Математический анализ

Широков Николай Алексеевич[1]

07.09.2023 - ...

[1]"Записал Сергей Киселев, Гараев Тагир"

Оглавление

1 Построение множества вещественных чисел **2**

1.1 Множества 2

1.2 Сечения 2

1.3 Сумма сечений 3

1.4 Теоремы сечений 4

2 Вещественные числа **8**

2.1 Супремумы и инфимумы 9

3 Алгоритмы **11**

3.1 Продолжение 11

3.2 Число e 16

Глава 1

Построение множества вещественных чисел

Лекция 1: Введение

14.09.2023

1.1 Множества

Определение 1. Множества X и У равны, если:
$\forall a \in X : a \in Y$
$\forall b \in Y : b \in X$

Определение 2. $X \subset Y$ если:
$\forall a \in X : a \in Y$

Определение 3.
1. $a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \vee a \in B$
2. $a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \in B$
3. $a \in A \setminus B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \notin B$

Определение 4. (Декартово произведение множеств)
$A \times B = \{(a, b) : \forall a \in A, \forall \in B\}; A, B \neq \varnothing$

Определение 5. $F : A \to B$ - функция, такая, что: $\forall a \in A$ сопостовляет $b = F(a) \in B$

1.2 Сечения

Определение 6. Множество $\alpha \subset \mathbb{Q}$ называется сечением, если:

- I. $\alpha \neq \varnothing$

- II. если $p \in \alpha$, то $q < p \Leftrightarrow q \in \alpha$
- III. в α нет наибольшего

Пример. 1. $p^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < p\}$ - нет наибольшего

2. $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 0 \vee p > 0 \wedge p^2 < 2\}$

Теорема 1. (Утверждение 1)
Если $p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$, то $q > p$

Доказательство. Если $p \in \alpha$ и $q \leq p$, то из (II.) следует. что $q \in \alpha$ □

Теорема 2. (Утверждение 2) $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

Доказательство. $\begin{cases} \alpha < \beta \Rightarrow \exists p \in \beta, p \notin \alpha \\ \beta < \gamma \Rightarrow \exists p \in \gamma, q \notin \beta \end{cases} \Rightarrow p < q \Rightarrow \alpha < \gamma$ □

Теорема 3. Пусть α, β - сечения. Между ними существует одно из нескольких отношений: $\left[\begin{array}{l} \alpha < \beta \\ \beta > \alpha \\ \alpha = \beta \end{array}\right.$

Доказательство. Предположим, что $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$, тогда:
$\begin{cases} \exists p \in \alpha, p \notin \beta \\ \exists q \in \beta, q \notin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p > q \\ q > p \end{cases}$ - Противоречие, тогда $\alpha \neq \beta$ □

1.3 Сумма сечений

Теорема 4. Пусть α, β - сечения, тогда:
$\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha, q \in \beta\}$ - тоже сечение.

Доказательство.

- (I.) Пусть $\exists s \notin \alpha, \exists t \notin \beta$, тогда:

  $\forall p \in \alpha, q \in \beta : \begin{cases} p < s \\ q < t \end{cases} \Rightarrow p + q < s + t \Rightarrow \alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$

- (II.)

  $r \in \alpha + \beta, r_1 < r$

  $r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$

  $r_1 = p + q_1, r_1 < r \Rightarrow q_1 < q \Rightarrow q_1 \in \beta \Rightarrow p + q_1 \in \alpha + \beta$

- (III.)

$\exists p_1 \in \alpha, p > p_1 \Rightarrow p_1+q > p+q = r, p_1+q \in \alpha+\beta$ - нет наибольшего

□

Теорема 5. (Свойства суммы сечений)

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \beta)$
3. $\alpha + 0^* = \alpha$, где $0^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}$

Доказательство. Свойства 1 и 2 справедливы в силу коммутативности и ассоциативности рациональных чисел.

Докажем свойство 3:

1. Пусть $p \in \alpha, q \in 0^*$, тогда: $p + q < p \Rightarrow p + q \in \alpha$, т.е. $\alpha + 0^* \subset \alpha$
2. Пусть $p \in \alpha$, тогда: $\exists p_1 > p \Rightarrow p_1 \in \alpha, p = p_1 + (p - p_1)$, при том $p_1 \in \alpha, p - p_1 \in 0^* \Rightarrow p \in \alpha + 0^* \Rightarrow \alpha \subset \alpha + 0^*$

$$\begin{cases} \alpha \subset \alpha + 0^* \\ \alpha + 0^* \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \alpha + 0^*$$

□

1.4 Теоремы сечений

Теорема 6. (Теорема 2) Пусть α - сечение, $r \in \mathbb{Q}^+$, тогда $\exists p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$:
q - не наименьшее верхнее (не входящее в сечение) число
$q - p = r$

Доказательство. Пусть $p_0 \in \alpha, p_1 = p_0 + r$

1. Возможно, $p_1 \notin \alpha$, тогда:
   (a) если p_1 - не наименьшее в верхнем классе, то $q = p_1$
   (b) если же наименьшее, то $p = p_0 + \frac{r}{2}, q = p_1 + \frac{r}{2}$
2. Если $p_1 \in \alpha$, тогда:
   Положим $p_n = p_1 + nr$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда $\exists! m$:
   $p_m \in \alpha$ и $p_{m+1} \notin \alpha$
   (a) Если p_{m+1} - не наименьшее в верхнем классе, то выберем $p = p_m, q = p_{m+1}$
   (b) Если же наименьшее, то $p = p_m + \frac{r}{2}, q = p_{m+1} + \frac{r}{2}$

□

Теорема 7. (Существование противоположного элемента) Пусть α - сечение, тогда $\exists! \beta : \alpha + \beta = 0^*$

Доказательство. (нужно доказать единственность и существование)

1. Докажем единственность: пусть $\exists \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющие условию, тогда:

   $\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1$

2. Докажем существование: пусть

   $\beta = \{p : -p \notin \alpha, -p$ не является наименьшим в верхнем классе $\alpha\}$

   - (I.) Очевидно, что $\beta \neq \varnothing, \mathbb{Q}$
   - (II.) Возьмем $p \in \beta, q < p \Leftrightarrow -q > -p \Rightarrow -q$ в верхнем классе α, но не наименьшее $\Rightarrow q \in \beta$
   - (III.) Если $p \in \beta$, то -p - не наименьшее в верхнем классе α, значит $\exists q : -q < -p$ и $-q \notin \alpha$
     Положим $r = \frac{p+q}{2}$, тогда:
     $-q < -r < -p \Rightarrow$ -r – не наименьшее в верхнем классе α. Значит, нашли такое r $>$ p, что $r \in \beta$

Теперь проверим, что $\alpha + \beta = 0^*$:

1. Возьмем $p \in \alpha, q \in \beta$

   По определению $\beta : -q \notin \alpha \underset{\text{Утв. 1}}{\Rightarrow} -q > p \Leftrightarrow p + q < 0 \Rightarrow p + q \in 0^* \Rightarrow \alpha + \beta \subset 0^*$

2. Возьмем по Теореме (2) $q - p = r \Leftrightarrow p - q = -r \in 0^*$

   т.к. $q \notin \alpha$, то $-q \in \beta$, значит $p - q = p + (-q) \in \alpha + \beta \Rightarrow 0^* \subset \alpha + \beta$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \subset 0^* \\ 0^* \subset \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 0^* \qquad \square$$

Лекция 2: Сечения

21.09.2023

Теорема 8. Пусть α, β — сечения. Тогда $\exists! \ \gamma$ — сечение : $\alpha + \gamma = \beta$

Доказательство. Пусть имеем $\gamma_1 \neq \gamma_2$, удовлетворяющие условию. Тогда: $\alpha + \gamma_1 = \beta = \alpha + \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$ — противоречие.

Положим $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Тогда в силу свойств сечений имеем:
$\alpha + \gamma = \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0^* + \beta = \beta$ $\square$

Определение 7. Сечение γ, построенное в предыдущей теореме обозначается через $\beta - \alpha$

Определение 8. (Абсолютная велечина) $|a| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geq 0^* \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0^* \end{cases}$

Определение 9. (Произведение) Пусть α, β — сечения, причем $\alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^*$

Тогда $\alpha\beta = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0 \vee r = pq, \text{ где } p \in \alpha, q \in \beta\}$

Пример. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^*$

Теорема 9. (Любые 3 из них необходимо доказать самостоятельно) Для любых сечений α, β, γ имеем:

1. $\alpha\beta = \beta\alpha$
2. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
4. $\alpha 0^* = 0^*$
5. $\alpha 1^* = \alpha$
6. если $\alpha < \beta$ и $\gamma > 0^*$, то $\alpha\gamma < \beta\gamma$
7. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta : \alpha \cdot \beta = 1^*, \beta = \frac{1^*}{\alpha}$
8. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta, \gamma : \alpha \cdot \gamma = \beta, \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$

Теорема 10. (Свойства рациональных сечений)

1. $p^* + q^* = (p+q)^*$
2. $p^* q^* = (pq)^*$
3. $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

Доказательство.

1. Возьмем $r \in (p+q)^* \Rightarrow r < p + q$

   Положим $h = p + q - r$:

   $\begin{cases} p_1 = p - \frac{h}{2} \\ q_1 = q - \frac{h}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in p^* + q^* \Rightarrow (p^* + q^*) \subset p^* + q^*$

   Теперь возьмем $r \in p^* + q^* \Rightarrow r = p_1 + q_1$:

   $\begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 < p + q \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in (p^* + q^*) \Rightarrow p^* + q^* \subset (p^* + q^*)$

   $\begin{cases} p^* + q^* \subset (p+q)^* \\ (p+q)^* \subset p^* + q^* \end{cases} \Rightarrow p^* + q^* = (p^* + q^*)$

2. Для умножения доказательство аналогично.

3. Если $p < q$, то $p \in q^*, p \notin p^* \Rightarrow p^* < q^*$

   Если $p^* < q^*$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in q^*, r \notin p^* \Rightarrow p \leq r < q \Rightarrow p < q$

   Значит $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

□

Теорема 11. Пусть α, β — сечения, $\alpha < \beta$. Тогда $\exists\, r^*$ — рациональное сечение : $\alpha < r^* < \beta$

Доказательство. $\alpha < \beta \Rightarrow \exists\, p : p \in \beta, p \notin \alpha$

Выберем такое $r > p$, так, что $r \in \beta$. Поскольку $r \in \beta, r \notin r^*$, то $r^* < \beta$

Поскольку $p \in r^*, p \notin \alpha$, то $\alpha < r^*$ □

Глава 2

Вещественные числа

Определение 10. В дальнейшем сечения будут называться вещественными числами. Рациональные сечения будут отождествляться с рациональными числами. Все другие сечения будут называться иррациональными числами.

Таким образом, множество всех рациональных чисел оказывается подмножеством системы вещественных чисел.

Теорема 12. (Дедекинда) Пусть A и B — такие множества вещественных чисел, что:

1. $A \cup B = \mathbb{R}$
2. $A \cap B = \varnothing$
3. $A, B \neq \varnothing$
4. $\forall \alpha \in A, \beta \in B : a < b$

Тогда $\exists! \ \gamma \in \mathbb{R} : \alpha \leq \gamma \leq \beta \ \forall \alpha \in A, \forall \beta \in B$

Доказательство.

1. Докажем единственность.

   Пусть γ_1, γ_2 — два числа, причем $\gamma_1 < gamma_2$. Тогда $\exists \ \gamma_3 : \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2 \Rightarrow \gamma_3 \in A, \gamma_3 \in B$ — противоречие. Значит $\gamma_1 = \gamma_2$.

2. Проверим, является ли γ сечением.

   $\gamma = \{p \in \mathbb{Q} : \exists \alpha \in A : p \in \alpha\}$

   I. $\gamma \neq \varnothing$, т.к. $A \neq \varnothing$
   $\gamma \neq \mathbb{Q}$, т.к. $\exists q \in \mathbb{Q} : q \notin B \Rightarrow q \notin \gamma$

   II. Пусть $p_1 < p, p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p_1 \in \alpha \Rightarrow p_1 \in \gamma$

   III. Пусть $p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p \in \alpha$. Поскольку α — сечение, то $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \alpha, q > p \Rightarrow q \in \gamma$

Ясно, что $\alpha \leq \gamma \forall \alpha \in A$.

Предположим, что $\exists \beta \in B : \beta < \gamma$. Тогда $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \gamma, q \notin \beta \Rightarrow \exists \alpha \in A : q \in \alpha \Rightarrow \alpha > \beta$ — противоречие. Значит $\gamma \leq \beta \, \forall \, \beta \in B$. $\square$

2.1 Супремумы и инфимумы

Определение 11. $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \varnothing$
E - ограничено сверху, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq y$

Определение 12. $G \subseteq \mathbb{R}, G \neq \varnothing$
G - ограничено снизу, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \geq y$

Замечание. Если множество ограничено сверху и снизу, оно называется ограниченным.

Определение 13. Пусть E ограничено сверху. Тогда y называется точной верхней границей (верхней гранью) E, если:

1. y — верхняя граница множества E.
2. если $x < y$, то x не является верхней границей множества E.

Определение 14. Пусть E ограничено снизу. Тогда y называется точной нижней границей (нижней гранью) E, если:

1. y — нижняя граница множества E.
2. если $x > y$, то x не является нижней границей множества E.

Определение 15. Точная верхняя граница — $y \sup E$
Точная нижняя граница — $y \inf E$

Пример. E состоит из всех чисел $\frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда множество ограничено, верхняя грань равна 1 и принадлежит множеству, а нижняя равна 0 и множеству не принадлежит.

Теорема 13. Пусть E ограничено сверху. Тогда $\sup E$ существует.

Доказательство. Пусть есть множества:
$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in E : x > \alpha\}$
$B = \mathbb{R} \setminus A$
Тогда $A \cap B = \varnothing, A \cup B = \mathbb{R}, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$

$$\begin{cases} \beta \in B \\ \alpha \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in E : x \leq \beta \\ \exists x_0 \in E : x_0 > \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha < \beta$$

Ясно, что никакой элемент множества A не является верхней границей множества E, а любой элемент множества B является верхней границей множества E. Поэтому достаточно доказать, что B содержит наименьшее число.

По теореме Дедекинда: $\exists \gamma : \begin{cases} \alpha \leq \gamma \ \forall \alpha \in A \\ \beta \leq \gamma \ \forall \beta \in B \end{cases}$

Предположим, что $\gamma \in A$. Тогда $\exists x \in E : x > \gamma$.

Возьмем $\gamma_1 : \gamma < \gamma_1 < x \Rightarrow \gamma_1 \in A$ — противоречие.

Значит $\gamma \in B$. □

Теорема 14. Пусть E ограничено снизу. Тогда $\inf E$ существует.

Доказательство. Доказательство тривиально и предоставляется читателю в качестве упражнения ⊙ ⌣ ⊙. □

Теорема 15. (Существование корня из вещественного числа) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n > 0 \ \exists! \ y \in \mathbb{R}, y > 0 : y^n = x, y = \sqrt[n]{x}$

Доказательство. 1. Единственность.

Пусть $y_1 > y_2 : y_2^n = x = y_1^n \Rightarrow y_2^n - y_1^n = 0$

$\overset{>0}{(y_2 - y_1)} \cdot (y_2^{n-1} + y_2^{n-2} \overset{>0}{\cdot} y_1 + \ldots + y_1^{n-1}) = 0$ — противоречие.

2. Существование.

Пусть $E = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0, t^n < x\}$

$0 \in E \Rightarrow E \neq \varnothing$

Положим $t_0 = 1 + x, t_0^n = (1 + x)^n$

$\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k = 1 + nx + \underbrace{\ldots}_{>0} > x \Rightarrow E$ — ограничено сверху.

Пусть $y = \sup E$ (она существует по теореме о Существовании супремума).

- Допустим, что $y^n < x$. Возьмем $h : 0 < h < 1$ и $h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}$
  Тогда $(y + h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y^{n-k} h^k = y^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k y^{n-k} h^k = y^n + h \sum_{k=1}^{n} C_n^k y^{n-k} h^{k-1} < y^n + h \sum_{k=1}^{n} C_n^k y^{n-k} = y^n + h \cdot ((1 + y)^n - y^n) < (y + 1)^n - y^n < y^n + x - y^n = x$ — y не вехрняя граница.
- Допустим, что $y^n > x$. Возьмем $k : 0 < k < 1$, $k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$ и $k < y$. Тогда аналогично с $y^n > x$ получаем, что $y - k$ — верхняя граница E, что противоречит тому, что $y = \sup E$.

Значит $y^n = x$.

□

Глава 3

Алгоритмы

Лекция 4: Продолжение

27.09.2023

3.1 Продолжение

5. $x_n \neq c \forall n, x_n \to a, a \neq 0 => \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$
$|a+b| \leq |a| + |b| <=> |a| \geq |a+b| - |b|$
$\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$
$=> \exists N$ т.ч. $\forall n > N$ выполняется
$|x_n - a| < \varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} => |x_n| \geq |a| - |x_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$
$\forall \varepsilon \exists N_1$ т.ч. $\forall n > N_1$ (1)
$|x_n - a| < \varepsilon$ (2)
$N_0 = max(N, N_1) n > N_0$
$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| = |\frac{a - x_n}{x_n a} = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot |x_n - a| <$
(1, 2)
$< \frac{1}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} \cdot \varepsilon$
6. $x_n{}_{n=1}^{\infty}$, как в 5., $y_n \to b =>$
$\frac{y_n}{x_n} \to \frac{b}{a}$
$\frac{y_n}{x_n} = y_n \cdot \frac{1}{x_n}$ 4., 5
7. $x_n \leq y_n \forall n, x||n \to a, y_n b => a \leq b$

Доказательство. Предположим, что это не так.
Пусть a $\not>$ (доказали что неверно) b (?)
$\varepsilon_0 = \frac{1-b}{2} > 0$
$=> \exists N_1$ т.ч. $\forall n > N_1$
$|x_n - a| < \varepsilon_0$ (3)
и $exists N_2$ т.ч $\forall n > N_2$
$|y_n - b| < \varepsilon_0$ (4)
$n = N_1 + N_2 + 1$
$|x_n - a| < \varepsilon_0 <=> x_n \in (a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ (3')
$|y_n - b| < \varepsilon_0 <=> y_n \in (b - \varepsilon_0, b + \varepsilon_0)$ (4')
(3'), (4') $=> y_n < b + \varepsilon_0 = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a\frac{a-b}{2}$
$= a - \varepsilon_0 < x_n$
$y_n < x_n$ □

$a < b$

$(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$
$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$
$[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$ $(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$
Расширенное множество вещественных чисел
$\overline{\mathbb{R}}$
$+\infty, -\infty$
$\forall x \in \mathbb{R}\ x < +\infty, x > -\infty$
(a, ∞) = $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
[a, ∞) = $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
(-∞, a] = $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
(-∞, a] = $\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
8. $\xi_n \leq \psi_n \leq \zeta_n \forall n$
$\xi \to a, \zeta_n \to a => \psi_n \to a$
$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1$ т.ч. $\forall n > N_1$
$|x_n - 1| < \varepsilon \leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (5)
и $\exists N_2$ т.ч. $\forall n > N_2$
$|\zeta_n - a| < \varepsilon \leftrightarrow \zeta_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (6)
(5), (6) => $\forall n > N, N = max(N_1, N_2)$
$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq \zeta_n < a + \varepsilon$, т.е. $y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon$

Определение 16. (Бесконечные пределы)
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
$x_n \to \infty\ n \to \infty$
$\lim\limits_{\to\infty} x_n = +\infty$
если $\forall L \in \mathbb{R} \exists N$ т.ч. $\forall n > N$
выполнено $x_n > L(7)$
$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$
$y_n \to -\infty\ n \to \infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty,$
$\forall L_0 \in R,\ \exists N_0$ т.ч. $\forall n > N_0$
$y_n < L_0$ (8)
(возможно сокращение записи n-> далее.)

Единообразная запись определения пределов
$a \in \mathbb{R}$
$w(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
Окрестность $+\infty$
$w(+\infty) = (L, \infty), L \in \mathbb{R}$
Окрестность $-\infty$
$w(-\infty) = (-\infty, L)$
Пусть имеется некая $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$
Пусть имеется некая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
$x_n \to \alpha\ n \to \infty$
если $\forall w(\alpha)$
$\exists N$ т.ч. $\forall n > N$ выполнено $x_n \in 2(\alpha)(q)$
Свойства бесконечных пределов
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a \to +\infty$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, b \to -\infty$

1. $c \neq 0$, а) $ca_n \to +\infty, cb_n \to -\infty$
   б) $c < 0 \Rightarrow ca_n \to -\infty, cb_n \to +\infty$

2. $x_n \to x$, $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Rightarrow a_n + x_n \to +\infty$
   $y_n \to y$, $y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \Rightarrow b_n + y_n \to -\infty$

3. $a_n, b_n, x_n, y_n, u_\varepsilon 2$
   $x > 0 \Rightarrow a_n x_n \to +\infty$, $b_n x_n \to -\infty$
   $y < 0 \Rightarrow a_n y_n \to -\infty, b_n y_n \to +\infty$

4. если $a_n \neq 0, a_n \neq 0 \forall n \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0, \frac{1}{b_n} \to 0$ Если $x_n > 0, x_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to +\infty$
   если $y_n < 0, y_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{y_n} \to -\infty$

5. $x_n \leq y_n \forall n, x \to \alpha, y_n \to \beta, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$
   $\Rightarrow \alpha \leq \beta$
   $+\infty = +\infty$
   $-\infty = -\infty$
   $-\infty < +\infty$
   $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow y_n \to \alpha$
   (док-ть всё)

   Доказательство. $x \in \mathbb{R}$
   если последоавтельность имеет предел, то она ограничена (было)
   нужно сформулировать с дополнительными словами
   Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел
   $\exists M$ т.ч. $|x_n - x| < M \forall n$
   $\Rightarrow x_n > x - M \forall n$ (10)
   $\forall L \in \mathbb{R}$
   $\exists N$ т.ч. $\forall n > N$ будет выполнено $a_n > L$ (11)
   (10), (11) $\Rightarrow a_n + x_n > L + x - M$
   Остальные свойства доказываются аналогично □

Дополнительно о терминологии и обозначениях
если $x_n \to 0$, то говорят что x_n - бесконечно малая последовательность
если $|a_n| \to +\infty$, то говорят что a_n - бесконечно большая последовательность

Обозначение. о - о малое
О - О Большое

след. читать только слева направо.

Обозначение. $x_n = o(1)$, если $x_n \to 0$
если $\exists M > 0$ т.ч. $|y_n| \leq M \forall n$,
$y_n = O(1)$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b_n \neq 0 \forall n$
$a_n = 0(b_n)$, если $\frac{a_n}{b_n} \to 0$
$\{c_n\}, \{d_n\}$
$c_n = O(d_n)$, если $\exists M_1$ т.ч. $|C_n| \leq M_1 |d_n|$
предположим $=$, что $a_n = \lambda_n b_n, \lambda_n \to 0$
Тогда пишут, что $a = o(b)n$
$\frac{a_n}{b_n} = \lambda_n$

Определение 17. (монотонные последовательности) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастает, если $a_n \leq a_{n+1} \forall n$

Будем говорить, что строго возрастает, если $a_n < a_{n+1}$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает, если $b_n \geq b_{n+1}$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго монотонно убывает, если $b_n > b_{n+1}$

$\{n\}_{n=1}^{\infty}$

Если есть некоторая поледовательностть c_n говорят что монотонна если либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает.

Последовательность c_n называется строго монотонной, если она строго монотонно возрастает либо строго монотонно убывает.

Теорема 16. Теорема о пределе монотонной последовательности $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\exists \lim\limits_{n \to \infty} c_n \in \overline{\mathbb{R}}$

Для того чтобы монотонно возрастающая последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно чтобы последовательность была ограничена снизу

Для того чтобы монотонно убывающая последовательность имела конечный предел.

$C_m \leq \lim\limits_{n \to \infty} C_n \forall m$

$C_m < \lim\limits_{n \to \infty} C_n$

$C_M \geq \lim\limits_{n \to \infty} C_n$

$C_M \lim\limits_{n \to \infty} C_n$

Доказательство. Рассмотрим ситуация, когда C_m монотонно возрастает. Предположим вначалае, что проследовательность C_m не ограничена сверху.

$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ не огр. сверху $\forall L \in \mathbb{R}$

Посколько мы предполгаем что последовательность не ограничена сверху значит найжется такой лемент послежовательности больший чем L

$\exists N$ т.ч. $C_N > L$

Потому что в противоположном случае L была бы верхней границей

$\forall n > N$ тогда, справедливо следующее неравенство $C_n \geq C_{n-1} \geq C_{n-2} \geq ... \geq C_N + 1 \geq C_N > L$

т.е. $C_n > L$

мы взяли любое L и по нему нашли такое N большое, что при любом n $>$ N полуается что с с номером n Больше чем lambda это означает что по определению предела предел $\lim C_n = +\infty$

Если последовательность возрастает и не ограничена сверху у нее есьт пределе и этот предел равен + бесконечности

другой вариант: последовательность возрастает и огранчена сверху

Пусть $C_n \leq C_{n+1} n \exists M..e_n \leq M \forall n$

рассмотрим множество всех элементов последовательности

$E = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}$ т.ч. $\alpha = C_n$

Это предположение означает что E ограничено сверху

$c = supE$

в таком случае мы имеем неравенство $C_n \leq C \forall n$ (12)

Теперь возьмем $\forall \varepsilon > 0$

$C - \varepsilon$ - это не верхняя граница

$\exists N$ т.ч. $C_N > C - \varepsilon$ (13)

Воспользуемся монотонностью последовательности C

Давайте возьмем $\forall n > N$

(13) $=> C_n \geq C_{n-1} \geq ... \geq C_{N+1}\ geq C_N > C - \varepsilon$ (14)

Посмотрим на соотношение 12, 14

$C - \varepsilon < C_N \leq C < C + \varepsilon => |C_n - C| < \varepsilon$ (15)

Это соотношение означает что

(15) $=> C = lim_{n \to \infty} C_n$

Предел существует, являющийся вещественным числом.

мы доказали что если последовательность ограничена сверху, то существует предел и выполенно такое неравенство.

□

Если последовательность строго монотонна, то неравенство будет строгим

Доказательство. $C_{n_0} < C_{n_0+1} \leq c => C_{n_0} < C$

□

Если $\exists \lim\limits_{n \to \infty} C_n = C \in R => \exists M$

т.ч. $|C_n - C| \leq M => C_n \leq C + M \forall n$

для убывающих доказывается аналогично.

Теорема 17. (Теорема о ложных промежутках) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \forall n$ (16)

Предположим, что $b_n - a_n \to 0$ (17) $n -> \infty$

Промежутки замкнутые

$=> \exists! c \in [a_n, b_n], \forall n$ (18)

Доказательство. $a_n \leq a_{n+1}, b_n \geq b_{n+q} \forall n$ (19)

$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_2 \leq b_1$ (19)

$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \forall n$

т.е. $a_n < b_1, b_n > a,$ (20)

(19), (20) $=> \exists \lim\limits_{n \to \infty} = a \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim\limits_{n \to \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ (21)

$a_n < b_n$

$=> lim_{n \to \infty} a_n \leq \lim\limits_{n \to \infty} b_n$ (22)

(21), (22) $=> a \leq b$ (23)

$a_n \leq a \forall n\ b_n \geq \forall n$

(24)

$=> b - a \leq b_n - a_n \forall n$
(25)
$0 \leq$ b - a $=> lim_{n\ to \infty}(b-a) \leq lim_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$ (26)
(23), (26) $=>$ a $=$ b $=$ def c
(24), (27)$=> a_n \leq c \leq b_n \forall n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$ (27')
Пусть $\exists c_1 \neq c$ т.ч. $c_1 \in [a_n, b_n] \forall n$ (28)
$c < c_1$
Тогда, 27' и 28 $=>$ что $a_n \leq c < c_1 \leq b_n \forall n$ (29)
(29) $=> c_1 - c \leq b_n - a_n \forall n$ (30)
(30) $=> \lim\limits_{n \to \infty}(c_1 - c) \leq \lim\limits_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$ $0 < c_1 - c =$ Предположение о том что найдется ещё какой-то c_1 неверно теорема доказана.

□

Замечание. В этой теореме рассматриваются замкнутые Промежутки

Пример. $a_n = O \forall n, b_n = \frac{1}{n}$
$(a_{n+1}, b_{n+1}) = (0, \frac{1}{n+1}) \subset (0, \frac{1}{n}) = (a_n, b_n)$
$b_n - a_n = \frac{1}{n} \to 0$ $n \to \infty$
$\nexists C \in \mathbb{R}$ т.ч. $c \in (0, \frac{1}{n}) \forall n$

в каком месте доказательства предыдущей теоремы мы пользовались тем что промежутки замкнуты?

3.2 Число e

e

$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ $x_n < y_n \forall n$ (1)
x_n строго возрастает (2)
y_n строго убывает (3)
$x_n \to e, y_n \to e$
$2 < e < 3$
$y_n = (1 + \frac{1}{n}) x_n > x_n$
Рассмотрим $\frac{y_n - 1}{y_n} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}$
$= (\frac{n}{n-1})^n \cdot (\frac{n}{n+1})^n + 1$
$\frac{n}{n+1} \cdot (\frac{1}{n-1})^n \cdot (\frac{1}{n+1})^n$
$= \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2}{n^2-1})^n$
$= \frac{n}{n+1}(\frac{n^2-1+1}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n >$
$(n^2 - 1 =\} x)$
$x > 0, n \geq 2$ $(1+x)^n > 1 + nx$ (неравенство бернулли)
$> \frac{n}{n+1}(1 + \frac{n}{n^2-1})$
$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^2-1+n}{n^2-1} =$
$= \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$
$\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1$
$y_{n-1} > y_n$
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k!)}$
$C_n^0 = C_n^n = 1$
$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
$x_n = (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (\frac{1}{n})^k = 1 \cdot 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k}$
$= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n=k+1)\cdot \ldots \cdot n}{n^k}$
$= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}(1 - \frac{k-1}{n})$
$= 2 + \sum_n^{k=2} \frac{1}{k!}(1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{k-2}{n}) \cdot (1-\frac{1}{n})$ (5)
$\frac{n-k+1}{n} = 1 - \frac{k-1}{n}$
$\frac{n-k+2}{n} = 1 - \frac{k-2}{n}$
...
$\frac{n-k+k}{n} = 1 - \frac{k-k}{n} = 1$
$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n-k)!(n-k+1)\cdot \ldots \cdot n}{(n-k)!} = (n-k+1) \cdot \ldots \cdot n$
$n \geq 3$
$a = 1, b = \frac{1}{n}$
$1^{n-k} = 1$