Оглавление

Лекция 8: Прямые в пространстве. Эллипс.

13.11.2023

Определение 1 (Уравнение прямой через 2 точки)**.** Пусть есть точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_1}$$

т.к. $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ – направляющий вектор.

0.1 Угол между прямыми

Определение 2 (Угол между прямыми в пространстве)**.**

$$l_1 : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

$$l_2 : \frac{x - x_1}{w_1} = \frac{y - y_1}{w_2} = \frac{z - z_1}{w_3}$$

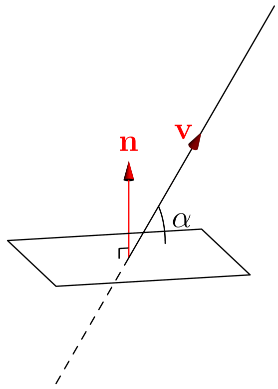
$$\cos \angle(l_1, l_2) = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}$$

$$l_1 \perp l_2 : v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

$$l_1 \parallel l_2 : \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$$

Угол между прямой и плоскостью:

$$l_1 : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$
$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$



$$\sin\theta = \cos\angle(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \frac{Av_1 + Bv_2 + Cv_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$
$$\alpha \parallel l_1 : Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$$
$$\alpha \perp l_1 : \frac{A}{v_1} = \frac{B}{v_2} = \frac{C}{v_3}$$

Теорема 1. l_1, l_2 – пересекаются в одной точке или параллельны

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство. l_1 и l_2 – в одной плоскости, только если $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ и $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ в одной плоскости, это равносильно тому, что их смешанное произведение равно 0. □

Глава 1

Кривые второго порядка

1.1 Эллипс

Определение 3 (Стандартный вид прямой II порядка).

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + b_3 = 0$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$$

Определение 4. Эллипс — кривая, которая в подходящих координатах задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Определение 5. Пусть F_1, F_2 – точки (фокусы), если $F_1F_2 = 2c < 2a$, тогда ГМТ M :

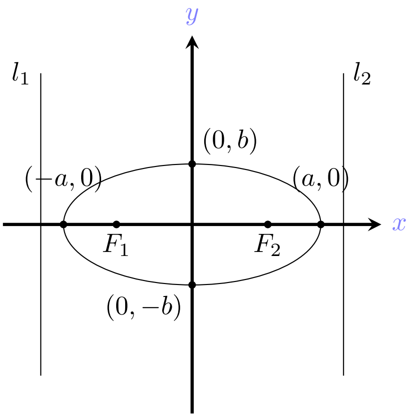
$$F_1M + F_2M = 2a$$

называется эллипсом.

Определение 6. F_1 – фокус, l_1 – прямая (директриса). ГМТ M:

$$\frac{\text{dist}(F_1, M)}{\text{dist}(l_1, M)} = e < 1$$

называется эллипсом.



$F_2(c, 0) \qquad F_1(-c, 0)$

$$l_{1,2} : x = \pm\frac{a}{e}$$

- a – большая полуось
- b – малая полуось (по умолчанию $a \geq b$)
- c – фокальный параметр

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- $e = \frac{c}{a} \in [0, 1)$ – эксцентриситет

Доказательство

- В определении 4 задано $a, b \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}, e = \frac{c}{a}$
- В определении 5 задано $a, c \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}, e = \frac{c}{a}$
- В определении 6 задано d расстояние от фокуса до директрисы. Хотим $F(c, 0); l : x = \frac{a}{e}$

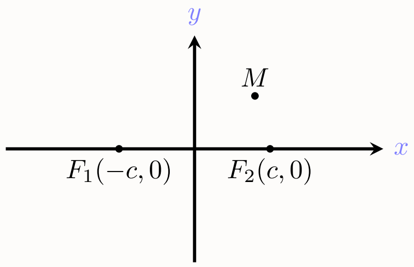
$$d = \frac{a}{e} - c = \frac{a}{e} - ae = a\left(\frac{1}{e} - e\right)$$

$$a = \frac{d}{\frac{1}{e} - e}$$

$$c = ae; b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Теорема 2. Определения 4, 5 и 6 равносильны.

Доказательство. Докажем, что 4 и 5 равносильны:



$$F_1M + F_2M = 2a$$
$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \quad | : 4a$$

Расстояние от точки на эллипсе до фокуса

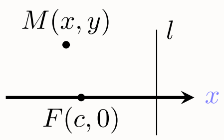
$$\boxed{\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - ex} \qquad \boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + ex}$$
$$(x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$$
$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$$
$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2 - c^2 = b^2$$
$$x^2\frac{1-e^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Нужно доказать, что:

$$\frac{b^2}{1-e^2} = a^2$$
$$b^2 = a^2 - a^2e^2 \qquad a^2e^2 = c^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

□

Доказательство. Докажем, что 4 и 6 равносильны:



$$l : x = \frac{a}{e} \qquad \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a}{e} - x} = e$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ex$$

Далее смотри равносильность 4 и 5.

□

Теорема 3. Прямая $Ax + By + C = 0$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$$

Доказательство. Касательная имеет 1 точку пересечения с эллипсом

$$B \neq 0 \qquad y = \frac{-C - Ax}{B} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{C+Ax}{B}\right)^2}{b^2} = 1$$
$$x^2b^2B^2 + a^2C^2 + a^2A^2x^2 + 2a^2ACx = a^2b^2B^2$$
$$x^2(a^2A^2 + b^2B^2) + 2a^2ACx + \left(a^2C^2 - a^2b^2B^2\right) = 0$$

Это уравнение имеет ровно 1 корень

$$\frac{D}{4} = 0 \qquad a^4A^2C^2 - (a^2C^2 - a^2b^2B^2)(a^2A^2 + b^2B^2) = 0$$
$$a^2A^2C^2 - (C^2 - b^2B^2)(a^2A^2 + b^2B^2) = 0$$
$$a^2A^2C^2 - a^2A^2C^2 - b^2B^2C^2 + a^2b^2A^2B^2 + b^4B^4 = 0$$
$$a^2b^2A^2B^2 + b^4B^4 = b^2B^2C^2$$
$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$$

$\square$