Оглавление

1 Алгоритмы **2**
1.1 Продолжение 2
1.2 Число e 7

Глава 1

Алгоритмы

Лекция 4: Продолжение

27.09.2023

1.1 Продолжение

5. $x_n \neq c \forall n, x_n \to a, a \neq 0 => \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$
$|a+b| \leq |a| + |b| <=> |a| \geq |a+b| - |b|$
$\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$
$=> \exists N$ т.ч. $\forall n > N$ выполняется
$|x_n - a| < \varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} => |x_n| \geq |a| - |x_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$
$\forall \varepsilon \exists N_1$ т.ч. $\forall n > N_1$ (1)
$|x_n - a| < \varepsilon$ (2)
$N_0 = max(N, N_1) n > N_0$
$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| = |\frac{a - x_n}{x_n a} = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot |x_n - a| <$
(1, 2)
$< \frac{1}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} \cdot \varepsilon$
6. $x_n{}_{n=1}^{\infty}$, как в 5., $y_n \to b =>$
$\frac{y_n}{x_n} \to \frac{b}{a}$
$\frac{y_n}{x_n} = y_n \cdot \frac{1}{x_n}$ 4., 5
7. $x_n \leq y_n \forall n, x||n \to a, y_n b => a \leq b$

Доказательство. Предположим, что это не так.
Пусть a $\not>$ (доказали что неверно) b (?)
$\varepsilon_0 = \frac{1-b}{2} > 0$
$=> \exists N_1$ т.ч. $\forall n > N_1$
$|x_n - a| < \varepsilon_0$ (3)
и $exists N_2$ т.ч $\forall n > N_2$
$|y_n - b| < \varepsilon_0$ (4)
$n = N_1 + N_2 + 1$
$|x_n - a| < \varepsilon_0 <=> x_n \in (a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ (3')
$|y_n - b| < \varepsilon_0 <=> y_n \in (b - \varepsilon_0, b + \varepsilon_0)$ (4')
(3'), (4') $=> y_n < b + \varepsilon_0 = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a\frac{a-b}{2}$
$= a - \varepsilon_0 < x_n$
$y_n < x_n$ □

$a < b$

$(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$
$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$
$[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$ $(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$
Расширенное множество вещественных чисел
$\overline{\mathbb{R}}$
$+\infty, -\infty$
$\forall x \in \mathbb{R}\ x < +\infty, x > -\infty$
(a, ∞) = $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
[a, ∞) = $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
(-∞, a] = $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
(-∞, a] = $\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
8. $\xi_n \leq \psi_n \leq \zeta_n \forall n$
$\xi \to a, \zeta_n \to a => \psi_n \to a$
$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1$ т.ч. $\forall n > N_1$
$|x_n - 1| < \varepsilon \leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (5)
и $\exists N_2$ т.ч. $\forall n > N_2$
$|\zeta_n - a| < \varepsilon \leftrightarrow \zeta_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (6)
(5), (6) => $\forall n > N, N = max(N_1, N_2)$
$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq \zeta_n < a + \varepsilon$, т.е. $y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon$

Определение 1. (Бесконечные пределы)
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
$x_n \to \infty\ n \to \infty$
$\lim\limits_{\to\infty} x_n = +\infty$
если $\forall L \in \mathbb{R} \exists N$ т.ч. $\forall n > N$
выполнено $x_n > L(7)$
$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$
$y_n \to -\infty\ n \to \infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty,$
$\forall L_0 \in R, \exists N_0$ т.ч. $\forall n > N_0$
$y_n < L_0$ (8)
(возможно сокращение записи n-> далее.)

Единообразная запись определения пределов
$a \in \mathbb{R}$
$w(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
Окрестность $+\infty$
$w(+\infty) = (L, \infty), L \in \mathbb{R}$
Окрестность $-\infty$
$w(-\infty) = (-\infty, L)$
Пусть имеется некая $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$
Пусть имеется некая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
$x_n \to \alpha\ n \to \infty$
если $\forall w(\alpha)$
$\exists N$ т.ч. $\forall n > N$ выполнено $x_n \in 2(\alpha)(q)$
Свойства бесконечных пределов
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a \to +\infty$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, b \to -\infty$

1. $c \neq 0$, а) $ca_n \to +\infty, cb_n \to -\infty$
   б) $c < 0 => ca_n \to -\infty, cb_n \to +\infty$
2. $x_n \to x$, $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} => a_n + x_n \to +\infty$
   $y_n \to y$, $y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} => b_n + y_n \to -\infty$
3. $a_n, b_n, x_n, y_n, u_\varepsilon 2$
   $x > 0 => a_n x_n \to +\infty$, $b_n x_n \to -\infty$
   $y < 0 => a_n y_n \to -\infty, b_n y_n \to +\infty$
4. если $a_n \neq 0, a_n \neq 0 \forall n => \frac{1}{a_n} \to 0, \frac{1}{b_n} \to 0$ Если $x_n > 0, x_n \to 0 => \frac{1}{x_n} \to +\infty$
   если $y_n < 0, y_n \to 0 => \frac{1}{y_n} \to -\infty$
5. $x_n \leq y_n \forall n, x \to \alpha, y_n \to \beta, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$
   $=> \alpha \leq \beta$
   $+\infty = +\infty$
   $-\infty = -\infty$
   $-\infty < +\infty$
   $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} => y_n \to \alpha$
   (док-ть всё)

   > **Доказательство.** $x \in \mathbb{R}$
   > если последоавтельность имеет предел, то она ограничена (было)
   > нужно сформулировать с дополнительными словами
   > Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел
   > $\exists M$ т.ч. $|x_n - x| < M \forall n$
   > $=> x_n > x - M \forall n$ (10)
   > $\forall L \in \mathbb{R}$
   > $\exists N$ т.ч. $\forall n > N$ будет выполнено $a_n > L$ (11)
   > (10), (11) $=> a_n + x_n > L + x - M$
   > Остальные свойства доказываются аналогично □

Дополнительно о терминологии и обозначениях
если $x_n \to 0$, то говорят что x_n - бесконечно малая последовательность
если $|a_n| \to +\infty$, то говорят что a_n - бесконечно большая последовательность

Обозначение. о - о малое
О - О Большое

след. читать только слева направо.

Обозначение. $x_n = o(1)$, если $x_n \to 0$
если $\exists M > 0$ т.ч. $|y_n| \leq M \forall n$,
$y_n = O(1)$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b_n \neq 0 \forall n$
$a_n = 0(b_n)$, если $\frac{a_n}{b_n} \to 0$
$\{c_n\}, \{d_n\}$
$c_n = O(d_n)$, если $\exists M_1$ т.ч. $|C_n| \leq M_1 |d_n|$
предположим =, что $a_n = \lambda_n b_n, \lambda_n \to 0$
Тогда пишут, что $a = o(b)n$
$\frac{a_n}{b_n} = \lambda_n$

Определение 2. (монотонные последовательности) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастает, если $a_n \leq a_{n+1} \forall n$

Будем говорить, что строго возрастает, если $a_n < a_{n+1}$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает, если $b_n \geq b_{n+1}$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго монотонно убывает, если $b_n > b_{n+1}$
$\{n\}_{n=1}^{\infty}$

Если есть некоторая поледовательностть c_n говорят что монотонна если либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает.

Последовательность c_n называется строго монотонной, если она строго монотонно возрастает либо строго монотонно убывает.

Теорема 1. Теорема о пределе монотонной последовательности $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n \in \overline{\mathbb{R}}$

Для того чтобы монотонно возрастающая последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно чтобы последовательность была ограничена снизу

Для того чтобы монотонно убывающая последовательность имела конечный предел.

$C_m \leq \lim\limits_{n\to\infty} C_n \forall m$
$C_m < \lim\limits_{n\to\infty} C_n$
$C_M \geq \lim\limits_{n\to\infty} C_n$
$C_M \lim\limits_{n\to\infty} C_n$

Доказательство. Рассмотрим ситуация, когда C_m монотонно возрастает. Предположим вначалае, что проследовательность C_m не ограничена сверху.

$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ не огр. сверху $\forall L \in \mathbb{R}$

Посколько мы предполгаем что последовательность не ограничена сверху значит найжется такой лемент послежовательности больший чем L

$\exists N$ т.ч. $C_N > L$

Потому что в противоположном случае L была бы верхней границей

$\forall n > N$ тогда, справедливо следующее неравенство $C_n \geq C_{n-1} \geq C_{n-2} \geq ... \geq C_N + 1 \geq C_N > L$

т.е. $C_n > L$

мы взяли любое L и по нему нашли такое N большое, что при любом n > N полуается что с с номером n Больше чем lambda это означает что по определению предела предел $\lim C_n = +\infty$

Если последовательность возрастает и не ограничена сверху у нее есьт пределе и этот предел равен + бесконечности

другой вариант: последовательность возрастает и огранчена сверху

Пусть $C_n \leq C_{n+1} n \exists M..e_n \leq M \forall n$

рассмотрим множество всех элементов последовательности

$E = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}$ т.ч. $\alpha = C_n$

Это предположение означает что E ограничено сверху

$c = supE$

в таком случае мы имеем неравенство $C_n \leq C \forall n$ (12)

Теперь возьмем $\forall \varepsilon > 0$

$C - \varepsilon$ - это не верхняя граница

$\exists N$ т.ч. $C_N > C - \varepsilon$ (13)

Воспользуемся монотонностью последовательности C

Давайте возьмем $\forall n > N$

(13) $=> C_n \geq C_{n-1} \geq ... \geq C_{N+1}\ geq C_N > C - \varepsilon$ (14)

Посмотрим на соотношение 12, 14

$C - \varepsilon < C_N \leq C < C + \varepsilon => |C_n - C| < \varepsilon$ (15)

Это соотношение означает что

(15) $=> C = lim_{n \to \infty} C_n$

Предел существует, являющийся вещественным числом.

мы доказали что если последовательность ограничена сверху, то существует предел и выполенно такое неравенство.

□

Если последовательность строго монотонна, то неравенство будет строгим

Доказательство. $C_{n_0} < C_{n_0+1} \leq c => C_{n_0} < C$

□

Если $\exists \lim\limits_{n \to \infty} C_n = C \in R => \exists M$

т.ч. $|C_n - C| \leq M => C_n \leq C + M \forall n$

для убывающих доказывается аналогично.

Теорема 2. (Теорема о ложных промежутках) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \forall n$ (16)

Предположим, что $b_n - a_n \to 0$ (17) $n- > \infty$

Промежутки замкнутые

$=> \exists! c \in [a_n, b_n], \forall n$ (18)

Доказательство. $a_n \leq a_{n+1}, b_n \geq b_{n+q} \forall n$ (19)

$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_2 \leq b_1$ (19)

$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \forall n$

т.е. $a_n < b_1, b_n > a,$ (20)

(19), (20) $=> \exists \lim\limits_{n \to \infty} = a \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim\limits_{n \to \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ (21)

$a_n < b_n$

$=> lim_{n \to \infty} a_n \leq \lim\limits_{n \to \infty} b_n$ (22)

(21), (22) $=> a \leq b$ (23)

$a_n \leq a \forall n\ b_n \geq \forall n$

(24)

$=> b - a \leq b_n - a_n \forall n$
(25)
$0 \leq$ b - a $=> lim_{n\ to \infty}(b-a) \leq lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ (26)
(23), (26) => a = b = def c
(24), (27)=> $a_n \leq c \leq b_n \forall n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$ (27')
Пусть $\exists c_1 \neq c$ т.ч. $c_1 \in [a_n, b_n] \forall n$ (28)
$c < c_1$
Тогда, 27' и 28 => что $a_n \leq c < c_1 \leq b_n \forall n$ (29)
(29) => $c_1 - c \leq b_n - a_n \forall n$ (30)
(30) => $\lim\limits_{n\to\infty}(c_1 - c) \leq \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ $0 < c_1 - c =$ Предположение о том что найдется ещё какой-то c_1 неверно теорема доказана.

□

Замечание. В этой теореме рассматриваются замкнутые Промежутки

> **Пример.** $a_n = O \forall n, b_n = \frac{1}{n}$
> $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (0, \frac{1}{n+1}) \subset (0, \frac{1}{n}) = (a_n, b_n)$
> $b_n - a_n = \frac{1}{n} \to 0$ $n \to \infty$
> $\nexists C \in \mathbb{R}$ т.ч. $c \in (0, \frac{1}{n}) \forall n$

в каком месте доказательства предыдущей теоремы мы пользовались тем что промежутки замкнуты?

1.2 Число e

e

$x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ $x_n < y_n \forall n$ (1)
x_n строго возрастает (2)
y_n строго убывает (3)
$x_n \to e, y_n \to e$
$2 < e < 3$
$y_n = (1+\frac{1}{n})x_n > x_n$
Рассмотрим $\frac{y_n - 1}{y_n} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}$
$= (\frac{n}{n-1})^n \cdot (\frac{n}{n+1})^n + 1$
$\frac{n}{n+1} \cdot (\frac{1}{n-1})^n \cdot (\frac{1}{n+1})^n$
$= \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2}{n^2-1})^n$
$= \frac{n}{n+1}(\frac{n^2-1+1}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n >$
$(n^2 - 1 =\} x)$
$x > 0, n \geq 2$ $(1+x)^n > 1 + nx$ (неравенство бернулли)
$> \frac{n}{n+1}(1 + \frac{n}{n^2-1})$
$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^2-1+n}{n^2-1} =$
$= \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$
$\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1$
$y_{n-1} > y_n$
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k!)}$
$C_n^0 = C_n^n = 1$
$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
$x_n = (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (\frac{1}{n})^k = 1 \cdot 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k}$
$= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n=k+1)\cdot \ldots \cdot n}{n^k}$
$= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}(1 - \frac{k-1}{n})$
$= 2 + \sum_n^{k=2} \frac{1}{k!}(1 - \frac{k-1}{n})(1 - \frac{k-2}{n}) \cdot (1 - \frac{1}{n})$ (5)
$\frac{n-k+1}{n} = 1 - \frac{k-1}{n}$
$\frac{n-k+2}{n} = 1 - \frac{k-2}{n}$
...
$\frac{n-k+k}{n} = 1 - \frac{k-k}{n} = 1$
$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n-k)!(n-k+1)\cdot \ldots \cdot n}{(n-k)!} = (n-k+1) \cdot \ldots \cdot n$
$n \geq 3$
$a = 1, b = \frac{1}{n}$
$1^{n-k} = 1$