

Математический анализ

Широков Николай Алексеевич¹

07.09.2023 - ...

¹"Записал Сергей Киселев, Гараев Тагир"

Оглавление

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Построение множества вещественных чисел | 2 |
| 1.1 | Множества | 2 |
| 1.2 | Сечения | 2 |
| 1.3 | Сумма сечений | 3 |
| 1.4 | Теоремы сечений | 4 |
| 2 | Вещественные числа | 8 |
| 2.1 | Супремумы и инфимумы | 9 |
| 2.2 | Неравенство Бернулли | 11 |
| 2.3 | Определение степени и логарифма | 11 |
| 3 | Последовательности | 12 |
| 3.1 | Сопоставление вещественным числам десятичных дробей . . . | 12 |
| 3.2 | Предел последовательности | 13 |
| 3.3 | Арифметические операции над пределами | 14 |
| 4 | Алгоритмы | 15 |
| 4.1 | Продолжение | 15 |
| 4.2 | Число e | 20 |
| 4.3 | Критерий Коши, существование конечного предела последо- вательности | 23 |
| 4.4 | Подпоследовательности | 26 |
| 4.5 | Верхний и нижний предел последовательности | 31 |
| 4.6 | Свойства верхних и нижних пределов | 33 |

Глава 1

Построение множества вещественных чисел

Лекция 1: Введение

14.09.2023

1.1 Множества

Определение 1. Множества X и Y равны, если:

$$\forall a \in X : a \in Y$$

$$\forall b \in Y : b \in X$$

Определение 2. $X \subset Y$ если:

$$\forall a \in X : a \in Y$$

Определение 3. 1. $a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \vee a \in B$

$$2. a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \in B$$

$$3. a \in A \setminus B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \notin B$$

Определение 4. (Декартово произведение множеств)

$$A \times B = \{(a, b) : \forall a \in A, \forall b \in B\}; A, B \neq \emptyset$$

Определение 5. $F : A \rightarrow B$ - функция, такая, что: $\forall a \in A$ сопоставляет $b = F(a) \in B$

1.2 Сечения

Определение 6. Множество $\alpha \subset \mathbb{Q}$ называется сечением, если:

- I. $\alpha \neq \emptyset$

- II. если $p \in \alpha$, то $q < p \Leftrightarrow q \in \alpha$
- III. в α нет наибольшего

Пример. 1. $p^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < p\}$ - нет наибольшего

2. $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 0 \vee p > 0 \wedge p^2 < 2\}$

Теорема 1. (Утверждение 1)

Если $p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$, то $q > p$

Доказательство. Если $p \in \alpha$ и $q \leq p$, то из (II.) следует, что $q \in \alpha$ \square

Теорема 2. (Утверждение 2) $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

Доказательство. $\begin{cases} \alpha < \beta \Rightarrow \exists p \in \beta, p \notin \alpha \\ \beta < \gamma \Rightarrow \exists p \in \gamma, p \notin \beta \end{cases} \Rightarrow p < q \Rightarrow \alpha < \gamma$ \square

Теорема 3. Пусть α, β - сечения. Между ними существует одно из

нескольких отношений: $\begin{cases} \alpha < \beta \\ \beta > \alpha \\ \alpha = \beta \end{cases}$

Доказательство. Предположим, что $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$, тогда:

$$\begin{cases} \exists p \in \alpha, p \notin \beta \\ \exists q \in \beta, q \notin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p > q \\ q > p \end{cases} \text{ - Противоречие, тогда } \alpha \neq \beta \quad \square$$

1.3 Сумма сечений

Теорема 4. Пусть α, β - сечения, тогда:

$\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha, q \in \beta\}$ - тоже сечение.

Доказательство. • (I.) Пусть $\exists s \notin \alpha, \exists t \notin \beta$, тогда:

$$\forall p \in \alpha, q \in \beta : \begin{cases} p < s \\ q < t \end{cases} \Rightarrow p + q < s + t \Rightarrow \alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$$

• (II.)

$$r \in \alpha + \beta, r_1 < r$$

$$r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$$

$$r_1 = p + q_1, r_1 < r \Rightarrow q_1 < q \Rightarrow q_1 \in \beta \Rightarrow p + q_1 \in \alpha + \beta$$

• (III.)

$\exists p_1 \in \alpha, p > p_1 \Rightarrow p_1 + q > p + q = r, p_1 + q \in \alpha + \beta$ - нет наибольшего \square

Теорема 5. (Свойства суммы сечений)

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. $\alpha + 0^* = \alpha$, где $0^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}$

Доказательство. Свойства 1 и 2 справедливы в силу коммутативности и ассоциативности рациональных чисел.

Докажем свойство 3:

1. Пусть $p \in \alpha, q \in 0^*$, тогда: $p + q < p \Rightarrow p + q \in \alpha$, т.е. $\alpha + 0^* \subset \alpha$
2. Пусть $p \in \alpha$, тогда: $\exists p_1 > p \Rightarrow p_1 \in \alpha, p = p_1 + (p - p_1)$, при том $p_1 \in \alpha, p - p_1 \in 0^* \Rightarrow p \in \alpha + 0^* \Rightarrow \alpha \subset \alpha + 0^*$

$$\begin{cases} \alpha \subset \alpha + 0^* \\ \alpha + 0^* \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \alpha + 0^* \quad \square$$

1.4 Теоремы сечений

Теорема 6. (Теорема 2) Пусть α - сечение, $r \in \mathbb{Q}^+$, тогда $\exists p \in \alpha \wedge q \notin \alpha$:
 q - не наименьшее верхнее (не входящее в сечение) число
 $q - p = r$

Доказательство. Пусть $p_0 \in \alpha, p_1 = p_0 + r$

1. Возможно, $p_1 \notin \alpha$, тогда:
 - (а) если p_1 - не наименьшее в верхнем классе, то $q = p_1$
 - (б) если же наименьшее, то $p = p_0 + \frac{r}{2}, q = p_1 + \frac{r}{2}$
2. Если $p_1 \in \alpha$, тогда:
 Положим $p_n = p_1 + nr$ для $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $\exists! m$:
 $p_m \in \alpha$ и $p_{m+1} \notin \alpha$
 - (а) Если p_{m+1} - не наименьшее в верхнем классе, то выберем $p = p_m, q = p_{m+1}$
 - (б) Если же наименьшее, то $p = p_m + \frac{r}{2}, q = p_{m+1} + \frac{r}{2}$

\square

Теорема 7. (Существование противоположного элемента) Пусть α - сечение, тогда $\exists! \beta : \alpha + \beta = 0^*$

Доказательство. (нужно доказать единственность и существование)

1. Докажем единственность: пусть $\exists \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющие условию, тогда:

$$\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1$$

2. Докажем существование: пусть

$$\beta = \{p : -p \notin \alpha, -p \text{ не является наименьшим в верхнем классе } \alpha\}$$

- (I.) Очевидно, что $\beta \neq \emptyset, \mathbb{Q}$
- (II.) Возьмем $p \in \beta, q < p \Leftrightarrow -q > -p \Rightarrow -q$ в верхнем классе α , но не наименьшее $\Rightarrow q \in \beta$
- (III.) Если $p \in \beta$, то $-p$ - не наименьшее в верхнем классе α , значит $\exists q : -q < -p$ и $-q \notin \alpha$

Положим $r = \frac{p+q}{2}$, тогда:

$$-q < -r < -p \Rightarrow -r \text{ - не наименьшее в верхнем классе } \alpha.$$

Значит, нашли такое $r > p$, что $r \in \beta$

Теперь проверим, что $\alpha + \beta = 0^*$:

1. Возьмем $p \in \alpha, q \in \beta$

$$\text{По определению } \beta : -q \notin \alpha \underset{\text{утв. 1}}{\Rightarrow} -q > p \Leftrightarrow p + q < 0 \Rightarrow p + q \in 0^* \Rightarrow \alpha + \beta \subset 0^*$$

2. Возьмем по Теореме (2) $q - p = r \Leftrightarrow p - q = -r \in 0^*$

$$\text{т.к. } q \notin \alpha, \text{ то } -q \in \beta, \text{ значит } p - q = p + (-q) \in \alpha + \beta \Rightarrow 0^* \subset \alpha + \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \subset 0^* \\ 0^* \subset \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 0^* \quad \square$$

Лекция 2: Сечения

21.09.2023

Теорема 8. Пусть α, β — сечения. Тогда $\exists! \gamma$ — сечение : $\alpha + \gamma = \beta$

Доказательство. Пусть имеем $\gamma_1 \neq \gamma_2$, удовлетворяющие условию. Тогда: $\alpha + \gamma_1 = \beta = \alpha + \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$ — противоречие.

Положим $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Тогда в силу свойств сечений имеем:

$$\alpha + \gamma = \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0^* + \beta = \beta \quad \square$$

Определение 7. Сечение γ , построенное в предыдущей теореме обозначается через $\beta - \alpha$

Определение 8. (Абсолютная величина) $|a| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geq 0^* \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0^* \end{cases}$

Определение 9. (Произведение) Пусть α, β — сечения, причем $\alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^*$

Тогда $\alpha\beta = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0 \vee r = pq, \text{ где } p \in \alpha, q \in \beta\}$

Пример. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^*$

Теорема 9. (Любые 3 из них необходимо доказать самостоятельно)
Для любых сечений α, β, γ имеем:

1. $\alpha\beta = \beta\alpha$
2. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
4. $\alpha 0^* = 0^*$
5. $\alpha 1^* = \alpha$
6. если $\alpha < \beta$ и $\gamma > 0^*$, то $\alpha\gamma < \beta\gamma$
7. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta : \alpha \cdot \beta = 1^*, \beta = \frac{1^*}{\alpha}$
8. если $\alpha \neq 0^*$, то $\exists \beta, \gamma : \alpha \cdot \gamma = \beta, \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$

Теорема 10. (Свойства рациональных сечений)

1. $p^* + q^* = (p + q)^*$
2. $p^* q^* = (pq)^*$
3. $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

Доказательство. 1. Возьмем $r \in (p + q)^* \Rightarrow r < p + q$

Положим $h = p + q - r$:

$$\begin{cases} p_1 = p - \frac{h}{2} \\ q_1 = q - \frac{h}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in p^* + q^* \Rightarrow (p^* + q^*) \subset p^* + q^*$$

Теперь возьмем $r \in p^* + q^* \Rightarrow r = p_1 + q_1$:

$$\begin{cases} p_1 \in p^* \\ q_1 \in q^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ q_1 < q \end{cases} \Rightarrow p_1 + q_1 < p + q \Rightarrow p_1 + q_1 = r \in (p + q)^* \Rightarrow p^* + q^* \subset (p + q)^*$$

$$\begin{cases} p^* + q^* \subset (p + q)^* \\ (p + q)^* \subset p^* + q^* \end{cases} \Rightarrow p^* + q^* = (p + q)^*$$

2. Для умножения доказательство аналогично.

3. Если $p < q$, то $p \in q^*, p \notin p^* \Rightarrow p^* < q^*$

Если $p^* < q^*$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in q^*, r \notin p^* \Rightarrow p \leq r < q \Rightarrow p < q$

Значит $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

□

Теорема 11. Пусть α, β — сечения, $\alpha < \beta$. Тогда $\exists r^*$ — рациональное сечение :
 $\alpha < r^* < \beta$

Доказательство. $\alpha < \beta \Rightarrow \exists p : p \in \beta, p \notin \alpha$

Выберем такое $r > p$, так, что $r \in \beta$. Поскольку $r \in \beta, r \notin r^*$, то $r^* < \beta$

Поскольку $p \in r^*, p \notin \alpha$, то $\alpha < r^*$

□

Глава 2

Вещественные числа

Определение 10. В дальнейшем сечения будут называться вещественными числами. Рациональные сечения будут отождествляться с рациональными числами. Все другие сечения будут называться иррациональными числами.

Таким образом, множество всех рациональных чисел оказывается подмножеством системы вещественных чисел.

Теорема 12. (Дедекинда) Пусть A и B — такие множества вещественных чисел, что:

1. $A \cup B = \mathbb{R}$
2. $A \cap B = \emptyset$
3. $A, B \neq \emptyset$
4. $\forall \alpha \in A, \beta \in B : \alpha < \beta$

Тогда $\exists! \gamma \in \mathbb{R} : \alpha \leq \gamma \leq \beta \forall \alpha \in A, \forall \beta \in B$

Доказательство. 1. Докажем единственность.

Пусть γ_1, γ_2 — два числа, причем $\gamma_1 < \gamma_2$. Тогда $\exists \gamma_3 : \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2 \Rightarrow \gamma_3 \in A, \gamma_3 \in B$ — противоречие. Значит $\gamma_1 = \gamma_2$.

2. Проверим, является ли γ сечением.

$$\gamma = \{p \in \mathbb{Q} : \exists \alpha \in A : p \in \alpha\}$$

I. $\gamma \neq \emptyset$, т.к. $A \neq \emptyset$

$\gamma \neq \mathbb{Q}$, т.к. $\exists q \in \mathbb{Q} : q \notin B \Rightarrow q \notin \gamma$

II. Пусть $p_1 < p, p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p_1 \in \alpha \Rightarrow p_1 \in \gamma$

III. Пусть $p \in \gamma$. Тогда $\exists \alpha \in A : p \in \alpha$. Поскольку α — сечение, то $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \alpha, q > p \Rightarrow q \in \gamma$

Ясно, что $\alpha \leq \gamma \forall \alpha \in A$.

Предположим, что $\exists \beta \in B : \beta < \gamma$. Тогда $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in \gamma, q \notin \beta \Rightarrow \exists \alpha \in A : q \in \alpha \Rightarrow \alpha > \beta$ — противоречие. Значит $\gamma \leq \beta \forall \beta \in B$. \square

2.1 Супремумы и инфимумы

Определение 11. $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \emptyset$

E — ограничено сверху, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq y$

Определение 12. $G \subseteq \mathbb{R}, G \neq \emptyset$

G — ограничено снизу, если $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \geq y$

Замечание. Если множество ограничено сверху и снизу, оно называется ограниченным.

Определение 13. Пусть E ограничено сверху. Тогда y называется точной верхней границей (верхней гранью) E , если:

1. y — верхняя граница множества E .
2. если $x < y$, то x не является верхней границей множества E .

Определение 14. Пусть E ограничено снизу. Тогда y называется точной нижней границей (нижней гранью) E , если:

1. y — нижняя граница множества E .
2. если $x > y$, то x не является нижней границей множества E .

Определение 15. Точная верхняя граница — $y \sup E$

Точная нижняя граница — $y \inf E$

Пример. E состоит из всех чисел $\frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда множество ограничено, верхняя грань равна 1 и принадлежит множеству, а нижняя равна 0 и множеству не принадлежит.

Теорема 13. Пусть E ограничено сверху. Тогда $\sup E$ существует.

Доказательство. Пусть есть множества:

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in E : x > \alpha\}$$

$$B = \mathbb{R} \setminus A$$

Тогда $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

$$\begin{cases} \beta \in B \\ \alpha \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in E : x \leq \beta \\ \exists x_0 \in E : x_0 > \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha < \beta$$

Ясно, что никакой элемент множества A не является верхней гра-

ницей множества E , а любой элемент множества B является верхней границей множества E . Поэтому достаточно доказать, что B содержит наименьшее число.

По теореме Дедекинда: $\exists \gamma : \begin{cases} \alpha \leq \gamma \ \forall \alpha \in A \\ \beta \leq \gamma \ \forall \beta \in B \end{cases}$

Предположим, что $\gamma \in A$. Тогда $\exists x \in E : x > \gamma$.

Возьмем $\gamma_1 : \gamma < \gamma_1 < x \Rightarrow \gamma_1 \in A$ — противоречие.

Значит $\gamma \in B$. □

Теорема 14. Пусть E ограничено снизу. Тогда $\inf E$ существует.

Доказательство. Доказательство тривиально и предоставляется читателю в качестве упражнения $\odot \sim \odot$. □

Теорема 15. (Существование корня из вещественного числа) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n > 0 \exists! y \in \mathbb{R}, y > 0 : y^n = x, y = \sqrt[n]{x}$

Доказательство. 1. Единственность.

Пусть $y_1 > y_2 : y_2^n = x = y_1^n \Rightarrow y_2^n - y_1^n = 0$

$(y_2 - y_1) \cdot (y_2^{n-1} + y_2^{n-2} \cdot y_1 + \dots + y_1^{n-1}) = 0$ — противоречие.

2. Существование.

Пусть $E = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0, t^n < x\}$

$0 \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$

Положим $t_0 = 1 + x, t_0^n = (1 + x)^n$

$\sum_{k=1}^n C_n^k x^k = 1 + nx + \dots > x \Rightarrow E$ — ограничено сверху.

Пусть $y = \sup E$ (она существует по теореме о Существовании супремума).

- Допустим, что $y^n < x$. Возьмем $h : 0 < h < 1$ и $h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}$
Тогда $(y + h)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k y^{n-k} h^k = y^n + \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^k = y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} h^{k-1} < y^n + h \sum_{k=1}^n C_n^k y^{n-k} = y^n + h \cdot ((1+y)^n - y^n) < (y+1)^n - y^n < y^n + x - y^n = x - y$ — не верхняя граница.
- Допустим, что $y^n > x$. Возьмем $k : 0 < k < 1, k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$ и $k < y$. Тогда аналогично с $y^n > x$ получаем, что $y - k$ — верхняя граница E , что противоречит тому, что $y = \sup E$.

Значит $y^n = x$. □

Лекция 3: Степень, логарифм, десятичные дроби. Последовательности.

287.09.2023

2.2 Неравенство Бернулли

Теорема 16 (Неравенство Бернулли). Пусть $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 1$ неравенство очевидно. Пусть оно верно для $n = k$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку $kx^2 \geq 0$. \square

2.3 Определение степени и логарифма

Определение 16. Пусть $a > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$; $r = \frac{n}{m}$. Тогда

$$a^r = (a^{\frac{1}{m}})^n.$$

Если $n > 0$, то: $x^m = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$

Если $m < 0$, то $x^m = \frac{1}{x^{|m|}}$.

Определение 17. Пусть $p \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$, $a > 1$
Тогда $a^p = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \neq 0, r < p\}$
 $a^0 = 1$

Определение 18. Пусть $a > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$
 $E = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < \alpha, r \neq 0\}$
Тогда $\sup E = a^\alpha$.
И $\forall a \in \mathbb{R} : 0 < a < 1 : a^\alpha = (\frac{1}{a})^{-\alpha}$

Определение 19. Пусть $a > 0$, $a \neq 0$, $x > 0$. Тогда
Если $a > 1 : \log_a x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : a^r < x\}$.
Если $0 < a < 1 : \log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$

Теорема 17. (Без доказательства) Для степени и логарифма справедливы все ранее встречавшиеся свойства. (имеется в виду школьный курс)

Глава 3

Последовательности

Определение 20. Пусть X — множество, $X \neq \emptyset$. Тогда последовательностью элементов множества X называется функция $f: \mathbb{N} \rightarrow X$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \dots; x_n \in X$ Последовательность — $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

3.1 Сопоставление вещественным числам десятичных дробей

Алгоритм. (Построение дроби по числу)

Рассматриваем только $x > 0, x \in \mathbb{R}$

Возьмем $n_0 \in \mathbb{Z}_+ : n_0 \leq x, n_0$ — максимальное число с таким свойством.

- Если $n_0 = x$ — алгоритм закончен.
- Если $n_0 < x$ — продолжаем: выбираем $n_1 \in \mathbb{Z} : n_0 + \frac{n_1}{10} \leq x$

Аналогично с n_0 , проверяем равенство с x . Так вплоть до n_k :

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} \leq x$$

Если ни на одном шаге равенство не выполняется, то задаем последовательность:

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = n_0, \frac{n_1}{10}, \frac{n_2}{10^2}, \dots$$

Теорема 18. (О супремуме десятичных дробей) Рассмотрим $E = \{r : r = \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k}, k \in \mathbb{N}\}$

Тогда $\sup E = x$ (из алгоритма).

Доказательство. Так как $n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} < x$, то $\sup E \leq x$

Предположим, что $\sup E < x$. Тогда $\exists r : r = x - \sup E > 0$.

Выберем такое k , что $\frac{1}{k \cdot 9} < r \Leftrightarrow k > \frac{1}{r \cdot 9}$.

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} < x < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k+1}{10^k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} > x - \frac{1}{10^k} > x - \frac{1}{9^k} > x - r = \sup E, \text{ значит}$$

$$x = \sup E$$

□

Лемма 1. (доказать самостоятельно) Пусть есть $E \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, E_a = \{x + a : x \in E\}$
Тогда $\sup E_a = a + \sup E$

Дальше шла какая-то теорема, смысл которой я не понял. Если найдете адекватную запись или сможете объяснить — пишите ☺ ◡ ☺

3.2 Предел последовательности

Определение 21. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Тогда $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$.

Замечание. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : |z - x| \leq |z - y| + |y - x|$

Определение 22. Пусть X — множество, функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$
 X — метрическое пространство, если: $\forall a, b \in X : \rho(a, b) \geq 0$
И выполнены следующие свойства:

1. $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$
3. $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b)$

Тогда ρ — метрика X .

Пример. \mathbb{R} — метрическое пространство, $\rho(x, y) = |x - y|$

Определение 23. Пусть X — метрическое пространство, $a \in X, \{x_n\}_{n=0}^{\infty}, x_n \in X$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < \varepsilon$

Теорема 19. (Единственность предела) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$,
то $a = b$

Доказательство. Пусть $a \neq b$. Тогда $\delta = \rho(a, b) > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$.

1. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a : \exists N_1 : \forall n > N_1 : \rho(x_n, a) < \varepsilon$
2. И так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b : \exists N_2 : \forall n > N_2 : \rho(x_n, b) < \varepsilon$.

Пусть $n = N_1 + N_2 + 1$. Тогда для n выполнены (1) и (2)
Имеем $0 < \delta = \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{\delta}{2}$ — противоречие. \square

Теорема 20. (Ограниченность сходящейся последовательности) X — метрическое пространство с метрикой ρ

$x_n \in X, a \in X$ Пусть $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. Тогда $\exists R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, a) < R$

Доказательство. Возьмем

$\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N : \forall n > N : \rho(x_n, a) < 1$ (1)

Определим R как $R = \max(\rho(x_1, a) + 1, \rho(x_2, a) + 1, \dots, \rho(x_N, a) + 1, 1)$
(2)

Тогда:

- если $n > N$, то из (1) следует (2), значит $R \geq 1$
- если $1 \leq n \leq N$, то $R \geq \rho(x_n, a)$

В обоих случаях R удовлетворяет условию теоремы. \square

3.3 Арифметические операции над пределами

Свойства. Для $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, c \in \mathbb{R}$ справедливы следующие свойства:

$$1. \forall n \in \mathbb{N} : x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$2. c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \cdot a$$

$$3. x_n + y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$$

$$4. x_n \cdot y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b$$

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0, \forall n > 1 : |x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |cx_n - ca| = |c(x_n - a)| = |c||x_n - a| < |c|\varepsilon$$

$$3. \begin{cases} \forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon_1 \\ \forall \varepsilon_2 > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \varepsilon_2 \end{cases} \Rightarrow \text{при } n > N_1 + N_2 + 1 : \\ |x_n + y_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$4. \text{Аналогично (3) при } n > N_1 + N_2 + 1 : |x_n y_n - ab| = |x_n y_n - ay_n + ay_n - ab| \leq |x_n y_n - ay_n| + |ay_n - ab| = |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b|$$

т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то $\exists R : \forall n : |y_n| \leq R$ (из предыдущей теоремы)

$$\text{Тогда } |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| < \varepsilon_1 R + |a|\varepsilon_2$$

\square

Глава 4

Алгоритмы

Лекция 4: Продолжение

27.09.2023

4.1 Продолжение

5. $x_n \neq c \forall n, x_n \rightarrow a, a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{a}$
 $|a + b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow |a| \geq |a + b| - |b|$
 $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$
 $\Rightarrow \exists N$ т.ч. $\forall n > N$ выполняется
 $|x_n - a| < \varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} \Rightarrow |x_n| \geq |a| - |x_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$
 $\forall \varepsilon \exists N_1$ т.ч. $\forall n > N_1$ (1)
 $|x_n - a| < \varepsilon$ (2)
 $N_0 = \max(N, N_1) n > N_0$
 $|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| = |\frac{a - x_n}{x_n a}| = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot |x_n - a| <$
(1, 2)
 $< \frac{1}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} \cdot \varepsilon$
6. $x_{nn=1}^\infty$, как в 5., $y_n \rightarrow b \Rightarrow$
 $\frac{y_n}{x_n} \rightarrow \frac{b}{a}$
 $\frac{y_n}{x_n} = y_n \cdot \frac{1}{x_n}$ 4., 5
7. $x_n \leq y_n \forall n, x|n \rightarrow a, y_n b \Rightarrow a \leq b$

Доказательство. Предположим, что это не так.

Пусть $a \not\leq b$ (доказали что неверно) b (?)

$$\varepsilon_0 = \frac{1-b}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \exists N_1 \text{ т.ч. } \forall n > N_1$$

$$|x_n - a| < \varepsilon_0 \text{ (3)}$$

$$\text{и exists } N_2 \text{ т.ч. } \forall n > N_2$$

$$|y_n - b| < \varepsilon_0 \text{ (4)}$$

$$n = N_1 + N_2 + 1$$

$$|x_n - a| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0) \text{ (3')}$$

$$|y_n - b| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow y_n \in (b - \varepsilon_0, b + \varepsilon_0) \text{ (4')}$$

$$(3'), (4') \Rightarrow y_n < b + \varepsilon_0 = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a \frac{a-b}{2}$$

$$= a - \varepsilon_0 < x_n$$

$$y_n < x_n$$

□

$$a < b$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Расширенное множество вещественных чисел

$$\overline{\mathbb{R}}$$

$$+\infty, -\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x < +\infty, x > -\infty$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$8. \xi_n \leq \psi_n \leq \zeta_n \forall n$$

$$\xi \rightarrow a, \zeta_n \rightarrow a \Rightarrow \psi_n \rightarrow a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \text{ т.ч. } \forall n > N_1$$

$$|x_n - 1| < \varepsilon \leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad (5)$$

$$\text{и } \exists N_2 \text{ т.ч. } \forall n > N_2$$

$$|\zeta_n - a| < \varepsilon \leftrightarrow \zeta_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad (6)$$

$$(5), (6) \Rightarrow \forall n > N, N = \max(N_1, N_2)$$

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq \zeta_n < a + \varepsilon, \text{ т.е. } y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon$$

Определение 24. (Бесконечные пределы)

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$x_n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

$$\text{если } \forall L \in \mathbb{R} \exists N \text{ т.ч. } \forall n > N$$

$$\text{выполнено } x_n > L \quad (7)$$

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$y_n \rightarrow -\infty \quad n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty,$$

$$\forall L_0 \in \mathbb{R}, \exists N_0 \text{ т.ч. } \forall n > N_0$$

$$y_n < L_0 \quad (8)$$

(возможно сокращение записи $n \rightarrow \infty$ далее.)

Единообразная запись определения пределов

$$a \in \mathbb{R}$$

$$w(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Окрестность $+\infty$

$$w(+\infty) = (L, \infty), L \in \mathbb{R}$$

Окрестность $-\infty$

$$w(-\infty) = (-\infty, L)$$

Пусть имеется некая $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть имеется некая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$x_n \rightarrow \alpha \quad n \rightarrow \infty$$

$$\text{если } \forall w(\alpha)$$

$$\exists N \text{ т.ч. } \forall n > N \text{ выполнено } x_n \in w(\alpha)(q)$$

Свойства бесконечных пределов

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a \rightarrow +\infty$$

$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, b \rightarrow -\infty$$

1. $c \neq 0$, а) $ca_n \rightarrow +\infty, cb_n \rightarrow -\infty$
 б) $c < 0 \Rightarrow ca_n \rightarrow -\infty, cb_n \rightarrow +\infty$
2. $x_n \rightarrow x, x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Rightarrow a_n + x_n \rightarrow +\infty$
 $y_n \rightarrow y, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \Rightarrow b_n + y_n \rightarrow -\infty$
3. a_n, b_n, x_n, y_n, u_n
 $x > 0 \Rightarrow a_n x_n \rightarrow +\infty, b_n x_n \rightarrow -\infty$
 $y < 0 \Rightarrow a_n y_n \rightarrow -\infty, b_n y_n \rightarrow +\infty$
4. если $a_n \neq 0, a_n \neq 0 \forall n \Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0, \frac{1}{b_n} \rightarrow 0$ Если $x_n > 0, x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$
 если $y_n < 0, y_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{y_n} \rightarrow -\infty$
5. $x_n \leq y_n \forall n, x \rightarrow \alpha, y_n \rightarrow \beta, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$
 $\Rightarrow \alpha \leq \beta$
 $+\infty = +\infty$
 $-\infty = -\infty$
 $-\infty < +\infty$
 $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow y_n \rightarrow \alpha$
 (док-ть всё)

Доказательство. $x \in \mathbb{R}$

если последовательность имеет предел, то она ограничена (было)

нужно сформулировать с дополнительными словами

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел

$\exists M$ т.ч. $|x_n - x| < M \forall n$

$\Rightarrow x_n > x - M \forall n$ (10)

$\forall L \in \mathbb{R}$

$\exists N$ т.ч. $\forall n > N$ будет выполнено $a_n > L$ (11)

(10), (11) $\Rightarrow a_n + x_n > L + x - M$

Остальные свойства доказываются аналогично □

Дополнительно о терминологии и обозначениях

если $x_n \rightarrow 0$, то говорят что x_n - бесконечно малая последовательность

если $|a_n| \rightarrow +\infty$, то говорят что a_n - бесконечно большая последовательность

Обозначение. o - о малое

O - O Большое

след. читать только слева направо.

Обозначение. $x_n = o(1)$, если $x_n \rightarrow 0$

если $\exists M > 0$ т.ч. $|y_n| \leq M \forall n$,

$y_n = O(1)$

$\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty, b_n \neq 0 \forall n$
 $a_n = o(b_n)$, если $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$
 $\{c_n\}, \{d_n\}$
 $c_n = O(d_n)$, если $\exists M_1$ т.ч. $|C_n| \leq M_1 |d_n|$
 предположим \Rightarrow , что $a_n = \lambda_n b_n, \lambda_n \rightarrow 0$
 Тогда пишут, что $a = o(b)n$
 $\frac{a_n}{b_n} = \lambda_n$

Определение 25. (монотонные последовательности) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ монотонно возрастает, если $a_n \leq a_{n+1} \forall n$

Будем говорить, что строго возрастает, если $a_n < a_{n+1}$

$\{b_n\}_{n=1}^\infty$ монотонно убывает, если $b_n \geq b_{n+1}$

$\{b_n\}_{n=1}^\infty$ строго монотонно убывает, если $b_n > b_{n+1}$

$\{n\}_{n=1}^\infty$

Если есть некоторая последовательность c_n говорят что монотонна если либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает.

Последовательность c_n называется строго монотонной, если она строго монотонно возрастает либо строго монотонно убывает.

Теорема 21. Теорема о пределе монотонной последовательности $\{C_n\}_{n=1}^\infty$

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \in \mathbb{R}$

Для того чтобы монотонно возрастающая последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно чтобы последовательность была ограничена снизу

Для того чтобы монотонно убывающая последовательность имела конечный предел.

$C_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C_n \forall m$

$C_m < \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

$C_M \geq \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

$C_M \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

Доказательство. Рассмотрим ситуация, когда C_m монотонно возрастает. Предположим вначале, что последовательность C_m не ограничена сверху.

$\{C_n\}_{n=1}^\infty$ не огр. сверху $\forall L \in \mathbb{R}$

Поскольку мы предполагаем что последовательность не ограничена сверху значит найдется такой элемент последовательности больший чем L

$\exists N$ т.ч. $C_N > L$

Потому что в противоположном случае L была бы верхней границей

$\forall n > N$ тогда, справедливо следующее неравенство $C_n \geq C_{n-1} \geq$

$C_{n-2} \geq \dots \geq C_N + 1 \geq C_N > L$

т.е. $C_n > L$

мы взяли любое L и по нему нашли такое N большое, что при любом $n > N$ получается что с номером n больше чем L это означает что по определению предела предел $\lim C_n = +\infty$

Если последовательность возрастает и не ограничена сверху у нее есть предел и этот предел равен $+\infty$

другой вариант: последовательность возрастает и ограничена сверху

Пусть $C_n \leq C_{n+1} \forall n$

рассмотрим множество всех элементов последовательности

$E = \{ \alpha \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \alpha = C_n \}$

Это предположение означает что E ограничено сверху

$c = \sup E$

в таком случае мы имеем неравенство $C_n \leq c \forall n$ (12)

Теперь возьмем $\forall \varepsilon > 0$

$c - \varepsilon$ - это не верхняя граница

$\exists N$ т.ч. $C_N > c - \varepsilon$ (13)

Воспользуемся монотонностью последовательности C

Давайте возьмем $\forall n > N$

(13) $\Rightarrow C_n \geq C_{n-1} \geq \dots \geq C_N \geq c - \varepsilon$ (14)

Посмотрим на соотношение 12, 14

$c - \varepsilon < C_n \leq c < c + \varepsilon \Rightarrow |C_n - c| < \varepsilon$ (15)

Это соотношение означает что

(15) $\Rightarrow c = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

Предел существует, являющийся вещественным числом.

мы доказали что если последовательность ограничена сверху, то существует предел и выполнено такое неравенство.

□

Если последовательность строго монотонна, то неравенство будет строгим

Доказательство. $C_{n_0} < C_{n_0+1} \leq c \Rightarrow C_{n_0} < c$

□

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = c \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M$

т.ч. $|C_n - c| \leq M \Rightarrow C_n \leq c + M \forall n$

для убывающих доказывается аналогично.

Теорема 22. (Теорема о ложных промежутках) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \forall n$ (16)

Предположим, что $b_n - a_n \rightarrow 0$ (17) $n \rightarrow \infty$

Промежутки замкнутые

$\Rightarrow \exists! c \in [a_n, b_n], \forall n$ (18)

Доказательство. $a_n \leq a_{n+1}, b_n \geq b_{n+1} \forall n$ (19)

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ (19)

$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \forall n$

т.е. $a_n < b_1, b_n > a_1$, (20)

(19), (20) $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ (21)

$a_n < b_n$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (22)

(21), (22) $\Rightarrow a \leq b$ (23)

$a_n \leq a \forall n, b_n \geq b \forall n$

(24)

$\Rightarrow b - a \leq b_n - a_n \forall n$
 (25)
 $0 \leq b - a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (b - a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ (26)
 (23), (26) $\Rightarrow a = b = \text{def } c$
 (24), (27) $\Rightarrow a_n \leq c \leq b_n \forall n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$ (27')
 Пусть $\exists c_1 \neq c$ т.ч. $c_1 \in [a_n, b_n] \forall n$ (28)
 $c < c_1$
 Тогда, 27' и 28 \Rightarrow что $a_n \leq c < c_1 \leq b_n \forall n$ (29)
 (29) $\Rightarrow c_1 - c \leq b_n - a_n \forall n$ (30)
 (30) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 - c) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ $0 < c_1 - c =$ Предположение
 о том что найдется ещё какой-то c_1 неверно теорема доказана.

□

Замечание. В этой теореме рассматриваются замкнутые Промежутки

Пример. $a_n = 0 \forall n, b_n = \frac{1}{n}$
 $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (0, \frac{1}{n+1}) \subset (0, \frac{1}{n}) = (a_n, b_n)$
 $b_n - a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ } n \rightarrow \infty$
 $\nexists C \in \mathbb{R}$ т.ч. $c \in (0, \frac{1}{n}) \forall n$

в каком месте доказательства предыдущей теоремы мы пользовались тем что промежутки замкнуты?

4.2 Число e

e

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \quad y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \quad x_n < y_n \forall n \quad (1)$$

x_n строго возрастает (2)

y_n строго убывает (3)

$$x_n \rightarrow e, y_n \rightarrow e$$

$$2 < e < 3$$

$$y_n = (1 + \frac{1}{n})x_n > x_n$$

$$\text{Рассмотрим } \frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}$$

$$= (\frac{n}{n-1})^n \cdot (\frac{n}{n+1})^n + 1$$

$$\frac{n}{n+1} \cdot (\frac{1}{n-1})^n \cdot (\frac{1}{n+1})^n$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2}{n^2-1})^n$$

$$= \frac{n}{n+1} (\frac{n^2-1+1}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n >$$

$$(n^2 - 1 = x)$$

$$x > 0, n \geq 2 \quad (1+x)^n > 1 + nx \quad (\text{неравенство бернулли})$$

$$> \frac{n}{n+1} (1 + \frac{n}{n^2-1})$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^2-1+n}{n^2-1} =$$

$$= \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$$

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1$$

$$y_{n-1} > y_n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$\begin{aligned}
 C_n^k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 C_n^0 &= C_n^n = 1 \\
 C_n^1 &= C_n^{n-1} = n \\
 x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 \cdot 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k} \\
 &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-k+1) \cdot \dots \cdot n}{n^k} \\
 &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\
 &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (5) \\
 \frac{n-k+1}{n} &= 1 - \frac{k-1}{n} \\
 \frac{n-k+2}{n} &= 1 - \frac{k-2}{n} \\
 &\dots \\
 \frac{n-k+k}{n} &= 1 - \frac{k-k}{n} = 1 \\
 \frac{n!}{(n-k)!} &= \frac{(n-k)!(n-k+1) \cdot \dots \cdot n}{(n-k)!} = (n-k+1) \cdot \dots \cdot n \\
 n &\geq 3 \\
 a &= 1, b = \frac{1}{n} \\
 1^{n-k} &= 1
 \end{aligned}$$

Лекция 5: Продолжение (Часть 1)

05.10.2023

Для того чтобы вывести все слагаемые, мы полагаем, что $n \geq 3$, тогда

$$x_n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (5)(1)$$

Пример. (Пример умножения из предыдущей суммы)

Если $k = 3$, то

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \quad (2)$$

Замечание. Слагаемое из (2) $\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$, также оно же в виде $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ больше нуля.

Замечание. Если $r > 0$, то $1 - \frac{r}{n+1} > 1 - \frac{r}{n}$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Замечание. Получается, что в (1) и (2) одинаковое количество слагаемых. При этом, соответствующие слагаемые относящихся к $n+1$ будет

строго больше чем слагаемые относящихся к n .

Следовательно, равенство (2) больше, чем равенство (1).

Кроме того, в сумме относящийся к $n+1$ есть ещё $n+1$ слагаемое, которые положительно.

$$(1), (2) \Rightarrow x_{n+1} > x_n \quad (3)$$

Примем во внимание неравенства для y и неравенства для x_n .

Тогда мы будем иметь следующее неравенство:

$$(3) 28.9(3) 5.10 \Rightarrow x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n < y_{n-1} < \dots < y_1 \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow x_n < y_1, y_n > x, \forall n \quad (5)$$

Последовательность x_n строго возрастает и ограничена сверху. Мы можем применить критерий существования конечного предела у строго монотонной возрастающей последовательности.

$$(5) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Если мы посмотрим на последовательность y_n , она ограничена снизу в отношении пять и мы знаем что она строго монотонно убывает. По теореме о предельной последовательности получаем, что:

$$(5) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Теперь,

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

(Воспользуемся свойством предела произведения пределов)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Таким образом,

$$a = b = e \quad (6)$$

Замечание. Пользуемся свойствами пределов строго монотонной последовательностей.

Последовательность y_n строго убывает, а последовательность x_n строго возрастает поэтому её предел меньше любого y_n

$$(6) \Rightarrow x_n < e < y_n \forall n \quad (7)$$

$$(7) \Rightarrow e > x_1 = 2, e < y_5 < 3$$

$$y_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6$$

Примечание. Нужно посчитать и понять намного ли это меньше 3 или нет.

$$e = 2.718...$$

Замечание. Число e - одно из фундаментальных констант на которой держится вся математика.

Первые две - это 0 и 1. А третья - это π

4.3 Критерий Коши, существование конечного предела последовательности

Теорема 23. Пусть имеется некоторая последовательность x_n .

$$x_{n=1}^{\infty}$$

Для того чтобы $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ такой, что $\forall m, \forall n > N$ выполнено

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad (8)$$

Замечание. Важное обстоятельство содержащееся в формулировке.

В формулировке не сказано чему будет равен этот предел. Какой именно он будет - неизвестно. Известно только то что он существует.

Это так называемая теорема существования.

Доказательства начнём с необходимости.

Примечание. Необходимость означает что предел существует.

Доказательство. Предположим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in \mathbb{R}$$

Тогда, по определению предела для любого $\varepsilon > 0 \exists N$ такой, что $\forall n > N$ выполнено

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

Тогда,

$$(9) \Rightarrow \text{при } n > N, m > N$$

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow (8)$$

То-есть, необходимость доказана. Если конечный предел существует, то соотношение 8 выполнено.

Теперь докажем достаточность.

Когда мы будем доказывать достаточность, то мы не знаем, существует предел или нет.

Замечание. Не каждая последовательность имеет предел (например, $x_n = -1^n$).

Для доказательства мы будем использовать теорему Дедекинда. Определим сечение множества вещественных чисел.

Нижний класс A - это

$$A = \alpha \in \mathbb{R} : \exists N \text{ такое, что } \forall n > N, x_n > \alpha \quad (10)$$

Замечание. Номер n от α зависит.

Каждому α соответствует свой номер n .

Верхний класс A' - это

$$A' = \mathbb{R} \setminus A \quad (10')$$

Множества, получившиеся в (10) и (10') - это сечения, и это нужно проверить.

Нужно проверить, что A и A' не пустые и не совпадают с множеством вещественных чисел.

Возьмём

$$\varepsilon = 1$$

Тогда,

$$\exists N_0 \text{ такой, что } \forall m, n > N_0$$

$$|x_m - x_n| < 1$$

В частности, при $m = N + 1$ и при $n > N + 1$ имеем

$$|x_n - x_{N+1}| < 1 \Leftrightarrow x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1 \quad (11)$$

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} - 1 \in A \quad (12)$$

(по определению)

Пример. Если мы возьмем любой n который $> N + 1$, тогда получается что x_n больше чем число (12)

С другой стороны,

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} + 1 \notin A, \text{ то-есть, } x_{N+1} + 1 \in A' \quad (13)$$

При всех n , начиная с $N + 1$ x_n будет меньше чем то число. Оно никак не может удовлетворять соотношению (10).

Значит, это не может быть число из A , значит это число из A' .

$$(12), (13) \Rightarrow A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$$

Никакое из них не может быть множеством вещественных чисел.

Давайте возьмём $\forall \alpha \in A, \forall \beta \in A'$. Нужно доказать, что α всегда меньше β . В этом состоит условие определения сечения.

$$\alpha \in A = (10) \Rightarrow \exists N \text{ такой, что } \forall n > N x_n > \alpha \quad (14)$$

Если бы для любого $\forall n > N$ выполнялось $x_n > \beta$, то $\beta \in A$. Однако, это не так, т.к. $\beta \in A'$.

То-есть,

$$\exists n_0 > N \text{ такое, что } x_{n_0} \leq \beta \quad (15)$$

Примечание. Если бы всё время неравенство было в другую сторону ($x_n > \beta$), тогда бы по определению (10), мы бы получили, что $\beta \in A$, но мы взяли $\beta \in A'$, то есть $\beta \notin A$, значит свойства выше выполняться не может и выполняется свойство (15).

$$(14), (15) \Rightarrow \alpha \leq x_{n_0} \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta$$

То-есть, мы действительно получили сечение.

Теперь можно применить теорему Дедекинда.

По теореме Дедекинда, существует некое число

$$\exists a \in R \text{ такое, что } \forall \alpha \in A, \forall \beta \in A'$$

$$\alpha \leq a \leq \beta \quad (16)$$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$

Тогда,

$$(8) \Rightarrow \exists N \text{ такое, что выполнено (8)}$$

$$m = N + 1$$

Тогда,

$$(8) \Rightarrow \forall n > N + 1$$

$$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x_{N+1} - \varepsilon, x_{N+1} + \varepsilon) \quad (17)$$

Теперь, если посмотреть на соотношение (17),

$$(17) \Leftrightarrow x_n > x_{N+1} - \varepsilon \text{ и } x_n < x_{N+1} + \varepsilon$$

Примечание. при $\forall n > N + 1$, выполнена правая часть неравенства (17) $x_n > x_{N+1} - \varepsilon$.

Теперь рассмотрим (10) и (18).

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \in A \quad (19)$$

Теперь обратимся ко второму неравенству в соотношении (18).

Получается, что правая часть неравенства $x_n < x_{N+1}$ принадлежит A' , потому что если бы принадлежало A , должно было бы быть другое неравенство в другую сторону/

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon \in A' \quad (20)$$

Возьмём (19) $\Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon$ как α ,

а (20) $\Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon$ как β ,

Тогда, применяем (16), получаем что:

$$(16), (19), (20) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \leq a \leq x_{N+1} + \varepsilon \quad (21)$$

Обратимся к соотношению (17)

$$(17) : x_{N+1} < x_n < x_{N+1} + \varepsilon$$

Получаем, что a удовлетворяет этому неравенству и x_n удовлетворяет этому неравенству (лежит на промежутке) при $\forall n > N + 1$.

Поэтому, (21) и (17') \Rightarrow

$$|x_n - a| < 2\varepsilon = (x_{N+1} + \varepsilon) - (x_{N+1} - \varepsilon) \quad (22)$$

Примечание. То-есть, если x_n и a лежат на этом промежутке, то длина отрезка между a и x_n меньше чем длина промежутка, на котором они лежат. Длина промежутка равна 2ε

Мы получили, что существует некоторое a такое, что для любого $n > N + 1$ выполняется неравенство (22). А это определение предела.

По определению предела,

$$(22) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Тем самым, достаточность в критерии доказано. доказать конкретно a мы не смогли, но оно существует. □

4.4 Подпоследовательности

Последовательность - это отображение $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Допустим, что у нас имеется некоторое отображение $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ которое не является тождественным.
 g не тождественное отображение.
 Когда каждому n сопоставляется тоже самое n .

$$\forall n < m, g(n) < g(m)$$

Тогда, подпоследовательностью называется суперпозиция этих выражений.

$$f(g) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Примечание. Классический вид:

$$x_{n_{k=1}}^{\infty}$$

$$g(k) = n_k$$

$$n_1 < n_2 < \dots$$

Тем самым, вместо всей последовательности x_n мы рассматриваем только с такими номерами:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$$

Это только часть первоначальной последовательности.

Обозначение. Если эти номера определены, то последовательность обозначают

$$x_{n_k}^{\infty}_{k=1}$$

Предел последовательности определяется как предел подпоследовательности по нижним индексам.

Если есть такая последовательность, говорят что:

$A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом, то-есть $x_{n_k} \rightarrow A$, при $k \rightarrow \infty$, если $\forall \Omega(A)$ существует такой номер K , что для любого $k > K$ выполнено $x_{n_k} \in \Omega(A)$

Теорема 24. Пусть $x_n \rightarrow A$, при $n \rightarrow \infty$, где $A \in \overline{\mathbb{R}}$ и пусть мы имеем любой подпоследовательность $x_{n_k}^{\infty}_{k=1}$ выбранную из этой последовательности. $\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow A$, при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Возьмём любую окрестность A .

$$\forall \Omega(A) \Rightarrow \exists N \text{ такое, что } \forall n > N$$

будет выполняться

$$x_n \in \Omega(A)$$

Воспользуемся тем, что последовательность n_k строго возрастает,

$$\rightarrow n_1 \geq 1, n_2 > 1, n_2 \geq 2$$

(Шаг индукции)

$$n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > n_k \geq k \rightarrow n_{k+1} > k + 1$$

То-есть, если мы выберем подпоследовательность, то n_k будет больше или равно k . Начиная с какого-то индекса, будет строго больше.

Возьмём $K = N$.

Тогда, при $k > N$ $n_k \geq k > N$

То-есть, при $k > N$, $x_{n_k} \in \Omega(A)$

$$\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow A, \text{ при } k \rightarrow \infty$$

□

Лекция 5: Продолжение (Часть 2)

05.10.2023

Теорема 25. (Больцано-Вейерштрасса)

Замечание. Эту теорему обычно называют принципом выбора Больцано-Вейерштрасса.

Пусть имеется некоторая последовательность x_n , которая ограничена.

Примечание. Ограниченность означает ограниченность и сверху и снизу.

$$a \leq x_n \leq b \forall n \quad (1)$$

$$x_{n_{k=1}}^{\infty}$$

Тогда,

$$\alpha \in [a, b] \text{ и } x_{n_{k=1}}^{\infty}$$

Такая, что

$$x_{n_k} \rightarrow \alpha \text{ при } k \rightarrow \infty \quad (2)$$

Замечание. Такое α может быть только одним, если последовательность ограничена и имеет некоторый предел.

Доказательство. определим последовательность промежутков.

$$I_1 = [a, b]$$

$$I'_2 = [a, \frac{a+b}{2}], I''_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$$

Примечание. $\frac{a+b}{2}$ - это центр отрезка $[a, b]$

В последовательности x_n имеется бесконечно много номеров (начиная с 1).

Рассмотрим множество номеров n таких, что $x'_n \in I'_2$ и n такие что $x_n \in I''_2$

(Какое-то из них, или оба бесконечны.)

Если бы первое и второе множество n выше было конечно, то мы получили бы что у нас есть конечное множество номеров n .

А в силу соотношения 1 на всем промежутке I_1 лежит вся последовательность.

поэтому, если бы и первое и второе множество было бы конечно, мы бы получили что рассматриваем конечно множество номеров x_n , которые лежат на всем отрезке I_1 , а на I_1 лежит вся последовательность.

Пусть I_2 - тот из I'_2, I''_2 , для которого \exists бесконечно n таких что $x_n \in I_2$

Примечание. Это может быть либо I'_1 , либо I'_2 , либо I''_2 если оба удовлетворяем, то любой возьмем. Произвольно. Можно например всегда брать только I'_2 , но по крайней мере для одного, таких номеров будет бесконечно много.

Имеется некоторое множество натуральных чисел, таких что x_n принадлежит I_2

Пусть n_1 - минимальные n , такие что $x_n \in I_2$

$I_2 = [a_2, b_2]$

Примечание. Снова рассмотрим середину, $\frac{a_2+b_2}{2}$

$$I'_3 = [a_2, \frac{a_2 + b_2}{2}]$$

$$I''_3 = [\frac{a_2 + b_2}{2}, b_2]$$

Нам известно, что множество тех n , таких что лежат на I_2 , множество таких n - бесконечно.

По крайней мере в одном из этих множеств тоже будет находится бесконечное множество номеров n .

Пусть I_3 - тот из I'_3, I''_3 , для которого \exists бесконечно n таких что $x_n \in I_3$

n_2 - минимальное n такое, что $x_n \in I_3$, и $n_2 > n_1$.

Примечание. Точка x_{n_1} , может попасть на этот промежуток I_3 , но поскольку для этого промежутка существует бесконечно много n , таких что n принадлежит промежутку I_3 , то мы можем взять следующую, больше чем n_1 , и называем её n_2

И так далее по индукции. Предположим, что мы уже выбрали промежутки

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_m \quad (3')$$

При этом мы всё время делим пополам.

$$k + 1 \leq m$$

длина $I_{k+1} = \frac{1}{2}$ длины

$$I_k = \frac{b-a}{2^k} \quad (3)$$

$$n_1 < n_2 < \dots < n_m < n_{m+1} \quad (4)$$

$$x_{n_1} \in I_2, x_{n_2} \in I_2, \dots, x_{n_{m-1}} \in I_m \quad (5)$$

Предположим, что по индукции такое построение уже произошло
Пусть

$$I_m = [a_m, b_m] \quad (6)$$

Индуктивное предположение (индуктивный шаг)

Существует бесконечно много n , таких что

$$x_n \in I_m \quad (7)$$

Для двух и трёх мы это проделали. Предположим, что это проделано для n и будем выполнять индуктивный шаг.

$$I'_{m+1} = [a_m, \frac{a_m + b_m}{2}]$$

$$I''_{m+1} = [\frac{a_m + b_m}{2}, b_m]$$

Мы снова взяли и разделили промежуток $[a_m, b_m]$ пополам.

Рассмотрим множество номеров n в множестве n таких, что $x'_n \in I'_{m+1}$ и n такие что $x_n \in I''_{m+1}$

(Хотя бы одно из них бесконечно, по той причине что объединение этих множеств это множество тех n таких что x_n принадлежит I_m , потому что вместе они дают на I_m , в силу предположения (7). Если бы и то и другое было бы конечно, то на множестве I_m было бы конечно множество номеров таких что x_n лежит на I_m , а по предположении индукции их должно быть бесконечно.)

Тогда по определению I_{m+1} - тот ищ I'_m, I''_m , для которого \exists бесконечно много n таких что $x_n \in I_{m+1}$

Пускай n_{m+1} - это наименьшее n такое что $x_{n_m} \in I_{m+1}$ и $n_{m+1} > n_m$

Примечание. Если элемент x_{n_m} лежит на I_{m+1} , то мы вычеркиваем его и рассматриваем минимальный следующий (их бесконечно много).

И так мы получили в итоге этих рассуждений:

$$n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$$

$$x_{n_m} \in I_{m+1}$$

$$(3) \Rightarrow \text{длина } I_m \rightarrow 0, \text{ при } m \rightarrow \infty \quad (8)$$

Примечание. Получается, что это вложенные промежутки.

$$(3') \text{ и } (8)$$

По теореме о вложенных пределах:

$$\exists \alpha \text{ такое что } \alpha \in I_m \forall m \quad (9)$$

$$(5) \Rightarrow x_{n_m} \in I_{m+1}$$

Точка α лежит на этом промежутке и точка с номером x_{n_m} лежит на этом же промежутке.

$$(5), (9) \Rightarrow |x_{n_m} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^m} \quad (10)$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$k : \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$$

Возьмём $m > K$

$$(10), (11) \Rightarrow \text{при } m > K$$

выполнено

$$x_{n_m} - \alpha \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \quad (12)$$

Таким образом мы доказали, что существует подпоследовательность у которой есть конечный предел.

$$a \in I_1$$

, т.е.

$$a \leq \alpha \leq e$$

□

4.5 Верхний и нижний предел последовательности

Определение 26. Пусть есть произвольная последовательность x_n .

$$x_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}$$

Если $x_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху, то верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x = +\infty$, по определению.

Если $x_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху, т.е.

$$\exists M \text{ т.ч. } x_n \leq M \forall \quad (1)$$

$$E_n = \{a \in \mathbb{R} : a = x_m, m \geq n\}$$

(множество всех значений последовательности x_n начиная с множества n)

$$g_n = \sup E_n$$

$$(1) \Rightarrow E_n \text{ ограничена сверху} \Rightarrow$$

$$g_n \leq M \forall n \quad (2)$$

Обратим внимание, что

$$E_{n+1} \subset E_n \Rightarrow g_{n+1} \leq g_n \quad (3)$$

Потому что может быть они совпадают, но мы рассматриваем элементов на 1 больше.

$$(3) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \geq -\infty \quad (4)$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \leq M \quad (5)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \text{ по определению}$$

Если мы посмотрим на определение верхнего предела, видно, что верхний предел, в отличие от просто предела существует в нулевой последовательности. Т.к. последовательность либо ограничена сверху, либо не ограничена сверху.

Если $x_{n=1}^\infty$ не ограничена снизу, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ по определению равно } -\infty$$

Если $x_{n=1}^\infty$ ограничена снизу, то-есть

$$\exists L, \text{ т.ч. } x_n \geq L \forall n \quad (7)$$

$$h_n = \inf E_n$$

$$(7) \Rightarrow h_n > -\infty$$

$$h_{n+1} \geq h_n \quad (8)$$

h_n - это монотонно возрастающая последовательность, а у любой такой последовательности есть предел. Может быть равный $+\infty$

$$(8) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \leq +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ по определению равен } \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \quad (9)$$

Таким образом, если мы рассматриваем любую последовательность x_n , то у неё существуют верхний и нижний предел.

4.6 Свойства верхних и нижних пределов

1.

$$h_n = \inf E_n \leq \sup E_n = g_n \quad (10)$$

и последовательность g_n и h_n имеют пределы.

Для всякого n справедливо это неравенство (10)

$$(10) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \quad (11)$$

$$(11) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (12)$$

Примечание. В отличие от обычных пределов, верхние и нижние пределы существуют у любой последовательности.

Теорема 26. Есть некоторая последовательность, тогда для того чтобы существовал предел

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = a \quad (13)$$

Примечание. Здесь нужно рассмотреть все случаи, когда соответствующие пределы и какой-то из них является символами $+$ или $-\infty$, но мы рассмотрим только когда речь идет о том, когда оба предела это вещественные числа.

Предположим, что существует предел.

Хотим проверить, что верхний предел равен нижнему пределу.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ т.ч. } \forall n > N$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad (14)$$

Посмотрим на определение g_n и h_n .

$$(14) \Rightarrow \text{при } n > N E_n \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_n \leq a + \varepsilon, h_n \geq a - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - \varepsilon \leq \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n \leq a + \varepsilon$$

$$\underline{\lim} x_n \geq a - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \underline{\lim} x_n - \overline{\lim} x_n \leq 2\varepsilon \quad (15)$$

Получается, что некоторое не отрицательное число не превосходит 2ε при любом положительном ε . Это может быть только тогда, когда это число равно 0.

$$(15) \Rightarrow \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = \lim x_n$$

И нижние и верхние пределы на самом деле равны a .

Тогда мы получаем следующие суждения

$$g_n \rightarrow a, h_n \rightarrow a$$

$$g_n \geq a \forall n$$

$$h_n \leq a \forall n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \text{ т.ч. } a \leq g_n < a + \varepsilon \text{ при } n > N_1 \quad (16)$$

и

$$\exists N_2 \text{ т.ч. } a - \varepsilon < h_n \leq a \text{ при } n > N_2 \quad (17)$$

$$N = \max(N_1, N_2) n > N$$

$$(16), (17) \Rightarrow a - \varepsilon < \inf E_n \leq \sup E_n < a + \varepsilon \quad (18)$$

$$(18) \Rightarrow \forall m \geq n \text{ выполнено } a - \varepsilon < x_m < a + \varepsilon \quad (19)$$

В частности,

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad (20)$$

$$(20) : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \underline{\lim} x_n = \lim x$$

Теорема доказана.

□