Оглавление

Лекция 11: Таблица производных, экстремум, производные высших порядков.

16.11.2023

0.1 Таблица производных

Свойства. 1. c; $\mathbb{R}$
$c' = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$

2. x; $\mathbb{R}$
$x' = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$
Следствие: $(f(ax+b))' = f'(ax+b)(ax+b)' = af'(ax+b)$

3. x^2; $\mathbb{R}$
$(x^2)' = (x*x)' = x'*x + x*x' = 2x$
$n \geq 2 :\quad (x^n)' = nx^{n-1}, x \in \mathbb{R}$
$(x^{n+1})' = (x*x^n)' = x'x^n + x(x^n)' = x^n + xnx^{n-1} = (n-1)x^n$

4. $n \in \mathbb{N}$; x^{-n}; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$(x^{-n})' = (\frac{1}{x^n})' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$

5. e^x; $\mathbb{R}$
$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x$

6. $\ln x$; $x > 0$
$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln x + h - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln 1 + \frac{h}{x}}{h} = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{\ln 1 + \frac{h}{x}}{\frac{h}{x}} =$
$\frac{1}{x}$

7. $r \notin \mathbb{Z}; \quad x > 0$
$(x^r)' = (e^{r\ln x})' = (e^y)'(r\ln x)' \mid_{y=r\ln x} = e^{x\ln x}\frac{r}{x} = rx^{r-1}$

8. $sinx; \quad \mathbb{R}$
$(sinx)' = \lim \frac{sin(x+h) - sinx}{h} = \lim \frac{2sin\frac{h}{2}cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \lim\limits_{h\to 0} cos(x+\frac{h}{2}) * \lim\limits_{h\to 0} \frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = cosx$

9. $cosx; \quad \mathbb{R}$
$cosx = sin(x+\frac{\pi}{2})$
$(cosx)' = (sin(x+\frac{\pi}{2}))' = (siny)' \mid_{y=x+\frac{\pi}{2}} *1 = cos(x+\frac{\pi}{2}) = -sinx$

10. $tgx; \quad \mathbb{R} \setminus \cup_{n\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{2}+\pi n\}$
$(tgx)' = (\frac{sinx}{cosx})' = \frac{(sinx)'cosx - sinx(cosx)}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$

11. $ctgx; \quad \mathbb{R} \setminus \cup_{n\in\mathbb{Z}}\{\pi n\}$
$(ctg)' = (\frac{cosx}{sinx})' = \frac{(cosx)'sinx - cosx(sinx)'}{sin^2x} = \frac{-sin^2x - cos^2x}{sin^2x} = -\frac{1}{sin^2x}$

12. $arcsinx; \quad (-1,1)$
$f(x) = arcsinx; \quad g(y) = siny \mid_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$
$x \in (-1,1); \quad arcsinx = y \Leftrightarrow x = siny$
$(arcsinx)' = \frac{1}{(sint)' \mid_{t=y}} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $arccosx; \quad (-1,1)$
$f(x) = arccosx; \quad g(y) = cosy \mid_{[0,\pi]}$
$y = arccosx \Leftrightarrow x = cosy$
$(arccosx)' = \frac{1}{(cost)' \mid_{t=y}} = -\frac{1}{siny} = -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $arctgx; \quad \mathbb{R}$
$f(x) = arctgx; \quad g(y) = tgy \mid_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$
$y = arctgx \Leftrightarrow x = tgy$
$(arctgx)' = \frac{1}{(tgt)' \mid_{t=y}} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2y}} = cos^2y$
$x^2+1 = tg^2y+1 = \frac{sin^2y}{cos^2y}+1 = \frac{1}{cos^2y}$

$cos^2y = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

15. $arcctgx; \quad \mathbb{R}$

$f(x) = arcctgx; \quad g(y) = ctgy \mid_{(0,\pi)}$

$y = arcctgx; \quad x = ctgy \ (arcctgx)' = \dfrac{1}{(ctgt) \mid_{t=y}} = -\dfrac{1}{\dfrac{1}{sin^2y}} =$

$-sin^2y$

$x^2 + 1 = ctg^2y + 1 = \dfrac{cos^2y}{sin^2y} + 1 = \dfrac{1}{sin^2x}$

$sin^2y = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow (arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Определение 1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
$x_0 \in [a,b]$
x_0 – точка локального максимума f, если $\exists \omega(x_0) \mid \forall x in \omega(x_0) \cap [a,b]$
$f(x) \leq f(x_0)$

Определение 2. x_0 – точка строгого локального максимума, если $\forall x \neq x_0, x \in \omega(x_0) \cap [a,b]; \quad f(x) < f(x_0)$

Определение 3. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$
$x_1 \in [a,b]$
x_1 – точка локального минимума, если $\exists \omega_1(x_1) \mid \forall x \in \omega_1(x_1) \cap [a,b]$
$g(x) \geq g(x_1)$

Определение 4. x_1 – точка строгого локального минимума, если $\forall x \neq x_1, x \in \omega_1(x_1) \cap [a,b] \mid g(x) > g(x_1)$

Определение 5. $h : [a,b] \to \mathbb{R}$
$x_2 \in [a,b]$
x_2 – точка (строгого)локального экстренума (либо точка (строгого) локального минимума либо точка (строгого) локального максимума)

0.2 Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши

Теорема 1. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$
$x_0 \in (a,b)$
x_0 – локальный экстренум f

$\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$ (1)

Доказательство. x_0 – **локальный максимум**
$f \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 :$ при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (a, b)$
$f(x) \leq f(x_0)$ (2)
Пояснение: Пусть $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$
$0 < h < \varepsilon$
$(2) \Rightarrow f(x_0 + h) \leq f(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{h \to +0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$ (3)
$-\varepsilon < h < 0$
$(2) \Rightarrow f(x_0 + h) \leq f(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{h \to -0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ (4)
$(3), (4) \Rightarrow (1)$

x_0 – **локальный минимум** f
$g(x) = -f(x)$
$f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow -f(x) \leq f(x_0); \quad g(x) \leq g(x_0)$
x_0 – локальный максимум g
$\exists g'(x_0) = -f'(x_0)$
Только что доказано, что $g'(x_0) = 0$
$f'(x_0) = -g'(x_0) = 0$ □

Теорема 2. $f \in C([a, b])$
$\forall x \in (a, b); \quad \exists f'(x)$
$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$ (5)

Доказательство.

1. $f(x) = f(a) \forall x \in [a, b] \Rightarrow \forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$
2. $f(x) \not\equiv f(a) \Rightarrow x_1 \in (a, b) : f(x_1) \neq f(a)$
   $\not\equiv$ – нетождественна
   либо $f(x_1) > f(a)$ либо $f(x_1) < f(a)$

   Рассмотрим $f(x_1) > f(a)$
   Теорема 2 Вейерштрасса: $\exists x_0 \in [a, b] : \forall x \in [a, b] : f(x) \leq f(x_0)$ (6)
   в частности $(6) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_0)$ (7)
   $(7) \Rightarrow f(x_0) > f(a), f(x_0) > f(b) \Rightarrow x_0(a, b)$ (7')
   $\exists f'(x_0)$ (8)
   По теореме Ферма: (6)(7')(8) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

□

Теорема 3. $f \in C([a, b])$
$\forall x \in (a, b); \quad \exists f'(x)$
$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$ (1)

Доказательство. $g(x) = (f(x) - f(a))(b-a) - (f(b) - f(a))(x-a)$ (2)
(2) $\Rightarrow g \in C([a,b])$ (2')
(2) $\Rightarrow \forall x \in (a,b); \quad \exists g'(x)$
$g'(x) = (b-a)f'(x) - (f(b)-f(a))(x-a)' = (b-a)f'(x) - (f(b)-f(a))$ (3)
$g(a) = 0, g(b) = 0 \Rightarrow g(a) = g(b) = 0$ (4)
Применяя теореме Ролля: (2')(3)(4) $\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) : g'(x_0) = 0$ (5)
(3)(5) $\Rightarrow (b-a)f'(x_0) - (f(b)-f(a)) = 0 \Rightarrow$ (1) $\square$

Свойства. Из теоремы Ланrранжа
Пусть $f \in C([a,b]), \forall x \in (a,b) \exists f'(x)$ и $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(b) \neq f(a)$

Доказательство. Из теоремы Лагранжа $\exists x_0 \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$
$f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f(b) \neq f(a)$ $\square$

Теорема 4. $f \in C([a,b]), g \in C([a,b])$
$\forall x \in (a,b), \exists f'(x), \exists g'(x)$
$g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$
$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) : \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ (6)

Доказательство. $h(x) = (g(x)-g(a))(f(b)-f(a)) - (f(x)-f(a))(g(b)-g(a))$ (7)
(7) $\Rightarrow h \in C([q,b])$ (8)
(7) $\Rightarrow \forall x \in (a,b), \exists h'(x) = (f(b)-f(a))g'(x) - (g(b)-g(a))f'(x)$ (9)
(7) $\Rightarrow h(a) = 0, h(b) = 0 \Rightarrow h(a) = h(b) = 0$
По теореме Ролля (8)(9)(10) $\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) : h'(x_0) = 0$ (11)
(9)(11) $\Rightarrow (f(b)-f(a))g'(x_0) - (g(b)-g(a))f'(x_0) = 0$ (12)
(12) $\Leftrightarrow$ (6) $\square$

0.3 Производнае второго и более порядка

Определение 6. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$
$\forall x \in (a,b), \exists f'(x)$
$x_0 \in (a,b)$
$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$

Пусть $\exists (f')'(x_0)$
тогда $\exists f''(x_0) =^{def} (f')'(x_0)$
Пусть $\exists x \in (a,b), \exists f''(x)$
$f'' : (a,b) \to \mathbb{R}$
Пусть $\exists (f'')'(x_0) \Rightarrow f'''(x_0) =^{def} (f'')'(x_0)$

Обозначение: $f^{(2)}(x) = f''(x); \quad f^{(1)}(x) = f'(x); \quad f^{(3)}(x) = f'''(x)$

$f^{(n)}(x)$
$\forall x \in (a,b), \exists f^{(n)}(x)$
Пусть $\exists (f^{(n)})'(x_0) \Rightarrow f^{(n)} : (a,b) \to \mathbb{R}$
$\exists f^{(n+1)}(x_0) =^{def} (f^{(n)})'(x)$

Теорема 5. О линейности и аддитивности nнных производных
$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$
$\forall x \in (a,b), \exists f'(x), f^{(2)}(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$
$\exists g'(x), g^{(2)}(x), \ldots, g^{(n-1)}(x)$
$x_0 \in (a,b), \exists f^{(n)}(x_0), \exists g^{(n)}(x_0)$
$\Rightarrow (f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$
$c \in \mathbb{R}; \quad \exists (cf)^{(n)}(x_0) = cf^{(n)}(x_0)$

Доказательство. Индукция
База $n = 1: \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
$\forall x \in (a,b), \exists f'(x), f^{(2)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$
$\exists g'(x), g^{(2)}(x), \ldots, g^{(n)}(x)$
$\exists f^{(n+1)}(x_0), \exists g^{(n+1)}(x_0)$
$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x), x \in (a,b)$
$(f+g)^{(n+1)}(x_0) = ((f+g)^{(n)})'(x_0) = (f^{(n)} + g^{(n)})'(x_0) = (f^{(n)})'(x_0) + (g^{(n)})'(x_0) = f^{(n+1)}(x_0) + g^{(n+1)}(x_0)$

$n = 1; \quad (cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
$n \quad \forall x \in (a,b): \quad (cf)^{(n)}(x) = cf^{(n)}(x)$
$(cf)^{(n+1)}(x_0) = ((cf)^{(n)})'(x_0) = (cf^{(n)})'(x_0) = c(f^{(n)})'(x_0) = cf^{(n+1)}(x_0)$
□