# Оглавление

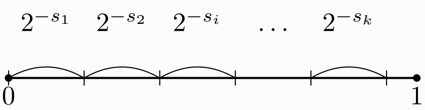


## Лекция 7: Достаточность неравенства Крафта, задача о наилучших длинах кодов, энтропия.

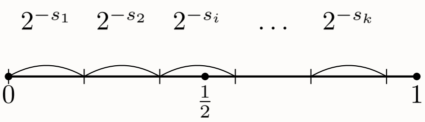
25.10.2023

**Доказательство.** (Достаточность)
Не умоляя общности, будем считать, что $s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_k$. Тогда $2^{-s_1} \ge 2^{-s_2} \ge \ldots \ge 2^{-s_k}$

Теперь распложим эти значения на отрезке $[0, 1]$ :




Утверждение: $\frac{1}{2}$ является границей отрезков. (не может лежать внутри какого либо $2^{-s_i}$)
Предположим, что это не так, тогда:




Имеем неравенства:

$$\begin{cases} 2^{-s_1} + \ldots + 2^{-s_{i-1}} \le \frac{1}{2} \\ 2^{-s_1} + \ldots + 2^{-s_{i-1}} + 2^{-s_i} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{домножим на } 2^{s_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{2^{s_i - s_1} + \ldots + 2^{s_i - s_{i-1}}}_{c} < 2^{s_i - 1} \\ \underbrace{2^{s_i - s_1} + \ldots + 2^{s_i - s_{i-1}}}_{c} + 1 > 2^{s_i - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < 2^{s_i - 1} \\ c + 1 > 2^{s_i - 1} \end{cases} \quad \text{— противоречие.}$$

Таким образом какой-то отрезок из $2^{-s_i}$ упрется в $\frac{1}{2}$ или хотя бы не дойдет до нее. Тогда Разделим $2^{-s_1}, 2^{-s_2}, \ldots, 2^{-s_k}$ на 2 части: те, которые меньше $\frac{1}{2}$ и те, которые больше. Тем кодам, которые меньше $\frac{1}{2}$ поставим 0 в начало кода, а тем, которые больше $\frac{1}{2}$ поставим 1, тогда их длина уменьшилась на единицу. Тогда сумма тех, что слева и тех, что справа:

$$\sum 2^{-(s_i-1)} = \sum 2 \cdot 2^{-s_i} = 2 \cdot \sum 2^{-s_i} \leq 1$$

Тогда можем рекурсивно выполнять деление отрезков, т.к. если есть всего 2 символа, можем дать им коды 0 и 1 соответственно. □

## 0.1 Задача о наилучших длинах кодов

Задан набор вероятностей $p_1, p_2, ..., p_m$, $p_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$. Требуется найти набор чисел $s_1, s_2, .., s_m$, таких что:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i s_i \longrightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} 2^{-s_i} \leq 1 s_i \in \mathbb{N}$$

**Теорема 1.** Минимум достигается функцией:

$$H(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$$

**Доказательство.** □

## 0.2 Энтропия

**Определение 1.** Энтропией вероятностной схемы называется мера содержащейся в ней неопределенности. Она задается как конкретная функция $H : RS \to \mathbb{R}^+$, где $RS$ – множество всех возможных вероятностных схем.

Функция, задающая энтропию обладает рядом свойств, и этим свойствам удовлетворяет функция 1. Это докажем позже, а сейчас рассмотрим свойства энтропии:

**Свойства.**

1. Мера неопределенности непрерывно зависит от вероятностей. (функция 1 этим свойством, очевидно, обладает)

2. При перестановке вероятностей мера неопределенности не меняется.

3. Необходимо ввести единицу измерения неопределенности. За единицу будем брать энтропию честной монеты: $H(\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}) = 1$ – бит.

4. Обозначим за $h(m) = H(\{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\})$. Тогда $h(m)$ растет с ростом $m$. (функция 1 этим свойством тоже обладает)

5. При фиксированном $m$ максимум энтропии достигается в случае равновероятных исходов, т.е. $h(m)$.

6. Пусть есть схемы $P_m = p_1, \dots, p_m$ и $Q_k = q_1, \dots, q_k$. Образуем комбинированную схему с $m-k+1$ исходами следующим образом: выбирается $m$-й исход в $P_m$ и для него выбираются исходы из $Q_k$. Получим схему $PQ$ с ихсодами:

$$1, 2, \dots, m-1, (m, 1), (m, 2), \dots, (m, k)$$

Вероятность этих исходов:

$$p_1, \dots, p_{m-1}, p_m q_1, \dots, p_m q_k$$

Тогда энтропия схемы $PQ : H(PQ) = H(P_k) + p_m H(Q_k)$

**Доказательство.** (Какие-то свойства либо уже доказаны, либо были даны без доказательства)

6

$$H(PQ) = \sum_{i=1}^{m-1} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} + \sum_{j=1}^{k} p_m q_j \log_2 \frac{1}{p_m q_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} + p_m \sum_{j=1}^{k} q_j \log_2 \frac{1}{p_m} + p_m \sum_{j=1}^{k} q_j \log_2 \frac{1}{q_j} =$$

$$= 1 \cdot p_m \log_2 \frac{1}{p_m} + \sum_{i=1}^{m-1} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} + p_m \sum_{j=1}^{k} q_j \log_2 \frac{1}{q_j} = H(P_m) + p_m H(Q_k)$$

□