

Математический анализ

Широков Николай Алексеевич¹

07.09.2023 - ...

¹"Записал Сергей Киселев, Гараев Тагир"

Оглавление

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Построение множества вещественных чисел | 2 |
| 1.1 | Множества | 2 |
| 1.2 | Сечения | 2 |
| 1.3 | Сумма сечений | 3 |
| 1.4 | Теоремы сечений | 4 |
| 2 | Вещественные числа | 8 |
| 2.1 | Супремумы и инфимумы | 9 |
| 2.2 | Неравенство Бернулли | 11 |
| 2.3 | Определение степени и логарифма | 11 |
| 3 | Последовательности | 13 |
| 3.1 | Сопоставление вещественным числам десятичных дробей . . . | 13 |
| 3.2 | Предел последовательности | 14 |
| 3.3 | Арифметические операции над пределами | 15 |
| 3.4 | Расширенное множество вещественных чисел | 16 |
| 3.5 | Бесконечные пределы | 17 |
| 3.6 | Единообразная запись определения пределов | 17 |
| 3.7 | Асимптотика | 19 |
| 3.8 | Монотонные последовательности | 19 |
| 3.9 | Число e | 21 |
| 3.10 | Критерий Коши, существование конечного предела последо- вательности | 23 |
| 3.11 | Подпоследовательности | 26 |
| 3.12 | Верхний и нижний предел последовательности | 29 |
| 3.13 | Свойства верхних и нижних пределов | 30 |
| 4 | Функции. Предел функции, монотонность, непрерывность | 33 |
| 4.1 | Предел функции | 33 |
| 4.2 | Односторонние пределы | 34 |
| 4.3 | Существование предела | 35 |
| 4.4 | Свойства пределов функции | 36 |

Глава 1

Построение множества вещественных чисел

Лекция 1: Введение

14.09.2023

1.1 Множества

Определение 1. Множества X и Y равны, если:

$$\forall a \in X : a \in Y$$

$$\forall b \in Y : b \in X$$

Определение 2. $X \subset Y$ если:

$$\forall a \in X : a \in Y$$

Определение 3. 1. $a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \vee a \in B$

$$2. a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \in B$$

$$3. a \in A \setminus B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \notin B$$

Определение 4. (Декартово произведение множеств)

$$A \times B = \{(a, b) : \forall a \in A, \forall b \in B\}; A, B \neq \emptyset$$

Определение 5. $F : A \rightarrow B$ - функция, такая, что: $\forall a \in A$ сопоставляет $b = F(a) \in B$

1.2 Сечения

Определение 6. Множество $\alpha \subset \mathbb{Q}$ называется сечением, если:

- I. $\alpha \neq \emptyset$

- II. если $p \in \alpha$, то $q < p \Leftrightarrow q \in \alpha$
- III. в α нет наибольшего

Пример. 1. $p^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < p\}$ - нет наибольшего

2. $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 0 \vee p > 0 \wedge p^2 < 2\}$

Теорема 1. (Утверждение 1)

Если $p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$, то $q > p$

Доказательство. Если $p \in \alpha$ и $q \leq p$, то из (II.) следует, что $q \in \alpha$ \square

Теорема 2. (Утверждение 2) $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

Доказательство. $\begin{cases} \alpha < \beta \Rightarrow \exists p \in \beta, p \notin \alpha \\ \beta < \gamma \Rightarrow \exists p \in \gamma, p \notin \beta \end{cases} \Rightarrow p < q \Rightarrow \alpha < \gamma$ \square

Теорема 3. Пусть α, β - сечения. Между ними существует одно из

нескольких отношений: $\begin{cases} \alpha < \beta \\ \beta > \alpha \\ \alpha = \beta \end{cases}$

Доказательство. Предположим, что $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$, тогда:

$$\begin{cases} \exists p \in \alpha, p \notin \beta \\ \exists q \in \beta, q \notin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p > q \\ q > p \end{cases} \text{ - Противоречие, тогда } \alpha \neq \beta \quad \square$$

1.3 Сумма сечений

Теорема 4. Пусть α, β - сечения, тогда:

$\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha, q \in \beta\}$ - тоже сечение.

Доказательство. • (I.) Пусть $\exists s \notin \alpha, \exists t \notin \beta$, тогда:

$$\forall p \in \alpha, q \in \beta : \begin{cases} p < s \\ q < t \end{cases} \Rightarrow p + q < s + t \Rightarrow \alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$$

• (II.)

$$r \in \alpha + \beta, r_1 < r$$

$$r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$$

$$r_1 = p + q_1, r_1 < r \Rightarrow q_1 < q \Rightarrow q_1 \in \beta \Rightarrow p + q_1 \in \alpha + \beta$$

• (III.)

$\exists p_1 \in \alpha, p > p_1 \Rightarrow p_1 + q > p + q = r, p_1 + q \in \alpha + \beta$ - нет наибольшего \square

Теорема 5. (Свойства суммы сечений)

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\gamma + \beta)$
3. $\alpha + 0^* = \alpha$, где $0^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}$

Доказательство. Свойства 1 и 2 справедливы в силу коммутативности и ассоциативности рациональных чисел.

Докажем свойство 3:

1. Пусть $p \in \alpha, q \in 0^*$, тогда: $p + q < p \Rightarrow p + q \in \alpha$, т.е. $\alpha + 0^* \subset \alpha$
2. Пусть $p \in \alpha$, тогда: $\exists p_1 > p \Rightarrow p_1 \in \alpha, p = p_1 + (p - p_1)$, при том $p_1 \in \alpha, p - p_1 \in 0^* \Rightarrow p \in \alpha + 0^* \Rightarrow \alpha \subset \alpha + 0^*$

$$\begin{cases} \alpha \subset \alpha + 0^* \\ \alpha + 0^* \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \alpha + 0^* \quad \square$$

1.4 Теоремы сечений

Теорема 6. (Теорема 2) Пусть α - сечение, $r \in \mathbb{Q}^+$, тогда $\exists p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$:
 q - не наименьшее верхнее (не входящее в сечение) число
 $q - p = r$

Доказательство. Пусть $p_0 \in \alpha, p_1 = p_0 + r$

1. Возможно, $p_1 \notin \alpha$, тогда:
 - (а) если p_1 - не наименьшее в верхнем классе, то $q = p_1$
 - (б) если же наименьшее, то $p = p_0 + \frac{r}{2}, q = p_1 + \frac{r}{2}$
2. Если $p_1 \in \alpha$, тогда:
 Положим $p_n = p_1 + nr$ для $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $\exists! m$:
 $p_m \in \alpha$ и $p_{m+1} \notin \alpha$
 - (а) Если p_{m+1} - не наименьшее в верхнем классе, то выберем $p = p_m, q = p_{m+1}$
 - (б) Если же наименьшее, то $p = p_m + \frac{r}{2}, q = p_{m+1} + \frac{r}{2}$

\square

Теорема 7. (Существование противоположного элемента) Пусть α - сечение, тогда $\exists! \beta : \alpha + \beta = 0^*$

Доказательство. (нужно доказать единственность и существование)

1. Докажем единственность: пусть $\exists \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющие условию, тогда:

$$\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1$$

2. Докажем существование: пусть

$$\beta = \{p : -p \notin \alpha, -p \text{ не является наименьшим в верхнем классе } \alpha\}$$

- (I.) Очевидно, что $\beta \neq \emptyset, \mathbb{Q}$
- (II.) Возьмем $p \in \beta, q < p \Leftrightarrow -q > -p \Rightarrow -q$ в верхнем классе α , но не наименьшее $\Rightarrow q \in \beta$
- (III.) Если $p \in \beta$, то $-p$ - не наименьшее в верхнем классе α , значит $\exists q : -q < -p$ и $-q \notin \alpha$

Положим $r = \frac{p+q}{2}$, тогда:

$$-q < -r < -p \Rightarrow -r \text{ - не наименьшее в верхнем классе } \alpha.$$

Значит, нашли такое $r > p$, что $r \in \beta$

Теперь проверим, что $\alpha + \beta = 0^*$:

1. Возьмем $p \in \alpha, q \in \beta$

$$\text{По определению } \beta : -q \notin \alpha \underset{\text{утв. 1}}{\Rightarrow} -q > p \Leftrightarrow p + q < 0 \Rightarrow p + q \in 0^* \Rightarrow \alpha + \beta \subset 0^*$$

2. Возьмем по Теореме (2) $q - p = r \Leftrightarrow p - q = -r \in 0^*$

$$\text{т.к. } q \notin \alpha, \text{ то } -q \in \beta, \text{ значит } p - q = p + (-q) \in \alpha + \beta \Rightarrow 0^* \subset \alpha + \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \subset 0^* \\ 0^* \subset \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 0^* \quad \square$$

Лекция 2: Сечения

21.09.2023

Теорема 8. Пусть α, β — сечения. Тогда $\exists! \gamma$ — сечение : $\alpha + \gamma = \beta$

Доказательство. Пусть имеем $\gamma_1 \neq \gamma_2$, удовлетворяющие условию. Тогда: $\alpha + \gamma_1 = \beta = \alpha + \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$ — противоречие.

Положим $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Тогда в силу свойств сечений имеем:

$$\alpha + \gamma = \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0^* + \beta = \beta \quad \square$$

Определение 7. Сечение γ , построенное в предыдущей теореме обозначается через $\beta - \alpha$

Определение 8. (Абсолютная величина) $|a| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geq 0^* \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0^* \end{cases}$

Определение 9. (Произведение) Пусть α, β — сечения, причем $\alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^*$

Тогда $\alpha\beta = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0 \vee r = pq, \text{ где } p \in \alpha, q \in \beta\}$

Пример. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^*$

Теорема 9. (Любые 3 из них необходимо доказать самостоятельно)
Для любых сечений α, β, γ имеем:

1. $\alpha\beta = \beta\alpha$
2. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
4. $\alpha 0^* = 0^*$
5. $\alpha 1^* = \alpha$
6. если $\alpha < \beta$ и $\gamma > 0^*$, то $\alpha\gamma < \beta\gamma$
7. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta : \alpha \cdot \beta = 1^*, \beta = \frac{1^*}{\alpha}$
8. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta, \gamma : \alpha \cdot \gamma = \beta, \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$

Теорема 10. (Свойства рациональных сечений)

1. $p^* + q^* = (p + q)^*$
2. $p^* q^* = (pq)^*$
3. $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

Доказательство. 1. Возьмем $r \in (p + q)^* \Rightarrow r < p + q$

Положим $h = p + q - r$:

$$\begin{cases} p_1 = p - \frac{h}{2} \\ q_1 = q - \frac{h}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in p^* + q^* \Rightarrow (p^* + q^*) \subset p^* + q^*$$

Теперь возьмем $r \in p^* + q^* \Rightarrow r = p_1 + q_1$:

$$\begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 < p + q \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in (p + q)^* \Rightarrow p^* + q^* \subset (p + q)^*$$

$$\begin{cases} p^* + q^* \subset (p + q)^* \\ (p + q)^* \subset p^* + q^* \end{cases} \Rightarrow p^* + q^* = (p + q)^*$$

2. Для умножения доказательство аналогично.

3. Если $p < q$, то $p \in q^*, p \notin p^* \Rightarrow p^* < q^*$

Если $p^* < q^*$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in q^*, r \notin p^* \Rightarrow p \leq r < q \Rightarrow p < q$

Значит $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

□

Теорема 11. Пусть α, β — сечения, $\alpha < \beta$. Тогда $\exists r^*$ — рациональное сечение :
 $\alpha < r^* < \beta$

Доказательство. $\alpha < \beta \Rightarrow \exists p : p \in \beta, p \notin \alpha$

Выберем такое $r > p$, так, что $r \in \beta$. Поскольку $r \in \beta, r \notin r^*$, то $r^* < \beta$

Поскольку $p \in r^*, p \notin \alpha$, то $\alpha < r^*$

□

Глава 2

Вещественные числа

Определение 10. В дальнейшем сечения будут называться вещественными числами. Рациональные сечения будут отождествляться с рациональными числами. Все другие сечения будут называться иррациональными числами.

Таким образом, множество всех рациональных чисел оказывается подмножеством системы вещественных чисел.

Теорема 12. (Дедекинда) Пусть A и B — такие множества вещественных чисел, что:

1. $A \cup B = \mathbb{R}$
2. $A \cap B = \emptyset$
3. $A, B \neq \emptyset, A \neq B$
4. $\forall \alpha \in A, \beta \in B : \alpha < \beta$

Тогда $\exists! \gamma \in \mathbb{R} : \alpha \leq \gamma \leq \beta \forall \alpha \in A, \forall \beta \in B$

Доказательство. 1. Докажем единственность.

Пусть γ_1, γ_2 — два числа, причем $\gamma_1 < \gamma_2$. Тогда $\exists \gamma_3 : \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2 \Rightarrow \gamma_3 \in A, \gamma_3 \in B$ — противоречие. Значит $\gamma_1 = \gamma_2$.

2. Проверим, является ли γ сечением.

$$\gamma = \{p \in \mathbb{Q} : \exists \alpha \in A : p \in \alpha\}$$

I. $\gamma \neq \emptyset$, т.к. $A \neq \emptyset$

$\gamma \neq \mathbb{Q}$, т.к. $\exists q \in \mathbb{Q} : q \notin B \Rightarrow q \notin \gamma$

II. Пусть $p_1 < p, p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p_1 \in \alpha \Rightarrow p_1 \in \gamma$

III. Пусть $p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p \in \alpha$. Поскольку α — сечение, то $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \alpha, q > p \Rightarrow q \in \gamma$

Ясно, что $\alpha \leq \gamma \forall \alpha \in A$.

Предположим, что $\exists \beta \in B : \beta < \gamma$. Тогда $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \gamma, q \notin \beta \Rightarrow \exists \alpha \in A : q \in \alpha \Rightarrow \alpha > \beta$ — противоречие. Значит $\gamma \leq \beta \forall \beta \in B$. \square

2.1 Супремумы и инфимумы

Определение 11. $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \emptyset$

E — ограничено сверху, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq y$

Определение 12. $G \subseteq \mathbb{R}, G \neq \emptyset$

G — ограничено снизу, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \geq y$

Замечание. Если множество ограничено сверху и снизу, оно называется ограниченным.

Определение 13. Пусть E ограничено сверху. Тогда y называется точной верхней границей (верхней гранью) E , если:

1. y — верхняя граница множества E .
2. если $x < y$, то x не является верхней границей множества E .

Определение 14. Пусть E ограничено снизу. Тогда y называется точной нижней границей (нижней гранью) E , если:

1. y — нижняя граница множества E .
2. если $x > y$, то x не является нижней границей множества E .

Определение 15. Точная верхняя граница — $y \sup E$

Точная нижняя граница — $y \inf E$

Пример. E состоит из всех чисел $\frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда множество ограничено, верхняя грань равна 1 и принадлежит множеству, а нижняя равна 0 и множеству не принадлежит.

Теорема 13. Пусть E ограничено сверху. Тогда $\sup E$ существует.

Доказательство. Пусть есть множества:

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in E : x > \alpha\}$$

$$B = \mathbb{R} \setminus A$$

Тогда $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

$$\begin{cases} \beta \in B \\ \alpha \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in E : x \leq \beta \\ \exists x_0 \in E : x_0 > \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha < \beta$$

Ясно, что никакой элемент множества A не является верхней гра-

ницей множества E , а любой элемент множества B является верхней границей множества E . Поэтому достаточно доказать, что B содержит наименьшее число.

По теореме Дедекинда: $\exists \gamma : \begin{cases} \alpha \leq \gamma \quad \forall \alpha \in A \\ \beta \geq \gamma \quad \forall \beta \in B \end{cases}$

Предположим, что $\gamma \in A$. Тогда $\exists x \in E : x > \gamma$.

Возьмем $\gamma_1 : \gamma < \gamma_1 < x \Rightarrow \gamma_1 \in A$ — противоречие.

Значит $\gamma \in B$. □

Теорема 14. Пусть E ограничено снизу. Тогда $\inf E$ существует.

Доказательство. Доказательство тривиально и предоставляется читателю в качестве упражнения $\odot \sim \odot$. □

Теорема 15. (Существование корня из вещественного числа) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n > 0 \exists! y \in \mathbb{R}, y > 0 : y^n = x, y = \sqrt[n]{x}$

Доказательство. 1. Единственность.

Пусть $y_2 > y_1 : y_2^n = x = y_1^n \Rightarrow y_2^n - y_1^n = 0$

$(y_2 - y_1) \cdot (y_2^{n-1} + y_2^{n-2} \cdot y_1 + \dots + y_1^{n-1}) = 0$ — противоречие.

2. Существование.

Пусть $E = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0, t^n < x\}$

$0 \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$

Положим $t_0 = 1 + x, t_0^n = (1 + x)^n$

$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = 1 + nx + \dots > x \Rightarrow E$ — ограничено сверху.

Пусть $y = \sup E$ (она существует по теореме о Существовании супремума).

- Допустим, что $y^n < x$. Возьмем $h : 0 < h < 1$ и $h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}$
Тогда

$$\begin{aligned} (y + h)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k y^{n-k} h^k = \\ &= y^n + \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^k = \\ &= y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^{k-1} < y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} = \\ &= y^n + h \cdot ((1+y)^n - y^n) < (y+1)^n - y^n < y^n + x - y^n = x \\ &\text{— } y \text{ не верхняя граница.} \end{aligned}$$

- Допустим, что $y^n > x$. Возьмем $k : 0 < k < 1$, $k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$ и $k < y$. Тогда аналогично с $y^n < x$ получаем, что $y - k$ — верхняя граница E , что противоречит тому, что $y = \sup E$.

Значит $y^n = x$.

□

Лекция 3: Степень, логарифм, десятичные дроби. Последовательности.

28.09.2023

2.2 Неравенство Бернулли

Теорема 16 (Неравенство Бернулли). Пусть $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$ неравенство очевидно. Пусть оно верно для $n = k$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку $kx^2 \geq 0$.

□

2.3 Определение степени и логарифма

Определение 16. Пусть $a > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$; $r = \frac{n}{m}$. Тогда

$$a^r = (a^{\frac{1}{m}})^n.$$

Если $m > 0$, то: $a^m = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ m

Если $m < 0$, то $x^m = \frac{1}{a^{|m|}}$.

Определение 17. Пусть $p \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$, $a > 1$

Тогда $a^p = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \neq 0, r < p\}$

$$a^0 = 1$$

Определение 18. Пусть $a > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$E = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < \alpha, r \neq 0\}$$

Тогда $\sup E = a^\alpha$.

И $\forall a \in \mathbb{R} : 0 < a < 1 : a^\alpha = (\frac{1}{a})^{-\alpha}$

Определение 19. Пусть $a > 0$, $a \neq 0$, $x > 0$. Тогда

Если $a > 1 : \log_a x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : a^r < x\}$.

Если $0 < a < 1 : \log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$

Теорема 17. (Без доказательства) Для степени и логарифма справед-

ливы все ранее встречавшиеся свойства. (имеется в виду школьный курс)

Глава 3

Последовательности

Определение 20. Пусть X — множество, $X \neq \emptyset$. Тогда последовательностью элементов множества X называется функция $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \dots; x_n \in X$ Последовательность — $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

3.1 Сопоставление вещественным числам десятичных дробей

Алгоритм. (Построение дроби по числу)

Рассматриваем только $x > 0, x \in \mathbb{R}$

Возьмем $n_0 \in \mathbb{Z}_+ : n_0 \leq x, n_0$ — максимальное число с таким свойством.

- Если $n_0 = x$ — алгоритм закончен.
- Если $n_0 < x$ — продолжаем: выбираем $n_1 \in \mathbb{Z} : n_0 + \frac{n_1}{10} \leq x$

Аналогично с n_0 , проверяем равенство с x . Так вплоть до n_k :

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} \leq x$$

Если ни на одном шаге равенство не выполняется, то задаем последовательность:

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = n_0, \frac{n_1}{10}, \frac{n_2}{10^2}, \dots$$

Теорема 18. (О супремуме десятичных дробей) Рассмотрим $E = \{r : r = \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k}, k \in \mathbb{N}\}$

Тогда $\sup E = x$ (из алгоритма).

Доказательство. Так как $n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} < x$, то $\sup E \leq x$

Предположим, что $\sup E < x$. Тогда $\exists r : r = x - \sup E > 0$.

Выберем такое k , что $\frac{1}{k \cdot 9} < r \Leftrightarrow k > \frac{1}{r \cdot 9}$.

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} < x < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k+1}{10^k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} > x - \frac{1}{10^k} > x - \frac{1}{9^k} > x - r = \sup E, \text{ значит}$$

$$x = \sup E$$

□

Лемма 1. (доказать самостоятельно) Пусть есть $E \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, E_a = \{x + a : x \in E\}$
Тогда $\sup E_a = a + \sup E$

Дальше шла какая-то теорема, смысл которой я не понял. Если найдете адекватную запись или сможете объяснить — пишите ☺ ◡ ☺

3.2 Предел последовательности

Определение 21. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Тогда $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$.

Замечание. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : |z - x| \leq |z - y| + |y - x|$

Определение 22. Пусть X — множество, функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$
 X — метрическое пространство, если: $\forall a, b \in X : \rho(a, b) \geq 0$
И выполнены следующие свойства:

1. $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$
3. $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b)$

Тогда ρ — метрика X .

Пример. \mathbb{R} — метрическое пространство, $\rho(x, y) = |x - y|$

Определение 23. Пусть X — метрическое пространство, $a \in X, \{x_n\}_{n=0}^{\infty}, x_n \in X$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < \varepsilon$

Теорема 19. (Единственность предела) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$,
то $a = b$

Доказательство. Пусть $a \neq b$. Тогда $\delta = \rho(a, b) > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$.

1. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a : \exists N_1 : \forall n > N_1 : \rho(x_n, a) < \varepsilon$
2. И так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b : \exists N_2 : \forall n > N_2 : \rho(x_n, b) < \varepsilon$.

Пусть $n = N_1 + N_2 + 1$. Тогда для n выполнены (1) и (2)
 Имеем $0 < \delta = \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{\delta}{2}$ — противоречие. \square

Теорема 20. (Ограниченность сходящейся последовательности) X — метрическое пространство с метрикой ρ

$x_n \in X, a \in X$ Пусть $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. Тогда $\exists R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, a) < R$

Доказательство. Возьмем

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < 1 \quad (1)$$

$$\text{Определим } R \text{ как } R = \max(\rho(x_1, a) + 1, \rho(x_2, a) + 1, \dots, \rho(x_N, a) + 1, 1) \quad (2)$$

Тогда:

- если $n > N$, то из (1) следует (2), значит $R \geq 1$
- если $1 \leq n \leq N$, то $R \geq \rho(x_n, a)$

В обоих случаях R удовлетворяет условию теоремы. \square

3.3 Арифметические операции над пределами

Свойства. Для $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, c \in \mathbb{R}$ справедливы следующие свойства:

$$1. \forall n \in \mathbb{N} : x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$2. c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \cdot a$$

$$3. x_n + y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$$

$$4. x_n \cdot y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b$$

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0, \forall n > 1 : |x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |cx_n - ca| = |c(x_n - a)| = |c||x_n - a| < |c|\varepsilon$$

$$3. \begin{cases} \forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon_1 \\ \forall \varepsilon_2 > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \varepsilon_2 \end{cases} \Rightarrow \text{при } n > N_1 + N_2 + 1 : \\ |x_n + y_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$4. \text{Аналогично (3) при } n > N_1 + N_2 + 1 : |x_n y_n - ab| = |x_n y_n - ay_n + ay_n - ab| \leq |x_n y_n - ay_n| + |ay_n - ab| = |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b|$$

т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то $\exists R : \forall n : |y_n| \leq R$ (из предыдущей теоремы)

$$\text{Тогда } |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| < \varepsilon_1 R + |a|\varepsilon_2$$

\square

Лекция 4: Продолжение

27.09.2023

Свойства. (Продолжение)

$$5 \quad x_n \neq c \quad \forall n, x_n \rightarrow a, a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{a}$$

$$6 \quad \begin{cases} x_n \rightarrow a \\ y_n \rightarrow b \end{cases} \text{ из п. 5} \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

$$7 \quad x_n \leq y_n \quad \forall n, x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b \Rightarrow a \leq b$$

Доказательство. (5, 6, 7)

5 I. Возьмем $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$, тогда:

$$\exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon_0 \Rightarrow |x_n| \geq |a| - |x_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$$

II. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon$

$N_0 = \max(N_1, N)$. При $n > N_0$ получаем:

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - x_n}{x_n \cdot a} \right| = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot |x_n - a| \underset{(I), (II)}{<} \frac{1}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} \cdot \varepsilon$$

6 $\frac{y_n}{x_n} = y_n \cdot \frac{1}{x_n}$ — далее по п. (4), (5).

7 Предположим, что $a > b$. Тогда $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon_0 \\ \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \varepsilon_0 \end{cases} \Rightarrow$
 $\forall n > N_1 + N_2 + 1 : y_n < \varepsilon_0 + b = b + \frac{a-b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon_0 <$
 $x_n \Rightarrow y_n < x_n$ — противоречие с условием.

□

Замечание. (Различные промежутки)

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток)
2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ — замкнутый промежуток
3. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ — полуоткрытый промежуток
4. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ — полуоткрытый промежуток

3.4 Расширенное множество вещественных чисел

Определение 24. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ — расширенное множество вещественных чисел. При этом:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x < +\infty, x > -\infty$$

Замечание. (Еще промежутки)

1. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
2. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
3. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
4. $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Свойства. (Продолжение свойств пределов)

$$8 \quad \begin{cases} \forall n : x_n \leq y_n \leq z_n \\ x_n \rightarrow a \\ z_n \rightarrow a \end{cases} \Rightarrow y_n \rightarrow a \text{ — теорема о двух милиционерах}$$

Доказательство. $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n > N_2 : |z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow z \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$
 $\forall n > \max(N_1, N_2) :$
 $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$

□

3.5 Бесконечные пределы

Определение 25. (Бесконечные пределы)

- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, если:
 $\forall L \in \mathbb{R} \exists N : \forall n > N : x_n > L$
- $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, если:
 $\forall L \in \mathbb{R} : \exists N : \forall n > N : y_n < L$
(возможно сокращение записи $n \rightarrow$ далее.)

3.6 Единообразная запись определения пределов

Определение 26. Окрестностью вещественного числа a называется любой интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ (обозначается как $\omega(a)$).

Определение 27. Окрестность $+\infty : (L, +\infty), L \in \mathbb{R}$
Окрестность $-\infty : (-\infty, L), L \in \mathbb{R}$

Определение 28. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $x_n \rightarrow a$, если:
 $\forall \omega(\alpha) : \exists N : \forall n > N : x_n \in \omega(\alpha)$

Свойства. (Доказать самостоятельно)

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a \rightarrow +\infty, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, b \rightarrow -\infty$, тогда:

1. $c > 0 : ca_n \rightarrow +\infty, cb_n \rightarrow -\infty$
 $c < 0 : ca_n \rightarrow -\infty, cb_n \rightarrow +\infty$
2. $x_n \rightarrow x, x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Rightarrow a_n + x_n \rightarrow +\infty$
 $y_n \rightarrow y, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \Rightarrow b_n + y_n \rightarrow -\infty$
3. Возьмем x_n, y_n из п. (2), тогда:
 $x > 0 \Rightarrow a_n x_n \rightarrow +\infty, b_n x_n \rightarrow -\infty$
 $y < 0 \Rightarrow a_n y_n \rightarrow -\infty, b_n y_n \rightarrow +\infty$
4. Если $\forall n : a_n \neq 0, b_n \neq 0$, тогда:
 $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$
 $\frac{1}{b_n} \rightarrow 0$
 Если $x_n > 0, x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$
 Если $x_n < 0, x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow -\infty$
5. $\forall n : x_n \leq y_n, x \rightarrow \alpha, y_n \rightarrow \beta; \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \alpha \leq \beta$
6. $\begin{cases} \forall n : x_n \leq y_n \leq z_n \\ x_n \rightarrow \alpha, \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \\ z_n \rightarrow \alpha \end{cases} \Rightarrow y_n \rightarrow \alpha$

Замечание. $+\infty = +\infty$

$$-\infty = -\infty$$

$$-\infty < +\infty$$

Доказательство. (2, 6)

$$2 \quad \begin{cases} x \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists M : \forall n : |x_n - x| < M \Rightarrow x_n > x - M \\ \forall L \in \overline{\mathbb{R}} : \exists N : \forall n > N : a_n > L \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n + x_n > L + x - M, \text{ где правая часть — любое число.}$$

$$6 \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n > N_2 : z_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

$$N_0 = \max(N_1, N_2)$$

$$\forall n > N_0 : x_n \leq y_n \leq z_n \Rightarrow y_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

□

3.7 Асимптотика

Определение 29. (О-большая и о-малая)

1. $x_n = o(1)$, если $x_n \rightarrow 0$
2. $y_n = O(1)$, если $\exists C : \forall n : |y_n| \leq C$
3. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n : b_n \neq 0$, тогда:
 $a_n = o(b_n)$, если $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$
4. Пусть есть $\{c_n\}, \{d_n\}$, тогда:
 $c_n = O(d_n)$, если $\exists C : |c_n| \leq C|d_n|$

Замечание. Это не равенство в привычном смысле, следует читать его только слева направо.

3.8 Монотонные последовательности

Определение 30. (монотонные последовательности)

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастает, если $\forall n : a_n \leq a_{n+1}$ (возрастает строго если $a_n < a_{n+1}$)
- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает, если $\forall n : b_n \geq b_{n+1}$

Замечание. Говорят, что последовательность c_n монотонна, если она либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает.

Теорема 21. (Теорема о пределе монотонной последовательности)

- Пусть есть последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Для того, чтобы монотонно возрастающая последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы последовательность была ограничена сверху.
- Для того, чтобы монотонно убывающая последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно, чтобы последовательность была ограничена снизу.

При этом справедливы неравенства:

- $\forall m : c_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ — если последовательность возрастает. (или $<$ если строго возрастает)
- $\forall m : c_m \geq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ — если последовательность убывает.

Доказательство. 1. Предположим, что последовательность c_n не ограничена сверху, тогда:

$$\forall L \in \mathbb{R} : \exists N : c_N > L$$

$$\forall n > N : c_n \geq c_{n-1} \geq c_{n-2} \geq \dots \geq c_N + 1 \geq c_N > L, \text{ значит } c_n > L$$

Значит по определению предела: $\lim c_n = +\infty$

2. Предположим теперь, что последовательность c_n возрастает и ограничена сверху, тогда:

$$\begin{cases} c_n \leq c_{n+1} \\ \exists M : \forall n : c_n \leq M \end{cases}$$

Пусть $E = \{c_n \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : c_n = c_n\}$ — множество из всех элементов последовательности c_n .

Значит E — ограничено сверху. Положим $C = \sup E$, тогда имеем $\forall n : c_n \leq C$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 : C - \varepsilon &\text{ — не верхняя граница, значит } \exists N : c_N > C - \varepsilon \Rightarrow \\ \forall n > N : c_n &\geq c_{n-1} \geq \dots \geq c_N > C - \varepsilon \Rightarrow C - \varepsilon < c_n \leq C < \\ C + \varepsilon &\Rightarrow |c_n - C| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C \end{aligned}$$

В обратную сторону: если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M : \forall n : |c_n - C| < M \Rightarrow \forall n : c_n \leq C + M$

3. Доказательство для убывающей последовательности аналогично. \square

Теорема 22. (Теорема о вложенных промежутках)

Пусть $\forall n : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ и $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Тогда $\exists ! c : \forall n : c \in [a_n, b_n]$

Доказательство. 1. существование

имеем неравенства:

$$\forall n : \begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \\ b_n \geq b_{n+1} \\ a_n < b_n \end{cases} \Rightarrow a_n < b_1, b_n > a_1$$

Тогда в силу возрастания a_n и убывания b_n по предыдущей теореме $\exists a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\exists b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

По свойству перехода к пределу в неравенствах: $a_n < b_n \Rightarrow a \leq b$

Имеем $\begin{cases} \forall n : a_n \geq a \\ \forall n : b \leq b_n \end{cases} \Rightarrow \forall n : b - a \leq b_n - a_n \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b - a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ — в силу условия.

Значит $b - a = 0 \Rightarrow a = b \stackrel{\text{def}}{=} c$

Имеем $a_n \leq c \leq b_n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$

2. Единственность

Если бы $\exists c_0 \in [a_n, b_n]$, то $|c_0 - c| \leq b_n - a_n \Rightarrow |c_0 - c| < \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow c_0 = c$

□

Замечание. Условие замкнутости промежутков существенно:

Имеем $(0, \frac{1}{n+1}] \supset (0, \frac{1}{n}]$, $\frac{1}{n} - 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Но $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}] = \emptyset$

3.9 Число e

Теорема 23. Пусть $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ и $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

Тогда $\forall n : x_n < y_n$ и $x_n \rightarrow e, y_n \rightarrow e, 2 < e < 3$

Доказательство. Рассмотрим:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^{n+1} \cdot (\frac{n}{n-1})^n = (\frac{n}{n+1})^n \cdot (\frac{n}{n+1})^n \cdot (\frac{n}{n-1})^n =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2-1+1}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n$$

Возьмем за $x = \frac{1}{n^2-1}$, тогда по неравенству Бернулли:

$$\frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n > \frac{1}{n+1} \cdot (1 + \frac{n}{n^2-1}) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^2-1+n}{n^2-1} =$$

$$\frac{n^3 + n^2 - n}{n^3 + n^2 - n - 1} > 1$$

$\Rightarrow y_n < y_{n-1} \Rightarrow y_n$ — строго монотонно убывающая.

Теперь рассмотрим x_n : (считаем, что $n \geq 3$)

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \\
&= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{(n-k+1) \cdot \dots \cdot n}{k! \cdot n^k} = \\
&= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

(Продолжение на следующей лекции)

□

Лекция 5: Продолжение

Доказательство. (Продолжение доказательства)

05.10.2023

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \quad (2)$$

$$\forall r > 0 : 1 - \frac{r}{n+1} > 1 - \frac{r}{n} \Rightarrow \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (1)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x_{n+1} > x_n$$

Примем во внимание неравенства для y_n и неравенства для x_n . Тогда мы будем иметь следующее неравенство:

$$\Rightarrow x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n < y_{n-1} < \dots < y_1 \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow x_n < y_1, y_n > x, \forall n \quad (5)$$

Последовательность x_n строго возрастает и ограничена сверху. Мы можем применить критерий существования конечного предела у строго монотонной возрастающей последовательности.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Если мы посмотрим на последовательность y_n , она ограничена снизу в отношении пяти и мы знаем что она строго монотонно убывает. По теореме о предельной последовательности получаем, что:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Теперь,

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Таким образом,

$$a = b = e \quad (6)$$

$$(6) \Rightarrow x_n < e < y_n \forall n \quad (7)$$

$$(7) \Rightarrow e > x_1 = 2, e < y_5 < 3$$

$$y_5 = (\frac{6}{5})^6$$

$$e = 2.718...$$

□

Замечание. Число e — одно из фундаментальных констант на которой держится вся математика.

Первые две - это 0 и 1. А третья — это π

3.10 Критерий Коши, существование конечного предела последовательности

Теорема 24. Пусть имеется некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для того чтобы $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall m, \forall n > N :$

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad (8)$$

Замечание. В формулировке не сказано чему будет равен этот предел. Какой именно он будет - неизвестно. Известно только то что он существует. Это так называемая теорема существования.

Примечание. Необходимость означает что предел существует.

Доказательство. Докажем необходимость. Предположим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in \mathbb{R}$$

Тогда, по определению предела для любого $\varepsilon > 0 \exists N$ такой, что $\forall n > N$ выполнено

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

Тогда,

$$(9) \Rightarrow \text{при } n > N, m > N$$

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow (8)$$

То-есть, необходимость доказана. Если конечный предел существует, то соотношение 8 выполнено.

Теперь докажем достаточность.

Когда мы будем доказывать достаточность, то мы не знаем, существует предел или нет.

Замечание. Не каждая последовательность имеет предел (например, $x_n = -1^n$).

Для доказательства мы будем использовать теорему Дедекинда. Определим сечение множества вещественных чисел. Нижний класс A — это

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists N : \forall n > N : x_n > \alpha\} \quad (10)$$

Верхний класс A' — это

$$A' = \mathbb{R} \setminus A \quad (10')$$

Множества, получившиеся в (10) и (10') — это сечения, и это нужно проверить.

- Возьмём $\varepsilon = 1$, тогда: $\exists N_0 : \forall m, n > N_0 : |x_m - x_n| < 1$

В частности, при $m = N + 1$ и при $n > N + 1$ имеем

$$|x_n - x_{N+1}| < 1 \Leftrightarrow x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1 \quad (11)$$

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} - 1 \in A \quad (12)$$

С другой стороны,

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} + 1 \notin A, \text{ то-есть, } x_{N+1} + 1 \in A' \quad (13)$$

$$(12), (13) \Rightarrow A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$$

- Никакое из них не может быть множеством вещественных чисел.

Давайте возьмём $\forall \alpha \in A, \forall \beta \in A'$. Нужно доказать, что α всегда меньше β . В этом состоит условие определения сечения.

$$\alpha \in A = (10) \Rightarrow \exists N : \forall n > N : x_n > \alpha \quad (14)$$

Если бы для любого $\forall n > N$ выполнялось $x_n > \beta$, то $\beta \in A$. Однако, это не так, т.к. $\beta \in A'$.

То-есть,

$$\exists n_0 > N : x_{n_0} \leq \beta \quad (15)$$

Примечание. Если бы всё время неравенство было в другую сторону ($x_n > \beta$), тогда бы по определению (10), мы бы получили, что $\beta \in A$, но мы взяли $\beta \in A'$, то есть $\beta \notin A$, значит свойства выше выполняться не может и выполняется свойство (15).

$$(14), (15) \Rightarrow \alpha \leq x_{n_0} \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta$$

То-есть, мы действительно получили сечение.

Теперь можно применить теорему Дедекинда. По теореме Дедекинда:

$$\exists a \in R : \forall \alpha \in A, \forall \beta \in A' : \alpha < a < \beta \quad (16)$$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$, тогда:

$$(8) \Rightarrow \exists N \text{ такое, что выполнено (8)}$$

$$m = N + 1$$

Тогда, (8) $\Rightarrow \forall n > N + 1$

$$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x_{N+1} - \varepsilon, x_{N+1} + \varepsilon) \quad (17)$$

Теперь, если посмотреть на соотношение (17),

$$(17) \Leftrightarrow x_n > x_{N+1} - \varepsilon \text{ и } x_n < x_{N+1} + \varepsilon \quad (18)$$

Примечание. при $\forall n > N + 1$, выполнена правая часть неравенства (17) $x_n > x_{N+1} - \varepsilon$.

Теперь рассмотрим (10) и (18).

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \in A \quad (19)$$

Теперь обратимся ко второму неравенству в соотношении (18).

Получается, что правая часть неравенства $x_n < x_{N+1}$ принадлежит A' , потому что если бы принадлежало A , должно было бы быть другое неравенство в другую сторону

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon \in A' \quad (20)$$

Возьмём (19) $\Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon$ как α ,

а (20) $\Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon$ как β ,

Тогда, применяем (16), получаем что:

$$(16), (19), (20) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \leq a \leq x_{N+1} + \varepsilon \quad (21)$$

Обратимся к соотношению (17)

$$(17) : x_{N+1} < x_n < x_{N+1} + \varepsilon$$

Получаем, что a удовлетворяет этому неравенству и x_n удовлетворяет этому неравенству (лежит на промежутке) при $\forall n > N + 1$.

Поэтому, (21) и (17) \Rightarrow

$$|x_n - a| < 2\varepsilon = (x_{N+1} + \varepsilon) - (x_{N+1} - \varepsilon) \quad (22)$$

Примечание. То-есть, если x_n и a лежат на этом промежутке, то длина отрезка между a и x_n меньше чем длина промежутка, на котором они лежат. Длина промежутка равна 2ε

Мы получили, что существует некоторое a такое, что для любого $n > N+1$ выполняется неравенство (22). А это определение предела.

По определению предела,

$$(22) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Тем самым, достаточность в критерии доказана. \square

3.11 Подпоследовательности

Определение 31. Пусть есть отображение $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ и нетождественное отображение $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. При этом выполняется: $\forall n < m : g(n) < g(m)$

Тогда последовательность отображений $f(g) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ — подпоследовательность.

Примечание. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Берем $g(1) = n_1, g(2) = n_2, \dots, g(k) = n_k$ и получаем подпоследовательность:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$$

Обозначение. Если эти номера определены, то последовательность обозначают как: $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

Определение 32. Предел последовательности определяется как предел подпоследовательности по нижним индексам.

Если есть такая последовательность, говорят что:

$A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом, то есть $x_{n_k} \rightarrow A$, при $k \rightarrow \infty$, если $\forall \Omega(A) \exists K : \forall k > K : x_{n_k} \in \Omega(A)$

Теорема 25. Пусть $x_n \rightarrow A$, при $n \rightarrow \infty$, где $A \in \overline{\mathbb{R}}$ и пусть мы имеем любую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, выбранную из этой последовательности.

Тогда $x_{n_k} \rightarrow A$, при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Возьмём любую окрестность A .

$$\forall \Omega(A) \Rightarrow \exists N : \forall n > N : x_n \in \Omega(A)$$

Воспользуемся тем, что последовательность n_k строго возрастает:

$$n_1 \geq 1, n_2 > n_1, n_2 \geq 2$$

Тогда по индукции:

$$n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > n_k \geq k \rightarrow n_{k+1} > k + 1$$

То есть, если мы выберем подпоследовательность, то n_k будет больше или равно k . Начиная с какого-то индекса, будет строго больше.

Возьмём $k = N$.

Тогда, при $k > N : n_k \geq k > N$

То есть, при $k > N : x_{n_k} \in \Omega(A)$

$$\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow A, \text{ при } k \rightarrow \infty$$

□

Теорема 26. (Больцано-Вейерштрасса)

Пусть имеется некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая ограничена, т.е. $\forall n : a \leq x_n \leq b$.

Тогда: $\exists \alpha \in [a, b]$ и $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что: $x_{n_k} \rightarrow \alpha$ при $k \rightarrow \infty$

Замечание. Такое α может быть только одним, если последовательность ограничена и имеет некоторый предел.

Доказательство. определим последовательность промежутков.

$$I_1 = [a, b]$$

$$I'_2 = [a, \frac{a+b}{2}], I''_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$$

Рассмотрим множества номеров n :

$$\begin{cases} \text{таких, что } : x_n \in I'_2 \\ \text{таких, что } : x_n \in I''_2 \end{cases} \quad \text{— какое-то из них, или оба бесконечны}$$

Если бы первое и второе множество n выше было конечно, то мы получили бы, что последовательность, лежащая в I_1 конечна, что противоречит условию. Тогда возьмем I_2 — одно из множеств из I'_1, I''_2

Примечание. Это может быть либо I'_1 , либо I'_2 , либо I''_2 если оба удовлетворяем, то любой возьмем. Произвольно. Можно например всегда брать только I'_2 , но по крайней мере для одного, таких номеров будет бесконечно много.

Имеется некоторое множество натуральных чисел, таких что x_n принадлежит I_2

Пусть n_1 - минимальное $n : x_n \in I_2$

Возьмем $I_2 = [a_2, b_2]$ и поделим этот отрезок на:

$$I'_3 = [a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$$

$$I''_3 = [\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$$

По крайней мере в одном из этих отрезков тоже будет находиться бесконечное множество номеров n .

Пусть I_3 - тот из I'_3, I''_3 , для которого \exists бесконечно n таких что $x_n \in I_3$

n_2 - минимальное n такое, что $x_n \in I_3$, и $n_2 > n_1$.

И так далее по индукции. Предположим, что мы уже выбрали промежутки

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_m \quad (3')$$

$$I_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b-a}{2^k} \right) \quad (3')$$

$= I_k$

$$n_1 < n_2 < \dots n_m < n_{m+1} \quad (4)$$

$$x_{n_1} \in I_2, x_{n_2} \in I_2, \dots x_{n_{m-1}} \in I_m \quad (5)$$

Предположим, что по индукции такое построение уже произошло

Пусть

$$I_m = [a_m, b_m] \quad (6)$$

Существует бесконечно много n , таких что

$$x_n \in I_m \quad (7)$$

Предположим, что это сделано для n и будем выполнять индукционный шаг.

$$I'_{m+1} = [a_m, \frac{a_m + b_m}{2}]$$

$$I''_{m+1} = [\frac{a_m + b_m}{2}, b_m]$$

Мы снова взяли и разделили промежуток $[a_m, b_m]$ пополам.

Рассмотрим множество номеров n таких, что $x_n \in I'_{m+1}$

и n такие что $x_n \in I''_{m+1}$

Тогда по определению I_{m+1} - тот из I'_m, I''_m , для которого \exists бесконечно много n таких что $x_n \in I_{m+1}$

Пусть n_{m+1} - это наименьшее n такое что $x_{n_m} \in I_{m+1}$ и $n_{m+1} > n_m$

И так мы получили в итоге этих рассуждений:

$$n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$$

$$x_{n_m} \in I_{m+1}$$

$$(3) \Rightarrow \text{длина } I_m \rightarrow 0, \text{ при } m \rightarrow \infty \quad (8)$$

Получается, что это вложенные промежутки.

По теореме о вложенных промежутках:

$$\exists! \alpha \text{ такое что } \alpha \in I_m \forall m \quad (9)$$

$$(5) \Rightarrow x_{n_m} \in I_{m+1}$$

Точка α лежит на этом промежутке и точка с номером x_{n_m} лежит на этом же промежутке, справедливо неравенство:

$$|x_{n_m} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^m} \quad (10)$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists k : \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \quad (11)$$

$$(10), (11) \Rightarrow |x_{n_m} - \alpha| < \varepsilon \text{ при } m > k$$

Таким образом мы доказали, что существует подпоследовательность у которой есть конечный предел.

$$a \in I_1, \text{ т.е. } a \leq \alpha \leq \varepsilon$$

□

3.12 Верхний и нижний предел последовательности

Определение 33. Пусть есть произвольная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху, то верхний предел

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} := +\infty$$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху, то верхний предел

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{x_m : m \geq n\})$$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена снизу, то нижний предел

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} := -\infty$$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу, то нижний предел

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} := \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf \{x_m : m \geq n\})$$

Таким образом, если мы рассматриваем любую последовательность x_n , то у неё существуют верхний и нижний предел.

Замечание. Нижний и верхний пределы в дальнейшем будут обозначаться как \liminf и \limsup соответственно. (простите, так удобней)

3.13 Свойства верхних и нижних пределов

Замечание. Пусть есть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определим E_n как множество $\{x_m : m \geq n\}$, $h_n = \inf E_n$, $g_n = \sup E_n$. Справедливо неравенство:

$$h_n \leq g_n, \text{ откуда получаем: } \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Теорема 27. Есть некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (13)$$

Доказательство. Предположим, что существует предел. Хотим проверить, что верхний предел равен нижнему пределу.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$$

Посмотрим на определение g_n и h_n .

$$(14) \Rightarrow \text{при } n > N : E_n \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup x_n - \liminf x_n \leq 2\varepsilon \quad (15)$$

Получается, что некоторое не отрицательное число не превосходит 2ε при любом положительном ε . Это может быть только тогда, когда это число равно 0.

$$(15) \Rightarrow \limsup x_n = \liminf x_n = \lim x_n$$

В обратную сторону:

$$\forall n : g_n \leq a, h_n \geq a$$

Рассмотрим последовательности g_n, h_n , такие, что:

$$g_n \rightarrow a, h_n \rightarrow a$$

По определению предела: $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : a - \varepsilon < g_n < a + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : a - \varepsilon < h_n < a + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$
 $a - \varepsilon < \inf E_n \leq \sup E_n < a + \varepsilon$
 При $N = \max(N_1, N_2)$ из этого следует, что $\forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$

а это значит, что: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \limsup x_n = \liminf x_n$

□

Лекция 6: Верхний и нижний пределы. Предел функции.

12.10.2023

Теорема 28. (свойства пределов) Пусть есть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\exists N : \forall n > N : a_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \varepsilon \quad (1)$$

$$\forall N \exists n > N : a_n > \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n - \varepsilon \quad (2)$$

$$\exists N_2 : \forall n > N_2 : a_n > \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n - \varepsilon \quad (3)$$

$$\forall N_3 \exists n > N_3 : a_n < \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \varepsilon \quad (4)$$

Доказательство. (Все пределы при $n \rightarrow \infty$)

Докажем только (1) и (2), другие свойства доказываются аналогично.

1. Возьмем $E_n = \{a_m : m \geq n\}$ и $g_n = \sup E_n$.

Тогда $\limsup a_n = \lim g_n$, и $\forall n : a_n \leq g_n$.

При этом $\exists N : \forall n > N : g_n < g_n + \varepsilon$

Имеем $\forall n > N : a_n \leq g_n < g_n + \varepsilon = \limsup a_n + \varepsilon$

2. Имеем $g_N = \sup E_N$ и $g_{N+1} \geq g_N$,

значит $\exists a_n \in E_{N+1} : a_n \geq g_N > g_N - \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n > \limsup a_n - \varepsilon$

□

Свойства. (Без доказательств)

Пусть есть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда:

$$\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \limsup a_n$$

$$\exists \{a_{n_l}\}_{l=1}^{\infty} : a_{n_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \liminf a_n$$

Теорема 29. (Последнее свойство) Пусть есть подпоследовательность

$$\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} : \exists \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Доказательство. Пусть $h_n = \inf E_n, g_n = \sup E_n$. Имеем неравенство:

$$h_{n_m} \leq a_{n_m} \leq g_{n_m} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} h_{n_m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} g_{n_m}$$

В силу существования пределов у последовательностей g_n, h_n имеем:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

□

Глава 4

Функции. Предел функции, МОНОТОННОСТЬ, непрерывность

4.1 Предел функции

Определение 34. Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ , $\alpha \in X$. Окрестностью точки α называется:
$$\omega(\alpha) = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 : \rho(x, \alpha) < \varepsilon\}$$

Определение 35. α — точка сгущения множества X , если:
$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1 \in X : x_1 \neq \alpha \wedge \rho(x_1, \alpha) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \omega(\alpha) \exists x_1 \in \omega(\alpha), x_1 \neq \alpha$$

Определение 36. α — точка сгущения для $E \subset \mathbb{R}$, если:
$$\forall \omega(\alpha) \exists b \in (E \cap \omega(\alpha)), b \neq \alpha$$

Пример. $E = \mathbb{N}, +\infty$ — точка сгущения для E .

Теорема 30. Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ , $\alpha \in X$ — точка сгущения, тогда:

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha, \forall x_n : x_n \neq \alpha, x_n \in X$$

Доказательство. Возьмем $x_1 \neq \alpha$, пусть $\varepsilon_1 = \rho(x_1, \alpha) > 0$. $\exists x_2 \neq \alpha : \rho(x_2, \alpha) < \frac{1}{2}\varepsilon_1$. Положим $\varepsilon_2 = \rho(x_2, \alpha)$.

Пусть уже выбрали выбрали x_1, \dots, x_n так, что $x_k \neq \alpha, 2 \leq k \leq n, \varepsilon_k = \rho(x_k, \alpha) < \frac{1}{2}\varepsilon_{k-1}$

Тогда $\exists x_{n+1} \neq \alpha : \rho(x_{n+1}, \alpha) < \frac{1}{2}\varepsilon_n$.

Имеем $\varepsilon_n < \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1} < \frac{1}{2^2}\varepsilon_{n-2} < \dots < \frac{1}{2^{n-1}}\varepsilon_1$, т.е. $\rho(x_n, \alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$ \square

Определение 37. (Предел функции) Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\rho, \alpha \in X$ — точка сгущения, определена функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $A \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = A, \text{ если выполнено:}$$

$$\forall \omega(A) \exists \Omega(\alpha) : \forall x \in \Omega(\alpha), x \neq \alpha : f(x) \in \omega(A)$$

Теорема 31. (единственность предела) Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\rho, \alpha \in X$ — точка сгущения, определена функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда:

$$\exists! A \in \overline{\mathbb{R}} : \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = A$$

Доказательство. Предположим, что есть $A, B \in \overline{\mathbb{R}}, B \neq A$ и

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = B.$$

$$\text{Тогда: } \exists \omega_1(A), \omega_2(B) : (\omega_1(A) \cap \omega_2(B)) = \emptyset$$

$$A \text{ также: } \begin{cases} \exists \Omega_1(\alpha) : \forall x \in \Omega_1(\alpha) : f(x) \in \omega_1(A) \\ \exists \Omega_2(\alpha) : \forall x \in \Omega_2(\alpha) : f(x) \in \omega_2(B) \end{cases}$$

$$\text{Рассмотрим } \Omega(\alpha) = \Omega_1(\alpha) \cap \Omega_2(\alpha):$$

$$\exists x \in \Omega(\alpha), x \neq \alpha : \begin{cases} f(x) \in \omega_1(A) \\ f(x) \in \omega_2(B) \end{cases} \quad \text{— противоречие, т.к. } \omega_1(A) \cap \omega_2(B) = \emptyset.$$

\square

4.2 Односторонние пределы

Определение 38. Пусть есть $E = (p, q), p, q \in \mathbb{R}, a \in E, E_- = (p, a), E_+ = (a, q)$

А также определены функции:

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$f_- : E_- \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_-(x) = f(x), \text{ при } x \in E_-$$

$$f_+ : E_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_+(x) = f(x), \text{ при } x \in E_+$$

Тогда пределом справа функции f в точке a называется:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = c_+$$

А пределом слева функции f в точке a называется:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c_-$$

Теорема 32. (обозначения из определения выше)

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

Доказательство.

\Rightarrow : Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$. Тогда:

$$\forall \omega(c) \exists \Omega(a) : \forall x \in \Omega(a) \cap E, x \neq a : f(x) \in \omega(c)$$

$$\text{При этом } \begin{cases} \Omega(a) \cap E_+ \in \Omega(a) \cap E \\ \Omega(a) \cap E_- \in \Omega(a) \cap E \end{cases}$$

$$\text{Значит получаем } \begin{cases} \forall x \in \Omega(a) \cap E_+ : f(x) \in \omega(c) \\ \forall x \in \Omega(a) \cap E_- : f(x) \in \omega(c) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

\Leftarrow : Пусть $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c$. Тогда:

$$\begin{cases} \forall \omega(c) \exists \Omega_1(a) : \forall x \in \Omega_1(a) \cap E_+, x \neq a : f(x) \in \omega(c) \\ \forall \omega(c) \exists \Omega_2(a) : \forall x \in \Omega_2(a) \cap E_-, x \neq a : f(x) \in \omega(c) \end{cases}$$

$$\text{Возьмем } \Omega(a) = \Omega_1(a) \cap \Omega_2(a)$$

$$\text{Имеем } ((\Omega_1(a) \cap E_+) \setminus \{a\}) \cup ((\Omega_2(a) \cap E_-) \setminus \{a\}) = ((\Omega(a) \cap E) \setminus \{a\})$$

$$\text{Тогда справедливо: } \forall x \in \Omega(a) \cap E, x \neq a : f(x) \in \omega(c)$$

□

4.3 Существование предела

Теорема 33. (Соответствие предела функции пределу последовательности) Пусть есть X — метрическое пространство с метрикой ρ , $\alpha \in X$ — точка сгущения, определена функция $F : X \rightarrow \mathbb{R}$.

И пусть $E \subset \mathbb{R}$, a — точка сгущения, определена функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Рассмотрим последовательности:

$$\{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}, x_n \rightarrow \alpha, \forall n : x_n \neq \alpha$$

$$\{f(b_n)\}_{n=1}^{\infty}, b_n \rightarrow a, \forall n : b_n \neq a$$

Тогда:

$$\exists \lim_{x \rightarrow \alpha} F(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\} : F(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

$$\exists \lim_{b \rightarrow a} f(b) = c \Leftrightarrow \forall \{b_n\} : f(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$$

Доказательство. (Будем доказывать для метрического пространства, для множества E доказательство аналогично)

\Rightarrow : Пусть $\lim_{x \rightarrow \alpha} F(x) = A$. Тогда:

$$\forall \omega(A) \exists \Omega(\alpha) : \forall x \in \dot{\Omega}(\alpha) : F(x) \in \omega(A)$$

Поскольку $x_n \rightarrow \alpha$, то $\exists N : \forall n > N : x_n \in \Omega(\alpha)$

Имеем, что $\forall n > N : F(x_n) \in \omega(A) \Rightarrow F(x_n) \rightarrow A$

\Leftarrow : Предположим, что $\forall \{x_n\} : F(x_n) \rightarrow A$ — неверно. Тогда:

$$\exists \omega_0(A) : \forall \Omega_0(\alpha) \exists x \in \dot{\Omega}_0(\alpha) : F(x) \notin \omega_0(A)$$

Будем брать $\Omega_{1/n}(\alpha) = \{x \in X : \rho(x, \alpha) < \frac{1}{n}\}$

$$\exists x_n \in \dots \Omega_{1/n}(\alpha) : F(x) \notin \omega_0(A)$$

Это означает, что $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \Rightarrow F(x_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ — противоречие.

□

4.4 Свойства пределов функции

Свойства. (обозначения как в теореме выше) Для метрического пространства и для множества E :

1. $F(x) \equiv A \Rightarrow F(x) \rightarrow A, A \in \overline{\mathbb{R}}$
2. $\lim qF(x) = q \lim F(x), q \in \mathbb{R}$
3. $\lim(F(x) + G(x)) = \lim F(x) + \lim G(x)$
4. $\lim(F(x) \cdot G(x)) = \lim F(x) \cdot \lim G(x)$
5. $\lim \frac{1}{F(x)} = \frac{1}{\lim F(x)}$, если $\lim F(x) \neq 0$
6. $\lim \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\lim F(x)}{\lim G(x)}$, если $\lim G(x) \neq 0$
7. $\forall x : F(x) \leq G(x) \Rightarrow \lim F(x) \leq \lim G(x)$
8. $F(x) \leq G(x) \leq H(x)$ и $\lim F(x) = \lim H(x) \Rightarrow \exists \lim G(x) = \lim F(x)$

UPD: для множества E свойства аналогичны.

Доказательство. Все эти свойства доказываются аналогично свойствам пределов последовательностей, так как была доказана теорема о соответствии предела функции пределу последовательности.

Докажем 5 свойство для метрического пространства:
Возьмем последовательность $\{x_n\}$ из теоремы.

По теореме: $F(x_n) \rightarrow A, A \neq 0$

Получаем, что $\forall n : F(x_n) \neq 0 \Rightarrow \lim_{F(x_n)} \frac{1}{F(x_n)} = \frac{1}{A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{F(x)} = \frac{1}{A}$$

□