Оглавление

Лекция 4: Фибоначчи и теория вероятностей

04.10.2023

0.1 Фибоначчи

Определение 1. Последовательность Фибоначчи определяеется как:
$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$$

Лемма 1.
$$F_{2k} = F_{2k-1} + F_{2k-3} + \ldots + F_1$$

$$F_{2k-1} = F_{2k} + F_{2k-2} + \ldots + F_0 + 1$$

Доказательство. Докажем по индукции. База: $k = 1$:

$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1.$

$F_1 = F_0 + 1 = 0 + 1 = 1.$

Переход: $k \to k + 1$. По предположению индукции:

$F_{2k} = F_{2k-1} + F_{2k-3} + \ldots + F_1$. Тогда $F_{2k+2} = F_{2k+1} + F_{2k-1} + \ldots + F_1 + F_0 = F_{2k+1} + F_{2k}$. Аналогично для нечетных. □

Теорема 1. (Представление натуральных чисел в виде суммы чисел Фибоначчи)

$\forall S \in \mathbb{N} : S = F_{i_0} + F_{i_1} + \ldots + F_{i_s}$

Где $i_0 = 0, i_{k-1} + 1 < i_k : k \in 1 : s$

Доказательство. Докажем, что такое представление существует. Пусть $j(s)$ — номер максимального числа Фибоначчи, не большего чем S. Положим $S' = S - F_{j(s)}$. Предположим, что $S' > F_{j(s)-1}$, тогда: $S' >$

$F_{j(s)-1} \Rightarrow S > F_{j(s)} + F_{j(s)-1} \Rightarrow S > F_{j(s)+1}$, но по лемме $S \leq F_{js+1}$ — противоречие, значит $S' < F_{j(s)-1}$

Далее можно построить представление для S', итого число S прдставляется в виде представление для S', дополненное слагаемым $F_{j(s)}$

Проверим однозначность предсталвения: пусть $S = F_{j_0} + \ldots + F_{j_q} (2)$. Не умоляя общности, $j_q < j(s)$ (больше быть не может, а равные можно отбросить) Заменим F_{j_q} на $F_{j(s)-1}$, тогда правая часть равенства (2) увеличится. Будем заменять F_{j_q-1} на $F_{j(s)-3}$ и т.д. Но при таких заменах сумма не превзойдет $F_{j(s)}$ по лемме, значит, представление для S однозначно. □

0.2 Фибоначчиева система счисления

Вектор набора $(i_0, i_1, \ldots, i_s)$ — запись числа S в фибоначчиевой системе счисления.

Алгоритм. (Прибалвение единицы в фибоначчиевой системе счисления)

- Начальное положение: имеем набор $x[0 : n-1]$ из нулей и единиц, в котором нет двух единиц рядом и $x[0] = 1$.
- Положим $x[1] := 1$.
- Шаг: выбирем наибольшее k: $x[k] = 1 \land x[k-1] = 1$. Тогда:

$$\begin{cases} x[k] := 0, \\ x[k-1] := 0, \\ x[k+1] := 1, \\ x[0] := 1. \end{cases}$$

Пример.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	пояснение
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	= 46
1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	начало
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1-й шаг
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	2-й шаг
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	3-й шаг

Глава 1

Элементарная теория вероятностей

1.1 Основные понятия

Определение 2. Ω — множество элементарных исходов. $A \subset \Omega$ — событие.

Определение 3. $\varnothing \subset \Omega$ — невозможное событие, $\Omega \subset \Omega$ — достоверное событие.

Определение 4. Пусть есть события A, B, тогда:

- $A \cup B$ — объединение событий
- $A \cap B$ — совмещение событий, причем, если $A \cap B = \varnothing$, то A, B — несовместные события.
- $\overline{A}$ — противоположное событие.

Определение 5. $p : \Omega \to [0, 1]$ — вероятность события. Причем:

1. $0 \le p(A) \le 1$
2. $A \subset B \Rightarrow p(A) \le p(B)$
3. если $A = A_1 + A_2, A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то $p(A) = p(A_1) + p(A_2)$

Определение 6. $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ — классическая вероятность.

Определение 7. (Полная система событий)
Пусть есть события $S_1, \ldots, S_n$, таких, что:

- $S_i \cap S_j = \varnothing, i \neq j$
- $S_1 \cup \ldots \cup S_n = \Omega$

Тогда вероятность события A можно посчитать следующим образом:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap S_i)$$

Определение 8. События A, B — независимы, если:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Определение 9. События $A_1, \ldots, A_n$ — независимы попарно, если:

$$p(A_i \cap A_j) = p(A_i) \cdot p(A_j)$$

И независимы в совокупности, если:

$$p(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i)$$

Определение 10. (Условная вероятность)
Событие B при условии, что произошло событие A:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Пример. Пусть есть тетраэдр с одной красной, одной черной, одной белой и одной, покрашенной во все цвета гранями. Тогда:

- $p(\text{Крас.}) = \frac{1}{2}$
- $p(\text{Крас.} \cap \text{Черн.}) = \frac{1}{4}$ — попарно независимы
- $p(\text{Крас.} \cap \text{Черн.} \cap \text{Бел.}) = \frac{1}{4}$ — не независимы в совокупности.

Определение 11. (Полная вероятность, используя условную)

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap S_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A|S_i) \cdot p(S_i)$$

Определение 12. (Формула Байеса) Пусть есть события A, B:

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B|A_i) \cdot p(A_i)$$

$$p(B|A_i) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(A_i)} \Rightarrow p(B \cap A_i) = p(A_i) \cdot p(B|A_i) = p(B) \cdot p(A_i|B)$$

Получаем формулу Байеса:

$$p(A_i|B) = \frac{p(B|A_i) \cdot p(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(B|A_j) \cdot p(A_j)}$$