Оглавление

Лекция 5: Продолжение

05.10.2023

Для того чтобы вывести все слагаемые, мы полагаем, что $n >= 3$, тогда

$$x_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1 - \frac{k-1}{n}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{n}) \qquad (5)(1)$$

Пример. (Пример умножения из предыдущей суммы)

Если k = 3, то

$$(1 - \frac{2}{n}) \cdot (1 - \frac{1}{n})$$

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1 - \frac{k-1}{n+1}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{(n+1)!}(1 - \frac{n}{n+1}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{n+1})) \qquad (2)$$

Замечание. Слагаемое из (2) $(1 - \frac{n}{n+1})$, также оно же в виде $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ больше нуля.

Замечание. Если r > 0, то $1 - \frac{r}{n+1} > 1 - \frac{r}{n}$

$$\Rightarrow (1 - \frac{k-1}{n+1}) = (1 - \frac{1}{n+1}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) > (1 - \frac{k-1}{n}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{n})$$

Замечание. Получается, что в (1) и (2) одинаковое количество слагаемых. При этом, соотвествующе слагаемые относящихся к n+1 будет строго больше чем слагаемые относящихся к n.

Следовательно, равенство (2) больше, чем равенство (1).

Кроме того, в сумме относящийся к n+1 есть ещё n+1 слагаемое, которые положительно.

$$(1),(2) \Rightarrow x_{n+1} > x_n \tag{3}$$

Примем во внимание неравенства для y и неравенства для x_n.
Тогда мы будем иметь следующее неравенство:

$$(3)28.9(3)5.10 \Rightarrow x_1 < x_2 < \cdots < x_n < y_n < y_{n-1} < \cdots < y_1 \tag{4}$$

$$(4) \Rightarrow x_n < y_1, y_n > x, \forall n \tag{5}$$

Последовательность x_n строго возрастает и ограниченна сверху. Мы можем применить критерий существования конечного предела у строго монотонной возрастающей последовательности.

$$(5) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Если мы посмотрим на последовательность y_n, она ограничена снизу в отношении пять и мы знаем что она строго монотонно убвает. По теореме о предельной последовательности получаем, что:

$$(5) \Rightarrow \exists \lim_{n\ to\infty} y_n = b$$

Теперь,

$$b = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} =$$

(Воспользуемся свойством предела произведения пределов)

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) \cdot \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 1 + \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Таким образом,

$$a = b = e \tag{6}$$

.

Замечание. Пользуемся свойствами пределов строго монотонной последовательностей.

Последовательность y_n строго убывает, а последовательность x_n строго возрастает поэтому её предел меньше любого y_n

$$(6) \Rightarrow x_n < e < y_n \forall n \tag{7}$$

$$(7) \Rightarrow e > x_1 = 2, e < y_5 < 3$$

$$y_5 = (\frac{6}{5})^6$$

Примечание. Нужно посчитать и понять намного ли это меньше 3 или нет.

$$e = 2.718...$$

Замечание. Число e - одно из фундаментальных констант на которой держится вся математика.

Первые две - это 0 и 1. А третья - это π

0.1 Критерий Коши, существование конечного предела последовательности

Теорема 1. Пусть имеется некоторая последовательность x_n.

$$x_{n_{n=1}}^{\infty}$$

Для того чтобы $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ такой, что $\forall m, \forall n > N$ выполнено

$$|x_m - x_m| < \varepsilon \tag{8}$$

Замечание. Важное обстоятельство содержащееся в формулировке.

В формулировке не сказано чему будет равен этот предел. Какой именно он будет - неизвесто. Известно только то что он существует.

Это так называемая теорема существования.

Доказательства начнём с необходимости.

Примечание. Необходимость означает что предел существует.

Доказательство. Предположим, что

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \in \mathbb{R}$$

Тогда, по определению предела для любого $\varepsilon > 0 \exists N$ такой, что $\forall n > N$ выполнено

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

Тогда,

$$(9) \Rightarrow \text{при} n > N, m > N$$

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \le |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow (8)$$

То-есть, необходимость доказана. Если конечный предел существует, то соотношение 8 выполнено.

Теперь докажем достаточность.

Когда мы будем доказывать достаточность, то мы не знаем, существует предел или нет.

> **Замечание.** Не каждая последовательность имеет предел (например, $x_n = -1^n$).

Для доказательства мы будем использовать теорему Дедекинда.

Определим сечение множества вещественных чисел.

Нижний класс А - это

$$A = \alpha \in \mathbb{R} : \exists N \text{такое, что} \forall n > N x_n > \alpha \tag{10}$$

> **Замечание.** Номер n от α зависит.
>
> Каждому α соответствует свой номер n.

Верхний класс А' - это

$$A' = \mathbb{R} \setminus A \tag{10'}$$

Множества, получившиеся в (10) и (10') - это сечения, и это нужно проверить.

Нужно проверить, что A и A' не пустые и не совпадают с множеством вещественных чисел.

Возьмём

$$\varepsilon = 1$$

Тогда,

$$\exists N_0 \text{такой, что} \forall m, n > N_0$$

$$|x_m - x_n| < 1$$

В частности, при $m = N + 1$ и при $n > N + 1$

имеем

$$|x_n - x_{N+1}| < 1 \Leftrightarrow x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1 \tag{11}$$

$$(11) => x_{N+1} - 1 \in A \tag{12}$$

(по определению)

> **Пример.** Если мы возьмем любой n который $>$ N $+$ 1, тогда получается что x_n больше чем число (12)

С другой стороны,

$$(11) \Rightarrow x_{N+1} + 1 \notin A, \text{то-есть,} x_{N+1} + 1 \in A' \tag{13}$$

При всех n, начиная с N + 1 x_n будет меньше чем то число. Оно никак не может удовлетворять соотношению (10).

Значит, это не может быть число из A, значит это число из A'.

$$(12), (13) \Rightarrow A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$$

Никакое из них не может быть множеством вещественных чисел.

Давайте возьмём $\forall \alpha \in A, \forall \beta in A'$. Нужно доказать, что α всегда меньше β. В этом состоит условие определения сечения.

$$\alpha \in A = (10) > \exists N \text{такой, что} \forall n > N x_n > \alpha \tag{14}$$

Если бы для любого $\forall n > N$ выполнялось $x_n > \beta$, то $\beta \in A$. Однако, это не так, т.к. $\beta \in A'$.

То-есть,

$$\exists n_0 > N \text{такое, что} x_{n_0} \leq \beta \tag{15}$$

Примечание. Если бы всё время неравенство было в другую сторону ($x_n > \beta$), тогда бы по определению (10), мы бы получили, что $\beta \in A$, но мы взяли $\beta \in A'$, то есть $\beta \notin A$, значит свойства выше выполнятся не может и выполняется свойство (15).

$$(14), (15) \Rightarrow \alpha \leq x_{n_0} \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta$$

То-есть, мы действительно получили сечение.

Теперь можно применить теорему Дедекинда.

По теореме Дедекинда, существует некое число

$$\exists a \in R \text{такое, что} \forall \alpha in A, \forall \beta in A'$$

$$\alpha \leq a \leq \beta \tag{16}$$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$

Тогда,

$$(8) => \exists N \text{такое, что выполнено (8)}$$

$m = N + 1$

Тогда,

$$(8) \Rightarrow \forall n > N + 1$$

$$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x_{N+1} - \varepsilon, x_{N+1} + \varepsilon) \tag{17}$$

Теперь, если посмотреть на соотношение (17),

$$(17) \Leftrightarrow x_n > x_{N+1} - \varepsilon \text{и} x_n < x_{N+1} + \varepsilon$$

Примечание. при $\forall n > N + 1$, выполнена правая счасть неравенства (17) $x_n > x_{N+1} - \varepsilon$.

Теперь рассмотрим (10) и (18).

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \in A \tag{19}$$

Теперь обратимся ко второму неравенству в соотношении (18).

Получается, что правая часть неравенства $x_n < x_{N+1}$ принадлежит A', потому что если бы принадлежало A, должно было бы быть другое неравенство в другую сторону/

$$(10), (18) \Rightarrow x_{N+1} + \varepsilon \in A' \tag{20}$$

Возьмём (19) $\Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon$ как α,
а (20) $\Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon$ как β,
Тогда, применяем (16), получаем что:

$$(16), (19), (20) \Rightarrow x_{N+1} - \varepsilon \leq a \leq x_{N+1} + \varepsilon \tag{21}$$

Обратимся к соотношению (17)

$$(17) : x_{N+1} < x_n < x_{N+1} + \varepsilon$$

Получаем, что a удовлетворяет этому неравенству и x_n удовлетворяет этому неравенству (лежит на промежутке) при $\forall n > N + 1$.

Поэтому, (21) и (17') $\Rightarrow$

$$|x_n - a| < 2\varepsilon = (x_{N+1} + \varepsilon) - (x_{N+1} - \varepsilon) \tag{22}$$

Примечание. То-есть, если x_n и a лежат на этом промежутке, то длина отрезка между a и x_n меньше чем длина промежутка, на котором они лежат. Длина промежутка равна 2ε

Мы получили, что существует некоторое a такое, что для любого n > N+1 выполняется неравенство (22). А это определение предела.

По определению предела,

$$(22) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

Тем самым, достаточность в критерии доказано. доказать конкретно a мы не смогли, но оно существует.

$\square$

0.2 Подпоследовательности

Последовательность - это отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Допустим, что у нас имеется некое отображение $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
которое не является тождественным.
g не тождественное отображение.
Когда каждому n сопоставляется тоже самое n.

$$\forall n < mg(n) < g(m)$$

Тогда, подпоследовательностью называется суперпозиция этих выражений.

$f(g) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Примечание. Классический вид:
$x_{n}{}_{n=1}^{\infty}$

$g(k) = n_k$
$n_1 < n_2 < \dots$

Тем самым, вместо всей последовательностьи x_n мы рассматриваем только с такими номерами:
$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$
Это только часть первоначальной поледовательности.

Обозначение. Если эти номера определены, то последовательность обозначают
$x_{n_k}{}_{k=1}^{\infty}$

Предел последовательности определяется как предел подпоследовательности по нижним индексам.

Если есть такая последовательность, говорят что:

$A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом, то-есть $x_{n_k} \to A$, при $k \to \infty$, если $\forall \Omega(A)$ существует такой номер K, что для любого k > K выполнено $x_{n_k} \in \Omega(A)$

Теорема 2. Пусть $x_n \to A$, при $n \to \infty$, где $A \in \overline{\mathbb{R}}$
и пусть мы имеем любой подпоследовательность
$x_{n_k}{}_{k=1}^{\infty}$ выбранную из этой последовательности. $\Rightarrow$ $x_{n_k} \to A$, при $k \to \infty$.

Доказательство. Возьмём любую окрестность A.

$$\forall \Omega(A) \Rightarrow \exists N \text{такое, что} \forall n > N$$

будет выполняться

$$x_n \in \Omega(A)$$

Воспользуемся тем, что поледовательность n_k строго возрастает,

$$\to n_1 \geq 1, n_2 > 1, n_2 \geq 2$$

(Шаг индукции)

$$n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > n_k \geq k \to n_{k+1} > k + 1$$

То-есть, если мы выберем подпоследовательность, то n_k будет больше или равно k. Начиная с какого-то индекса, будет строго больше.

Возьмём K = N.

Тогда, при k > N $n_k \geq k > N$

То-есть, при k > N, $x_{n_k} \in \Omega(A)$

$$\Rightarrow x_{n_k} \to A, \text{ при } k \to \infty$$

□