# Оглавление



## Лекция 2: Сечения

21.09.2023

**Теорема 1.** Пусть $\alpha, \beta$ — сечения. Тогда $\exists!\ \gamma$ — сечение : $\alpha + \gamma = \beta$

**Доказательство.** Пусть имеем $\gamma_1 \neq \gamma_2$, удовлетворяющие условию. Тогда: $\alpha + \gamma_1 = \beta = \alpha + \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$ — противоречие.

Положим $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Тогда в силу свойств сечений имеем:

$\alpha+\gamma = \alpha+(\beta+(-\alpha)) = \alpha+((-\alpha)+\beta) = (\alpha+(-\alpha))+\beta = 0^*+\beta = \beta$ □

**Определение 1.** Сечение $\gamma$, построенное в предыдущей теореме обозначается через $\beta - \alpha$

**Определение 2.** (Абсолютная величина) $|a| = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha \geq 0^* \\ -\alpha, \text{ если } \alpha < 0^* \end{cases}$

**Определение 3.** (Произведение) Пусть $\alpha, \beta$ — сечения, причем $\alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^*$

Тогда $\alpha\beta = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0 \vee r = pq, \text{ где } p \in \alpha, q \in \beta\}$

**Пример.** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^*$

**Теорема 2.** (Любые 3 из них необходимо доказать самостоятельно) Для любых сечений $\alpha, \beta, \gamma$ имеем:

1. $\alpha\beta = \beta\alpha$
2. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
4. $\alpha 0^* = 0^*$

5. $\alpha 1^* = \alpha$
6. если $\alpha < \beta$ и $\gamma > 0^*$, то $\alpha\gamma < \beta\gamma$
7. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta : \alpha \cdot \beta = 1^*, \beta = \frac{1^*}{\alpha}$
8. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta, \gamma : \alpha \cdot \gamma = \beta, \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$

**Теорема 3.** (Свойства рациональных сечений)

1. $p^* + q^* = (p+q)^*$
2. $p^* q^* = (pq)^*$
3. $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

**Доказательство.** 1. Возьмем $r \in (p+q)^* \Rightarrow r < p + q$

Положим $h = p + q - r$:

$\begin{cases} p_1 = p - \frac{h}{2} \\ q_1 = q - \frac{h}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in p^* + q^* \Rightarrow (p^* + q^*) \subset p^* + q^*$

Теперь возьмем $r \in p^* + q^* \Rightarrow r = p_1 + q_1$:

$\begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 < p + q \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in (p^* + q^*) \Rightarrow p^* + q^* \subset (p^* + q^*)$

$\begin{cases} p^* + q^* \subset (p+q)^* \\ (p+q)^* \subset p^* + q^* \end{cases} \Rightarrow p^* + q^* = (p^* + q^*)$

2. Для умножения доказательство аналогично.
3. Если $p < q$, то $p \in q^*, p \notin p^* \Rightarrow p^* < q^*$

   Если $p^* < q^*$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in q^*, r \notin p^* \Rightarrow p \leq r < q \Rightarrow p < q$

   Значит $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

$\square$

**Теорема 4.** Пусть $\alpha, \beta$ — сечения, $\alpha < \beta$. Тогда $\exists\, r^*$ — рациональное сечение : $\alpha < r^* < \beta$

**Доказательство.** $\alpha < \beta \Rightarrow \exists\, p : p \in \beta, p \notin \alpha$

Выберем такое $r > p$, так, что $r \in \beta$. Поскольку $r \in \beta, r \notin r^*$, то $r^* < \beta$

Поскольку $p \in r^*, p \notin \alpha$, то $\alpha < r^*$ $\square$

# Глава 1

# Вещественные числа

**Определение 4.** В дальнейшем сечения будут называться вещественными числами. Рациональные сечения будут отождествляться с рациональными числами. Все другие сечения будут называться иррациональными числами.

Таким образом, множество всех рациональных чисел оказывается подмножеством системы вещественных чисел.

**Теорема 5.** (Дедекинда) Пусть A и B — такие множества вещественных чисел, что:

1. $A \cup B = \mathbb{R}$
2. $A \cap B = \varnothing$
3. $A, B \neq \varnothing, A \neq B$
4. $\forall \alpha \in A, \beta \in B : a < b$

Тогда $\exists!\ \gamma \in \mathbb{R} : \alpha \leq \gamma \leq \beta\ \forall \alpha \in A, \forall \beta \in B$

**Доказательство.**

1. Докажем единственность.

   Пусть $\gamma_1, \gamma_2$ — два числа, причем $\gamma_1 < \gamma_2$. Тогда $\exists\ \gamma_3 : \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2 \Rightarrow \gamma_3 \in A, \gamma_3 \in B$ — противоречие. Значит $\gamma_1 = \gamma_2$.

2. Проверим, является ли $\gamma$ сечением.

   $\gamma = \{p \in \mathbb{Q} : \exists \alpha \in A : p \in \alpha\}$

   I. $\gamma \neq \varnothing$, т.к. $A \neq \varnothing$
      $\gamma \neq \mathbb{Q}$, т.к. $\exists q \in \mathbb{Q} : q \notin B \Rightarrow q \notin \gamma$

   II. Пусть $p_1 < p, p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p_1 \in \alpha \Rightarrow p_1 \in \gamma$

   III. Пусть $p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p \in \alpha$. Поскольку $\alpha$ — сечение, то $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \alpha, q > p \Rightarrow q \in \gamma$

   Ясно, что $\alpha \leq \gamma \forall \alpha \in A$.

Предположим, что $\exists \beta \in B : \beta < \gamma$. Тогда $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \gamma, q \notin \beta \Rightarrow \exists \alpha \in A : q \in \alpha \Rightarrow \alpha > \beta$ — противоречие. Значит $\gamma \leq \beta \,\forall\, \beta \in B$. □

## 1.1 Супремумы и инфимумы

**Определение 5.** $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \varnothing$
E - ограничено сверху, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq y$

**Определение 6.** $G \subseteq \mathbb{R}, G \neq \varnothing$
G - ограничено снизу, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \geq y$

**Замечание.** Если множество ограничено сверху и снизу, оно называется ограниченным.

**Определение 7.** Пусть E ограничено сверху. Тогда $y$ называется точной верхней границей (верхней гранью) E, если:

1. y — верхняя граница множества E.
2. если $x < y$, то x не является верхней границей множества E.

**Определение 8.** Пусть E ограничено снизу. Тогда $y$ называется точной нижней границей (нижней гранью) E, если:

1. y — нижняя граница множества E.
2. если $x > y$, то x не является нижней границей множества E.

**Определение 9.** Точная верхняя граница — $y \sup E$
Точная нижняя граница — $y \inf E$

**Пример.** E состоит из всех чисел $\frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда множество ограничено, верхняя грань равна 1 и принадлежит множеству, а нижняя равна 0 и множеству не принадлежит.

**Теорема 6.** Пусть E ограничено сверху. Тогда $\sup E$ существует.

**Доказательство.** Пусть есть множества:
$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in E : x > \alpha\}$
$B = \mathbb{R} \setminus A$
Тогда $A \cap B = \varnothing, A \cup B = \mathbb{R}, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$

$$\begin{cases} \beta \in B \\ \alpha \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in E : x \leq \beta \\ \exists x_0 \in E : x_0 > \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha < \beta$$

Ясно, что никакой элемент множества A не является верхней границей множества E, а любой элемент множества B является верхней границей множества E. Поэтому достаточно доказать, что B содержит наименьшее число.

По теореме Дедекинда: $\exists\gamma : \begin{cases} \alpha \le \gamma\ \forall\alpha \in A \\ \beta \le \gamma\ \forall\beta \in B \end{cases}$

Предположим, что $\gamma \in A$. Тогда $\exists x \in E : x > \gamma$.

Возьмем $\gamma_1 : \gamma < \gamma_1 < x \Rightarrow \gamma_1 \in A$ — противоречие.

Значит $\gamma \in B$. □

**Теорема 7.** Пусть E ограничено снизу. Тогда $\inf E$ существует.

**Доказательство.** Доказательство тривиально и предоставляется читателю в качестве упражнения $\odot\smile\odot$. □

**Теорема 8.** (Существование корня из вещественного числа) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n > 0\ \exists!\ y \in \mathbb{R}, y > 0 : y^n = x, y = \sqrt[n]{x}$

**Доказательство.** 1. Единственность.

Пусть $y_2 > y_1 : y_2^n = x = y_1^n \Rightarrow y_2^n - y_1^n = 0$

$\overset{>0}{(y_2 - y_1)} \cdot \overset{>0}{(y_2^{n-1} + y_2^{n-2} \cdot y_1 + \ldots + y_1^{n-1})} = 0$ — противоречие.

2. Существование.

Пусть $E = \{t \in \mathbb{R} : t \ge 0, t^n < x\}$

$0 \in E \Rightarrow E \ne \varnothing$

Положим $t_0 = 1 + x, t_0^n = (1+x)^n$

$\sum_{k=1}^n C_n^k x^k = 1 + nx + \underbrace{\ldots}_{>0} > x \Rightarrow E$ — ограничено сверху.

Пусть $y = \sup E$ (она существует по теореме о Существовании супремума).

- Допустим, что $y^n < x$. Возьмем $h : 0 < h < 1$ и $h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}$

  Тогда

$$(y+h)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k y^{n-k} h^k =$$

$$= y^n + \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^k =$$

$$= y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^{k-1} < y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} =$$

$$= y^n + h \cdot ((1+y)^n - y^n) < (y+1)^n - y^n < y^n + x - y^n = x$$

  — y не вехрняя граница.

- Допустим, что $y^n > x$. Возьмем $k : 0 < k < 1$, $k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$ и $k < y$. Тогда аналогично с $y^n < x$ получаем, что $y - k$ — верхняя граница E, что противоречит тому, что $y = \sup E$.

Значит $y^n = x$.

$\square$