

# Геометрия и топология

Солынин А. А.<sup>1</sup>

11.09.2023 - ...

<sup>1</sup>"Большая часть конспектов была честно украдена, пожалуйста, не бейте.  
Ссылка"

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Векторное пространство</b>	<b>2</b>
1.1	Определение векторного пространства . . . . .	2
1.2	Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная независимость . . . . .	3
1.3	Матрицы . . . . .	7
1.4	Скалярное произведение . . . . .	10
1.5	Построение ортонормированного базиса . . . . .	11
1.6	Ориентация базиса . . . . .	12
1.7	Векторное произведение . . . . .	14
1.8	Смешанное произведение . . . . .	17
1.9	Свойства смешанного произведения . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Аффинное (точечное) пространство</b>	<b>18</b>
2.1	Определение . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Прямые на плоскости</b>	<b>20</b>
3.1	Определения . . . . .	20
3.2	Угол между прямыми . . . . .	21
3.3	Уравнение нормали . . . . .	22
3.4	Уравнение прямой, проходящей через точку пересечения двух других . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Плоскости в пространстве</b>	<b>24</b>
4.1	Уравнение плоскости . . . . .	24
4.2	Угол между плоскостями . . . . .	25
4.3	Плоскость через прямую пересечения двух плоскостей . . . . .	26
4.4	Плоскость через точку пересечения трех плоскостей . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Прямая в пространстве</b>	<b>27</b>
5.1	Уравнение прямой . . . . .	27
5.2	Угол между прямыми . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Кривые второго порядка</b>	<b>30</b>
6.1	Эллипс . . . . .	30

## Лекция 1: Векторное пространство

09.09.2023

# Глава 1

## Векторное пространство

### 1.1 Определение векторного пространства

**Определение 1.** Пусть  $V$  - множество;

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$\forall u, w, v \in V : \forall \alpha, \beta$$

1.  $(u+v)+w=(u+v)+w$  (ассоциативность сложения)
2.  $u+v=v+u$  (коммутативность сложения)
3.  $\exists! 0 \in V : u+0=0+u=u$  (нейтральный элемент по сложению)
4.  $\exists u; -u : u+(-u)=0$  (обратный элемент по сложению)
5.  $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$  (дистрибутивность)
6.  $(\alpha \cdot \beta)u=\alpha(\beta \cdot u)$  (ассоциативность умножения)
7.  $1 \cdot u=u$  (нейтральный элемент по умножению)

Если 1-8 выполняются, то  $V$  - (вещественное) векторное пространство.

**Пример.** 1.  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  -  $n$ -мерное пространство  $(a_1 \dots a_n) + (b_1 \dots b_n) = (a_1 + b_1 \dots a_n + b_n)$

2. Множество многочленов  $V$   
Множество многочленов  $n$  степени — не векторное пространство, т. к.  $(x^n + 1) + (-x^n + x) = x + 1$  — сложение не определено  
Множество многочленов степени  $n \leq n$  — векторное пространство.
3. Множество определенных на  $[a..b]$ , непрерывных и имеющих непрерывную производную функций — векторное пространство.
4. Матрицы  $n \times m$  — векторное пространство.

5. Множество вращений шара (сложение — композиция, умножение — умножение угла на число на число) — не векторное пространство. (Упражнение: докажите почему)

**Свойство.** (Доказуемые свойства)

1.  $\bar{1}$  — единственный.
2.  $\begin{cases} u + v = 0 \\ u + w = 0 \end{cases} \Rightarrow v = w$
3.  $-\bar{1} \cdot u = -u$
4.  $u \cdot 0 = 0$

## 1.2 Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная независимость

**Определение 2.**  $V$  - векторное пространство и векторы  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$ . Система  $v_1, \dots, v_n$  называется линейно независимой (ЛНЗ), если из  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**Определение 3.** Если  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, v_1, \dots, v_n \in V$ . То  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$  — линейная комбинация (ЛК) векторов  $v_1, \dots, v_n$ .

**Определение 4.** Если  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , не все  $= 0$ , но  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ , то система  $v_1, \dots, v_n$  называется линейно зависимой (ЛЗ).

**Теорема 1.**  $v_1, \dots, v_n$  — ЛЗ  $\Leftrightarrow$  один из этих векторов можно представить как ЛК остальных.  $\exists i : v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n$

**Доказательство.**  $\Rightarrow: \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n (\exists i : \alpha_i \neq 0)$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \dots - \alpha_n v_n$$

$$\alpha_i \neq 0 \quad v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n$$

$$\Leftarrow: v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \text{ без } i\text{-ого слагаемого}$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + (-1) v_i + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\text{ЛК} = 0 \text{ не все коэффициенты} = 0$$

□

**Предположение 1.**  $v_1, \dots, v_n$  — ЛНЗ, то любой его поднабор тоже ЛНЗ.  $v_1, \dots, v_n$  — ЛЗ, то при добавлении векторов, набор останется ЛЗ.

**Теорема 2.**  $v_1, \dots, v_n$  – ЛНЗ  $\Leftrightarrow$  если

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \\ \Rightarrow \alpha_1 &= \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; \dots; \alpha_n = \beta_n\end{aligned}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n &= 0 \\ \alpha_i - \beta_i &= 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n \text{ – ЛНЗ}\end{aligned}$$

□

## Лекция 2: Базис векторного пространства

18.09.2023

Пусть  $V$  – это конечно мерно пространство

**Определение 5.** Набор  $v_1, v_2, \dots, v_n$  называется порождающим для  $V$ , если  $\forall w \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

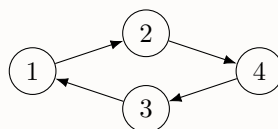
**Замечание.** Если к порождающему набору прибавить вектор, то он останется порождающим. Если убрать векторы из непорождающего набора векторы, то набор останется непорождающим.

**Определение 6.**  $v_1, v_2, \dots, v_n$  называется базисом  $V$ , если этот набор ЛНЗ и порождающий.

**Теорема 3 (О базисе).** Следующие определения базиса равносильны:

1. ЛНЗ и порождающий набор
2. Минимальный порождающий набор (минимальный по включению)
3. Максимальный ЛНЗ набор (максимальный по включению)
4. Порождающий набор  $\forall w \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

**Доказательство.** Цепочка доказательств:



1  $\rightarrow$  2. Дан  $v_1, \dots, v_n$  – ЛНЗ и порождающий набор. Доказать, что он минимальный порождающий.

Допустим, что  $v_i$  выкинули, оставшийся набор остался порождающим  $\Rightarrow v_i$  – ЛК остальных  $\Rightarrow$  ЛЗ.

2  $\rightarrow$  4. Дан  $v_1, \dots, v_n$  – минимальный порождающий набор. Доказать  $v_1, \dots, v_n$  – порождающий с единственностью коэффициентов.

Допустим противное:  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

$$\alpha_i \neq \beta_i$$

$$(\alpha_i - \beta_i)v_i = (\beta_1 - \alpha_1)v_1 + \dots \text{ (без } i\text{-ого)} + (\beta_n - \alpha_n)v_n$$

$$v_i = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_i - \beta_i} + \dots \text{ (без } i\text{-ого)} + \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_i - \beta_i}$$

$v_i$  – выкинем. В любой ЛК с  $v_i$  заменим  $v_i$  на выражение выше  $\Rightarrow$  набор порождающий. Значит без единственности коэффициентов получаем противоречие с дано

4  $\rightarrow$  3. Дан  $v_1, \dots, v_n$  – порождающий набор с единственностью коэффициентов. Доказать:  $v_1, \dots, v_n$  – максимальный ЛНЗ (ЛНЗ уже доказана)

Допустим противное:  $v_1, v_2, \dots, v_n; u$  – ЛНЗ набор

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n (\alpha_1, \dots, \alpha_n \exists!) \Rightarrow v_1, \dots, v_n, u - \text{ЛЗ}$$

3  $\rightarrow$  1. Дан  $v_1, \dots, v_n$  – максимальный ЛНЗ. Доказать  $v_1, \dots, v_n$  – ЛНЗ и порождающий набор.

$$\forall w \in V$$

$$v_1, v_2, \dots, v_n, w - \text{ЛЗ набор}$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta w = 0$$

$$\text{Если } \beta = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\text{не все коэффициенты} = 0 (\alpha_i \neq 0)$$

$$\Rightarrow v_1, \dots, v_n - \text{ЛЗ}$$

$$\beta \neq 0 \Rightarrow$$

$$w = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} v_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} v_n$$

□

**Замечание.** (Следствия) Любую конечную порождающую систему можно сузить до базиса.

Если есть конечный порождающий набор, то любую ЛНЗ систему можно расширить до базиса.

**Определение 7.** Размерность пространства равна количеству элементов в базисе. (пока нет доказательств корректности)

**Лемма 1.** Система линейных уравнений:  $(a_{ij} \in \mathbb{R}; x_i \in \mathbb{R}; 0 \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Имеет ненулевые решения, если  $n > k$ .

**Доказательство.** Индукция по  $k$ . База  $k = 1$ :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$\text{Пусть } a_{11} \neq 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

$\forall x_2, \dots, x_n : x_1$  выражается через них

$$a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$$

Переход

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$\exists i : a_{1i} \neq 0$ , иначе выкинем предыдущее уравнение

$$x_i = -\frac{a_{11}}{a_{1i}}x_1 - \dots \text{ (без } i\text{-ого)} - \frac{a_{1n}}{a_{1i}}x_n$$

Подставим выраженное  $x_i$  во все остальные уравнения. Уравнений на 1 меньше, переменных на 1 меньше.  $\square$

**Теорема 4.** Если  $v_1, \dots, v_k$  и  $w_1, \dots, w_n$  базисы  $\in V$ , то  $k = n$ .

**Доказательство.**  $v_1, \dots, v_n$  – порождающая система.

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + \dots + a_{k1}v_k$$

$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + \dots + a_{k2}v_k$$

...

$$w_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + \dots + a_{kn}v_k$$

$$x_1w_1 + x_2w_2 + \dots + x_nw_n = 0, x_i \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

т.к.  $w_1, \dots, w_n$  – ЛНЗ  $\Rightarrow$  все  $x_i = 0$

$$\begin{aligned} x_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{k1}v_k) + x_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{k2}v_k) \\ + \dots + x_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{kn}v_k) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + v_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \\ + \dots + v_k(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n) = 0 \end{aligned}$$

$v_1, v_2, \dots, v_k$  — ЛНЗ  $\Rightarrow$  все коэффициенты равны 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Если  $n > k \Rightarrow \exists$  ненулевые решения  $\Rightarrow$  противоречие с (1.1) и ЛНЗ  
 $w_i \Rightarrow n \leq k$ . Аналогично  $k \leq n \Rightarrow n = k$ .  $\square$

## Лекция 3: Матрицы

25.09.2023

### 1.3 Матрицы

**Определение 8.** Пусть  $V$  — конечное мерное пространство

$v_1 \dots v_n$  — базис  $V$

$w \in V \Rightarrow \exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n :$

$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$

Тогда  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — координаты  $w$  в базисе  $u_1 \dots u_n$

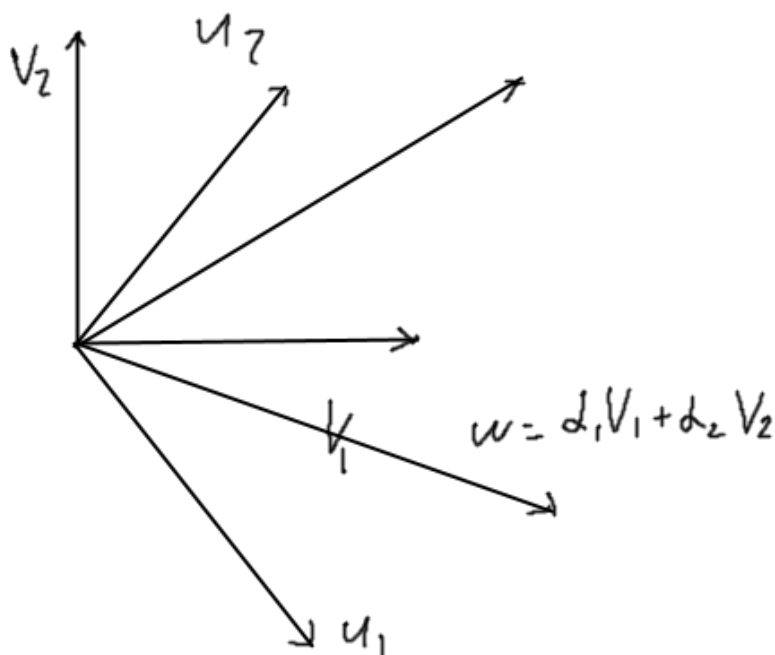
- $w \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$
- $u \Leftrightarrow (\beta_1 \dots \beta_n)$
- $u + w \Leftrightarrow (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2 \dots \alpha_n + \beta_n)$
- $f \cdot w \Leftrightarrow (f \cdot \alpha_1, f \cdot \alpha_2 \dots f \cdot \alpha_n)$

**Определение 9.** Пусть  $v_1 \dots v_n$  и  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — базисы

Тогда  $w$  может выражаться как:

$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot u_1 + \dots + \beta_n \cdot u_n$





**Определение 10.** (\*) Пусть  $v_1 \dots v_n$  и  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — базисы

Выразим базис  $u_1 \dots u_n$  через  $v_1 \dots v_n$ :

$$u_1 = a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + \dots + a_{1n} \cdot v_n$$

$$u_2 = a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \dots + a_{2n} \cdot v_n$$

$\vdots$

$$u_n = a_{n1} \cdot v_1 + a_{n2} \cdot v_2 + \dots + a_{nn} \cdot v_n$$

Тогда  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  — матрица перехода от  $v_1 \dots v_n$  к  $u_1 \dots u_n$

**Определение 11.** Пусть есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \text{ — Матрица } n \times K$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nl} \end{pmatrix} \text{ — Матрица } k \times l$$

Умножение матриц определяется как:

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \dots & \dots & c_{kl} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы равны:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1k} \cdot b_{kl}$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \dots + a_{1k} \cdot b_{k2}$$

$\vdots$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$\vdots$

**Замечание.** Выражение базиса через базис можно записать так:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

**Теорема 5.** Пусть  $v_1 \dots v_n$  и  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — базисы.

$A$  — матрица перехода от  $v_1 \dots v_n$  к  $u_1 \dots u_n$

$B$  — матрица перехода от  $w_1 \dots w_n$  к  $v_1 \dots v_n$

Тогда матрица перехода от  $w_1 \dots w_n$  к  $u_1 \dots u_n$  равна  $A \times B$

**Доказательство.** Выразим базис  $v_1 \dots v_n$  через  $w_1 \dots w_n$ :

$$v_1 = b_{11}w_1 + \dots + b_{1n}w_n$$

$\vdots$

$$v_n = b_{n1}w_1 + \dots + b_{nn}w_n$$

Выразим базис  $u_1 \dots u_n$  через  $v_1 \dots v_n$ :

$$u_1 = a_{11}(b_{11}w_1 + \dots + b_{1n}w_n) + \dots + a_{1n}(b_{n1}w_1 + \dots + b_{nn}w_n) = w_1(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}) + \dots + w_n(a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \dots + a_{nn}b_{nn})$$

Мы видим, что базис  $u_1 \dots u_n$  выражается через  $w_1 \dots w_n$ , а матрица перехода —  $A \times B$ .  $\square$

**Теорема 6.**  $A(BC) = (AB)C$

Умножение матриц не коммутативно, но ассоциативно.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ — единичная матрица}$$

**Замечание.**  $u_1 \dots u_n, v_1 \dots v_n$  — базисы, выражаются как:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$A \times B = E$$

$$B \times A = E$$

(A и B) — обратные матрицы

## 1.4 Скалярное произведение

**Определение 12.**  $V$  - векторное пространство

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

1.  $(u, u) \geq 0 \quad (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2.  $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v) \quad (u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$
3.  $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v)$
4.  $(u, v) = (v, u)$

$V$  - евклидово пространство  $(\cdot, \cdot)$  - скалярное произведение

**Пример.** 1.  $V = \mathbb{R}^n$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2.  $V$  - пространство функций  $(\dots) (f(x), g(x)) := \int_a^b f(x)g(x)dx$

**Определение 13.** Пусть  $V$  - евклидово пространство,  $v \in V$

$$|v| := \sqrt{(v, v)}$$

$$\cos \angle(u, v) := \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|}$$

**Теорема 7.** (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ))

$$|(u, w)| \leq |u| \cdot |v|$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}(u + tv, u + tv) &\geq 0 \quad \forall t \\(u, u) + (u, tv) + (tv, u) + (tv, tv) &\geq 0 \\|u|^2 + 2t(u, v) + t^2|v|^2 &\geq 0 \quad \forall t \\\frac{D}{4} \leq 0 \quad (u, v)^2 - |u|^2|v|^2 &\leq 0 \\|(u, v)| &\leq |u||v|\end{aligned}$$

□

**Вывод.** (Следствие из КБШ)

1.  $|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$
2.  $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b g(x)dx) \cdot (\int_a^b f(x)dx)$

**Определение 14.**  $u \perp v$ , если  $(u, v) = 0$

**Определение 15.**  $v_1 \dots v_n$  — ортогональная система, если:  
 $\forall v_i, v_j : v_i \perp v_j, (i \neq j)$

**Теорема 8.**  $v_1 \dots v_n$  - ортогональная система и в ней нет нулевых векторов  $\Rightarrow v_1 \dots v_n$  линейно не зависимы.

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \\\alpha_1(v_1, v_i) + \alpha_2(v_2, v_i) + \dots + \alpha_i(v_i, v_i) + \dots &= 0 \\a_i|v_i|^2 &= 0 \\\alpha_i &= 0\end{aligned}$$

□

**Определение 16.**  $u$  — нормированный или единичный если  $|u| = 1$   
 $v_1 \dots v_n$  — ортонормированные системы, если  $v_i \perp v_j$  и  $|v_i| = 1$   
 $v_1 \dots v_n$  — ОНБ ортонормированный базис

Лекция 4: Ортонормированный базис и ориентация базиса

02.10.2023

## 1.5 Построение ортонормированного базиса

**Теорема 9.** Ортонормированный базис существует.

**Доказательство.** (Ортогонализация Грама-Шмидта)

Есть  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  — ЛНЗ

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} & |\mathbf{u}_1| &= 1 \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_2 &\perp \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|} \\ |\mathbf{u}_2| &= 1 & \mathbf{u}_2 &\perp \mathbf{u}_1 \\ (\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2) &= 0 \\ (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 - \alpha \mathbf{u}_1) &= 0 \\ (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - \alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) &= 0 \\ \alpha &= (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)\end{aligned}$$

Пусть  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$  построены

Построим  $\mathbf{u}_k$

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_k &= \mathbf{v}_k - \alpha_1 \mathbf{u}_1 - \alpha_2 \mathbf{u}_2 - \dots - \alpha_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{w}_k &\perp \mathbf{u}_i & (i \leq k-1) \\ 0 &= (\mathbf{w}_k, \mathbf{u}_i) = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i) - \alpha_i (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) \\ \alpha_i &= (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i) \\ \mathbf{u}_k &= \frac{\mathbf{w}_k}{|\mathbf{w}_k|}\end{aligned}$$

Строим  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  с помощью данного алгоритма.

**Замечание.**  $\mathbf{u}_i$  — ЛК  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i$

**Вывод.** Если  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  — базис  $\Rightarrow \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  — ОНБ, т.е. если  $\dim V = n$ , то  $\exists$  ОНБ

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $\dim V = n$ ,  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  — ОНБ,  $\mathbf{w} = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots + a_n \mathbf{u}_n$ , то можем записать  $\mathbf{w} = (a_1, \dots, a_n)$ , соответственно  $\mathbf{v} = b_1 \mathbf{u}_1 + b_2 \mathbf{u}_2 + \dots + b_n \mathbf{u}_n$ , тогда

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= (a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots + a_n \mathbf{u}_n, b_1 \mathbf{u}_1 + b_2 \mathbf{u}_2 + \dots + b_n \mathbf{u}_n) = \\ &= a_1 b_1 (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) + a_1 b_2 (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + \dots + a_1 b_n (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n) + \\ &\quad + a_2 b_1 (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) + a_2 b_2 (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + \dots + a_2 b_n (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_n) + \\ &\quad + a_n b_1 (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_1) + a_n b_2 (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + \dots + a_n b_n (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n\end{aligned}$$

□

## 1.6 Ориентация базиса

**Определение 17 (Неформальное).** На плоскости:  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ;  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = S_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \text{ (ориентированная площадь)}$$

В пространстве:  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ;  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ;  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}} \text{ (ориентированный объем)}$$

**Определение 18 (Формальное).**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

Мнемоническое правило:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

По бирюзовой стрелке сложение, по зеленой – вычитание.

**Замечание.** Данные свойства справедливы для матриц любого порядка.

**Свойства.**

1. Если строку или столбец умножить на  $\alpha$ , то определитель тоже умножится на  $\alpha$ .
2. Если меняем 2 строки или столбца, то знак определителя меняется.
3. Если есть 2 одинаковых строки, то определитель равен 0.
4. Если к одному из векторов прибавить вектор кратный другому, то определитель не поменяется.
5. Определитель единичной матрицы равен 1.

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha b_1 & a_2 + \alpha b_2 & a_3 + \alpha b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

**Теорема 10.** (Доказательство будет на алгебре)

$$\exists ! f : M_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$$

такая, что, удовлетворяет свойствам 1-5.

**Теорема 11.**

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

**Определение 19 (Ориентация).**  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – ОНБ («правая тройка»),  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  – векторы.

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}$$

Если  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0$ , то  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  называется правой тройкой векторов.

Если  $\det < 0$ , то  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  называется левой тройкой векторов.

Если  $\det = 0$ , то  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  – ЛЗ.

Выводы:

1. Ориентация бывает только у ЛНЗ троек – у базисов.
2. Ориентаций бывает ровно 2.
3. Одинаковость ориентаций является эквивалентностью.

## Лекция 5: Векторное произведение

09.10.2023

### 1.7 Векторное произведение

**Замечание.** Векторное произведение существует, только если  $\dim V = 3$  (т.е. пространство трехмерное).

**Определение 20 (Формальное).** Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}$  – вектор со свойствами:

$$1. \mathbf{v} \perp \mathbf{a}, \mathbf{v} \perp \mathbf{b}$$

$$2. |\mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$$

3.  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$  – правая тройка векторов

Вопрос: что такое «правая тройка?» — Ответ: нет «правой» или «левой» троек, но про любые две тройки мы можем сказать одинаково ли они ориентированы.

**Определение 21.** Пусть  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  – фиксированный ортонормированный базис, будем называть его правой тройкой векторов.

Введем определения:

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	0	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	0	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	0

– таблица умножения базисных векторов

Пусть

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = (b_1, b_2, b_3)$$

Тогда векторное произведение  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = \\ &= a_1b_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_1b_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} + \\ &+ a_2b_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_2b_2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_2b_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} + \\ &+ a_3b_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_3b_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3b_3\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \\ &= \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

**Теорема 12.** Векторное произведение обладает свойствами:

$$1. \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$2. \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$3. \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$$

$$4. |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$$

**Доказательство.**

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$$



$$\begin{aligned}
 1. \quad \mathbf{b} + \mathbf{c} &= (b_1 + c_1)\mathbf{i} + (b_2 + c_2)\mathbf{j} + (b_3 + c_3)\mathbf{k} \\
 \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{i}(a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2)) + \mathbf{j}(\dots) + \mathbf{k}(\dots) \\
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} &= \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(\dots) + \mathbf{k}(\dots) + \\
 &\quad + \mathbf{i}(a_2c_3 - a_3c_2) + \mathbf{j}(\dots) + \mathbf{k}(\dots)
 \end{aligned}$$

После преобразований получим то же самое.

2. Аналогично

$$\begin{aligned}
 3. \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{a}) &= \\
 &= (\mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1); a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) = \\
 &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0
 \end{aligned}$$

$$4. \text{ Будем доказывать } |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \sin^2 \alpha = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2 \alpha)$$

$$\begin{aligned}
 (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 &= \\
 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \left( 1 - \frac{(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)} \right) &= \\
 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2
 \end{aligned}$$

Чтобы не расписывать слагаемые перепишем в другом виде:

$$\sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - 2 \sum_{i < j} a_i b_i a_j b_j = \sum_i a_i^2 b_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^3 a_i^2 b_i^2 - 2 \sum_{i < j} a_i b_i a_j b_j$$

□

**Замечание.**

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

**Теорема 13.**  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$  – правая тройка

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \\
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_3b_1 - a_1b_3) + (a_1b_2 - a_2b_1) = \\
 &= \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} (a_2b_3 - a_3b_2) - \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} (a_1b_3 - a_3b_1) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (a_1b_2 - a_2b_1) \\
 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 > 0
 \end{aligned}$$



## Лекция 6: Смешанное произведение. Аффинное пространство

30.10.2023

### 1.8 Смешанное произведение

**Определение 22.**  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  – векторы в  $\mathbb{R}^3$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c}) \text{ – смешанное произведение}$$

Геометрический смысл:  $\pm V_{\text{параллелепипеда}}$

**Доказательство.**

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \alpha = S_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} |\mathbf{c}| \cos \alpha = \pm V_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}}$$



В координатах:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c}) = (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1)(c_1, c_2, c_3) =$$

$$a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

### 1.9 Свойства смешанного произведения

(по свойствам определителей)

1.  $(\mathbf{e} + \mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{e}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  для каждого аргумента
2.  $(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \alpha \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha \mathbf{c}) = \alpha (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
3.  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  – ЛЗ
4.  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$
5. Знак смешанного произведения – ориентация тройки.

## Глава 2

# Аффинное (точечное) пространство

### 2.1 Определение

**Определение 23.**  $V$  – векторное пространство,  $E$  – множество. Назовем  $E$  точечным (аффинным) пространством, если определена операция  $+: E \times V \rightarrow E$ , т.е.  $(e; \mathbf{v}) \mapsto (e + \mathbf{v})$  со свойствами:

1.  $(e + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = e + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$
2.  $e + 0 = e$
3.  $\forall e_1, e_2 \in E \exists! \mathbf{v} \in V : e_2 = e_1 + \mathbf{v}$

Такой вектор будем обозначать  $\mathbf{v} = \overrightarrow{e_1 e_2}$

**Определение 24 (Построение точек).** Если в  $V$  есть базис  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  и мы зафиксируем  $e_0 \in E \Rightarrow \forall e \in E \exists! \mathbf{w} : e_0 + \mathbf{w} = e$ , при этом:  $\exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n : \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \Rightarrow e = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  – координаты  $e$ .

Если имеем  $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n$ , то:  $e + \mathbf{v} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$

**Определение 25 (Расстояние).** Пусть  $e_0$  – начало координат,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  – ОНБ.  $e_1 = e_0 + \mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ ,  $e_2 = e_0 + \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$

$$\text{dist}(e_1, e_2) = |\mathbf{u} - \mathbf{w}| = |\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{u}_n - \mathbf{w}_n| = \sqrt{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1)^2 + \dots + (\mathbf{u}_n - \mathbf{w}_n)^2}$$

**Определение 26 (Преобразование начала координат).** (Если хотим перейти от начала координат  $e_0$  к  $e'_0$ )

Есть базис  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  и вектор  $e'_0 - e_0 = \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ . И пусть

точка  $e = (e_1, \dots, e_n)$  – координаты с началом  $e_0$  и  $e = (e'_1, \dots, e'_n)$  – координаты с началом в  $e'_0$ . Тогда:

$$e = e_0 + e_1 \mathbf{v}_1 + \dots + e_n \mathbf{v}_n$$

$$e'_0 = e_0 + e_1 \mathbf{w}_1 + \dots + e_n \mathbf{w}_n \Leftrightarrow e_0 = e'_0 - \mathbf{w}_1 \mathbf{v}_1 - \dots - \mathbf{w}_n \mathbf{v}_n$$

**Упражнение:** почему равносильно?

$$\text{Имеем } e = e'_0 + (e_1 - \mathbf{w}_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (e_n - \mathbf{w}_n) \mathbf{v}_n$$

$$\text{Значит } (e'_1, \dots, e'_n) = (e_1 - \mathbf{w}_1, \dots, e_n - \mathbf{w}_n)$$

## Глава 3

# Прямые на плоскости

### 3.1 Определения

**Определение 27.**  $E$  – точечное пространство,  $V$  – векторное пространство,  $\dim V = 2$ . Тогда прямая – это подмножество  $l \subset E$ , если:  $\forall e \in E, \mathbf{v} \in V \setminus \{0\}$  :

$$l = \{e + \alpha \mathbf{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbf{v}$  – направляющий вектор прямой.

**Определение 28** (Параметрическое уравнение прямой).

Пусть  $e = (e_1, e_2)$        $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$

$e + t\mathbf{v} = (e_1 + tv_1, e_2 + tv_2) = (x, y)$

$\begin{cases} x = e_1 + tv_1 \\ y = e_2 + tv_2 \end{cases}$  – параметрическое уравнение прямой.

**Определение 29** (Каноническое уравнение прямой). Если выразить  $t$  из параметрического уравнения, то получим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - e_1}{v_1} = \frac{y - e_2}{v_2}$$

Если  $v_1 \vee v_2 = 0$  то  $x = e_1 \vee y = e_2$ , но  $v_1 \wedge v_2$  быть не может.

**Определение 30** (Построение прямой по точкам). Пусть  $e = (x_0, y_0)$ ,  $e_1 = (x_1, y_1)$        $e\vec{e}_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$  – направляющий вектор. Пусть  $e$  – начало, тогда уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

**Теорема 14** (Прямая в стандартных координатах). Из канонического уравнения прямой получаем:

$$x(v_2) - y(v_1) - e_1 v_2 + e_2 v_1 = 0 \Leftrightarrow \forall A, B, C : A^2 + B^2 \neq 0 : Ax + By + C = 0$$

**Доказательство.**

$$Ax + C = -By \Rightarrow \frac{x + \frac{C}{A}}{B} = \frac{y - 0}{-A}, \quad A \neq 0$$

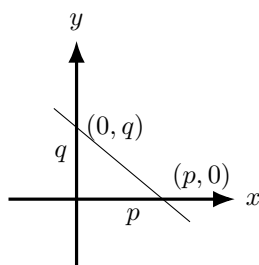
□

**Определение 31** (Уравнение в отрезках). Если  $A, B, C \neq 0$ , то

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$$p = -\frac{C}{A}, q = -\frac{C}{B}$$

$(p, 0)$  и  $(0, q)$  – подходят:



**Теорема 15.** Если  $A, B$  – коэффициенты уравнения прямой, то вектор (нормаль)  $(A, B) \perp \mathbf{v}$ .

**Доказательство.**

$$(A, B) = (v_2, -v_1) \perp (v_1, v_2), \text{ т.к. } (v_1, v_2) \cdot (v_2, -v_1) = 0$$

□

## Лекция 7: Прямые на плоскости. Плоскости в пространстве

06.11.2023

### 3.2 Угол между прямыми

**Определение 32** (Угол между прямыми). Даны прямые  $l_1, l_2$ :

$$\begin{aligned} l_1 &: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ l_2 &: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ \angle(l_1, l_2) &= \angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) \\ \cos \angle(l_1, l_2) &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\ l_1 \perp l_2 &\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \\ l_1 \parallel l_2 &\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \end{aligned}$$

**Определение 33.** (другое определение)

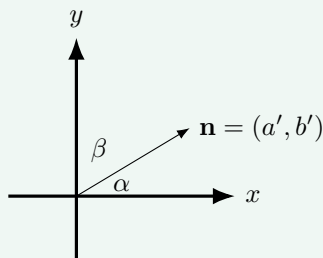
$$\begin{aligned} l_1 &: \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} & l_2 &: \frac{x - x_1}{w_1} = \frac{y - y_1}{w_2} \\ \mathbf{v} &= (v_1, v_2) & \mathbf{w} &= (w_1, w_2) \\ \cos \angle(l_1, l_2) &= \frac{v_1w_1 + v_2w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \\ l_1 \perp l_2 &\Leftrightarrow v_1w_1 + v_2w_2 = 0 \\ l_1 \parallel l_2 &\Leftrightarrow \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} \end{aligned}$$

### 3.3 Уравнение нормали

**Определение 34.**  $(a, b) = \mathbf{n}$  называется вектором нормали к прямой

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \quad | : \sqrt{a^2 + b^2} \\ a'x + b'y + c' &= 0 - \text{Нормальное уравнение прямой} \\ a'^2 + b'^2 &= 1 \quad a' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad b' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ (a', b') &- \text{единичный вектор} \end{aligned}$$

$|c'| = \left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$  – расстояние от начала координат до прямой. (?)  
 $(a', b')$  называют направляющими косинусами, т.к.



$$|\mathbf{n}| = 1 \quad a'^2 + b'^2 = 1$$

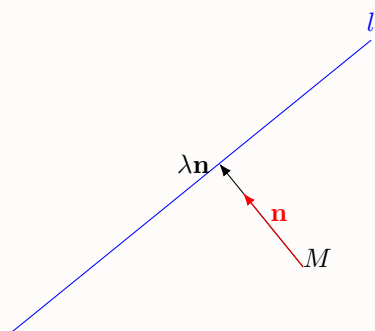
$$a' = \cos \alpha$$

$$b' = \sin \alpha = \cos \beta$$

**Теорема 16.** Насстояние от точки  $(x_1, y_1)$  до прямой  $ax + by + c = 0$  – это

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Доказательство.**  $M + \lambda \mathbf{n} \in l$  – прямая  $\mathbf{n}$  – нормаль  $(a, b)$



$$\text{dist}(M, l) = |\lambda| \cdot |\mathbf{n}| \text{ из рисунка}$$

$$M + \lambda \mathbf{n} = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b) \in l \Rightarrow a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c = 0$$

$$ax_0 + by_0 + c + \lambda(a^2 + b^2) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$\text{тогда } |\lambda| \cdot |\mathbf{n}| = \left| -\frac{(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \right| \cdot |\sqrt{a^2 + b^2}| = \left| \frac{(ax_0 + by_0 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

□

### 3.4 Уравнение прямой, проходящей через точку пересечения двух других

**Определение 35.** Есть 2 прямые:  $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$  и  $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$  и точка  $M$  – точка пересечения. Тогда  $\exists \lambda_1, \lambda_2$  :

$$l_3 : \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \text{ прямая, проходящая через } M$$

Эта прямая проходит через  $M$ , т.к. при подстановке координат  $M$  в уравнение, первое и второе слагаемые обращаются в 0.



## Глава 4

# Плоскости в пространстве

### 4.1 Уравнение плоскости

$\dim V = 3$

**Определение 36** (Плоскость по 3 точкам). Пусть  $e_1, e_2, e_3 \in E$ ,  $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{e_1 e_2}$ ;  $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{e_1 e_3}$   
Плоскость – множество точек  $\{e_1 + \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

**Определение 37.** Плоскость – множество решений линейного уравнения:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

**Теорема 17.** Определение 1 равносильно определению 2.

**Теорема 18.**  $(A, B, C) = \mathbf{n} \perp$  плоскости

**Доказательство.**

$$\begin{array}{llll} e_1 = (x_0, y_0, z_0) \\ \mathbf{n} \perp \mathbf{v}_1 & \mathbf{n} \perp \mathbf{v}_2 & \mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 & \mathbf{n} = (A, B, C) \end{array}$$

$D$  такое число, что

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0)$$

$$\begin{array}{r} Ax + By + Cz + D = 0 \\ - \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ \hline A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \end{array}$$

$$(A; B; C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$$

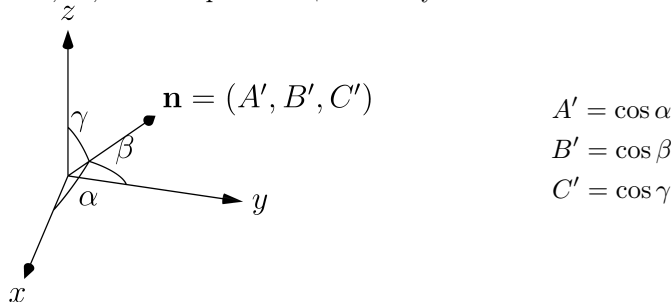
$$(x, y, z) = e_1 + \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$$

□

**Определение 38** (Нормальное уравнение плоскости).

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 \quad | : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \neq 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1 \end{aligned}$$

$A', B', C'$  – направляющие косинусы



**Теорема 19.** (доказательство аналогично прямой на плоскости) Пусть  $Ax + By + Cz + D = 0$  – плоскость, а  $(x_0, y_0, z_0)$  – точка, тогда расстояние от точки до плоскости:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

**Определение 39** (Уравнение плоскости в отрезках).

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

$p, q, r$  – отрезки отсекаемые плоскостью на  $OX, OY, OZ$

## 4.2 Угол между плоскостями

**Определение 40** (Угол между плоскостями).

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 = \alpha_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 = \alpha_2 \\ \cos \angle(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \\ \alpha_1 \perp \alpha_2 : A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \\ \alpha_1 \parallel \alpha_2 : \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \end{aligned}$$

### 4.3 Плоскость через прямую пересечения двух плоскостей

**Определение 41.**

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\alpha_3 : \lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

### 4.4 Плоскость через точку пересечения трех плоскостей

**Определение 42.**

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\alpha_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

$$\alpha_4 : \lambda_1(A_1x + \dots + D_1) + \lambda_2(A_2x + \dots + D_2) + \lambda_3(A_3x + \dots + D_3) = 0$$

## Глава 5

# Прямая в пространстве

### 5.1 Уравнение прямой

**Определение 43.** Прямая – пересечение двух не параллельных плоскостей.

**Определение 44** (Каноническое уравнение прямой в пространстве). Если есть  $(x_0, y_0, z_0)$  и  $(x_1, y_1, z_1)$ , то прямая через эти точки задается уравнением:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

**Определение 45** (Каноническое уравнение прямой в пространстве). Если есть 2 уравнения плоскости, то прямая задается как

$$\begin{aligned} & \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \\ & \mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \quad \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \\ & \mathbf{v} \perp \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \\ & \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ & \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} \end{aligned}$$

**Определение 46.**  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  – направляющий вектор

**Определение 47** (Параметрическое уравнение прямой в пространстве).

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_1t \\ y = y_0 + v_2t \\ z = z_0 + v_3t \end{cases}$$

**Теорема 20.** Любая прямая – прямая пересечения двух непараллельных плоскостей, и наоборот.

**Доказательство.**

$\Rightarrow$ : каноническое уравнение:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} & \text{— ПЛОСКОСТЬ} \\ \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} & \text{— ПЛОСКОСТЬ} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ : пусть есть 2 плоскости:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_1z \\ y = y_0 + v_2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

□

## Лекция 8: Прямые в пространстве. Эллипс.

13.11.2023

**Определение 48** (Уравнение прямой через 2 точки). Пусть есть точки  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$ , тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_1} = \frac{y-y_0}{y_2-y_1} = \frac{z-z_0}{z_2-z_1}$$

т.к.  $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$  – направляющий вектор.

## 5.2 Угол между прямыми

**Определение 49** (Угол между прямыми в пространстве).

$$l_1 : \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

$$l_2 : \frac{x-x_1}{w_1} = \frac{y-y_1}{w_2} = \frac{z-z_1}{w_3}$$

$$\cos \angle(l_1, l_2) = \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}$$

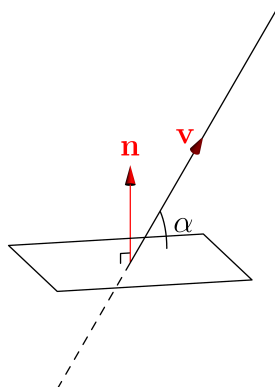
$$l_1 \perp l_2 : v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0$$

$$l_1 \parallel l_2 : \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$$

Угол между прямой и плоскостью:

$$l_1 : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$



$$\sin \theta = \cos \angle(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \frac{Av_1 + Bv_2 + Cv_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

$$\alpha \parallel l_1 : Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$$

$$\alpha \perp l_1 : \frac{A}{v_1} = \frac{B}{v_2} = \frac{C}{v_3}$$

**Теорема 21.**  $l_1, l_2$  – пересекаются в одной точке или параллельны

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

**Доказательство.**  $l_1$  и  $l_2$  – в одной плоскости, только если  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  и  $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$  в одной плоскости, это равносильно тому, что их смешанное произведение равно 0.  $\square$

## Глава 6

# Кривые второго порядка

### 6.1 Эллипс

**Определение 50** (Стандартный вид прямой II порядка).

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + b_3 = 0$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$$

**Определение 51.** Эллипс — кривая, которая в подходящих координатах задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Определение 52.** Пусть  $F_1, F_2$  — точки (фокусы), если  $F_1F_2 = 2c < 2a$ , тогда ГМТ  $M$  :

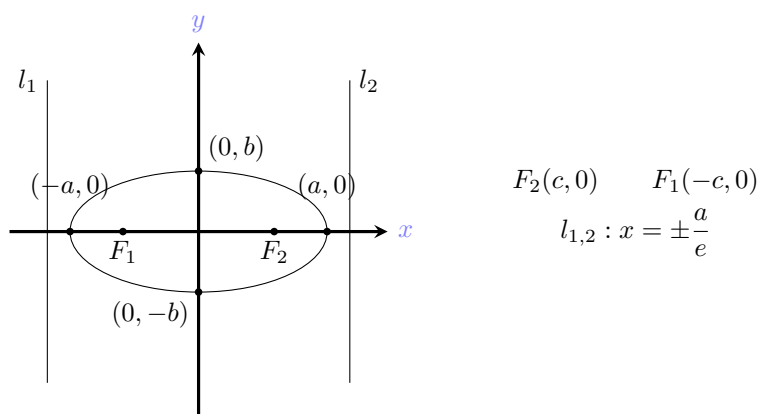
$$F_1M + F_2M = 2a$$

называется эллипсом.

**Определение 53.**  $F_1$  — фокус,  $l_1$  — прямая (директриса). ГМТ  $M$ :

$$\frac{\text{dist}(F_1, M)}{\text{dist}(l_1, M)} = e < 1$$

называется эллипсом.



- $a$  – большая полуось
- $b$  – малая полуось (по умолчанию  $a \geq b$ )
- $c$  – фокальный параметр

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- $e = \frac{c}{a} \in [0, 1)$  – эксцентриситет

### Доказательство

- В определении 51 задано  $a, b \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}, e = \frac{c}{a}$
- В определении 52 задано  $a, c \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}, e = \frac{c}{a}$
- В определении 53 задано  $d$  расстояние от фокуса до директрисы. Хотим  $F(c, 0); l : x = \frac{a}{e}$

$$d = \frac{a}{e} - c = \frac{a}{e} - ae = a \left( \frac{1}{e} - e \right)$$

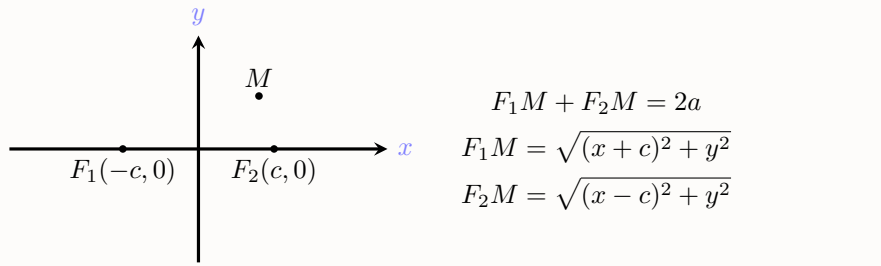
$$a = \frac{d}{\frac{1}{e} - e}$$

$$c = ae; b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

**Теорема 22.** Определения 51, 52 и 53 равносильны.

**Доказательство.** Докажем, что 51 и 52 равносильны:





$$\begin{aligned} F_1M + F_2M &= 2a \\ F_1M &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ F_2M &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4cx \quad | : 4a \end{aligned}$$

Расстояние от точки на эллипсе до фокуса

$$\begin{aligned} \boxed{\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - ex} \quad & \boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + ex} \\ (x-c)^2 + y^2 &= a^2 - 2aex + e^2x^2 \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= a^2 - 2aex + e^2x^2 \\ x^2(1-e^2) + y^2 &= a^2 - c^2 = b^2 \\ x^2 \frac{1-e^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

Нужно доказать, что:

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{1-e^2} &= a^2 \\ b^2 &= a^2 - a^2e^2 \quad a^2e^2 = c^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \quad \square$$

**Доказательство.** Докажем, что 51 и 53 равносильны:

$$\begin{aligned} l: x &= \frac{a}{e} \quad \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a}{e} - x} = e \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= e \left( \frac{a}{e} - x \right) = a - ex \end{aligned}$$

Далее смотри равносильность 51 и 52. □

**Теорема 23.** Прямая  $Ax + By + C = 0$  касается эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$$

**Доказательство.** Касательная имеет 1 точку пересечения с эллипсом

$$\begin{aligned}
 B \neq 0 \quad y &= \frac{-C - Ax}{B} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{C+Ax}{B}\right)^2}{b^2} = 1 \\
 x^2 b^2 B^2 + a^2 C^2 + a^2 A^2 x^2 + 2a^2 ACx &= a^2 b^2 B^2 \\
 x^2(a^2 A^2 + b^2 B^2) + 2a^2 ACx + (a^2 C^2 - a^2 b^2 B^2) &= 0
 \end{aligned}$$

Это уравнение имеет ровно 1 корень

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{4} = 0 \quad a^4 A^2 C^2 - (a^2 C^2 - a^2 b^2 B^2)(a^2 A^2 + b^2 B^2) &= 0 \\
 a^2 A^2 C^2 - (C^2 - b^2 B^2)(a^2 A^2 + b^2 B^2) &= 0 \\
 a^2 A^2 C^2 - a^2 A^2 C^2 - b^2 B^2 C^2 + a^2 b^2 A^2 B^2 + b^4 B^4 &= 0 \\
 a^2 b^2 A^2 B^2 + b^4 B^4 &= b^2 B^2 C^2 \\
 a^2 A^2 + b^2 B^2 &= C^2
 \end{aligned}$$

□