество, $X \neq \varnothing$. Тогда последовательностью элементов множества X называется функция $f : \mathbb{N} \to X$.

$x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots ; x_n \in X$ Последовательность — $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

3.1 Сопоставление вещественным числам десятичных дробей

Алгоритм. (Построение дроби по числу)

Рассматриваем только $x > 0, x \in \mathbb{R}$

Возьмем $n_0 \in \mathbb{Z}_+ : n_0 \leq x, n_0$ — максимальное число с таким свойством.

- Если $n_0 = x$ — алгоритм закончен.
- Если $n_0 < x$ — продолжаем: выбираем $n_1 \in \mathbb{Z} : n_0 + \frac{n_1}{10} \leq x$

Аналогично с n_0, проверяем равенство с x. Так вплоть до n_k:

$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} \leq x$

Если ни на одном шаге равенство не выполняется, то задаем последовательность:

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = n_0, \frac{n_1}{10}, \frac{n_2}{10^2}, \ldots$

Теорема 18. (О супремуме десятичных дробей) Рассмотрим $E = \{r : r = \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k}, k \in \mathbb{N}\}$

Тогда $\sup E = x$ (из алгоритма).

Доказательство. Так как $n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} < x$, то $\sup E \leq x$

Предположим, что $\sup E < x$. Тогда $\exists r : r = x - \sup E > 0$.

Выберем такое k, что $\frac{1}{k^9} < r \Leftrightarrow k > \frac{1}{r^9}$.

$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} < x < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k+1}{10^k} \Rightarrow$

$\Rightarrow n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} > x - \frac{1}{10^k} > x - \frac{1}{9^k} > x - r = \sup E$, значит

$x = \sup E$ $\square$

Лемма 1. (доказать самостоятельно) Пусть есть $E \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, E_a = \{x + a : x \in E\}$

Тогда $\sup E_a = a + \sup E$

Дальше шла какая-то теорема, смысл которой я не понял. Если найдете адекватную запись или сможете объяснить — пишите $\odot \smile \odot$

3.2 Предел последовательности

Определение 21. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Тогда $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности, если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$.

Замечание. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : |z - x| \leq |z - y| + |y - x|$

Определение 22. Пусть X — множество, функция ρ: $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$

X — метрическое пространство, если: $\forall a, b \in X : \rho(a, b) \geq 0$

И выполнены следующие свойства:

1. $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$
3. $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b)$

Тогда ρ — метрика X.

Пример. $\mathbb{R}$ — метрическое пространство, $\rho(x, y) = |x - y|$

Определение 23. Пусть X — метрическое пространство, $a \in X$, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, x_n \in X$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < \varepsilon$

Теорема 19. (Единственность предела) Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$, то $a = b$

Доказательство. Пусть $a \neq b$. Тогда $\delta = \rho(a, b) > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$.

1. Так как $\underset{n \to \infty}{x_n} \to a : \exists N_1 : \forall n > N_1 : \rho(x_n, a) < \varepsilon$
2. И так как $\underset{n \to \infty}{x_n} \to b : \exists N_2 : \forall n > N_2 : \rho(x_n, b) < \varepsilon$.

Пусть $n = N_1 + N_2 + 1$. Тогда для n выполнены (1) и (2)

Имеем $0 < \delta = \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{\delta}{2}$ — противоречие. □

Теорема 20. (Ограниченность сходящейся последовательности) X — метрическое пространство с метрикой ρ

$x_n \in X, a \in X$ Пусть $\underset{n\to\infty}{x_n} \to a$. Тогда $\exists\ R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, a) < R$

Доказательство. Возьмем

$\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < 1$ (1)

Определим R как $R = \max(\rho(x_1, a)+1, \rho(x_2, a)+1, \ldots, \rho(x_N, a)+1, 1)$ (2)

Тогда:

- если $n > N$, то из (1) следует (2), значит $R \geq 1$
- если $1 \leq n \leq N$, то $R \geq \rho(x_n, a)$

В обоих случаях R удовлетворяет условию теоремы. □

3.3 Арифметические операции над пределами

Свойства. Для $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b, c \in \mathbb{R}$ справедливы следующие свойства:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
2. $c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c \cdot a$
3. $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\to} a + b$
4. $x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\to} a \cdot b$

Доказательство.

1. $\forall \varepsilon > 0, \forall n > 1 : |x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |cx_n - ca| = |c(x_n - a)| = |c||x_n - a| < |c|\varepsilon$
3. $\begin{cases} \forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon_1 \\ \forall \varepsilon_2 > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \varepsilon_2 \end{cases} \Rightarrow$ при $n > N_1 + N_2 + 1 :$ $|x_n + y_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$
4. Аналогично (3) при $n > N_1 + N_2 + 1 : |x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b|$

   т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\exists R : \forall n : |y_n| \leq R$ (из предыдущей теоремы)

   Тогда $|x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| < \varepsilon_1 R + |a|\varepsilon_2$

□

Лекция 4: Продолжение

27.09.2023

Свойства. (Продолжение)

5 $x_n \neq c \, \forall n, x_n \to a, a \neq 0 => \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

6 $\begin{cases} x_n \to a \text{из п. 5} \\ y_n \to b \end{cases} \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \to \frac{a}{b}$

7 $x_n \leq y_n \forall n, x_n \to a, y_n b \Rightarrow a \leq b$

Доказательство. (5, 6, 7)

5 I. Возьмем $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$, тогда:
$\exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon_0 \Rightarrow |x_n| \geq |a| - |x_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$

II. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon$

$N_0 = max(N_1, N)$. При $n > N_0$ получаем:
$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| = |\frac{a - x_n}{x_n \cdot a}| = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot |x_n - a| \underset{(I),(II)}{<} \frac{1}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} \cdot \varepsilon$

6 $\frac{y_n}{x_n} = y_n \cdot \frac{1}{x_n}$ — далее по п. (4), (5).

7 Предположим, что $a > b$. Тогда $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon_0 \\ \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \varepsilon_0 \end{cases} \Rightarrow$
$\forall n > N_1 + N_2 + 1 : y_n < \varepsilon_0 + b = b + \frac{a-b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon_0 < x_n \Rightarrow y_n < x_n$ — противоречие с условием.

□

Замечание. (Различные промежутки)

1. $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток)
2. $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ — замкнутный промежуток
3. $[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$ — полуоткрытый промежуток
4. $(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$ — полуоткрытый промежуток

3.4 Расширенное множество вещественных чисел

Определение 24. $\overline{R} = R \cup \{+\infty, -\infty\}$ — расширенное множество вещественных чисел. При этом:
$\forall x \in \mathbb{R} : x < +\infty, x > -\infty$

Замечание. (Еще промежутки)

1. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
2. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
3. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
4. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

Свойства. (Продолжение свойств пределов)

$$8 \begin{cases} \forall n : x_n \leq y_n \leq z_n \\ x_n \to a \\ z_n \to a \end{cases} \Rightarrow y_n \to a \text{ — теорема о двух миллионерах}$$

Доказательство. $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n > N_2 : |z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow z \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$

$\forall n > max(N_1, N_2) :$

$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$

□

3.5 Бесконечные пределы

Определение 25. (Бесконечные пределы)

- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to \infty$, $n \to \infty$

  $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$, если:

  $\forall L \in \mathbb{R}\ \exists N : \forall n > N : x_n > L$

- $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y_n \to -\infty$, $n \to \infty$

  $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = -\infty$, если:

  $\forall L \in \mathbb{R} :\ \exists N : \forall n > N : y_n < L$

  (возможно сокращение записи n-> далее.)

3.6 Единообразная запись определения пределов

Определение 26. Окрестостью вещественного числа a называется любой интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ (обозначается как $\omega(a)$).

Определение 27. Окрестность $+\infty : (L, +\infty), L \in \mathbb{R}$
Окрестность $-\infty : (-\infty, L), L \in \mathbb{R}$

Определение 28. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $x_n \to a$, если:
$\forall \omega(\alpha): \ \exists N : \forall n > N : x_n \in \omega(\alpha)$

Свойства. (Доказать самостоятельно)
Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a \to +\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, b \to -\infty$, тогда:

1. $c > 0 : ca_n \to +\infty, cb_n \to -\infty$
   $c < 0 : ca_n \to -\infty, cb_n \to +\infty$
2. $x_n \to x, x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Rightarrow a_n + x_n \to +\infty$
   $y_n \to y, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \Rightarrow b_n + y_n \to -\infty$
3. Возьмем x_n, y_n из п. (2), тогда:
   $x > 0 \Rightarrow a_n x_n \to +\infty, b_n x_n \to -\infty$
   $y < 0 \Rightarrow a_n y_n \to -\infty, b_n y_n \to +\infty$
4. Если $\forall n : a_n \neq 0, b_n \neq 0$, тогда:
   $\dfrac{1}{a_n} \to 0$
   $\dfrac{1}{b_n} \to 0$
   Если $x_n > 0, x_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} \to +\infty$
   Если $x_n < 0, x_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} \to -\infty$
5. $\forall n : x_n \leq y_n, x \to \alpha, y_n \to \beta; \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \alpha \leq \beta$
6. $\begin{cases} \forall n : x_n \leq y_n \leq z_n \\ x_n \to \alpha, \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \\ z_n \to \alpha \end{cases} \Rightarrow y_n \to \alpha$

Замечание. $+\infty = +\infty$
$-\infty = -\infty$
$-\infty < +\infty$

Доказательство. (2, 6)

2 $\begin{cases} x \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists M : \forall n : |x_n - x| < M \Rightarrow x_n > x - M \\ \forall L \in \overline{\mathbb{R}} : \exists N : \forall n > N : a_n > L \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n + x_n > L + x - M$, где правая часть — любое число.

6 $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n > N_2 : z_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$
$N_0 = max(N_1, N_2)$

$$\forall n > N_0 : x_n \le y_n \le z_n \Rightarrow y_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

$\square$

3.7 Асимптотика

Определение 29. (О-большая и о-малая)

1. $x_n = o(1)$, если $x_n \to 0$
2. $y_n = O(1)$, если $\exists C : \forall n : |y_n| \le C$
3. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n : b_n \neq 0$, тогда:
   $a_n = o(b_n)$, если $\frac{a_n}{b_n} \to 0$
4. Пусть есть $\{c_n\}, \{d_n\}$, тогда:
   $c_n = O(d_n)$, если $\exists C : |c_n| \le C|d_n|$

Замечание. Это не равенство в привычном смысле, следует читать его только слева направо.

3.8 Монотонные последовательности

Определение 30. (монотонные последовательности)

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастает, если $\forall n : a_n \le a_{n+1}$ (возрастает строго если $a_n < a_{n+1}$)
- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает, если $\forall n : b_n \le b_{n+1}$

Замечание. Говорят, что поледовательнотсть c_n монотонна, если она либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает.

Теорема 21. (Теорема о пределе монотонной последовательности)

- Пусть есть последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Для того, чтобы монотонно возрастающая последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы последовательность была ограничена сверху.
- Для того, чтобы монотонно убывающая последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно, чтобы последовательность была ограничена снизу.

При этом справелдивы неравенства:

- $\forall m: c_m \leq \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ — если последовательность возрастает. (или $<$ если строго возрастает)
- $\forall m: c_m \geq \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ — если последовательность убывает.

Доказательство. 1. Предположим, что проследовательность c_n не ограничена сверху, тогда:

$\forall L \in \mathbb{R}: \exists N: c_N > L$

$\forall n > N: c_n \geq c_{n-1} \geq c_{n-2} \geq ... \geq c_N + 1 \geq c_N > L$, значит $c_n > L$

Значит по определению предела: $\lim c_n = +\infty$

2. Предположим теперь, что последовательность c_n возрастает и ограничена сверху, тогда:

$\begin{cases} c_n \leq c_{n+1} \\ \exists M: \forall n: c_n \leq M \end{cases}$

Пусть $E = \{\alpha \in \mathbb{R}: \exists n \in \mathbb{N}: \alpha = c_n\}$ — множество из всех элементов последовательности c_n.

Значит E — ограничено сверху. Положим $C = \sup E$, тогда имеем $\forall n: c_n \leq C$

$\forall \varepsilon > 0: C - \varepsilon$ — не верхняя граница, значит $\exists N: c_N > C - \varepsilon \Rightarrow \forall n > N: c_n \geq c_{n-1} \geq \ldots \geq c_N > C - \varepsilon \Rightarrow C - \varepsilon < c_n \leq C < C + \varepsilon \Rightarrow |c_n - C| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = C$

В обратную сторону: если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = C \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M: \forall n: |c_n - C| < M \Rightarrow \forall n: c_n \leq C + M$

3. Доказательство для убывающей последовательности аналогично.

$\square$

Теорема 22. (Теорема о вложенных промежутках)
Пусть $\forall n: [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ и $b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
Тогда $\exists! c: \forall n: c \in [a_n, b_n]$

Доказательство. 1. существование

имеем неравенства:

$$\forall n: \begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \\ b_n \geq b_{n+1} \\ a_n < b_n \end{cases} \Rightarrow a_n < b_1, b_n > a_1$$

Тогда в силу возрастания a_n и убывания b_n по предыдущей теореме $\exists a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\exists b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

По свойству перехода к пределу в неравенствах: $a_n < b_n \Rightarrow a \leq b$

Имеем $\begin{cases}\forall n : a_n \geq a \\ \forall n : b \leq b_n\end{cases} \Rightarrow \forall n : b - a \leq b_n - a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty}(b-a) \leq \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ — в силу условия.

Значит $b - a = 0 \Rightarrow a = b \overset{def}{=} c$

Имеем $a_n \leq c \leq b_n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$

2. Единственность

   Если бы $\exists c_0 \in [a_n, b_n]$, то $|c_0 - c| \leq b_n - a_n \Rightarrow |c_0 - c| < \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow c_0 = c$

□

Замечание. Условие замкнутости промежутков существенно:
Имеем $(0, \frac{1}{n+1}] \supset (0, \frac{1}{n}]$, $\frac{1}{n} - 0 \underset{n\to\infty}{\to} 0$
Но $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n}] = \varnothing$

3.9 Число e

Теорема 23. Пусть $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ и $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$
Тогда $\forall n : x_n < y_n$ и $x_n \to e, y_n \to e, 2 < e < 3$

Доказательство. Рассмотрим:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^{n+1} \cdot (\frac{n}{n-1})^n = (\frac{n}{n+1})^n \cdot (\frac{n}{n+1})^n \cdot (\frac{n}{n-1})^n =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2-1+1}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n$$

Возьмем за $x = \frac{1}{n^2-1}$, тогда по неравенству Бернулли:

$$\frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n > \frac{1}{n+1} \cdot (1 + \frac{n}{n^2-1}) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^2-1+n}{n^2-1} =$$

$$\frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$$

$\Rightarrow y_n < y_{n-1} \Rightarrow y_n$ — строго монотонно убывающая.

Теперь рассмотрим x_n : (считаем, что $n \geq 3$)

$$x_n = (1+\frac{1}{n}^n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\frac{1}{n})^k = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{k!\cdot n^k} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\cdot(1-\frac{k-1}{n})\cdot(1-\frac{k-2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n})$$

(Продолжение на следующей лекции) □

Лекция 5: Продолжение

05.10.2023

Доказательство. (Продолжение доказательства)

$$x_{n+1} = 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{k-1}{n+1})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{n}{n+1})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n+1}) \quad (2)$$

$$\forall r>0: 1-\frac{r}{n+1} > 1-\frac{r}{n} \Rightarrow (1-\frac{k-1}{n+1})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n+1}) > (1-\frac{k-1}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n}) \quad (1)$$

$(1),(2) \Rightarrow x_{n+1} > x_n$

Примем во внимание неравенства для y_n и неравенства для x_n. Тогда мы будем иметь следующее неравенство:

$$\Rightarrow x_1 < x_2 < \cdots < x_n < y_n < y_{n-1} < \cdots < y_1 \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow x_n < y_1, y_n > x, \forall n \quad (5)$$

Последовательность x_n строго возрастает и ограниченна сверху. Мы можем применить критерий существования конечного предела у строго монотонной возрастающей последовательности.

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Если мы посмотрим на последовательность y_n, она ограничена снизу в отношении пять и мы знаем что она строго монотонно убвает. По теореме о предельной последовательности получаем, что:

$$\exists \lim_{n\ to\infty} y_n = b$$

Теперь,

$$b = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 1+\cdot\lim_{n\to\infty}x_n = a$$

Таким образом,

$$a = b = e \tag{6}$$

.

$$(6) \Rightarrow x_n < e < y_n \forall n \tag{7}$$

$$(7) \Rightarrow e > x_1 = 2, e < y_5 < 3$$

$$y_5 = (\frac{6}{5})^6$$

$$e = 2.718...$$

□

Замечание. Число e — одно из фундаментальных констант на которой держится вся математика.

Первые две - это 0 и 1. А третья — это π

3.10 Критерий Коши, существование конечного предела последовательности

Теорема 24. Пусть имеется некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для того чтобы $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0, \exists N : \forall m, \forall n > N$:

$$|x_m - x_m| < \varepsilon \tag{8}$$

Замечание. В формулировке не сказано чему будет равен этот предел. Какой именно он будет - неизвесто. Известно только то что он существует. Это так называемая теорема существования.

Примечание. Необходимость означает что предел существует.

Доказательство. Докажем необходимость. Предположим, что

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \in \mathbb{R}$$

Тогда, по определению предела для любого $\varepsilon > 0\exists N$ такой, что $\forall n > N$ выполнено

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

Тогда,

$$(9) \Rightarrow \text{при } n > N, m > N$$

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow (8)$$

То-есть, необходимость доказана. Если конечный предел существует, то соотношение 8 выполнено.

Теперь докажем достаточность.

Когда мы будем доказывать достаточность, то мы не знаем, существует предел или нет.

> **Замечание.** Не каждая последователность имеет предел (например, $x_n = -1^n$).

Для доказательства мы будем использовать теорему Дедекинда.

Определим сечение множества вещественных чисел.

Нижний класс A — это

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists N : \forall n > N : x_n > \alpha\} \tag{10}$$

Верхний класс A‘’ — это

$$A' = \mathbb{R} \setminus A \tag{10'}$$

Множества, получившиеся в (10) и (10’) - это сечения, и это нужно проверить.

- Возьмём $\varepsilon = 1$, тогда: $\exists N_0 : \forall m, n > N_0 : |x_m - x_n| < 1$

  В частности, при $m = N + 1$ и при $n > N + 1$ имеем

$$|x_n - x_{N+1}| < 1 \Leftrightarrow x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1 \tag{11}$$

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} - 1 \in A \tag{12}$$

  С другой стороны,

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} + 1 \notin A, \text{ то-есть, } x_{N+1} + 1 \in A' \tag{13}$$

$$(12), (13) \Rightarrow A \neq \varnothing, A' \neq \varnothing$$

- Никакое из них не может быть множеством вещественных чисел.

  Давайте возьмём $\forall\alpha \in A, \forall\beta \in A'$. Нужно доказать, что α всегда меньше β. В этом состоит условие определения сечения.

$$\alpha \in A = (10) > \exists N : \forall n > N x_n > \alpha \tag{14}$$

Если бы для любого $\forall n > N$ выполнялось $x_n > \beta$, то $\beta \in A$. Однако, это не так, т.к. $\beta \in A'$.

То-есть,

$$\exists n_0 > N : x_{n_0} \leq \beta \tag{15}$$

Примечание. Если бы всё время неравенство было в другую сторону ($x_n > \beta$), тогда бы по определению (10), мы бы получили, что $\beta \in A$, но мы взяли $\beta \in A'$, то есть $\beta \notin A$, значит свойства выше выполнятся не может и выполняется свойство (15).

$$(14), (15) \Rightarrow \alpha \leq x_{n_0} \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta$$

То-есть, мы действительно получили сечение.

Теперь можно применить теорему Дедекинда. По теореме Дедекинда:

$$\exists a \in R : \forall \alpha \in A, \forall \beta \in A' : \alpha < a < \beta \tag{16}$$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$, тогда:

$$(8) \Rightarrow \exists N \text{ такое, что выполнено } (8)$$

$m = N + 1$
Тогда, $(8) \Rightarrow \forall n > N + 1$

$$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x_{N+1} - \varepsilon, x_{N+1} + \varepsilon) \tag{17}$$

Теперь, если посмотреть на соотношение (17),

$$(17) \Leftrightarrow x_n > x_{N+1} - \varepsilon \text{ и } x_n < x_{N+1} + \varepsilon \tag{18}$$

Примечание. при $\forall n > N + 1$, выполнена правая счасть неравенства (17) $x_n > x_{N+1} - \varepsilon$.

Теперь рассмотрим (10) и (18).

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \in A \tag{19}$$

Теперь обратимся ко второму неравенству в соотношении (18).

Получается, что правая часть неравенства $x_n < x_{N+1}$ принадлежит A', потому что если бы принадлежало A, должно было бы быть другое неравенство в другую сторону

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon \in A' \tag{20}$$

Возьмём $(19) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon$ как α,
а $(20) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon$ как β,
Тогда, применяем (16), получаем что:

$$(16), (19), (20) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \le a \le x_{N+1} + \varepsilon \quad (21)$$

Обратимся к соотношению (17)

$$(17) : x_{N+1} < x_n < x_{N+1} + \varepsilon$$

Получаем, что a удовлетворяет этому неравенству и x_n удовлетворяет этому неравенству (лежит на промежутке) при $\forall n > N + 1$.

Поэтому, (21) и (17) $\Rightarrow$

$$|x_n - a| < 2\varepsilon = (x_{N+1} + \varepsilon) - (x_{N+1} - \varepsilon) \quad (22)$$

Примечание. То-есть, если x_n и a лежат на этом промежутке, то длина отрезка между a и x_n меньше чем длина промежутка, на котором они лежат. Длина промежутка равна 2ε

Мы получили, что существует некоторое a такое, что для любого n > N+1 выполняется неравенство (22). А это определение предела.

По определению предела,

$$(22) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Тем самым, достаточность в критерии доказана.

□

3.11 Подпоследовательности

Определение 31. Пусть есть отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и нетождественное отображение $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. При этом выполняется: $\forall n < m : g(n) < g(m)$

Тогда последовательность отображений $f(g) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — подпоследовательность.

Примечание. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Берем $g(1) = n_1, g(2) = n_2, \ldots, g(k) = n_k$ и получаем подпоследовательность:

$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$

Обозначение. Если эти номера определены, то последовательность обозначают как: $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

Определение 32. Предел последовательности определяется как предел подпоследовательности по нижним индексам.

Если есть такая последовательность, говорят что:

$A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом, то есть $x_{n_k} \to A$, при $k \to \infty$, если $\forall \Omega(A)\, \exists K : \forall k > K : x_{n_k} \in \Omega(A)$

Теорема 25. Пусть $x_n \to A$, при $n \to \infty$, где $A \in \overline{\mathbb{R}}$ и пусть мы имеем любую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, выбранную из этой последовательности.

Тогда $x_{n_k} \to A$, при $k \to \infty$.

Доказательство. Возьмём любую окрестность A.

$$\forall \Omega(A) \Rightarrow \exists N : \forall n > N : x_n \in \Omega(A)$$

Воспользуемся тем, что поледовательность n_k строго возрастает:

$$n_1 \geq 1, n_2 > n_1, n_2 \geq 2$$

Тогда по индукции:

$$n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > n_k \geq k \to n_{k+1} > k + 1$$

То есть, если мы выберем подпоследовательность, то n_k будет больше или равно k. Начиная с какого-то индекса, будет строго больше.

Возьмём $k = N$.

Тогда, при $k > N : n_k \geq k > N$

То есть, при $k > N : x_{n_k} \in \Omega(A)$

$$\Rightarrow x_{n_k} \to A, \text{ при } k \to \infty$$

□

Теорема 26. (Больцано-Вейерштрасса)

Пусть имеется некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая ограничена, т.е. $\forall n : a \leq x_n \leq b$.

Тогда: $\exists \alpha \in [a, b]$ и $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что: $x_{n_k} \to \alpha$ при $k \to \infty$

Замечание. Такое α может быть только одним, если последовательность ограниченна и имеет некоторый предел.

Доказательство. определим последовательность промежутков.

$$I_1 = [a, b]$$

$$I_2' = [a, \frac{a+b}{2}], I_2'' = [\frac{a+b}{2}, b]$$

Рассмотрим множества номеров n:

$$\begin{cases} \text{таких, что } : x_n \in I_2' \\ \text{таких, что } : x_n \in I_2'' \end{cases} \text{— какое-то из них, или оба бесконечны}$$

Если бы первое и второе множество n выше было конечно, то мы получили бы, что последователность, лежащая в I_1 конечна, что противоречит условию. Тогда возьмем I_2 — одно из множеств из I_1', I_2''

Примечание. Это может быть либо I_1', либо I_2', либо I_2'' если оба удовлетворяем, то любой возьмем. Произвольно. Можно например всегда брать только I_2', но по крайней мере для одного, таких номеров будет бесконечно много.

Имеется некоторое множество натуральных чисел, таких что x_n принадлежит I_2

Пусть n_1 - минимальное $n : x_n \in I_2$

Возьмем $I_2 = [a_2, b_2]$ и поделим этот отрезок на:

$I_3' = [a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

$I_3'' = [\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

По крайней мере в одном из этих отрезков тоже будет находится бесконечное множество номеров n.

Пусть I_3 - тот из I_3', I_3'', для которого $\exists$ бесконечно n таких что $x_n \in I_3$

n_2 - минимальное n такое, что $x_n \in I_3$, и $n_2 > n_1$.

И так далее по индукции. Предположим, что мы уже выбрали промежутки

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_m \tag{3'}$$

$$I_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\frac{b-a}{2^k}}_{=I_k}) \tag{3'}$$

$$n_1 < n_2 < \dots n_m < n_{m+1} \tag{4}$$

$$x_{n_1} \in I_2, x_{n_2} \in I_2, \dots x_{n_{m-1}} \in I_m \tag{5}$$

Предположим, что по индукции такое построение уже произошло

Пусть

$$I_m = [a_m, b_m] \tag{6}$$

Существует бесконечно много n, таких что

$$x_n \in I_m \tag{7}$$

Предположим, что это проделано для n и будем выполнять индукционный шаг.

$$I'_{m+1} = [a_m, \frac{a_m + b_m}{2}]$$

$$I''_{m+1} = [\frac{a_m + b_m}{2}, b_m]$$

Мы снова взяли и разделили промежуток $[a_m, b_m]$ пополам.

Рассмотрим множество номеров в множестве n таких, что $x_n \in I'_{m+1}$ и n такие что $x_n \in I''_{m+1}$

Тогда по определению I_{m+1} - тот из I'_m, I''_m, для которого $\exists$ бесконечно много n таких что $x_n \in I_{m+1}$

Пускай n_{m+1} - это наименьшее n такое что $x_{n_m} \in I_{m+1}$ и $n_{m+1} > n_m$

И так мы получили в итоге этих рассуждений:

$$n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$$

$$x_{n_m} \in I_{m+1}$$

$$(3) \Rightarrow \text{ длина } I_m \to 0, \text{ при } m \to \infty \tag{8}$$

Получается, что это вложенные промежутки.
По теореме о вложенных промежутках:

$$\exists! \ \alpha \text{ такое что } \alpha \in I_m \forall m \tag{9}$$

$$(5) \Rightarrow x_{n_m} \in I_{m+1}$$

Точка α лежит на этом промежутке и точка с номером x_{n_m} лежит на этом же промежутке, справедливо неравенство:

$$|x_{n_m} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^m} \tag{10}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists k : \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \tag{11}$$

$$(10), (11) \Rightarrow |x_{n_m} - \alpha| < \varepsilon \text{ при } m > k$$

Таким образом мы доказали, что существует подпоследовательность у которой есть конечный предел.
$a \in I_1$, т.е. $a \leq \alpha \leq \varepsilon$ □

3.12 Верхний и нижний предел последовательности

Определение 33. Пусть есть произвольная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху, то верхний предел

$$\varlimsup_{n\to\infty} := +\infty$$

.

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху, то верхний предел

$$\varlimsup_{n\to\infty} := \lim_{n\to\infty} (\sup\{x_m : m \geq n\})$$

.

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена снизу, то нижний предел

$$\varliminf_{n\to\infty} := -\infty$$

.

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу, то нижний предел

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} := \lim_{n\to\infty}(\inf\{x_m : m \geq n\})$$

.

Таким образом,если мы рассматриваем любую последовательность x_n, то у неё существуют верхний и нижний предел.

Замечание. Нижний и верхний пределы в дальнейшем будут обозначаться как $\liminf$ и $\limsup$ соответственно. (простите, так удобней)

3.13 Свойства верхних и нижних пределов

Замечание. Пусть есть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определим E_n как множество $\{x_m : m \geq n\}, h_n = \inf E_n, g_n = \sup E_n$. Справедливо неравенство:

$$h_n \leq g_n, \text{ откуда получаем: } \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

Теорема 27. Есть некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда:

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{R} \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n \tag{13}$$

Доказательство. Предположим, что существует предел. Хотим проверить, что верхний предел равен нижнему пределу.

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$$

Посмотрим на определение g_n и h_n.

$$(14) \Rightarrow \text{ при } n > N : E_n \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup x_n - \liminf x_n \leq 2\varepsilon \tag{15}$$

Получается, что некоторое не отрицательное число не превосходит 2ε при любом положительном ε. Это может быть только тогда, когда это число равно 0.

$$(15) \Rightarrow limsup x_n = \liminf x_n = \lim x_n$$

В обратную сторону:
$\forall n : g_n \leq a, h_n \geq a$
Рассмотрим последовательности g_n, h_n, такие, что:

$$g_n \to a, h_n \to a$$

По определенеию предела: $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 : a - \varepsilon < g_n < a + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 : a - \varepsilon < h_n < a + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$
$a - \varepsilon < \inf E_n \leq \sup E_n < a + \varepsilon$

При $N = \max(N_1, N_2)$ из этого следует, что $\forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$

а это значит, что: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \limsup x_n = \liminf x_n$

□

Лекция 6: Верхний и нижний пределы. Предел функции.

12.10.2023

Теорема 28. (свойства пределов) Пусть есть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\exists N : \forall n > N : a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon \tag{1}$$

$$\forall N \exists n > N : a_n > \limsup_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \tag{2}$$

$$\exists N_2 : \forall n > N_2 : a_n > \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \tag{3}$$

$$\forall N_3 \exists n > N_3 : a_n < \liminf_{n\to\infty} a_n + \varepsilon \tag{4}$$

Доказательство. (Все пределы при $n \to \infty$)

Докажем только (1) и (2), другие свойства доказываются аналогично.

1. Возьмем $E_n = \{a_n : m \geq n\}$ и $g_n = \sup E_n$.
   Тогда $\limsup a_n = \lim g_n$, и $\forall n : a_n \leq g_n$.
   При этом $\exists N : \forall n > N : g_n < g_n + \varepsilon$
   Имеем $\forall n > N : a_n \leq g_n < g_n + \varepsilon = \limsup a_n + \varepsilon$
2. Имеем $g_N = \sup E_N$ и $g_{N+1} \geq g_N$,
   значит $\exists a_n \in E_{N+1} : a_n \geq g_n > g_n - \varepsilon \Rightarrow$
   $\Rightarrow a_n > \limsup a_n - \varepsilon$

□

Свойства. (Без доказательств)

Пусть есть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда:

$$\exists\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} \limsup a_n$$

$$\exists\{a_{n_l}\}_{l=1}^{\infty} : a_{n_l} \underset{l\to\infty}{\to} \liminf a_n$$

Теорема 29. (Последнее свойство) Пусть есть подпоследовательность

$$\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} : \exists \lim_{m\to\infty} a_{n_m} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{m\to\infty} a_{n_m} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Доказательство. Пусть $h_n = \inf E_n, g_n = \sup E_n$. Имеем неравенство:

$$h_{n_m} \leq a_{n_m} \leq g_{n_m} \Rightarrow \lim_{m\to\infty} h_{n_m} \leq \lim_{m\to\infty} a_{n_m} \leq \lim_{m\to\infty} g_{n_m}$$

.

В силу существования пределов у последовательностей g_n, h_n имеем:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{m\to\infty} a_{n_m} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

□

Глава 4

Функции. Предел функции, монотонность, непрерывность

4.1 Предел функции

Определение 34. Пусть X — метрическтое простанство с метрикой ρ, $\alpha \in X$. Окрестностью точки α называется:
$\omega(\alpha) = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 : \rho(x, \alpha) < \varepsilon\}$

Определение 35. α — точка сгущения множества X, если:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_1 \in X : x_1 \neq \alpha \wedge \rho(x_1, \alpha) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \omega(\alpha) \; \exists x_1 \in \omega(\alpha), x_1 \neq \alpha$

Определение 36. α — точка сгущения для $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, если:
$\forall \omega(\alpha) \; \exists b \in (E \cap \omega(\alpha)), b \neq \alpha$

Пример. $E = \mathbb{N}, +\infty$ — точка сгущения для E.

Теорема 30. Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ, $\alpha \in X$ — точка сгущения, тогда:

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha, \; \forall x_n : x_n \neq \alpha, x_n \in X$$

Доказательство. Возьмем $x_1 \neq \alpha$, пусть $\varepsilon_1 = \rho(x_1, \alpha) > 0$. $\exists x_2 \neq \alpha : \rho(x_2, \alpha) < \frac{1}{2}\varepsilon_1$. Положим $\varepsilon_2 = \rho(x_2, \varepsilon)$.

Пусть уже выбрали выбрали $x_1, \ldots, x_n$ так, что $x_k \neq \alpha, 2 \leq k \leq n, \varepsilon_k = \rho(x_k, \alpha) < \frac{1}{2}\varepsilon_{k-1}$

Тогда $\exists x_{n+1} \neq \alpha : \rho(x_{n+1}, \alpha) < \frac{1}{2}\varepsilon_n$.

Имеем $\varepsilon_n < \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1} < \frac{1}{2^2}\varepsilon_{n-2} < \ldots < \frac{1}{2^{n-1}}\varepsilon_1$, т.е. $\rho(x_n, \alpha) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha$ □

Определение 37. (Предел функции) Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\rho, \alpha \in X$ — точка сгущения, определна функция $f : X \to \mathbb{R}$ и $A \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда:

$$f(x) \underset{x\to\alpha}{\to} A \Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha} f(x) = A, \text{ если выполнено:}$$

$$\forall\omega(A)\ \exists\Omega(\alpha) : \forall x \in \Omega(\alpha), x \neq \alpha : f(x) \in \omega(A)$$

Теорема 31. (единственность предела) Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\rho, \alpha \in X$ — точка сгущения, определна функция $f : X \to \mathbb{R}$. Тогда:

$$\exists! A \in \overline{\mathbb{R}} : \lim_{x\to\alpha} f(x) = A$$

Доказательство. Предположим, что есть $A, B \in \overline{\mathbb{R}}, B \neq A$ и
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = B$.
Тогда: $\exists\omega_1(A), \omega_2(B) : (\omega_1(A) \cap \omega_2(B)) = \varnothing$
А также: $\begin{cases} \exists\Omega_1(\alpha) : \forall x \in \Omega_1(\alpha) : f(x) \in \omega_1(A) \\ \exists\Omega_2(\alpha) : \forall x \in \Omega_2(\alpha) : f(x) \in \omega_2(B) \end{cases}$
Рассмотрим $\Omega(\alpha) = \Omega_1(\alpha) \cap \Omega_2(\alpha)$:
$\exists x \in \Omega(\alpha), x \neq \alpha : \begin{cases} f(x) \in \omega_1(A) \\ f(x) \in \omega_2(B) \end{cases}$ — противоречие, т.к. $\omega_1(A) \cap \omega_2(B) = \varnothing$. □

4.2 Односторонние пределы

Определение 38. Пусть есть $E = (p, q), p, q \in \mathbb{R}, a \in E, E_- = (p, a), E_+ = (a, q)$
А также определены функции:
$f : E \to \mathbb{R}$.
$f_- : E_- \to \mathbb{R}$, $f_-(x) = f(x)$, при $x \in E_-$
$f_+ : E_+ \to \mathbb{R}$, $f_+(x) = f(x)$, при $x \in E_+$
Тогда пределом справа функции f в точке a называется:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = c_+$$

А пределом слева функции f в точке a называется:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = c_-$$

Теорема 32. (обозначения из определения выше)

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x)$$

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$. Тогда:

$\forall\omega(c)\ \exists\Omega(a) : \forall x \in \Omega(a)\cap E, x \neq a : f(x) \in \omega(c)$

При этом $\begin{cases} \Omega(a)\cap E_+ \in \Omega(a)\cap E \\ \Omega(a)\cap E_- \in \Omega(a)\cap E \end{cases}$

Значит получаем $\begin{cases} \forall x \in \Omega(a)\cap E_+ : f(x) \in \omega(c) \\ \forall x \in \Omega(a)\cap E_- : f(x) \in \omega(c) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$

$\Leftarrow$: Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = c$. Тогда:

$\begin{cases} \forall\omega(c)\exists\Omega(a) : \forall x \in \Omega_1(a)\cap E_+, x \neq a : f(x) \in \omega(c) \\ \forall\omega(c)\exists\Omega(a) : \forall x \in \Omega_2(a)\cap E_-, x \neq a : f(x) \in \omega(c) \end{cases}$

Возьмем $\Omega(a) = \Omega_1(a)\cap\Omega_2(a)$

Имеем $((\Omega_1(a)\cap E_+)\setminus\{a\})\cup((\Omega_2(a)\cap E_-)\setminus\{a\}) = ((\Omega(a)\cap E)\setminus\{a\})$

Тогда справедливо: $\forall x \in \Omega(a)\cap E, x \neq a : f(x) \in \omega(c)$

$\square$

4.3 Существование предела

Теорема 33. (Соответствие предела функции пределу последовательности) Пусть есть X — метрическое пространство с метрикой $\rho, \alpha \in X$ — точка сгущения, определна функция $F : X \to \mathbb{R}$.

И пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}, a$ — точка сгущения, определена функция $f : E \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим последовательности:
$\{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}, x_n \to \alpha, \forall n : x_n \neq \alpha$
$\{f(b_n)\}_{n=1}^{\infty}, b_n \to a, \forall n : b_n \neq a$
Тогда:

$$\exists \lim_{x\to\alpha} F(x) = A \Leftrightarrow \forall\{x_n\} : F(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$$

$$\exists \lim_{b\to a} f(x) = c \Leftrightarrow \forall\{b_n\} : f(b_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$$

Доказательство. (Будем доказывать для метрического пространства, для множества E доказательство аналогично)

$\Rightarrow$: Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} F(x) = A$. Тогда:

$\forall\omega(A)\ \exists\Omega(\alpha) : \forall x \in \dot{\Omega}(\alpha) : F(x) \in \omega(A)$

Поскольку $x_n \to \alpha$, то $\exists N : \forall n > N : x_n \in \Omega(\alpha)$

Имеем, что $\forall n > N : F(x_n) \in \omega(A) \Rightarrow F(x_n) \to A$

$\Leftarrow$: Предположим, что $\forall\{x_n\} : F(x_n) \to A$ — неверно. Тогда:

$\exists\omega_0(A) : \forall\Omega_0(\alpha)\ \exists x \in \dot{\Omega}_0(\alpha) : F(x) \notin \omega_0(A)$

Будем брать $\Omega_{1/n}(\alpha) = \{x \in X : \rho(x,\alpha) < \frac{1}{n}\}$

$\exists x_n \in \ldots\Omega_{1/n}(\alpha) : F(x) \notin \omega_0(A)$

Это означает, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha \Rightarrow F(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$ — противоречие.

$\square$

4.4 Свойства пределов функции

Свойства. (обозначения как в теореме выше) Для метрического пространства и для множества E:

1. $F(x) \equiv A \Rightarrow F(x) \to A, A \in \overline{\mathbb{R}}$
2. $\lim qF(x) = q \lim F(x), q \in \mathbb{R}$
3. $\lim(F(x) + G(x)) = \lim F(x) + \lim G(x)$
4. $\lim(F(x) \cdot G(x)) = \lim F(x) \cdot \lim G(x)$
5. $\lim \frac{1}{F(x)} = \frac{1}{\lim F(x)}$, если $\lim F(x) \neq 0$
6. $\lim \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\lim F(x)}{\lim G(x)}$, если $\lim G(x) \neq 0$
7. $\forall x : F(x) \leq G(x) \Rightarrow \lim F(x) \leq \lim G(x)$
8. $F(x) \leq G(x) \leq H(x)$ и $\lim F(x) = \lim H(x) \Rightarrow \exists \lim G(x) = \lim F(x)$

UPD: для множества E свойства аналогичны.

Доказательство. Все эти свойства доказываются аналогично свойствам пределов последовательностей, так как была доказана теорема о соответствии предела функции пределу последовательности.

Докажем 5 свойство для метрического пространства:
Возьмем последовательность $\{x_n\}$ из теоремы.

По теореме: $F(x_n) \to A, A \neq 0$
Получаем, что $\forall n : F(x_n) \neq 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{F(x_n)} = \frac{1}{A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \alpha} \frac{1}{F(x)} = \frac{1}{A}$$

□

Лекция 7: Монотонность функции. Критерий Коши. Замечательные пределы.

19.10.2023

4.5 Монотонность функции

Определение 39. Пусть задана функция $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Функция называется (строго, если строгий знак) монотонно возрастающей, если:
$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
И (строго, если строгий знак) монотонно убывающей, если:
$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Замечание. Если функция монотонна, то она либо возрастающая, либо убывающая.

Теорема 34. Пусть a — точка сгущения множества E и $\forall x \in E : x < a$.
Задана функция $f : E \to \mathbb{R}$, f — монотонна, тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$
Если f — монотонно возрастающая, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in E : f(x) \leq M \tag{1}$$

Если f — монотонно убывающая, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in E : f(x) \geq M \tag{2}$$

Пусть $a_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ — точка сгущения множества E_1 и $\forall x \in E : x > a$.
Если f — монотонно возрастающая, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in E : f(x) \geq M \tag{3}$$

Если f — монотонно убывающая, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in E : f(x) \leq M \tag{4}$$

Доказательство. Докажем (1). Остальные доказываются аналогично.
Пусть $\nexists M$ из (1), тогда $\forall L > 0 :\ \exists x_0 \in E : f(x_0) > L \Rightarrow \forall x > x_0 : f(x) \geq f(x_0) > L \Rightarrow f(x) \underset{x \to \infty}{\to} +\infty$

Пусть $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in E : f(x) \le M$. Пусть $c = \sup\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in E : f(x) = y\}$. Тогда:

$c \le M, \forall x \in E : f(x) \le c$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$, тогда $\exists x_1 \in E : f(x_1) > c - \varepsilon$. Имеем неравенство:

$$c-\varepsilon < f(x_1) \le f(x) \le c < c+\varepsilon \Rightarrow f(x) \underset{x\to\infty}{\to} c, \text{ при этом } f(x) \le \lim_{x\to\infty} f(x)$$

□

4.6 Критерий Коши

Теорема 35. (Критерий Коши) Пусть есть множество $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — точка сгущения E. Тогда:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \omega(a) : \forall x_1, x_2 \in \dot{\omega}(a) \cap E : |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = c \in \mathbb{R}$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \omega(a) : \forall x \in \dot{\omega}(a) \cap E : |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$

Имеем, что $\forall x_1, x_2 \in \dot{\omega}(a) \cap E : |f(x_2) - f(x_1)| = |(f(x_2) - c) - (f(x_1) - c)| \le |f(x_2) - c| + |f(x_1) - c| < \varepsilon$

$\Leftarrow$: Возьмем $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in E, x_n \ne a, x_n \underset{x\to\infty}{\to} a$. Возьмем окрестность из условия, тогда:

$\exists N : \forall n > N : x_n \in \omega(a)$, значит, $\forall n, m > N, \varepsilon > 0 : |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ — выполнен критерий Коши для последовательностей. А значит:

$\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \in \mathbb{R}$ — необоходимо проверить, что все последовательности сходятся к c.

Предположим, что есть такая последовательность $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}, x'_n \in E, x'_n \ne a, x'_n \underset{x'\to\infty}{\to} a$, что $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = c' \ne c$

Тогда возьмем последовательность: $\begin{cases} \overline{x}_{2n-1} = x_n \\ \overline{x}_{2n} = x'_n \end{cases}$

$\overline{x}_n \to a \overline{x}_n \in E, \overline{x}_n \ne a$, тогда по критерию Коши $\lim_{n\to\infty} f(\overline{x}_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} f(\overline{x}_{2n}) = \overline{c}$, но $\lim_{n\to\infty} f(\overline{x}_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ — противоречие.

□

4.7 Некоторые существенные неравенства

Свойство. (неравенство для $\ln(1+x)$) Пусть $0 < x \le \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}, n \ge 2$. Тогда имеем неравенства:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \ge 1 \Leftrightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \tag{1}$$

$$\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \tag{2}$$

$$\frac{1}{x} - 1 < n \le \frac{1}{x} \tag{3}$$

$$(1),(2) \Rightarrow \ln(x+1) \le \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1-x}{x}} = \frac{x}{1-x} \tag{4}$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \ln(x+1) > \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+2} \ge \frac{1}{\frac{1}{x}+2} = \frac{x}{1+2x} \tag{5}$$

$$\text{т.е. при } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ имеем: } \frac{x}{1+2x} < \ln(1+x) < \frac{1}{1-x} \tag{6}$$

Пусть теперь $-\frac{1}{3} \le x < 0$ (7), $y > 0$ и выполнено $1 + x = \frac{1}{1+y}$ (8)

$$(7),(8) \Rightarrow 0 < y \le \frac{1}{2} \tag{9}$$

$$(6),(8),(9) \Rightarrow \ln(1+x) = \ln\left(\frac{1}{1+y}\right) = -\ln(1+y) < -\frac{1}{1+2y} = \frac{-\frac{x}{1+x}}{1-\frac{2x}{1+x}} = \frac{x}{1-x} \tag{10}$$

$$(10) \Rightarrow \ln(1+x) < \frac{x}{1-x} \tag{11}$$

$$(6),(8),(9) \Rightarrow \ln(1+x) = -\ln(1+y) > -\frac{y}{1-y} = \frac{-\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x} \tag{12}$$

$$(10),(12) \Rightarrow \frac{1}{1+2x} < \ln(1+x) < \frac{x}{1-x} \tag{13}$$

$$(6),(13) \Rightarrow \text{ при } -\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}, x \ne 0 : \frac{1}{1+2x} < \ln(1+x) < \frac{x}{1-x} \tag{14}$$

Замечание. (2 полезных неравенства (15))
при $x > 0 : \frac{1}{1+2x} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2}$
при $x < 0 : -\frac{1}{4} \le \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le x$

Свойство. (неравенство для экспоненты)

Возьмем $y = \ln(1+x)$, тогда $x = e^y - 1$:

$$(15) \Rightarrow \text{ при } y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right], y \neq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], x \neq 0 \tag{16}$$

$$\text{при } (16:)(13) \Leftrightarrow \frac{e^y - 1}{1 + 2(e^y - 1)} < y < \frac{e^y - 1}{1 - (e^y - 1)} \Leftrightarrow \frac{e^y - 1}{2e^y - 1} < y < \frac{e^y - 1}{-e^y + 2} \tag{17}$$

$$(17) \Rightarrow e^y - 1 > y(2 - e^y) \Leftrightarrow e^y(1 + y) > 1 + 2y \Leftrightarrow e^y > \frac{1 + 2y}{1 + y} \tag{18}$$

$$(17) \Rightarrow e^y - 1 < y(2e^y - 1) \Leftrightarrow e^y < \frac{1 - y}{1 - 2y} \tag{19}$$

$$(18), (19) \text{ при } y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right], y \neq 0 : \frac{1 + 2y}{1 + y} < e^y < \frac{1 - y}{1 - 2y} \tag{20}$$

$$(20) \Rightarrow \text{ при } |x| \leq \frac{1}{3} : \frac{-2|x|}{1 - 2|x|} < \frac{\ln(1 + x)}{x} - 1 < \frac{2|x|}{1 - 2|x|} \tag{21}$$

Замечание.

$$|x| \leq \frac{1}{10}, x \neq 0 \Rightarrow \frac{2|x|}{1 - 2|x|} \leq \frac{1}{4} \tag{22}$$

Свойство. (неравенство для $(1+x)^{\frac{1}{x}}$)

$$(22) \Rightarrow (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{1 + \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)}$$

$$(21) \Rightarrow e^{1 - \frac{2|x|}{1 - 2|x|}} < (1 + x)^{\frac{1}{x}} < e^{1 + \frac{2|x|}{1 - 2|x|}} \tag{23}$$

$$(18), (22) \Rightarrow (1 + x)^{\frac{1}{x}} > e \cdot \frac{1 + 2 \cdot \left(-\frac{2|x|}{1 - 2|x|}\right)}{1 + \left(-\frac{2|x|}{1 - 2|x|}\right)} = e \cdot \frac{1 - 6|x|}{1 - 4|x|} \tag{24}$$

$$(18), (22), (23) \Rightarrow (1 + x)^{\frac{1}{x}} < e \cdot \frac{1 - \left(-\frac{2|x|}{1 - 2|x|}\right)}{1 - 2 \cdot \left(-\frac{2|x|}{1 - 2|x|}\right)} = e \cdot \frac{1 - 4|x|}{1 - 6|x|} \tag{25}$$

$$(24), (25) \Rightarrow e \cdot \frac{1 - 6|x|}{1 - 4|x|} < (1 + x)^{\frac{1}{x}} < e \cdot \frac{1 - 4|x|}{1 - 6|x|} \tag{26}$$

4.8 Замечательные пределы

Теорема 36. (Следствие из второго замечательного предела)

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\rightarrow} 1$$

Доказательство. Возьмем $f(x) = 1-\frac{2|x|}{1-2|x|}, g(x) =, h(x) = 1+\frac{2|x|}{1-2|x|}, \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$

Из (21) имеем неравенство:

$$1 - \frac{2|x|}{1-2|x|} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 + \frac{2|x|}{1-2|x|}$$

По теореме о двух милиционерах получаем, что:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\rightarrow} 1$$

□

Теорема 37. (Снова следствие из второго замечательного предела)

$$\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\rightarrow} 1$$

Доказательство. Из (20) получаем:

$$\frac{1+2x}{1+x} - 1 < e^x - 1 < \frac{1-x}{1-2x} - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{1+x} < e^x - 1 < \frac{x}{1-2x} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{2|x|}{1-2|x|} < \frac{e^x-1}{x} < 1 + \frac{2|x|}{1-2|x|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\rightarrow} 1 \text{ — аналогично пределу выше}$$

□

Теорема 38. (Второй замечательный предел)

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\rightarrow} e$$

Доказательство. (23):

$$e^{1-\frac{2|x|}{1-2|x|}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e^{1+\frac{2|x|}{1-2|x|}}$$

Значит, по теореме о двух милиционерах аналогично двум предыдущим пределам:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\to} e$$

□

Теорема 39. (И снова следствие из второго замечательного предела)

$$\frac{(1+x)^r-1}{x} \underset{x\to 0}{\to} r$$

Доказательство. Пусть $x_n \to 0, \forall n : x_n \neq 0$ и $y_n = \ln(1+x_n), y_n \neq 0$
При $x_n \to 0, y_n \to 0$:

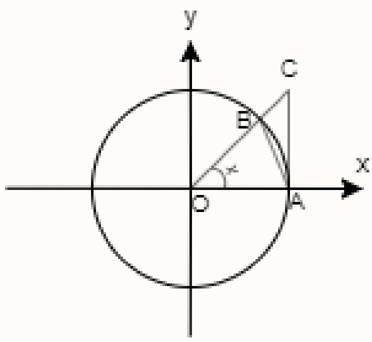
$$\frac{(1+x_n)^r-1}{x_n} = \frac{e^{r\ln(1+x_n)}}{x_n} = \frac{e^{ry_n}-1}{x_n} = \frac{e^{ry_n}-1}{r\cdot y_n}\cdot r\frac{y_n}{x_n} = r$$

□

Теорема 40. (Первый замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. (Простите за шакалов, я не смог засунуть сюда вектор, поэтому это всратая растровая картинка. (может исправим...))



Пусть дан угол $x : 0 < x < \frac{\pi}{2}$, тогда.

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сектора } OAB} < S_{\triangle AOC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2} < \tan x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

При $1 < x \leq 1$:

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} > \sqrt{1-x^2} \geq 1 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x > x\cos x > x(1-x)$$

Значит получаем неравенство:

$$1 - x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

При $|x| < 1, x \neq 0$ неравенство имеет вид:

$$1 - |x| < \frac{\sin x}{x} < 1$$

А значит по теореме о двух милиционерах:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\square$

Лекция 8: Непрерывность. Точки разрыва.

26.10.2023

4.9 Непрерывность функции

Определение 40. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$ и X — метрическое пространство с метрикой ρ, A — точка сгущения. Тогда f непрерывна в точке сгущения a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Определение 41. (определение в другом виде)

- на языке $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, \rho(x, A) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(A)| < \varepsilon$;
- окрестности: $\forall \omega(f(A)) \exists \Omega(A) : \forall x \in \Omega(A) : f(x) \in \omega(f(A))$

4.10 Арифметические свойства функций, непрерывных в точке

Свойства. Задано метрическое пространство X и функция f. Справедливы следующие свойства:

1. $f(x) \equiv c, \forall x \in X \Rightarrow f-$ непрерывна в A
2. f - непрерывно в $A \Rightarrow cf$ непрерывно в A
3. f, g непрерывны в $A \Rightarrow f + g$ непрерывна в A
4. f, g непрерывна в $A \Rightarrow fg$ непрерывна в A

5. f непрерывна в A, $f(x) \neq 0, \forall x \in X \Rightarrow \dfrac{1}{f}$ непрерывна в A

6. f, как и в 5 g непрерывна в $A \Rightarrow \dfrac{g}{f}$ непрерывна в A

Доказательство. Докажем (5), остальное предоставляется читателю в качестве упражнения ⊙ ⌣ ⊙.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(A) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to A} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f(x)}$ □

4.11 Непрерывность композиции функций

Теорема 41. (Теорема о непрерывности композиции функций)

Пусть $E \subset \mathbb{R}, a \in E, a-$ точка сгущения E, $F \subset \mathbb{R}, b \in F, b-$ точка сгущения F и определены неперывные в a и b соответственно функции $f : E \to \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \in F, f(a) = b, g : F \to \mathbb{R}$.

Тогда $h(x) = g(f(x)), h : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в a.

Доказательство.

$$h(a) = g(f(a)) = g(b) \tag{5}$$

$$\text{Возьмем } \forall\omega : (h(a)) = \omega(g(b)) \text{ по (5). Тогда:}$$

$$\exists\Omega(b) : \forall y \in \Omega(b) \cap F : g(y) \in \omega(g(b)) \tag{6}$$

$$\text{По условию: } b = f(a)\text{, тогда: } \Omega(b) = \Omega(f(a))$$

$$\exists\lambda(a) \text{ — окрестность а: } \forall x \in E \cap \lambda(a) : f(x) \in \Omega(f(a)) \tag{7}$$

$$(7) \Rightarrow \forall x \in E \cap \lambda(a) : f(x) \in \Omega(f(a)) \cap F = \Omega(b) \cap F$$

$$(6) \Rightarrow g(f(x)) \in \omega(g(b)) = \omega(h(a))$$

Значит имеем:

$$g(f(x)) = h(x) \in \omega(h(a))$$

□

Определение 42. $f : X \to \mathbb{R}, f$ непрерывно на X, если она непрерывна в каждой точке сгущения множества X

Обозначается как $f \in C(X)$ $(a, b) = [a, b]$

Пример. (Непрерывные функции)

1. $f(x) \equiv c, x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = x, f \in C(\mathbb{R})$
3. $x^2 = x \cdot x \in C(\mathbb{R}), x^{n+1} = x^n \cdot x \in C(\mathbb{R})$

4. $c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n \in C(\mathbb{R})$

5. $x \neq 0 \Rightarrow x^n \neq 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{1}{x^n} \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}$

6. Пусть $p(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n$, пусть $a_1, \ldots, a_m, m \leq n, a_k \neq a_e, k \neq l-$ все числа: $p(a_k) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{p(x)} \in C(\mathbb{R} \setminus U_{k=1}^m \{a_k\}$

7. $p(x)$, как в (6), $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_xx^t$
$\dfrac{q(x)}{p(x)} \in C(\mathbb{R} \setminus U_{k=1}^m \{a_k\})$

8. $f(x) = e^x$
из прошлой лекции: $\lim\limits_{h\to 0} e^h = 1 = e^0 \Rightarrow e^x-$ непрерывна в 0
Рассмотрим $\forall x_0 \neq 0 \Rightarrow e^x = e^{x_0} \cdot e^{x-x_0}(x - x_0 \in C(\mathbb{R})) \Rightarrow$ непрерывно в $x_0 \Rightarrow e^x \in C(\mathbb{R})$

9. $(\lim\limits_{h\to 0} \ln{(1+h)} = 0 = \ln 1 \quad \ln{(1+h)} = \dfrac{\ln{(1+h)}}{h} h \Rightarrow \ln x-$ непрерывно при $x = 1)$
$x_0 \neq_1, x_0 > 0, \ln x = \ln \dfrac{x}{x_0} + \ln x_0$
$\dfrac{x}{x_0} \in C(\mathbb{R}), \quad \dfrac{x_0}{x_0} = 1 \Rightarrow \ln x-$ непрерывен при $x = x_0 \Rightarrow \ln x \in C(\{x : x > 0\})$

10. $x > 0, r \in \mathbb{R}, \Rightarrow x^r \in C(\{x : x > 0\}) \Rightarrow x^r = e^{r \ln x}$

10' Пусть $r > 0, 0^r := 0 \Rightarrow x^r-$ непрерывно при $x = 0$

Доказательство 10': если x^r монотонно возрастает при $x > 0$

$\forall \varepsilon > 0, \delta^r = \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon^r \Rightarrow$ при $x < \delta : 0 < x^r < \delta^r = (\varepsilon^{\frac{1}{2}})^2 = \varepsilon (r = \dfrac{1}{2}$

11. $\sin x, \cos x$ непрерывно при $x = 0$
$\sin x = \dfrac{\sin x}{x} = x \to 0 (x \to 0), \sin 0 = 0$
$\sqrt{1 - x^2} \leq \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \leq 1$
$\cos x \to 1 (x \to 0), cos_0 = 1$

12. $\sin x, \cos x$ непрерывно при $x = x_0, x_0 \neq 0$
$\sin x = \sin((x - x_0) + x_0) = \sin(x - x_0)\cos(x_0) + \cos(x - x_0)\sin(x_0)$
$\cos x = \cos((x - x_0) + x_0) = \cos(x - x_0)\cos x - \sin(x - x_0)\sin(x_0)$
$\sin x \cdot \cos x \in C(\mathbb{R})$

13. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ непрерывен при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

14. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ непрерывен при $x \neq \pi n$

Теорема 42. (об обращении непрерывной функции в 0 (Коши))
Пусть $f \in C([a,b]), f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = 0$

Доказательство. Пусть $a_1 = a, b_1 = b$, значит $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ (3)
$c_1 = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a_1+b_1}{2}$
если $f(c_1) = 0$, то полагаем $c = c_1$
если $f(c_1) \neq 0$, то по (3) $\Rightarrow f(a_1)f(c_1) < 0$ или $f(c_1)f(b_1) < 0$

$[a_2, b_2]-$ тот из $[a_1, c_1], [c_1, b_1]$ для которого $f(a_2)f(b_2) < 0$ (4)
$c_2 = \dfrac{a_2+b_2}{2}$, если $f(c_2) = 0$, то полагаем $c = c_2$
если $f(c_2) \neq 0$, то $f(a_2)f(c_2) < 0$ или $f(c_2)f(b_2) < 0$ в силу (4)

$[a_n, b_n] : f(a_n)f(b_n) < 0, c_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, если $f(c_n) = 0$, полагаем $c = c_n$,
если $f(c_n) \neq 0$, то либо $f(a_n)f(c_n) < 0$, либо $f(c_n)f(b_n) < 0$
$[a_{n+1}, b_{n+1}]-$ тот из $[a_n, c_n], [c_n, b_n]$ для которого $f(a_{n+1})f(bn+1) < 0$ (6)

Пусть $\forall n, c_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ и $f(c_n) \neq 0$ и $f(a_n)f(b_n) < 0$
$b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \to 0 (n \to \infty)$ (7)
$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \forall n$ (8)
(7),(8) $\Rightarrow \exists c \in [a_n, b_n] \forall n$ (9)
$\begin{cases} a_n \to c(n \to \infty) \\ b_n \to c(n.\infty) \end{cases}$ (10)
$f \in C([a,b]) \Rightarrow f$ непрерывно в с (11)
(10),(11) $\Rightarrow \begin{cases} f(a_n) \to f(c)(n \to \infty) \\ f(b_n) \to f(c)(n \to \infty) \end{cases}$ (12)
(12) $\Rightarrow f(a_n)f(b_n) \to f^2(c)(n \to \infty)$ (13)

$f(a_n)f(b_n) < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$ (14)
(13),(14) $\Rightarrow f^2(c) \leq 0 \Rightarrow f(c) = 0$ □

Теорема 43. (Теорема о промежуточных значениях)
Пусть $f \in C([a,b])$ и $f(a) = q \neq f(b) = pm \in (p,q) < r < \max(p,q) \Rightarrow$ $\exists c \in [a,b] : f(c) = r$

Доказательство. Рассмотрим $g(x) = f(x) - r :$

$$g(a)g(b) = (f(a) - r)(f(b) - r) = (p - r)(q - r) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists c \in [a,b] : g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - r = 0$$

□

4.12 Классификация точек разрыва непрерывной функции

Определение 43. Пусть $E \subset \mathbb{R}, a \in E, a-$ точка сгущения E, $f : E \to \mathbb{R}, f$ ненепрерывна в a
Тогда точка a — точка разрыва функции f

Свойства. (Классификация точек разрыва)

1. $a \in (p,q), f : (p,q) \to \mathbb{R}$
   $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to q+0} f(x) \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, но $f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$
   тогда a – устранимая точка разрыва
   $$f(x) = \begin{cases} f(x), x \neq a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \end{cases} \Rightarrow f \text{ непрерывна в } a$$
2. **разрыв 1 рода или скачок:** $a \in (p,q), \exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \in \mathbb{R}, \exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$
   $f : [a,q] \to \mathbb{R}, \exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq f(a)$
   $f : (p,a] \exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq f(a)$
3. **разрыв 2 рода:** – если по крайней мере $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не существует или бесконечен

Теорема 44. (Теорема о разрывах монотонной фукнции)
$f : [a,b]$ и монотонна $\Rightarrow \forall x_0 \in [a,b]$ f либо непрерывна в x_0, либо имеет в x_0 разрыв 1 рода

Доказательство. Пусть f возрастает и $x_0 \in (a,b)$
Предположим, что x_0 – точка разрыва f (*)

$$\text{Рассматрим } a < x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \tag{17}$$
$$(17) \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0-0} f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow (18)$$
$$\text{Пусть } x_0 < x < b, \text{тогда } f(x_0) \leq f(x) \tag{19}$$
$$(19) \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0+0} f(x) \geq f(x_0) \tag{20}$$
$$(18),(20) : \lim_{x\to x_0-0} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0+0} f(x) \tag{21}$$

$$(*), (21) \Rightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) < \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

□

Теорема 45. (Об отображении отрезков)
Пусть $f : [a, b], f$ монотонна, $f(a) = p, f(b) = q, p \neq q$, тогда

$$f([a, b]) = [\min(p, q), \max(p, q)] \Leftrightarrow f \in C([a, b])$$

Доказательство. Пусть f непрерывна на $[a, b]$
$\forall r : \min(p, q) < r < \max(p, q)$
по теореме о промежуточных значениях: $\exists c \in (a, b) : f(c) = r$ (23)
$\forall x \in [a, b] : min(p, q) \leq f(x) \leq map(p, q)$
то есть $f([a, b]) \subset [\min(p, q), \max(p, q)]$
(23) $\Rightarrow f([a, b]) = [\min(p, q), \max(p, q)]$

Пусть $f([a, b]) = [\min(p, q), \max(p, q)]$ (24)
$\exists x_0 \in [a, b] : f$ разрывна в x_0 (25)
Пусть $x_0 \in (a, b)$ и f возрастает
по доказанной теормеме x_0 – развыв первого рода
$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A < B = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ (26)
Рассмотрим $y \in (A, B), y_0 \neq f(x_0)$ (27)
По теореме о пределе монотонной функции (когда возрастает): $\forall x < x_0, f(x) \leq A$ (28)
По той же теореме $\forall x > x_0 : f(x) \geq B$ (29)
(27),(28),(29) $\Rightarrow \forall x \in [a, b], x \neq x_0$ будет $f(x) \neq y_0$ (30) и $A < y_0 < B$
если $x = x_0$, то $f(x_0) \neq y_0$ (31)
(30),(31) $\Rightarrow y_0 \notin f([a, b])$ (32)
(24) и (32) противоречат

□

Лекция 9: Непрерывность и производная. 02.11.2023

4.13 Непрерывность и существование предела обратной функции

Теорема 46.

$$\begin{cases} f \in C([a, b]) \\ f\text{– строго монотонна} \\ [p, q] = f([a, b]) \end{cases} \Rightarrow \exists g : [p, q] \to \mathbb{R}, g \in C([p, q])$$

И g – обратная функция к f, то есть:
$\forall x \in [a, b] : \quad g(f(x)) = x$
$\forall y \in [p, q] : \quad f(g(y)) = y$
если f возрастает, то g возрастает (убывание аналогично)

Доказательство. Возьмем $\forall y \in (p,q) \Rightarrow \exists x \in (a,b) : f(x) = y$
$\begin{cases} \text{если } x_1 < x \Rightarrow f(x_1) < f(x) = y \\ \text{если } x_2 > x \Rightarrow f(x_2) > f(x) \end{cases}$
Значит $\Rightarrow \forall y \in [p,q] \exists! x : f(x) = y$

Определим $g(y)$ как $g(y) := x : f(x) = y$. Значит, у f существует обратная g.

Проверим, что g, при возрастающем f, будет возрастать:
$y_1 < y_2; \quad g(y_1) = x_1, g(y_2) = x_2$, где $g(y_1) \neq g(y_2) \quad (x_1 \neq x_2)$
Если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) = y_1 > f(x_2) = y_2 \Rightarrow$ противоречие
$\Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow g(y)$ строго возрастает
$\forall x_0 \in [a,b], g([p,q]) \subset [a,b]$ в силу определения g
$\forall x_0 \in [a,b]$ пусть $y_0 = f(x_0)$
$y_0 \in [p,q]$, значит $g(y_0) = x_0 \Rightarrow g([p,q]) = [a,b]$
А значит, в силу возрастания g: $g \in C([p,q])$ □

Свойства. (Из теоремы следуют свойства:)

1. $f(x) = \sin x, f$ определена на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], f$ – строго возрастает. Тогда обратной к f будет функция $g(f(x)) = \arcsin(f(x)), f(x) \in [-1,1]$

2. $f(x) = \cos x, f$ определена на $[0,\pi], f$ – строго возрастает. Тогда обратной к f будет функция $g(f(x)) = \arccos(f(x)), f(x) \in [-1,1]$

3. Возьмем $a_n = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n}, b_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n}\ \forall n : [a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $f(x) = \tan x, f : [a_n, b_n] \to [p_n, q_n], p_n = \tan a_n, q_n = \tan b_n$ Обратной к f будет функция $g(f(x)) = \arctan(f(x))$ причем g определена на $\bigcup_{n=1}^{\infty} [p_n, q_n] = \mathbb{R}$

4. Аналогично пункту выше, возьмем $a_n = \frac{\pi}{4n}, b_n = \pi - \frac{\pi}{4n}, f(x) = \cot x, f$ определена на $[a_n, b_n]$ и получим обратную к f функцию $g = \operatorname{arccot}(f(x))$, опрделенная на $\bigcup_{n=1}^{\infty} [p_n, q_n] = \mathbb{R}$

4.14 Теоремы Вейерштрасса

Теорема 47 (I Теорема Вейерштрасса)**.** Пусть $f \in C([a,b])$, тогда $\exists M, L :$ $\forall x \in [a,b] :$
$$L \leq f(x) \leq M$$

Доказательство. Пусть $\nexists M : f(x) \leq M; \quad \forall x \in [a,b]$, тогда:

$$\begin{rcases} \exists x_1 \in [a,b] : f(x_1) > 1 \\ \exists x_2 \in [a,b] : f(x_2) > f(x_1) + 2 \\ \vdots \\ \exists x_n \in [a,b] : f(x_n) > f(x_{n-1}) + n \end{rcases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x_n) \to +\infty \Rightarrow \exists x^* \in [a,b]$ и $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : x_{n_k} \to x^* (k \to \infty)$ по принципу выбора Больцано-Вейерштрасса

f непрерывна в x^* по определению, а значит:

$\Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x^*) \quad (k \to \infty) \Rightarrow \exists A : |f(x_{n_k})| \le A; \quad \forall k$

из выбора $x_1, \ldots, x_n$ в начале следует, что: $f(x_{n_k}) > n_k \ge k \Rightarrow k < A; \quad \forall k$ — противоречие.

Для L доказательство аналогично. □

Теорема 48 (II Теорема Вейерштрасса)**.** Пусть $f \in C([a,b])$ тогда $\exists x_- \in [a,b]$ и $\exists x_+ \in [a,b]$ такие, что:

$$f(x_-) \le f(x) \le f(x_+); \quad \forall x \in [a,b]$$

Доказательство. Пусть $\nexists x_+ \in [a,b]$: $f(x) \le f(x_+); \quad \forall x \in [a,b]$

Возьем $E = f([a,b]) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [a,b], f(x) = y\}$

По 47: $\exists M : f(x) \le M; \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow E$ ограничено сверху

Путсь $y_0 = \sup E$, тогда $\forall x \in [a,b] : f(x) \le y_0$

Т.к. мы предположили в начале, что $\nexists x_+$, то: $f(x) < y_0; \quad \forall x \in [a,b]$

Возьмем φ: $\varphi(x) = y_0 - f(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \varphi \in C([a,b])$

Значит, $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \in C([a,b])$

По 47: $\exists Q > 0 : \dfrac{1}{\varphi(x)} \le Q; \quad \forall x \in [a,b]$, т.е.

$$\frac{1}{Q} \le \varphi(x) \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] : \frac{1}{Q} \le y_0 - f(x)$$

Значит, $y_0 - \frac{1}{Q}$ — верхняя граница E, но это противоречит, тому, что $y_0 = \sup E$.

Для x_- доказательство аналогично. □

4.15 Теорема Кантора

Определение 44. $E \subset \mathbb{R}; \quad f : E \to \mathbb{R}$

f равномерно непрерывна на E, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E : |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Теорема 49. Если $f \in C([a,b])$, то f равномерно непрерывна на $[a,b]$

Доказательство. пусть $f(x)$ неравномерно непрерывна на $[a,b]$, тогда $\exists \varepsilon_0$ и последовательности $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x''_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n : x'_n, x''_n \in [a,b]$ такие, что:

$$\forall n : |x''_n - x'_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \qquad f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$$

По принципу выбора Больцано-Вейерштрасса $\exists x^* \in [a,b]$ и $\exists \{x'_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $x'_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x^*$. Поскольку $\forall k : a \leq x'_{n_k} \leq b$, то $a \leq x^* \leq b$. Поскольку $|x''_n - x'_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то $x''_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x^*$. Так как f непрерывна в x^*, то:

$$\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \omega_{\delta_0}(x^*) \cap [a,b] : |f(x) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

Тогда $\forall x_1, x_2 \in \omega_{\delta_0}(x^*) \cap [a,b]$ имеем:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(x_2) - f(x^*)| + |f(x_1) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2}$$

Поскольку $x'_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x^*$ и $x''_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x^*$, то:

$$\exists N : \forall k > N : x'_{n_k}, x''_{n_k} \in \omega_{\delta_0}(x^*) \cap [a,b] \Rightarrow |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

Противоречие. $\square$

Глава 5

Производная

5.1 Дифференцируемость функции

Определение 45. $f : (a, b) \to \mathbb{R}; \quad x_0 \in (a, b)$
f имеет производную в точке x_0

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Определение 46. $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ имеет правую производную в a, если

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

Определение 47. $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ имеет левую производную в b, если

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(b + h) - f(b)}{h} \in \mathbb{R}$$

Теорема 50. Пусть f имеет производную, тогда $\exists \delta > 0$ и $M > 0$: при $x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|$.

Доказательство. По определению производной: $\Rightarrow \exists \delta > 0 : h \neq 0, |h| < \delta$ имеем:

$$|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h| < |h| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq |f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h| +$$

$$+ |f'(x_0)h| < |h| + |f'(x_0)||h| = (1 + f'(x_0))|h|$$

Выберем $M = 1 + |f'(x_0)|$ и $x - x_0 = h : \quad |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow |h| < \delta$

$\square$

Следствие. f непрерывна в x_0.

Определение 48. $f:(a,b)\to\mathbb{R}; \quad x_0\in(a,b)$
f дифференцируема в x_0, если:

$$\exists A\in\mathbb{R}, r:(a,b)\to\mathbb{R}: f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+r(x) \text{ и } \frac{r(x)}{x-x_0}\to 0 (x\to x_0)$$

Теорема 51. f дифференцируема в $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$, при этом для A из (8)(8') имеем $A=f'(x_0)$ (10)

Доказательство. $\exists f'(x_0)\Rightarrow \delta(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\to 0(h\to 0)$ (11)
$\rho(h)=h\delta(h)$ (12)
(11)(12) $\Rightarrow f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h=h\delta(h)=\rho(h)$ (13)
(13'): $f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\rho(h)$
$\dfrac{\rho(h)}{h}=\delta(h)\to 0(h\to 0)$ (14)
$A=f'(x_0)$
Доказали, что если f имеет $f'(x)$, то она дифференцируема и $A=f'(x_0)$ $\square$

Доказательство. Докажем в обратную сторону
Пусть f дифференцируема в $x_0, h\neq 0$
(8') $\Rightarrow \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A+\dfrac{\rho(h)}{h}\to A\in\mathbb{R}(h\to 0)$ (15)
(15) $\Rightarrow \exists f'(x_0)=A$ $\square$

5.2 Свойства дифференцируемых функций

Свойства.

1. $(a,b); \quad x_0\in(a,b)$
   f дифференцируема в $x_0 \Rightarrow cf$ дифферованна в x_0
   $$(cf)'(x_0)=cf'(x_0)$$
   $$\frac{cf(x_0+h)-cf(x_0)}{h}=cf'(x_0)$$
2. f,g дифференцированны в $x_0\Rightarrow f+g$ дифференцированна в x_0
   $$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$
   $$\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-(f(x_0)+g(x_0))}{h}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Лекция 10: Продолжение свойств производных

9.11.2023

Свойства. (дальнейшие свойства производных)

3 $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4 Пусть $\forall x \in (a,b) : f(x) \neq 0$, тогда:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

5 Пусть f как в (4), и есть g тогда:

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)}$$

6 Производная суперпозиции: пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}, f(x) \in (p,q)$
$g : (p,q) \to \mathbb{R}, f(x) \stackrel{\text{def}}{=} y \in (p,q)$
Положим $\varphi(x) = g(f(x))$, Тогда:

$$\varphi'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$$

7 Производная обратной функции: пусть f непрерывна на отрезке (a,b) и строго монотонна, $x_0 \in (a,b)$, f имеет производную в x_0, не равную нулю. g — обратная к f функция. Положим $f(x_0) = y_0$, тогда:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство. (Доказательства свойств)

3

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g(x)$$

4

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} =$$

$$= -\frac{1}{f(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{f(x+h)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)f(x)}{h} = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

5 Используя (3) и (4) получаем:

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \left(g \cdot \frac{1}{f}\right)(x) = g'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} + g(x)\left(\frac{1}{f}\right)'(x) =$$
$$= \frac{g'(x)}{f(x)} - \frac{g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)}$$

6 используя связь производной с дифференцируемостью функции, получаем:

$$g(y+l) = g(y) + g'(y) \cdot l + g(l), \text{ где } \lim_{l \to 0} \frac{g(l)}{l} = 0$$

Положим $\delta(l) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g(l)}{l}, l \in \dot{\omega}(0)$

Положим $\delta(0) = 0$, тогда функция $\delta(l)$ определена в $\omega(0)$ и непрерывна в 0, $\omega(0)$ — окрестость из определения дифференцируемости функции g.

Возьмем теперь $h \neq 0$ и положим

$$l \stackrel{\text{def}}{=} f(x+h) - f(x) = f(x+h) - y$$

В отличие от h, возможно, что $l = 0$ при каких-то значениях h. Теперь имеем, используя дифференцируемость f:

$$\varphi(x+h) = g(f(x+h)) = g(f(x) + f'(x)h + \overline{\rho}(h)), \text{ где } \lim_{l \to 0} \frac{\overline{\rho}(l)}{l} = 0$$

Пусть $f'(x)h + \overline{\rho}(h) = q$, тогда:

$$g(f(x) + q) = g(y+q) = g(y) + g'(y)q + q\delta(q) =$$
$$= \varphi(x) + g'(y)(f'(x)h + \overline{\rho}(h)) + (f'(x)h + \overline{\rho}(h)) \cdot \delta(f'(x)h + \overline{\rho}(h)) \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x) + g'(y)f'(x) + R(h)$$

Где $R(h) = g'(y)\overline{\rho}(h) + f'(x)h \cdot \delta(f'(x)h + \overline{\rho}(h)) + \overline{\rho}(h) \cdot \delta(f'(x)h + \overline{\rho}(h))$

При $h \to 0$ имеем $f'(x)h + \overline{\rho}(h) \to 0$, поэтому $\frac{R(h)}{h} \underset{h \to 0}{\to} g'(y) \cdot 0 + f'(x) \cdot 0 + 0 = 0$

Таким образом, функция φ дифференцируема в x, и по теореме о связи производной и дифференцируемости:

$$\varphi'(x) = g'(y)f'(x)$$

7 Возьмем последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n : h_n \neq 0$ и $h_n \to 0$. Положим $l_n = f(x+h_n) - f(x)$. В силу строгой монотонности функции f имеем $\forall n : l_n \neq 0$ и $l_n \to 0$ при $n \to \infty$ в силу непрерывности f на $[a, b]$. l_n и h_n связаны также соотношением:

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + l_n = y + l_n \\ g(f(x+h)) = g(y+l_n) \\ x + h_n = g(y+l_n) \\ h_n = g(y+l_n) - x = g(y+l_n) - g(y) \end{cases}$$

Это соотношение показывает, что мы можем произвольно задать $l_n, \forall n : l_n \neq 0, l_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ и получим $h_n \neq 0, h_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Возьмем теперь произвольную последовательность $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n : l_n \neq 0, l_n \underset{n\to\infty}{\to} 0, h_n$ — соответствующая ей последовательность имеет:

$$\frac{g(y+l) - g(y)}{l_n} = \frac{h_n}{l_n} = \frac{h_n}{f(x+h_n) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h) - f(x)}{h_n}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{f'(x)}$$

В силу произвольности $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ получаем: $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

□

Лекция 11: Таблица производных, экстремум, производные высших порядков.

16.11.2023

5.3 Таблица производных

Свойства.

1. c; $\mathbb{R}$
   $c' = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$
2. x; $\mathbb{R}$
   $x' = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$
   Следствие: $(f(ax+b))' = f'(ax+b)(ax+b)' = af'(ax+b)$
3. x^2; $\mathbb{R}$
   $(x^2)' = (x*x)' = x'*x + x*x' = 2x$
   $n \geq 2 : \quad (x^n)' = nx^{n-1}, x \in \mathbb{R}$
   $(x^{n+1})' = (x*x^n)' = x'x^n + x(x^n)' = x^n + xnx^{n-1} = (n-1)x^n$
4. $n \in \mathbb{N}$; x^{-n}; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
   $(x^{-n})' = (\frac{1}{x^n})' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$
5. e^x; $\mathbb{R}$

$(e^x)' = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = e^x$

6. $\ln x; \quad x > 0$

$(\ln x)' = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln x+h-\ln x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{x+h}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln 1+\dfrac{h}{x}}{h} = \dfrac{1}{x}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln 1+\dfrac{h}{x}}{\dfrac{h}{x}} = \dfrac{1}{x}$

7. $r \notin \mathbb{Z}; \quad x > 0$

$(x^r)' = (e^{r\ln x})' = (e^y)'(r\ln x)'\mid_{y=r\ln x} = e^{x\ln x}\dfrac{r}{x} = rx^{r-1}$

8. $sinx; \quad \mathbb{R}$

$(sinx)' = \lim\dfrac{sin(x+h)-sinx}{h} = \lim\dfrac{2sin\dfrac{h}{2}cos(x+\dfrac{h}{2})}{h} = \lim\limits_{h\to 0}cos(x+\dfrac{h}{2}) * \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} = cosx$

9. $cosx; \quad \mathbb{R}$

$cosx = sin(x+\dfrac{\pi}{2})$

$(cosx)' = (sin(x+\dfrac{\pi}{2}))' = (siny)'\mid_{y=x+\frac{\pi}{2}} *1 = cos(x+\dfrac{\pi}{2}) = -sinx$

10. $tgx; \quad \mathbb{R}\setminus\cup_{n\in\mathbb{Z}}\{\dfrac{\pi}{2}+\pi n\}$

$(tgx)' = (\dfrac{sinx}{cosx})' = \dfrac{(sinx)'cosx - sinx(cosx)}{cos^2x} = \dfrac{cos^2x+sin^2x}{cos^2x} = \dfrac{1}{cos^2x}$

11. $ctgx; \quad \mathbb{R}\setminus\cup_{n\in\mathbb{Z}}\{\pi n\}$

$(ctg)' = (\dfrac{cosx}{sinx})' = \dfrac{(cosx)'sinx - cosx(sinx)'}{sin^2x} = \dfrac{-sin^2x-cos^2x}{sin^2x} = -\dfrac{1}{sin^2x}$

12. $arcsinx; \quad (-1,1)$

$f(x) = arcsinx; \quad g(y) = siny\mid_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$

$x \in (-1,1); \quad arcsinx = y \Leftrightarrow x = siny$

$(arcsinx)' = \dfrac{1}{(sint)'\mid_{t=y}} = \dfrac{1}{cosy} = \dfrac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $arccosx; \quad (-1,1)$

$f(x) = arccosx; \quad g(y) = cosy\mid_{[0,\pi]}$

$y = arccosx \Leftrightarrow x = cosy$

$(arccosx)' = \dfrac{1}{(cost)'\mid_{t=y}} = -\dfrac{1}{siny} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-cos^2y}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $arctgx$; $\mathbb{R}$
    $f(x) = arctgx$; $g(y) = tgy \mid_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$
    $y = arctgx \Leftrightarrow x = tgy$
    $(arctgx)' = \dfrac{1}{(tgt)' \mid_{t=y}} = \dfrac{1}{\frac{1}{cos^2 y}} = cos^2 y$
    $x^2 + 1 = tg^2 y + 1 = \dfrac{sin^2 y}{cos^2 y} + 1 = \dfrac{1}{cos^2 y}$
    $cos^2 y = \dfrac{1}{1 + x^2}$
    $(arctgx)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
15. $arcctgx$; $\mathbb{R}$
    $f(x) = arcctgx$; $g(y) = ctgy \mid_{(0,\pi)}$
    $y = arcctgx$; $x = ctgy$ $(arcctgx)' = \dfrac{1}{(ctgt) \mid_{t=y}} = -\dfrac{1}{\frac{1}{sin^2 y}} =$
    $-sin^2 y$
    $x^2 + 1 = ctg^2 y + 1 = \dfrac{cos^2 y}{sin^2 y} + 1 = \dfrac{1}{sin^2 x}$
    $sin^2 y = \dfrac{1}{1 + x^2}$
    $\Rightarrow (arcctgx)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Определение 49. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
$x_0 \in [a, b]$
x_0 – точка локального максимума f, если $\exists \omega(x_0) \mid \forall x in \omega(x_0) \cap [a, b]$
$f(x) \le f(x_0)$

Определение 50. x_0 – точка строгого локального максимума, если $\forall x \ne x_0, x \in \omega(x_0) \cap [a, b]$; $f(x) < f(x_0)$

Определение 51. $g : [a, b] \to \mathbb{R}$
$x_1 \in [a, b]$
x_1 – точка локального минимума, если $\exists \omega_1(x_1) \mid \forall x \in \omega_1(x_1) \cap [a, b]$
$g(x) \ge g(x_1)$

Определение 52. x_1 – точка строгого локального минимума, если $\forall x \ne x_1, x \in \omega_1(x_1) \cap [a, b] \mid g(x) > g(x_1)$

Определение 53. $h : [a, b] \to \mathbb{R}$
$x_2 \in [a, b]$
x_2 – точка (строгого)локального экстренума (либо точка (строгого)

локального минимума либо точка (строгого) локального максимума)

5.4 Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши

Теорема 52. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$
$x_0 \in (a, b)$
x_0 − локальный экстренум f
$\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$ (1)

Доказательство. x_0 − **локальный максимум**
$f \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 :$ при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (a, b)$
$f(x) \le f(x_0)$ (2)
Пояснение: Пусть $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$
$0 < h < \varepsilon$

$$(2) \Rightarrow f(x_0 + h) \le f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \le 0 \ (3)$$

$-\varepsilon < h < 0$

$$(2) \Rightarrow f(x_0 + h) \le f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ge 0 \ (4)$$

$(3), (4) \Rightarrow (1)$

x_0 − **локальный минимум** f
$g(x) = -f(x)$
$f(x) \ge f(x_0) \Leftrightarrow -f(x) \le f(x_0); \quad g(x) \le g(x_0)$
x_0 − локальный максимум g
$\exists g'(x_0) = -f'(x_0)$
Только что доказано, что $g'(x_0) = 0$
$f'(x_0) = -g'(x_0) = 0$ □

Теорема 53. $f \in C([a, b])$
$\forall x \in (a, b); \quad \exists f'(x)$
$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$ (5)

Доказательство.
1. $f(x) = f(a) \forall x \in [a, b] \Rightarrow \forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$
2. $f(x) \not\equiv f(a) \Rightarrow x_1 \in (a, b) : f(x_1) \ne f(a)$
   $\not\equiv$ − нетождевственна
   либо $f(x_1) > f(a)$ либо $f(x_1) < f(a)$

   Рассмотрим $f(x_1) > f(a)$
   Теорема 2 Вейерштрасса: $\exists x_0 \in [a, b] : \forall x \in [a, b] : f(x) \le f(x_0)$ (6)
   в частности (6) $\Rightarrow f(x_1) \le f(x_0)$ (7)
   (7) $\Rightarrow f(x_0) > f(a), f(x_0) > f(b) \Rightarrow x_0 (a, b)$ (7')

$\exists f'(x_0)$ (8)
По теореме Ферма: (6)(7')(8) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ $\square$

Теорема 54. $f \in C([a,b])$
$\forall x \in (a,b); \quad \exists f'(x)$
$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$ (1)

Доказательство. $g(x) = (f(x) - f(a))(b-a) - (f(b) - f(a))(x-a)$ (2)
(2) $\Rightarrow g \in C([a,b])$ (2')
(2) $\Rightarrow \forall x \in (a,b); \quad \exists g'(x)$
$g'(x) = (b-a)f'(x) - (f(b) - f(a))(x-a)' = (b-a)f'(x) - (f(b) - f(a))$ (3)
$g(a) = 0, g(b) = 0 \Rightarrow g(a) = g(b) = 0$ (4)
Применяя теореме Ролля: (2')(3)(4) $\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) : g'(x_0) = 0$ (5)
(3)(5) $\Rightarrow (b-a)f'(x_0) - (f(b) - f(a)) = 0 \Rightarrow$ (1) $\square$

Свойства. Из теоремы Лангранжа
Пусть $f \in C([a,b]), \forall x \in (a,b) \exists f'(x)$ и $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(b) \neq f(a)$

Доказательство. Из теоремы Лагранжа $\exists x_0 \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$
$f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f(b) \neq f(a)$ $\square$

Теорема 55. $f \in C([a,b]), g \in C([a,b])$
$\forall x \in (a,b), \exists f'(x), \exists g'(x)$
$g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$
$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) : \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ (6)

Доказательство. $h(x) = (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a))$ (7)
(7) $\Rightarrow h \in C([q,b])$ (8)
(7) $\Rightarrow \forall x \in (a,b), \exists h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$ (9)
(7) $\Rightarrow h(a) = 0, h(b) = 0 \Rightarrow h(a) = h(b) = 0$
По теореме Ролля (8)(9)(10) $\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) : h'(x_0) = 0$ (11)
(9)(11) $\Rightarrow (f(b) - f(a))g'(x_0) - (g(b) - g(a))f'(x_0) = 0$ (12)
(12) $\Leftrightarrow$ (6) $\square$

5.5 Производнае второго и более порядка

Определение 54. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$
$\forall x \in (a,b), \exists f'(x)$
$x_0 \in (a,b)$
$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$

Пусть $\exists (f')'(x_0)$
тогда $\exists f''(x_0) =^{def} (f')'(x_0)$
Пусть $\exists x \in (a,b), \exists f''(x)$
$f'' : (a,b) \to \mathbb{R}$
Пусть $\exists (f'')'(x_0) \Rightarrow f'''(x_0) =^{def} (f'')'(x_0)$
Обозначение: $f^{(2)}(x) = f''(x); \quad f^{(1)}(x) = f'(x); \quad f^{(3)}(x) = f'''(x)$

$f^{(n)}(x)$
$\forall x \in (a,b), \exists f^{(n)}(x)$
Пусть $\exists (f^{(n)})'(x_0) \Rightarrow f^{(n)} : (a,b) \to \mathbb{R}$
$\exists f^{(n+1)}(x_0) =^{def} (f^{(n)})'(x)$

Теорема 56. О линейности и аддитивности nнных производных
$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$
$\forall x \in (a,b), \exists f'(x), f^{(2)}(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$
$\exists g'(x), g^{(2)}(x), \ldots, g^{(n-1)}(x)$
$x_0 \in (a,b), \exists f^{(n)}(x_0), \exists g^{(n)}(x_0)$
$\Rightarrow (f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$
$c \in \mathbb{R}; \quad \exists (cf)^{(n)}(x_0) = cf^{(n)}(x_0)$

Доказательство. Индукция
База $n = 1: \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
$\forall x \in (a,b), \exists f'(x), f^{(2)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$
$\exists g'(x), g^{(2)}(x), \ldots, g^{(n)}(x)$
$\exists f^{(n+1)}(x_0), \exists g^{(n+1)}(x_0)$
$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x), x \in (a,b)$
$(f+g)^{(n+1)}(x_0) = ((f+g)^{(n)})'(x_0) = (f^{(n)} + g^{(n)})'(x_0) = (f^{(n)})'(x_0) + (g^{(n)})'(x_0) = f^{(n+1)}(x_0) + g^{(n+1)}(x_0)$

$n = 1; \quad (cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
$n \quad \forall x \in (a,b): \quad (cf)^{(n)}(x) = cf^{(n)}(x)$
$(cf)^{(n+1)}(x_0) = ((cf)^{(n)})'(x_0) = (cf^{(n)})'(x_0) = c(f^{(n)})'(x_0) = cf^{(n+1)}(x_0)$
□

Лекция 12: Формула Тейлора.

23.11.2023

Свойства.
$(e^x)' = e^x; \quad (e^x)'' = ((e^x)')' = (e^x)' = e^x$
$(e^x)^{(n)} = e^x; \quad (e^x)^{(n+1)} = ((e^x)^n)' = (e^x)' = e^x$

Свойства.
$(\sin(x))' = \cos(x); \quad (\sin(x))'' = ((\sin(x))')' = (\cos(x))' = -\sin(x)$
$(\sin(x))''' = ((\sin(x))'')' = (-\sin(x))' = -\cos(x)$
$(\sin(x))^{(4)} = ((\sin(x))''')' = (-\cos(x))' = \sin(x)$
$(\sin(x))^{(4n)} = \sin(x); \quad (\sin(x))^{(4n+r)} = (\sin(x))^{(r)}, 1 \leq r \leq 3$

Свойства.
$(\cos(x))' = -\sin(x); \quad (\cos(x))'' = ((\cos(x))')' = (-\sin(x))' = -\cos(x)$
$(\cos(x))''' = ((\cos(x))'')' = (-\cos(x))' = \sin(x)$
$(\cos(x))^{(4)} = ((\cos(x))''')' = (\sin(x))' = \cos(x)$
$(\cos(x))^{(4n)} = \cos(x); \quad (\cos(x))^{(4n+r)} = (\cos(x))^{(r)}, 1 \leq r \leq 3$

Свойства.
$(x+a)^r, r \notin \mathbb{N}$
если $r \notin \mathbb{Z}$, то $x > -a$
если $r \in \mathbb{Z}$, то $x \neq -a$
$((x+a)^{(r)})' = r(x+a)^{r-1}$
$((x+a)^r)'' = (r(x+a)^{r-1})' = r(r-1)(x-a)^{r-2}$
$((x+a)^r)''' = (r(r-1)(x+a)^{r-2})' = r(r-1)(r-2)(x+a)^{r-3}$
$r-1 \neq 0, r-2 \neq 0$
$((x+a)^r)^{(n)} = r(r-1)\dots(r-n+1)(x+a)^{r-n}, r-k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$

Свойства.
$(\ln(x+a))' = \dfrac{1}{x+a} = (x+a)^{-1}, x > -a$
$(\ln(x+a))^{(n)} = ((x+a)^{-1})^{(n-1)} = (-1)(-2)\dots(-1-(n-1)+1)(x+a)^{-n} =$
$= (-1)^{n-1}(n-1)!(x+a)^{-n}$

Свойства.
$(x+a)' = 1; \quad (x+a)'' = 1' = 0, (x+a)^{(n)} = 0, n \geq 2$
$((x+a)^2)' = 2(x+a), ((x+a)^2)'' = (2(x+a))' = 2$
$((x+a)^2)''' = 0; \quad ((x+a)^2)^{(n)} = 0, n \geq 3$

$k \geq 3: \quad ((x+a)^k)' = k(x+a)^{k-1}$
$((x+a)^k)'' = (k(x+a)^{k-1})' = k(k-1)(x+a)^{k-2}$
$((x+a)^k)''' = k(k-1)(k-2)(x+a)^{k-3}$

$l < k-1 \quad ((x+a)^k)^{(l)} = k(k-1)\dots(k-l+1)(x+a)^{k-l}$

$((x+a)^k)^{(k-1)} = k(k-1)\dots 2(x+a)$
$((x+a)^k)^{(k)} = k!(x-a)' = k!$
$((x+a)^k)^{(k+1)} = 0; \quad ((x+a)^k)^{(n)} = 0, n \geq k+1$

при $l < k: ((x+a)^k)^{(l)} \mid_{x=-a} = 0$
при $l > k: ((x+a)^k)^{(l)} \mid_{x=-a} = 0$

при $l = k : ((x+a)^k)^{(k)} \mid_{x=-a} = k!$

$$(\frac{1}{k!}(x \pm a)^k)^{(l)} \mid_{x=\mp a} = \begin{cases} 0, l \neq k \\ 1, l = k \end{cases}$$

5.6 Формула Тейлора

Определение 55. $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$

$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + \frac{b_2}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{b_n}{n!}(x-a)^n$

$p(a) = b_0$

$p'(a) = b_0' + (b_1(x-a))' \mid_{x=a} + \ldots + (\frac{b_n}{n!}(x-a)^n)' \mid_{x=a} = b_1$

$1 \leq k \leq n: \quad p^{(k)}(a) = b_0^{(k)} + (b_1(x-a))^{(k)} \mid_{x=a} + \ldots + (\frac{b_k}{k!}(x-a)^k)^{(k)} \mid_{x=a}$

$+ \ldots + (\frac{b_n}{n!}(x-a)^n)^{(k)} \mid_{x=a} = b_k$

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \ldots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (1)$$

Лемма 2. $g \in C((p,q))$

g если $n = 1 : g'(x) = 0, g(a) = 0$

если $n > 1$, то $\forall x \in (p,q), \exists g^{(n-1)}(x)$ и $\exists g^{(n)}(a)$, при этом

$g(a) = 0, g'(a) = 0, \ldots, g^{(n-1)}(a) = 0, g^{(n)}(a) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{g(x)}{(x-a)^n} \to_{x \to a} 0 \quad (4)$$

Доказательство. По индукции:

$n = 1: \quad g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + r(x) = r(x)$ (5)

$\frac{r(x)}{(x-a)^n} \to_{x \to a} 0$

Индукционное предположение: $n - 1 \geq 1:$

$h(a) = 0, \ldots, h^{(n-1)}(a) = 0$ и $\forall x \in (p,q), \exists h^{(n-2)}(x)$, то

$\Rightarrow \frac{h(x)}{(x-a)^{n-1}} \to_{x \to a} 0$ (6)

$h(x) = g'(x); \quad (g')^{(n-1)}(x) = g^{(n)}(x)$

$\delta(x) = \frac{g'(x)}{(x-a)^{n-1}}; \quad \delta(a) =^{def} 0; \quad \delta$ неопределена на точке a

(6) $\Rightarrow \delta(x) \to_{x \to a} 0$

$g(x) = g(x) - g(a) = g'(c)(x-a)$ (7)

$\exists c = c(x)$ (c зависит от x), c между x и a (Теорема Лагранжа)

$|c - a| < |x - a|$

$g'(x) = \delta(x)(x-a)^{n-1}$

$c(x) \to_{x \to a} 0$ (7) $\Rightarrow g(x) = \delta(c)(c-a)^{n-1}(x-a)$ (8)

$(8) \Rightarrow \dfrac{g(x)}{(x-a)^n} = \delta(c(x))\dfrac{(c(x)-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\dfrac{g(x)}{(x-a)^n}| \leq |\delta(c(x))| \to_{x\to a} 0 \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{(x-a)^n} \to_{x\to a} 0$ $\square$

Теорема 57 (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано). $f \in C((p,q)), a \in (p,q)$
если $n = 1$, то $\exists f'(a)$
если $n > 1$, то $\forall x \in (p,q), \exists f^{(n-1)}(x)$ и $\exists f^{(n)}(a)$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x) \quad (2)$$

$$\frac{r(x)}{(x-a)^n} \to_{x\to a} 0 \quad (3)$$

Доказательство. $p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ (9)
$(9) \Rightarrow p(a) = f(a)$ (10)
$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ (11)
$g(x) = f(x) - p(x)$ (12)
$\forall x \in (p,q), \exists g^{(n-1)}(x), \exists g^{(n)}(a)$
$(10)(11)(12) \Rightarrow g(a) = 0, g'(a) = 0, \ldots, g^{(n)}(a) = 0$
$\dfrac{g(x)}{(x-a)^n} \to_{x\to a} 0$
$(2)(12) \Rightarrow r(x) = g(x)$ $\square$

Теорема 58 (Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа). $f : (p,q) \to \mathbb{R};\quad n \geq 1, \forall x \in (p,q), \exists f^{(n+1)}(x)$
$a \in (p,q), x \in (p,q), x \neq a$
$\Rightarrow \exists c$ между x и a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (1)$$

Доказательство. фиксируем x, рассмотрим функцию от y: $\varphi(y) = f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) - \dfrac{f''(y)}{2!}(x-y)^2 - \ldots - \dfrac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n$ (2)
$\varphi : (p,q) \to \mathbb{R}$
$(2) \Rightarrow \forall y \in (p,q), \exists \varphi'(y)$
$(2) \Rightarrow \varphi'(y) = (f(x))'_y - f'(y) - (f'(y)(x-y))' - (\dfrac{f''(y)}{2!}(x-y)^2)' - \ldots - (\dfrac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n)' =$
$= 0 - f'(y) - (f''(y)(x-y) - f'(y) * 1) - (\dfrac{f'''(y)}{2!}(x-y)^2 - 2\dfrac{f''(y)}{2!}(x-y)) -$

$-\ldots-(\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y^n)-\frac{n}{n!}f^{(n)}(y)(x-y)^{n-1})=-\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n$
(3)
$\varphi(x)=0; \quad \varphi(a)=^{def} r$
$\psi(y)=(x-y)^{n+1}$, $y\in[min(a,x),max(a,x)]$
$\psi(x)=0; \quad \psi(a)=(x-a)^{n+1}$
$\psi'(y)=-(n+1)(x-y)^n, \psi(y)\neq 0; \quad y\in(min(a,x),max(a,x))$
$\exists c$ между a и x, такое что
$\frac{\varphi(a)-\varphi(x)}{\psi(a)-\psi(x)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$ (4)

$\frac{r-0}{(x-a)^{n+1}-0}=\frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Rightarrow$

$\Rightarrow r=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ (5)
(2)(5) $\Rightarrow$ (1) □

5.7 Применение формулы Тейлора к элементарным функциям (a=0)

Свойства. $e^x: \quad (e^x)^{(n)}\mid_{x=0}=1$
$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^cx^{n+1}}{(n+1)!}; \quad (cx>0,|c|<|x|)$

Свойства. $\sin(x): \quad (\sin(x))^{(2n)}\mid_{x=0}=0; \quad (\sin(x))^{(2n-1)}\mid_{x=0}=(-1)^{n-1}$
$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\pm\sin(c)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Свойства. $\cos(x): \quad (\cos(x))^{(2n-1)}\mid_{x=0}=0; \quad (\cos(x))^{(2n)}\mid_{x=0}=(-1)^n$
$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\pm\sin(c)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Свойства. $r\neq 0; \quad r\notin\mathbb{N}; \quad x\in(-1,1)$
$((1+x)^r)^{(n)}\mid_{x=0}=r(r-1)\ldots(r-n+1)$
$(1+x)^r=1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}x^n+\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)(r-n)}{(n+1)!}(1+c)^{r-n-1}x^{n+1}$

Свойства. $\ln(1+x); \quad x\in(-1,1)$
$(\ln(1+x))'\mid_{x=0}=1$
$n\geq 2: \quad (\ln(1+x))^{(n)}\mid_{x=0}=(-1)^{n-1}(n-1)!$
Замечание: $\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + (-1)^n\frac{1}{n+1}(1+x)^{-n-1}x^{n+1}$
т.к. $(\ln(1+x))^{(n+1)} = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$