Оглавление

0.1 Случайные величины 1
0.2 Математическое ожидание 1
0.3 Дисперсия 2

Лекция 5: Случайные величины, мат.ожидание, дисперсия

11.10.2023

0.1 Случайные величины

Определение 1. Пусть Ω — множество элементарных событий, p_ω — вероятность события ω. Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^1$ называется случайной величиной.

Замечание. Способ задать случайную величину (дискретный случай)

ξ :

a_1	a_2	$\dots$	a_n
p_1	p_2	$\dots$	p_n

$p(\xi = a_i) = p_i$, где $\xi = a_i \Leftrightarrow \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = a_i\}$

Пример. Стрелок стреляет 3 раза, вероятность попадания — $0,8$:

0	1	2	3
$0,2^3$	$3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8$	$3 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2$	$0,8^3$

0.2 Математическое ожидание

Определение 2. математическим ожиданием случайной величины называется:

$$E_\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot p(\xi = a_i)$$

Свойства.

1. Если $p(\xi = a) = 1$, то $E_\xi = a$
2. Если $\eta = c \cdot \xi, c$ — константа, то $E_\eta = c \cdot E_\xi$

3. $E(\xi + \eta) = E_\xi + E_\eta$
4. $E(\xi \cdot \eta) = E_\xi \cdot E_\eta$ — для независимых

Определение 3. Случайные величины ξ и η — независимы, если:

$$p(\xi = a_i \wedge \eta = b_j) = p(\xi = a_i) \cdot p(\eta = b_j)$$

Доказательство. (доказательство свойства 3 для независимых величин)

$$E(\xi + \eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(a_i + b_j) \cdot p(\xi + \eta = a_i + b_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_i p(\xi = a_i) p(\eta = b_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} b_j p(\xi = a_i) p(\eta = b_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(a_i p(\xi = a_i)\underbrace{\sum_{j=1}^{k} p(\eta = b_j)}_{=1}\right) + \sum_{j=1}^{k}\left(b_k p(\eta = b_j)\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p(\xi = a_i)}_{=1}\right) =$$

$$= E_\xi + E_\eta$$

□

Доказательство. (доказательство свойства 4)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_i b_j p(\xi \cdot \eta = a_i b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_i b_j p(\xi = a_i) p(\eta = b_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(a_i p(\xi = a_i)\sum_{j=1}^{k} b_j p(\eta = b_j)\right) = E_\xi \cdot E_\eta$$

□

0.3 Дисперсия

Определение 4. Дисперией случайной величины называется:

$$D_\xi = E(\xi - E_\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E_\xi + (E_\xi)^2) =$$

$$= E_{\xi^2} - E(2\xi E_\xi) + E((E_\xi)^2) = E_{\xi^2} - 2E_\xi E_\xi + (E_\xi)^2 =$$
$$= E_{\xi^2} = (E_\xi)^2$$

Пример.

$$\xi : \begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \quad E_\xi = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\xi^2 : \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad E_{\xi^2} = \frac{1}{2}, D_\xi = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Свойства.

1. $p(\xi = a) = 1 \Rightarrow D_\xi = 0$
2. $\eta = c \cdot \xi \Rightarrow D_\eta = c^2 D_\xi$
3. $D(\xi + \eta) = D_\xi + D_\eta$ — независимы

Доказательство. (свойство 3)

$$D(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^2 - (E(\xi + \eta))^2 = E(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - (E_\xi + E_\eta)^2 =$$

$$= E_{\xi^2} + 2E_\xi E_\eta - (E_\xi)^2 - 2E_\xi E_\eta - (E_\eta)^2 = D_\xi + D_\eta$$

□