

Оглавление

Лекция 9

3.11.2023

Доказательство. (Возведение в степень)

- $n = 0$: $z^0 = 1$
- $n > 0$:

$$\begin{aligned} z^n &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot \dots \cdot r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \end{aligned}$$

- $n < 0$: Положим $k = -n, k > 0$:

$$\begin{aligned} z^n &= \frac{1}{z^k} = \frac{1}{r^k (\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi))} = \frac{1}{r^k} (\cos(-k\varphi) + i \sin(-k\varphi)) = \\ &= r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \end{aligned}$$

□

Пример. Найти $(\sqrt{3} + i)^{10}$

$$z = -\sqrt{3} + i, \quad r = 2, \quad \varphi = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}$$

$$z = 2(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$