

Геометрия и топология

Солынин А. А.¹

11.09.2023 - ...

¹"Записал Сергей Киселев"

Оглавление

1	Векторное пространство	2
1.1	Определение векторного пространства	2
1.2	Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная неза- висимость	3
1.3	Матрицы	7
1.4	Скалярное произведение	10

Лекция 1: Векторное пространство

09.09.2023

Глава 1

Векторное пространство

1.1 Определение векторного пространства

Определение 1. Пусть V - множество;

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$\forall u, w, v \in V : \forall \alpha, \beta$$

1. $(u+v)+w=(u+v)+w$ (ассоциативность сложения)
2. $u+v=v+u$ (коммутативность сложения)
3. $\exists! 0 \in V : u+0=0+u=u$ (нейтральный элемент по сложению)
4. $\exists u; -u : u+(-u)=0$ (обратный элемент по сложению)
5. $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$ (дистрибутивность)
6. $(\alpha \cdot \beta)u=\alpha(\beta \cdot u)$ (ассоциативность умножения)
7. $1 \cdot u=u$ (нейтральный элемент по умножению)

Если 1-8 выполняются, то V - (вещественное) векторное пространство.

Пример. 1. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ - n -мерное пространство $(a_1 \dots a_n) + (b_1 \dots b_n) = (a_1 + b_1 \dots a_n + b_n)$

2. Множество многочленов V
Множество многочленов n степени — не векторное пространство, т. к. $(x^n + 1) + (-x^n + x) = x + 1$ — сложение не определено
Множество многочленов степени $n \leq n$ — векторное пространство.
3. Множество определенных на $[a..b]$, непрерывных и имеющих непрерывную производную функций — векторное пространство.
4. Матрицы $n \times m$ — векторное пространство.

5. Множество вращений шара (сложение — композиция, умножение — умножение угла на число на число) — не векторное пространство. (Упражнение: докажите почему)

Свойство. (Доказуемые свойства)

1. $\bar{1}$ — единственный.
2. $\begin{cases} u + v = 0 \\ u + w = 0 \end{cases} \Rightarrow v = w$
3. $-\bar{1} \cdot u = -u$
4. $u \cdot 0 = 0$

1.2 Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная независимость

Определение 2. V - векторное пространство и векторы $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$. Система v_1, \dots, v_n называется линейно независимой (ЛНЗ), если из $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Определение 3. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, v_1, \dots, v_n \in V$. То $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ — линейная комбинация (ЛК) векторов v_1, \dots, v_n .

Определение 4. Если $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$, не все $= 0$, но $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, то система v_1, \dots, v_n называется линейно зависимой (ЛЗ).

Теорема 1. v_1, \dots, v_n — ЛЗ \Leftrightarrow один из этих векторов можно представить как ЛК остальных. $\exists i : v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n$

Доказательство. $\Rightarrow : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n (\exists i : \alpha_i \neq 0)$

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \\ \alpha_i v_i &= -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \dots - \alpha_n v_n \\ \alpha_i \neq 0 \quad v_i &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n \\ \Leftrightarrow : v_i &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \text{ без } i\text{-ого слагаемого} \\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + (-1) v_i + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \\ \text{ЛК} &= 0 \text{ не все коэффициенты} = 0 \end{aligned}$$

□

Предположение 1. v_1, \dots, v_n — ЛНЗ, то любой его поднабор тоже ЛНЗ. v_1, \dots, v_n — ЛЗ, то при добавлении векторов, набор останется ЛЗ.

Теорема 2. v_1, \dots, v_n – ЛНЗ \Leftrightarrow если

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \\ \Rightarrow \alpha_1 &= \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; \dots; \alpha_n = \beta_n\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n &= 0 \\ \alpha_i - \beta_i &= 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n \text{ – ЛНЗ}\end{aligned}$$

□

Лекция 2: Базис векторного пространства

18.09.2023

Пусть V – это конечно мерно пространство

Определение 5. Набор v_1, v_2, \dots, v_n называется порождающим для V , если $\forall w \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

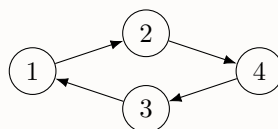
Замечание. Если к порождающему набору прибавить вектор, то он останется порождающим. Если убрать векторы из непорождающего набора векторы, то набор останется непорождающим.

Определение 6. v_1, v_2, \dots, v_n называется базисом V , если этот набор ЛНЗ и порождающий.

Теорема 3 (О базисе). Следующие определения базиса равносильны:

1. ЛНЗ и порождающий набор
2. Минимальный порождающий набор (минимальный по включению)
3. Максимальный ЛНЗ набор (максимальный по включению)
4. Порождающий набор $\forall w \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

Доказательство. Цепочка доказательств:



1 \rightarrow 2. Дан v_1, \dots, v_n – ЛНЗ и порождающий набор. Доказать, что он минимальный порождающий.

Допустим, что v_i выкинули, оставшийся набор остался порождающим $\Rightarrow v_i$ – ЛК остальных \Rightarrow ЛЗ.

2 \rightarrow 4. Дан v_1, \dots, v_n – минимальный порождающий набор. Доказать v_1, \dots, v_n – порождающий с единственностью коэффициентов.

Допустим противное: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

$$\alpha_i \neq \beta_i$$

$$(\alpha_i - \beta_i)v_i = (\beta_1 - \alpha_1)v_1 + \dots \text{ (без } i\text{-ого)} + (\beta_n - \alpha_n)v_n$$

$$v_i = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_i - \beta_i} + \dots \text{ (без } i\text{-ого)} + \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_i - \beta_i}$$

v_i – выкинем. В любой ЛК с v_i заменим v_i на выражение выше \Rightarrow набор порождающий. Значит без единственности коэффициентов получаем противоречие с дано

4 \rightarrow 3. Дан v_1, \dots, v_n – порождающий набор с единственностью коэффициентов. Доказать: v_1, \dots, v_n – максимальный ЛНЗ (ЛНЗ уже доказана)

Допустим противное: $v_1, v_2, \dots, v_n; u$ – ЛНЗ набор

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n (\alpha_1, \dots, \alpha_n \exists!) \Rightarrow v_1, \dots, v_n, u - \text{ЛЗ}$$

3 \rightarrow 1. Дан v_1, \dots, v_n – максимальный ЛНЗ. Доказать v_1, \dots, v_n – ЛНЗ и порождающий набор.

$$\forall w \in V$$

$$v_1, v_2, \dots, v_n, w - \text{ЛЗ набор}$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta w = 0$$

$$\text{Если } \beta = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\text{не все коэффициенты} = 0 (\alpha_i \neq 0)$$

$$\Rightarrow v_1, \dots, v_n - \text{ЛЗ}$$

$$\beta \neq 0 \Rightarrow$$

$$w = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} v_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} v_n$$

□

Замечание. (Следствия) Любую конечную порождающую систему можно сузить до базиса.

Если есть конечный порождающий набор, то любую ЛНЗ систему можно расширить до базиса.

Определение 7. Размерность пространства равна количеству элементов в базисе. (пока нет доказательств корректности)

Лемма 1. Система линейных уравнений: $(a_{ij} \in \mathbb{R}; x_i \in \mathbb{R}; 0 \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Имеет ненулевые решения, если $n > k$.

Доказательство. Индукция по k . База $k = 1$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$\text{Пусть } a_{11} \neq 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

$$\forall x_2, \dots, x_n : x_1 \text{ выражается через них}$$

$$a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$$

Переход

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$\exists i : a_{1i} \neq 0$, иначе выкинем предыдущее уравнение

$$x_i = -\frac{a_{11}}{a_{1i}}x_1 - \dots \text{ (без } i\text{-ого)} - \frac{a_{1n}}{a_{1i}}x_n$$

Подставим выраженное x_i во все остальные уравнения. Уравнений на 1 меньше, переменных на 1 меньше. \square

Теорема 4. Если v_1, \dots, v_k и w_1, \dots, w_n базисы $\in V$, то $k = n$.

Доказательство. v_1, \dots, v_n – порождающая система.

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + \dots + a_{k1}v_k$$

$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + \dots + a_{k2}v_k$$

...

$$w_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + \dots + a_{kn}v_k$$

$$x_1w_1 + x_2w_2 + \dots + x_nw_n = 0, x_i \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

т.к. w_1, \dots, w_n – ЛНЗ \Rightarrow все $x_i = 0$

$$\begin{aligned} x_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{k1}v_k) + x_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{k2}v_k) \\ + \dots + x_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{kn}v_k) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + v_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \\ + \dots + v_k(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n) = 0 \end{aligned}$$

v_1, v_2, \dots, v_k — ЛНЗ \Rightarrow все коэффициенты равны 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Если $n > k \Rightarrow \exists$ ненулевые решения \Rightarrow противоречие с (1.1) и ЛНЗ
 $w_i \Rightarrow n \leq k$. Аналогично $k \leq n \Rightarrow n = k$. \square

Лекция 3: Матрицы

25.09.2023

1.3 Матрицы

Определение 8. Пусть V — это конечно мерно пространство

$v_1 \dots v_n$ — базис V

$w \in V \Rightarrow \exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n :$

$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$

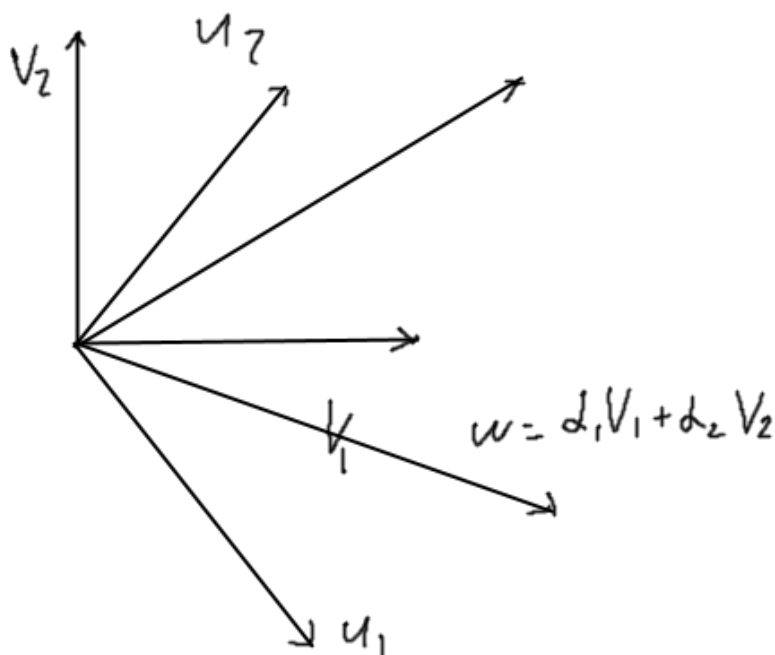
Тогда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — координаты w в базисе $u_1 \dots u_n$

- $w \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$
- $u \Leftrightarrow (\beta_1 \dots \beta_n)$
- $u + w \Leftrightarrow (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2 \dots \alpha_n + \beta_n)$
- $f \cdot w \Leftrightarrow (f \cdot \alpha_1, f \cdot \alpha_2 \dots f \cdot \alpha_n)$

Определение 9. Пусть $v_1 \dots v_n$ и u_1, u_2, \dots, u_n — базисы

Тогда w может выражаться как:

$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot u_1 + \dots + \beta_n \cdot u_n$



Определение 10. (*) Пусть $v_1 \dots v_n$ и u_1, u_2, \dots, u_n — базисы

Выразим базис $u_1 \dots u_n$ через $v_1 \dots v_n$:

$$u_1 = a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + \dots + a_{1n} \cdot v_n$$

$$u_2 = a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \dots + a_{2n} \cdot v_n$$

\vdots

$$u_n = a_{n1} \cdot v_1 + a_{n2} \cdot v_2 + \dots + a_{nn} \cdot v_n$$

Тогда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица перехода от $v_1 \dots v_n$ к $u_1 \dots u_n$

Определение 11. Пусть есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \text{ — Матрица } n \times K$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nl} \end{pmatrix} \text{ — Матрица } k \times l$$

Умножение матриц определяется как:

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \dots & \dots & c_{kl} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы равны:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1k} \cdot b_{kl}$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \dots + a_{1k} \cdot b_{k2}$$

\vdots

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

\vdots

Замечание. Выражение базиса через базис можно записать так:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Теорема 5. Пусть $v_1 \dots v_n$ и u_1, u_2, \dots, u_n — базисы.

A — матрица перехода от $v_1 \dots v_n$ к $u_1 \dots u_n$

B — матрица перехода от $w_1 \dots w_n$ к $v_1 \dots v_n$

Тогда матрица перехода от $w_1 \dots w_n$ к $u_1 \dots u_n$ равна $A \times B$

Доказательство. Выразим базис $v_1 \dots v_n$ через $w_1 \dots w_n$:

$$v_1 = b_{11}w_1 + \dots + b_{1n}w_n$$

\vdots

$$v_n = b_{n1}w_1 + \dots + b_{nn}w_n$$

Выразим базис $u_1 \dots u_n$ через $v_1 \dots v_n$:

$$u_1 = a_{11}(b_{11}w_1 + \dots + b_{1n}w_n) + \dots + a_{1n}(b_{n1}w_1 + \dots + b_{nn}w_n) =$$

$$w_1(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}) + \dots + w_n(a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \dots + a_{nn}b_{nn})$$

Мы видим, что базис $u_1 \dots u_n$ выражается через $w_1 \dots w_n$, а матрица перехода — $A \times B$. \square

Теорема 6. $A(BC) = (AB)C$

Умножение матриц не коммутативно, но ассоциативно.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ — единичная матрица}$$

Замечание. $u_1 \dots u_n, v_1 \dots v_n$ — базисы, выражаются как:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$A \times B = E$$

$$B \times A = E$$

(A и B) — обратные матрицы

1.4 Скалярное произведение

Определение 12. V - векторное пространство

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

1. $(u, u) \geq 0 \quad (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v) \quad (u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$
3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v)$
4. $(u, v) = (v, u)$

V - евклидово пространство (\cdot, \cdot) - скалярное произведение

Пример. 1. $V = \mathbb{R}^n$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2. V - пространство функций $(\dots) (f(x), g(x)) := \int_a^b f(x)g(x)dx$

Определение 13. Пусть V - евклидово пространство, $v \in V$

$$|v| := \sqrt{(v, v)}$$

$$\cos \angle(u, v) := \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|}$$

Теорема 7. (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ))

$$|(u, w)| \leq |u| \cdot |v|$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
(u + tv, u + tv) &\geq 0 \quad \forall t \\
(u, u) + (u, tv) + (tv, u) + (tv, tv) &\geq 0 \\
|u|^2 + 2t(u, v) + t^2|v|^2 &\geq 0 \quad \forall t \\
\frac{D}{4} \leq 0 \quad (u, v)^2 - |u|^2|v|^2 &\leq 0 \\
|(u, v)| &\leq |u||v|
\end{aligned}$$

□

Вывод. (Следствие из КБШ)

1. $|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$
2. $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b g(x)dx) \cdot (\int_a^b f(x)dx)$

Определение 14. $u \perp v$, если $(u, v) = 0$ **Определение 15.** $v_1 \dots v_n$ — ортогональная система, если:

$$\forall v_i, v_j : v_i \perp v_j, (i \neq j)$$

Теорема 8. $v_1 \dots v_n$ - ортогональная система и в ней нет нулевых векторов $\Rightarrow v_1 \dots v_n$ линейно не зависимы.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \\
\alpha_1(v_1, v_i) + \alpha_2(v_2, v_i) + \dots + \alpha_i(v_i, v_i) + \dots &= 0 \\
\alpha_i |v_i|^2 &= 0 \\
\alpha_i &= 0
\end{aligned}$$

□

Определение 16. u — нормированный или единичный если $|u| = 1$
 $v_1 \dots v_n$ — ортонормированные системы, если $v_i \perp v_j$ и $|v_i| = 1$
 $v_1 \dots v_n$ — ОНБ ортонормированный базис