Оглавление

Лекция 5: Векторное произведение

09.10.2023

0.1 Векторное произведение

Глава 1

Векторное произведение

Замечание. Векторное произведение существует, только если $\dim V = 3$ (т.е. пространство трехмерное).

Определение 1 (Формальное). Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}$ – вектор со свойствами:

1. $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}, \mathbf{v} \perp \mathbf{b}$
2. $|\mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ – правая тройка векторов

Вопрос: что такое «правая тройка?» — Ответ: нет «правой» или «левой» троек, но про любые две тройки мы можем сказать одинаково ли они ориентированы.

Определение 2. Пусть $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ – фиксированный ортонормированный базис, будем называть его правой тройкой векторов.

Введем определения:

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	0	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	0	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	0

– таблица умножения базисных векторов

Пусть

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = (b_1, b_2, b_3)$$

Тогда векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) = \\ a_1b_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_1b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_1b_3\mathbf{i}\times\mathbf{j}+ \\ +a_2b_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_2b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_2b_3\mathbf{i}\times\mathbf{j}+ \\ +a_3b_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_3b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_3b_3\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \\ = \mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1)\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1)$$

Теорема 1. Векторное произведение обладает свойствами:

1. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$
2. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$
3. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{a}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{b}$
4. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k} \\ \mathbf{c} &= c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1. \qquad \mathbf{b}+\mathbf{c} &= (b_1+c_1)\mathbf{i}+(b_2+c_2)\mathbf{j}+(b_3+c_3)\mathbf{k} \\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= \mathbf{i}(a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2))+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...) \\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c} &= \mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...)+ \\ &+\mathbf{i}(a_2c_3-a_3c_2)+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...)\end{aligned}$$

После преобразований получим то же самое.
2. Аналогично

$$\begin{aligned}3. \qquad (\mathbf{a}\times\mathbf{b};\mathbf{a}) = \\ = (\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1); a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}) = \\ = a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1) = 0\end{aligned}$$

4. Будем доказывать $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\alpha = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1-\cos^2\alpha)$

$$\begin{aligned}(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 = \\ (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\left(1-\frac{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}\right) = \\ (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\end{aligned}$$

Чтобы не расписывать слагаемые перепишем в другом виде:

$$\sum_{i\neq j} a_i^2 b_j^2 - 2\sum_{i<j} a_i b_i a_j b_j = \sum_{i} a_i^2 b_i^2 + \sum_{i\neq j} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^{3} a_i^2 b_i^2 - 2\sum_{i<j} a_i b_i a_j b_j$$

□

Замечание.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Теорема 2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b})$ – правая тройка

Доказательство.

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_3b_1 - a_1b_3) + (a_1b_2 - a_2b_1) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} (a_2b_3 - a_3b_2) - \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} (a_1b_3 - a_3b_1) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_1)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 > 0$$

□