Оглавление

Лекция 3: Степень, логарифм, десятичные дроби. Последовательности.

287.09.2023

0.1 Неравенство Бернулли

Теорема 1 (Неравенство Бернулли)**.** Пусть $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$ неравенство очевидно. Пусть оно верно для $n = k$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x.$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку $kx^2 \geq 0$. □

0.2 Определение степени и логарифма

Определение 1. Пусть $a > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0; r = \frac{n}{m}$. Тогда
$a^r = (a^{\frac{1}{m}})^n$.
Если $n > 0$, то: $x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m}$
Если $m < 0$, то $x^m = \frac{1}{x^{|m|}}$.

Определение 2. Пусть $p \in \mathbb{Q}, p \neq 0, a > 1$
Тогда $a^p = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \neq 0, r < p\}$
$a^0 = 1$

Определение 3. Пусть $a > 1, \alpha \in \mathbb{R}$
$E = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < \alpha, r \neq 0\}$
Тогда $\sup E = a^\alpha$.
И $\forall a \in \mathbb{R} : 0 < a < 1 : a^\alpha = (\frac{1}{a})^{-\alpha}$

Определение 4. Пусть $a > 0, a \neq 0, x > 0$. Тогда
Если $a > 1 : \log_a x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : a^r < x\}$.
Если $0 < a < 1 : \log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$

Теорема 2. (Без доказательства) Для степени и логарифма справедливы все ранее встречавшиеся свойства. (имеется в виду школьный курс)

Глава 1

Последовательности

Определение 5. Пусть X — множество, $X \neq \varnothing$. Тогда последовательностью элементов множества X называется функция $f : \mathbb{N} \to X$.

$x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots ; x_n \in X$ Последовательность — $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

1.1 Сопоставление вещественным числам десятичных дробей

Алгоритм. (Построение дроби по числу)

Рассматриваем только $x > 0, x \in \mathbb{R}$

Возьмем $n_0 \in \mathbb{Z}_+ : n_0 \leq x, n_0$ — максимальное число с таким свойством.

- Если $n_0 = x$ — алгоритм закончен.
- Если $n_0 < x$ — продолжаем: выбираем $n_1 \in \mathbb{Z} : n_0 + \frac{n_1}{10} \leq x$

Аналогично с n_0, проверяем равенство с x. Так вплоть до n_k:
$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} \leq x$

Если ни на одном шаге равенство не выполняется, то задаем последовательность:
$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = n_0, \frac{n_1}{10}, \frac{n_2}{10^2}, \ldots$

Теорема 3. (О супремуме десятичных дробей) Рассмотрим $E = \{r : r = \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k}, k \in \mathbb{N}\}$

Тогда $\sup E = x$ (из алгоритма).

Доказательство. Так как $n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} < x$, то $\sup E \leq x$

Предположим, что $\sup E < x$. Тогда $\exists r : r = x - \sup E > 0$.

Выберем такое k, что $\frac{1}{k^9} < r \Leftrightarrow k > \frac{1}{r^9}$.

$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} < x < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k+1}{10^k} \Rightarrow$

$\Rightarrow n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} > x - \frac{1}{10^k} > x - \frac{1}{9^k} > x - r = \sup E$, значит

$x = \sup E$ $\square$

Лемма 1. (доказать самостоятельно) Пусть есть $E \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, E_a = \{x + a : x \in E\}$

Тогда $\sup E_a = a + \sup E$

Дальше шла какая-то теорема, смысл которой я не понял. Если найдете адекватную запись или сможете объяснить — пишите $\odot \smile \odot$

1.2 Предел последовательности

Определение 6. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Тогда $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$.

Замечание. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : |z - x| \leq |z - y| + |y - x|$

Определение 7. Пусть X — множество, функция ρ: $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$

X — метрическое пространство, если: $\forall a, b \in X : \rho(a, b) \geq 0$

И выполнены следующие свойства:

1. $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$
3. $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b)$

Тогда ρ — метрика X.

Пример. $\mathbb{R}$ — метрическое пространство, $\rho(x, y) = |x - y|$

Определение 8. Пусть X — метрическое пространство, $a \in X, \{x_n\}_{n=0}^{\infty}, x_n \in X$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < \varepsilon$

Теорема 4. (Единственность предела) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то $a = b$

Доказательство. Пусть $a \neq b$. Тогда $\delta = \rho(a, b) > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$.

1. Так как $\underset{n\to\infty}{x_n} \to a : \exists N_1 : \forall n > N_1 : \rho(x_n, a) < \varepsilon$
2. И так как $\underset{n\to\infty}{x_n} \to b : \exists N_2 : \forall n > N_2 : \rho(x_n, b) < \varepsilon$.

Пусть $n = N_1 + N_2 + 1$. Тогда для n выполнены (1) и (2)

Имеем $0 < \delta = \rho(a,b) \leq \rho(a,x_n) + \rho(x_n,b) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{\delta}{2}$ — противоречие. □

Теорема 5. (Ограниченность сходящейся последовательности) X — метрическое пространство с метрикой ρ

$x_n \in X, a \in X$ Пусть $\underset{n\to\infty}{x_n} \to a$. Тогда $\exists\, R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, a) < R$

Доказательство. Возьмем

$\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < 1$ (1)

Определим R как $R = \max(\rho(x_1,a)+1, \rho(x_2,a)+1, \ldots, \rho(x_N,a)+1, 1)$ (2)

Тогда:

- если $n > N$, то из (1) следует (2), значит $R \geq 1$
- если $1 \leq n \leq N$, то $R \geq \rho(x_n, a)$

В обоих случаях R удовлетворяет условию теоремы. □

1.3 Арифметические операции над пределами

Свойства. Для $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b, c \in \mathbb{R}$ справедливы следующие свойства:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
2. $c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c \cdot a$
3. $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\to} a + b$
4. $x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\to} a \cdot b$

Доказательство.

1. $\forall \varepsilon > 0, \forall n > 1 : |x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |cx_n - ca| = |c(x_n - a)| = |c||x_n - a| < |c|\varepsilon$
3. $\begin{cases} \forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon_1 \\ \forall \varepsilon_2 > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \varepsilon_2 \end{cases} \Rightarrow$ при $n > N_1 + N_2 + 1$: $|x_n + y_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$
4. Аналогично (3) при $n > N_1 + N_2 + 1 : |x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b|$

   т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\exists R : \forall n : |y_n| \leq R$ (из предыдущей теоремы)

   Тогда $|x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| < \varepsilon_1 R + |a|\varepsilon_2$

□