Геометрия и топология

Солынин А. А.[1]

11.09.2023 - ...

[1]"Большая часть конспектов была честно украдена, пожалуйста, не бейте. Ссылка"

Оглавление

1 Векторное пространство **2**

1.1 Определение векторного пространства 2

1.2 Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная независимость 3

1.3 Матрицы 7

1.4 Скалярное произведение 10

1.5 Построение ортонормированного базиса 11

1.6 Ориентация базиса 12

1.7 Векторное произведение 14

2 Векторное произведение **15**

Лекция 1: Векторное пространство

09.09.2023

Глава 1

Векторное пространство

1.1 Определение векторного пространства

Определение 1. Пусть V - множество;
$+ : V \times V \longrightarrow V$
$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$
$\forall u, w, v \in V : \forall \alpha, \beta$

1. (u+v)+w=(u+v)+w (ассоциативность сложения)
2. u+v=v+u (коммутативность сложения)
3. $\exists! 0 \in V : u + 0 = 0 + u = u$ (нейтральный элемент по сложению)
4. $\exists u; -u : u + (-u) = 0$ (обратный элемент по сложению)
5. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (дистрибутивность)
6. $(\alpha \cdot \beta)u = \alpha(\beta \cdot u)$ (ассоциативность умножения)
7. $1 \cdot u = u$ (нейтральный элемент по умножению)

Если 1-8 выполняются, то V - (вещественное) векторное пространство.

Пример.

1. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ - n-мерное пространство $(a_1 ... a_n) + (b_1 ... b_n) = (a_1 + b_1 ... a_n + b_n)$
2. Множество многочленов V
   Множество многочленов n степени — не веркторное пространство, т. к. $(x^n + 1) + (-x^n + x) = x + 1$ — сложение не определено
   Множество многочленов степени $n \leqslant n$ — векторное пространство.
3. Множество определенных на $[a..b]$, непрерывных и имеющих непрерывную производную функций — векторное пространство.
4. Матрицы $n \times m$ — векторное пространство.

5. Множество вращений шара (сложение — композиция, умножение — умножение угла на число на число) — не векторное пространство. (Упражнение: докажите почему)

Свойство. (Доказуемые свойства)

1. $\overline{1}$ — единственный.
2. $\begin{cases} u + v = 0 \\ u + w = 0 \end{cases} \Rightarrow v = w$
3. $-\overline{1} \cdot u = -u$
4. $u \cdot 0 = 0$

1.2 Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная независимость

Определение 2. V - векторное пространство и векторы $v_1, v_2, v_3, ..., v_n \in V$. Система $v_1, ..., v_n$ называется линейно независимой (ЛНЗ), если из $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Определение 3. Если $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, $v_1, ..., v_n \in V$. То $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ – линейная комбинация (ЛК) векторов $v_1, ..., v_n$.

Определение 4. Если $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n$, не все $= 0$, но $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$, то система $v_1, ..., v_n$ называется линейно зависимой (ЛЗ).

Теорема 1. $v_1, ..., v_n$ – ЛЗ $\Leftrightarrow$ один из этих векторов можно представить как ЛК остальных. $\exists i : v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + ... + \alpha_n v_n$

Доказательство. $\Rightarrow$: $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n (\exists i : \alpha_i \neq 0)$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$$
$$\alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - ... - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - ... - \alpha_n v_n$$
$$\alpha_i \neq 0 \quad v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n$$
$$\Leftarrow: v_i = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \text{ без } i\text{-ого слагаемого}$$
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + (-1) v_i + ... + \alpha_n v_n = 0$$
$$\text{ЛК } = 0 \text{ не все коэффициенты} = 0$$

□

Предположение 1. $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ, то любой его поднабор тоже ЛНЗ. $v_1, ..., v_n$ – ЛЗ, то при добавлении векторов, набор останется ЛЗ.

Теорема 2. $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ $\Leftrightarrow$ если

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; ...; \alpha_n = \beta_n$$

Доказательство.

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$
$$\alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow v_1, ..., v_n \text{– ЛНЗ}$$

□

Лекция 2: Базис векторого пространства

18.09.2023

Пусть v - Это конечно мерно пространство

Определение 5. Набор $v_1, v_2, ..., v_n$ называется порождающим для V, если $\forall w \in V \exists \alpha_1, ..., \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$

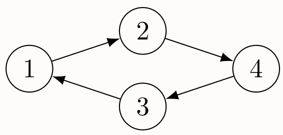
Замечание. Если к порождающему набору прибавить вектор, то он останется порождающим. Если убрать векторы из непорождающего набора векторы, то набор останется непорождающим.

Определение 6. $v_1, v_2, ..., v_n$ называется базисом V, если этот набор ЛНЗ и порождающий.

Теорема 3 (О базисе)**.** Следующие определения базиса равносильны:

1. ЛНЗ и порождающий набор
2. Минимальный порождающий набор (минимальный по включениям)
3. Максимальный ЛНЗ набор (максимальный по включениям)
4. Порождающий набор $\forall w \in V \exists! \alpha_1, ..., \alpha_2 : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$

Доказательство. Цепочка доказательств:



$1 \to 2$. Дан $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ и порождающий набор. Доказать, что он минимальный порождающий.

Допустим, что v_i выкинули, оставшийся набор остался порождающим $\Rightarrow v_i$ – ЛК остальных $\Rightarrow$ ЛЗ.

$2 \to 4$. Дан $v_1, ..., v_n$ – минимальный порождающий набор. Доказать $v_1, ..., v_n$ – порождающий с единственностью коэффициентов.

Допустим противное: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$

$$\alpha_i \neq \beta_i$$
$$(\alpha_i - \beta_i)v_i = (\beta_1 - \alpha_1)v_1 + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + (\beta_n - \alpha_n)v_n$$
$$v_i = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_i - \beta_i} + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_i - \beta_i}$$

v_i – выкинем. В любой ЛК с v_i заменим v_i на выражение выше $\Rightarrow$ набор порождающий. Значит без единственности коэффициентов получаем противоречие с дано

$4 \to 3$. Дан $v_1, ..., v_n$ – порождающий набор с единственностью коэффициентов. Доказать: $v_1, ..., v_n$ – максимальный ЛНЗ (ЛНЗ уже доказана)

Допустим противное: $v_1, v_2, ..., v_n; u$ – ЛНЗ набор

$$u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n (\alpha_1, ... \alpha_n \exists!) \Rightarrow v_1, ..., v_n, u \text{ – ЛЗ}$$

$3 \to 1$. Дан $v_1, ..., v_n$ – максимальный ЛНЗ. Доказать $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ и порождающий набор.

$$\begin{aligned}
\forall w \in V \qquad & v_1, v_2, ..., v_n, w \text{ – ЛЗ набор} \\
& \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n + \beta w = 0 \\
\text{Если } \beta = 0 \Rightarrow \qquad & \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0 \\
& \text{не все коэффициенты } = 0 (\alpha_i \neq 0) \\
& \Rightarrow v_1, ..., v_n \text{ – ЛЗ} \\
\beta \neq 0 \Rightarrow \qquad & w = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} v_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\beta} v_n
\end{aligned}$$

□

Замечание. (Следствия) Любую конечную порождающую систему можно сузить до базиса.

Если есть конечный порождающий набор, то любую ЛНЗ систему можно расширить до базиса.

Определение 7. Размерность пространства равна количеству элементов в базисе. (пока нет доказательств корректности)

Лемма 1. Система линейных уравнений: $(a_{ij} \in \mathbb{R}; x_i \in \mathbb{R}; 0 \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Имеет ненулевые решения, если $n > k$.

Доказательство. Индукция по k. База $k = 1$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$
$$\text{Пусть } a_{11} \neq 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - ... - -\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$
$$\forall x_2, ..., x_n : x_1 \text{ выражается через них}$$
$$a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$$

Переход

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$
$$\exists i : a_{1i} \neq 0, \text{ иначе выкинем предыдущее уравнение}$$
$$x_i = -\frac{a_{11}}{a_{1i}}x_1 - ... \text{ (без } i\text{-ого)} - -\frac{a_{1n}}{a_{1i}}x_n$$

Подставим выраженное x_i во все остальные уравнения. Уравнений на 1 меньше, переменных на 1 меньше. □

Теорема 4. Если $v_1, ..., v_k$ и $w_1, ..., w_n$ базисы $\in V$, то $k = n$.

Доказательство. $v_1, ..., v_n$ – порождающая система.

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + ... + a_{k1}v_k$$
$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + ... + a_{k2}v_k$$
$$...$$
$$w_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + ... + a_{kn}v_k$$

$$x_1w_1 + x_2w_2 + ... + x_nw_n = 0, x_i \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

т.к. $w_1, ..., w_n$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ все $x_i = 0$

$$x_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{k1}v_k) + x_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{k2}v_k)$$
$$+ ... + x_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{kn}v_k) = 0$$
$$v_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) + v_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)$$
$$+ ... + v_k(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n) = 0$$

$v_1, v_2, ..., v_k$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ все коэффициенты равны 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Если $n > k \Rightarrow \exists$ ненулевые решения $\Rightarrow$ противоречие с (1.1) и ЛНЗ $w_i \Rightarrow n \leq k$. Аналогично $k \leq n \Rightarrow n = k$. $\square$

Лекция 3: Матрицы

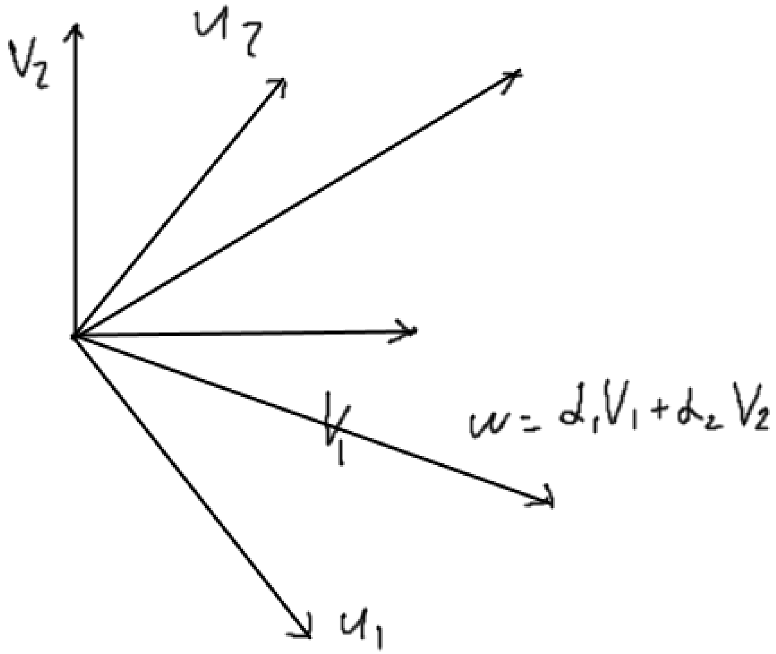
25.09.2023

1.3 Матрицы

Определение 8. Пусть V — конечное мерное пространство
$v_1 \dots v_n$ - базис V
$w \in V \Rightarrow \exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n :$
$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$
Тогда $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ — координаты w в базисе $u_1 \dots u_n$

- $w \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$
- $u \Leftrightarrow (\beta_1 \dots \beta_n)$
- $u + w \Leftrightarrow (\alpha_1 + \beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \dots \alpha_n \beta_n)$
- $f \cdot w \Leftrightarrow (f \cdot \alpha_1, f \cdot \alpha_2 \dots f \cdot \alpha_n)$

Определение 9. Пусть $v_1 \dots v_n$ и $u_1, u_2, \dots u_n$ — базисы
Тогда w может выражаться как:
$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot u_1 + \dots + \beta_n \cdot u_n$



Определение 10. (*) Пусть $v_1 \dots v_n$ и $u_1, u_2, \dots u_n$ — базисы

Выразим базис $u_1 \dots u_n$ через $v_1 \dots v_n$:

$u_1 = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n$

$u_2 = a_2 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_{2n} \cdot v_n$

$\vdots$

$u_n = a_n \cdot v_1 + a_{n2} \cdot v_2 + \dots + a_{nr} \cdot vn$

Тогда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от $v_1 \dots v_n$ к $u_1 \dots u_n$

Определение 11. Пусть есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \text{ — Матрица } n \times K$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nl} \end{pmatrix} \text{— Матрица } k \times l$$

Умножение матриц определяется как:

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \dots & \dots & c_{kl} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы равны:

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \ldots + a_{1k} \cdot b_{kl}$

$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \ldots + a_{1k} \cdot b_{k2}$

$\vdots$

$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj}$

$\vdots$

Замечание. Выражение базиса через базис можно записать так:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Теорема 5. Пусть $v_1 \ldots v_n$ и $u_1, u_2, \ldots u_n$ — базисы.

A — матрица перехода от $v_1 \ldots v_n$ к $u_1 \ldots u_n$

B — матрица перехода от $w_1 \ldots w_n$ к $v_1 \ldots v_n$

Тогда матрица перехода от $w_1 \ldots w_n$ к $u_1 \ldots u_n$ равна $A \times B$

Доказательство. Выразим базис $v_1 \ldots v_n$ через $w_1 \ldots w_n$:

$v_1 = b_{11}w_1 + \ldots + b_{1n}w_n$

$\vdots$

$v_1 = b_{n1}w_1 + \ldots + b_{nn}w_n$

Выразим базис $u_1 \ldots u_n$ через $v_1 \ldots v_n$:

$u_1 = a_{11}(b_{11}w_1 + \ldots + b_{1n}w_n) + \ldots + a_{1n}(b_{n1}w_1 + \ldots + b_{nn}w_n) = w_1(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}) + \ldots + w_1(a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \ldots + a_{nn}b_{nn})$

Мы видим, что базис $u_1 \ldots u_n$ выражается через $w_1 \ldots w_n$, а матрица перехода — $A \times B$. □

Теорема 6. A(BC) = (AB)C

Умножение матриц не коммутативно, но ассоциативно.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & . & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ - единичная матрица}$$

Замечание. $u_1 \dots u_n$, $v_1 \dots v_n$ — базисы, выражаются как:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$A \times B = E$

$B \times A = E$

(A и B) — обратные матрицы

1.4 Скалярное произведение

Определение 12. V - векторное пространство

$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$

1. (u, u) $\geq$ 0 (u, u) = 0 $\Leftrightarrow$ U = 0
2. $(u_1 + u_2; v) = (u_1, v_1) + (u_2, v)$ $(u, v_1 + v_2) = (u_, v_1) + (u_1 v_2)$
3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v)$
4. (u, v) = (v, u)

V - евклидово пространство $(\cdot, \cdot)$ - скалярное произведение

Пример.

1. $V = \mathbb{R}^n$

   $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

   $$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2. V - пространство функций $(\dots)$ $(f(x), g(x)) := \int_a^b f(x) g(x) dx$

Определение 13. Пусть V - евклидово пространство, $v \in V$

$|v| := \sqrt{(v, v)}$

$cos\angle(u, v) := \frac{(u,w)}{|u| \cdot |v|}$

Теорема 7. (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ))

$|(u, w)| \leq |u| \cdot |v|$

Доказательство.

$$(u+tv, u+tv) \geq 0 \quad \forall t$$
$$(u,u)+(u,tv)+(tv,u)+(tv,tv) \geq 0$$
$$|u|^2 + 2t(u,v) + t^2|v|^2 \geq 0 \quad \forall t$$
$$\frac{D}{4} \leq 0 \quad (u,v)^2 - |u|^2|v|^2 \leq 0$$
$$|(u,v)| \leq |u||v|$$

□

Вывод. (Следствие из КБШ)

1. $|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$
2. $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b g(x)dx) \cdot (\int_a^b f(x)dx)$

Определение 14. $u \perp v$, если $(u,b) = 0$

Определение 15. $v_1 \ldots v_n$ — ортогональная система, если:
$\forall v_i, v_j : v_i \perp v_j, (i \neq j)$

Теорема 8. $v_1 \ldots v_n$ - ортогональная система и в ней нет нулевых векторов $\Rightarrow v_1 \ldots v_n$ линейно не зависимы.

Доказательство.

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$
$$\alpha_1(v_1 v_i) + \alpha_2(v_2, v_i) + \ldots + \alpha_i(v_i, v_i) + \ldots = 0$$
$$a_i|v_i|^2 = 0$$
$$\alpha_i = 0$$

□

Определение 16. u — нормированый или единичный если $|u| = 1$
$v_1 \ldots v_n$ — ортонормированные системы, если $v_i \perp v_j$ и $|v_i| = 1$
$v_1..v_i$ — ОНБ ортонормированный базис

Лекция 4: Ортонормированный базис и ориентация базиса

02.10.2023

1.5 Построение ортонормированного базиса

Теорема 9. Ортонормированный баис существует.

Доказательство. (Ортогонализация Грама-Шмидта)
Есть $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \qquad |\mathbf{u}_1| = 1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{w}_2 \perp \mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|}$$

$$|\mathbf{u}_2| = 1 \qquad \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2) = 0$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{u}_1) = 0$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - \alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 0$$

$$\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)$$

Пусть $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{k-1}$ построены
Построим $\mathbf{u}_k$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \alpha_1\mathbf{u}_1 - \alpha_2\mathbf{u}_2 - ... - \alpha_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{w}_k \perp \mathbf{u}_i \qquad (i \le k-1)$$

$$0 = (\mathbf{w}_k, \mathbf{u}_i) = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i) - \alpha_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)$$

$$\alpha_i = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i)$$

$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{w}_k}{|\mathbf{w}_k|}$$

Строим $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ с помощью данного алгоритма.

Замечание. $\mathbf{u}_i$ – ЛК $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_i$

Вывод. Если $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ – базис $\Rightarrow \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ — ОНБ, т.е. если $\dim V = n$, то $\exists$ ОНБ

Пусть V - евклидово пространство, $\dim V = n$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ – ОНБ, $\mathbf{w} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_n\mathbf{u}_n$, то можем записать $\mathbf{w} = (a_1, ..., a_n)$, соответственно $\mathbf{v} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + ... + b_n\mathbf{u}_n$, тогда

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_n\mathbf{u}_n, b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + ... + b_n\mathbf{u}_n) =\\ = a_1b_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) + a_1b_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + ... + a_1b_n(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n) +\\ + a_2b_1(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + a_2b_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + ... + a_2b_n(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_n) +\\ + a_nb_1(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + a_nb_2(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + ... + a_nb_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) =\\ = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\end{aligned}$$

□

1.6 Ориентация базиса

Определение 17 (Неформальное)**.** На плоскости: $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = S_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \text{ (ориентированная площадь)}$$

В пространстве: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$; $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}} \text{ (ориентированный объем)}$$

Определение 18 (Формальное)**.**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

Мнемоническое правило:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}\right|$$

По бирюзовой стрелке сложение, по зеленой – вычитание.

Замечание. Данные свойства справедливы для матриц любого порядка.

Свойства.

1. Если строку или столбец умножить на α, то определитель тоже умножится на α.
2. Если меняем 2 строки или столбца, то знак определителя меняется.
3. Если есть 2 одинаковых строки, то определитель равен 0.
4. Если к одному из векторов прибавить вектор кратный другому, то определитель не поменяется.
5. Определитель единичной матрицы равен 1.

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha b_1 & a_2+\alpha b_2 & a_3+\alpha b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Теорема 10. (Доказательство будет на алгебре)

$$\exists! f : M_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$$

такая, что, удовлетворяет свойствам 1-5.

Теорема 11.

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Определение 19 (Ориентация). $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – ОНБ («правая тройка»), $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется правой тройкой векторов.

Если $\det < 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется левой тройкой векторов.

Если $\det = 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ – ЛЗ.

Выводы:

1. Ориентация бывает только у ЛНЗ троек – у базисов.
2. Ориентаций бывает ровно 2.
3. Одинаковость ориентаций является эквивалентностью.

Лекция 5: Векторное произведение

09.10.2023

1.7 Векторное произведение

Глава 2

Векторное произведение

Замечание. Векторное произведение существует, только если $\dim V = 3$ (т.е. пространство трехмерное).

Определение 20 (Формальное). Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}$ – вектор со свойствами:

1. $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}, \mathbf{v} \perp \mathbf{b}$
2. $|\mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ – правая тройка векторов

Вопрос: что такое «правая тройка?» — Ответ: нет «правой» или «левой» троек, но про любые две тройки мы можем сказать одинаково ли они ориентированы.

Определение 21. Пусть $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ – фиксированный ортонормированный базис, будем называть его правой тройкой векторов.

Введем определения:

$$\begin{array}{c|ccc} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \hline \mathbf{i} & 0 & \mathbf{k} & -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} & -\mathbf{k} & 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{k} & \mathbf{j} & -\mathbf{i} & 0 \end{array}$$ – таблица умножения базисных векторов

Пусть

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = (b_1, b_2, b_3)$$

Тогда векторное произведение **a** и **b**:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) &= \\ a_1b_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_1b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_1b_3\mathbf{i}\times\mathbf{j}&+ \\ +a_2b_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_2b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_2b_3\mathbf{i}\times\mathbf{j}&+ \\ +a_3b_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_3b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_3b_3\mathbf{i}\times\mathbf{j}&= \\ =\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1)&\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1)$$

Теорема 12. Векторное произведение обладает свойствами:

1. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$
2. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$
3. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{a}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{b}$
4. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}&=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}\\ \mathbf{b}&=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}\\ \mathbf{c}&=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1.\qquad \mathbf{b}+\mathbf{c}&=(b_1+c_1)\mathbf{i}+(b_2+c_2)\mathbf{j}+(b_3+c_3)\mathbf{k}\\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})&=\mathbf{i}(a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2))+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...)\\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}&=\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...)+\\ &+\mathbf{i}(a_2c_3-a_3c_2)+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...)\end{aligned}$$

После преобразований получим то же самое.

2. Аналогично

$$\begin{aligned}3.\qquad (\mathbf{a}\times\mathbf{b};\mathbf{a}) &=\\ =(\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1); a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}) &=\\ =a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)&=0\end{aligned}$$

4. Будем доказывать $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\alpha=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1-\cos^2\alpha)$

$$\begin{aligned}(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 &=\\ (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\left(1-\frac{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}\right)&=\\ (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2&\end{aligned}$$

Чтобы не расписывать слагаемые перепишем в другом виде:

$$\sum_{i\neq j} a_i^2 b_j^2 - 2\sum_{i<j} a_i b_i a_j b_j = \sum_{i} a_i^2 b_i^2 + \sum_{i\neq j} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^{3} a_i^2 b_i^2 - 2\sum_{i<j} a_i b_i a_j b_j$$

$\square$

Замечание.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Теорема 13. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b})$ – правая тройка

Доказательство.

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_3b_1 - a_1b_3) + (a_1b_2 - a_2b_1) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}(a_2b_3 - a_3b_2) - \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}(a_1b_3 - a_3b_1) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_1)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 > 0$$

$\square$