Оглавление

Лекция 3: Продолжение

27.09.2023

0.1 Перебор перестановок в лекцикографическом порядке (другой способ)

Алгоритм. Будем брать элементы $(t_1, \ldots, t_k)$ из T_k и сопоставлять им перестановки так, как делали ранее. Переход к следующей перестановке осуществляется путем прибавления единицы к $(t_1, \ldots, t_k)$. (причем последний элемент в $(t_1, \ldots, t_k)$ всегда ноль, т.к. ничего не значит)

Пример. (для P_4)

num	t	p
0	(0, 0, 0, 0)	(1, 2, 3, 4)
1	(0, 0, 1, 0)	(1, 2, 4, 3)
2	(0, 1, 0, 0)	(1, 3, 2, 4)
3	(0, 1, 1, 0)	(1, 3, 4, 2)
4	(0, 2, 0, 0)	(1, 4, 2, 3)
5	(0, 2, 1, 0)	(1, 4, 3, 2)
6	(0, 3, 0, 0)	(2, 1, 3, 4)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
23	(3, 2, 1, 0)	(4, 3, 2, 1)

0.2 Перебор с минимальным изменением

На каждой итерации будем менять только два соседних элемента. Для этого необходимо:

- берем последний элемент в перестановке и меняем его с соседом до тех пор, пока элемент не дойдет до начала.

- когда этот элемент оказался в начале, мы меняем у него направление: теперь он будет менятся с соседом справ, а элемент, который оказался на последней позиции, делает 1 шаг (и так каждый раз, когда наш первый элемент меняет направление). Такие действия применяются ко всем элементам в перестановке.

Алгоритм. Кроме самой перестановки p и ее номера t (на этот раз младший разряд в номере — последний), будем хранить массив d, в котором будем хранить направление движения элементов. Если элемент движется вправо, то d[i] = +, если влево, то d[i] = -. Начальное значение d[i] = - для всех i.

Также храним j где будем записывать индекс элемента в t, в котором значение увеличилось.

1. Прибавляем 1 к t
2. Определяем номер разряда в котором значение увеличивается на 1, записываем в j
3. $\forall i \in [1, n] : i > j$, меняем $d_i = -d_i$.
4. j (не номер, именно такой элемент) меняем с соседом слева если $d_j = -$, и с соседом справа, если $d_j = +$.

Пример.

num	t	d	p	j
0	0000	$- - --$	1234	-
1	0001	$- - --$	1243	4
2	0002	$- - --$	1423	4
3	0003	$- - --$	4123	4
4	0010	$- - -+$	4132	3
5	0011	$- - -+$	1432	4
6	0012	$- - -+$	1342	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
19	0113	$- - ++$	4231	4
20	0120	$- - ++$	4213	3
21	0121	$- - ++$	2413	4
22	0122	$- - ++$	2143	4
23	0123	$- - ++$	2134	4
24	1000	$- + --$	—	1

0.3 Сочетания и бином Ньютона

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Свойства. (Свойства сочетаний)

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$
2. $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$

Доказательство. Доказывается путем подстановки непосредственно в формулу, или можно рассматривать пути на целочисленной решетке. □

Теорема 1. (Бином Ньютона)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0 : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Доказательство. (По индкуции)

1. База $n = 1$ очевидна.
2. индкуционый переход $n - 1 \to n$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)(a+b)^{n-1} = a(a+b)^{n-1} + b(a+b)^{n-1} = \\
&= a \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-1-k} + b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-1-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} = \\
&= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + b^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} = \\
&= a^n + b^n + \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) a^k b^{n-k} = (a+b)^n
\end{aligned}$$

□

0.4 Перебор сочетаний с хорошей нумерацией

Для того чтобы присваивать номер сочетанию, будем рассматривать сочетание как вектор из нулей и единиц: если элемент взяли — единица, иначе — ноль.

Пример. Вектору $b = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$ соответствует сочетание 1345.

Алгоритм. определяем номер рекурсивно:

$$num(b[1:n-1],m) = \begin{cases} num(b[1:n-1],m), & \text{если} b[n]=0, \\ num(b[1:n-1],m-1), & \text{если} b[n]=1, \end{cases}$$

Где m — кол-во единиц.

Пример. Рассмотрим $b=(1,0,1,1,1,0,0,0), m=4$:

$$\begin{aligned} num(b,m) =& C_6^4 + num(b[1:n-1],3) = \\ =& C_6^4 + C_4^3 + num(b[1:n-2],3) = \\ =& C_6^4 + C_4^3 + num(b[1:n-3],2) = \\ =& C_6^4 + C_4^3 + num(b[1:n-4],2) = \\ =& C_6^4 + C_4^3 + C_2^2 + num(b[1:n-5],1) = \\ =& C_6^4 + C_4^3 + C_2^2 + 0 = 15+4+1=20 \end{aligned}$$