Оглавление

1 Сортировки **3**

1.1 Сортировка слиянием (Фон Неймана) 3

1.2 Сортировка вставками и сортировка Шелла 3

Лекция 8: Энтропия. Сортировки.

1.11.2023

Теорема 1. Если функция $G(p_1, \dots, p_m)$ обладает свойствами (1)-(6), то $G(p_1, \dots, p_m) = H(P_m)$

Лемма 1. Пусть $g(m) = G(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$ и $g(m)$ обладает свойствами (1)-(6), тогда:

$$g(m) = \log_2 m$$

Доказательство. Возьмем 2 схемы: Q_k и Q_l равновероятных исходов:

$$g(kl) = g(k) + g(l) - \text{из } (6) \Rightarrow g(m^k) = k \cdot g(m)$$

$$g(2) = 1 - \text{из } (3) \Rightarrow g(2^s) = s$$

Возьмем $s : 2^s \leq m^k \leq 2^{s+1}$, тогда, в силу монотонности g:

$$g(2^s) \leq g(m^k) \leq g(2^{s+1}) \Rightarrow s \leq kg(m) \leq s + 1$$

$$\frac{s}{k} \leq g(m) \leq \frac{s}{k}\frac{1}{k}$$

$$\frac{\lfloor \log_2 m^k \rfloor}{k} \leq g(m) \leq \frac{\lfloor \log_2 m^k \rfloor + 1}{k}$$

$$0 \leq g(m) - \log_2 m + \frac{\{k \log_2 m\}}{k} \leq \frac{1}{k}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\{k \log_2 m\}}{k} = 0 \Rightarrow g(m) = \log_2 m$$

$\square$

Лемма 2. Если $\forall p_i \in \mathbb{Q} : p_i \in P_m$, то:

$$G(P_m) = H(P_m), \text{ где } G(P_m) \text{ удовлетворяет (1)-(6)}$$

Доказательство. Пусть $p_i = \frac{r_1}{n}$. Пусть есть равновероятные схемы $Q_{r_1}, \ldots, Q_{r_n}$, тогда, комбинируя их с P_m, получим равновероятную схему Q_n С n равновероятными исходами.

$$G(Q_n) = G(P_m) + \sum_{i=1}^{n} p_i G(Q_{r_i})$$

По лемме 1:

$$\log_2 n = G(P_m) + \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 r_i$$

$$G(P_m) = \log_2 n - \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 r_i = \log_2 n - \sum_{i=1}^{m} p_i(\log_2 p_i + \log_2 n) =$$

$$= \log_2 n - \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i - \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 n =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$$

□

Доказательство. (теоремы 1) Для любого набора вероятностей $\{p_1, ..., p_m\}$ рассмотрим сходящуюся к нему последовательность рациональных наборов $\{p_1^{(k)}, ..., p_m^{(k)}\}$. По лемме 2 для каждого из этих наборов $G = H$. Так как обе функции непрерывны, то это равенство выполняется и в предельной точке. □

Глава 1

Сортировки

1.1 Сортировка слиянием (Фон Неймана)

Первоначально сортируемый массив представляется в виде n “отсортированных массивов” длины 1. Далее массивы сливаются попарно и сортируются. Затем еще раз и т. д.

Пример. для массива $a = [38, 27, 43, 3, 9, 82, 10]$:

|38|	|27|	|43|	|3|	|9|	|82|	|10|
|27,	38|	|3,	43|	|9,	82|	|10|
|3,	27,	38,	43|	|9,	10,	82|
|3,	9,	10,	27,	38,	43,	82|

1.2 Сортировка вставками и сортировка Шелла

Идея для сортировки вставками: наращивать отсортированную часть последовательности. Сначала берем уже “отсортированную” последовательность из одного элемента. Далее берем очередной элемент, сравниваем его с предыдущим и переставляем до тех пор, пока он не займет свое место.

Пример. для массива $a = [38, 27, 43, 3, 9, 82, 10]$:

38	27	43	3	9	82	10
27	38	43	3	9	82	10
27	38	43	3	9	82	10
3	27	38	43	9	82	10
3	9	27	38	43	82	10
3	9	27	38	43	82	10
3	9	10	27	38	43	82
3	9	10	27	38	43	82

Идея для сортировки Шелла: давайте попробуем сократить количество перемещений элементов за счет того, что будем сдвигать их не на одну позицию, а сразу на несколько.

> **Пример.** Наш массив: 13 44 7 21 78 3 25 9 28 35 10 66 33 16 Выберем шаг d = 6, отдельно сортируем (13 25 33), (44 9 16), (7 28), (21 35), (78 10) и (3 66). Затем уменьшим шаг d вдвое и повторим процедуру. На последнем шаге d = 1, что соответствует «обычной» сортировке вставками.