Оглавление

Лекция 2: Бинарные отношения

15.09.2023

0.1 Бинарные отношения

Определение 1. Бинарноным отношением между множествами X и Y называют подмножество $X \times Y$

Обозначение. Пусть задано $w \subset X \times Y$. Тогда, условие $(x, y) \in w$ записывается как XwY

Обозначение. Если X = Y, то говорят, что w - отношение на X.

Доказательство. Пусть g_1, g_2 - отображения к R.

$q_1 \neq q_2$

$\exists g : g, (g) \neq g = (g)$

$x_i = y_1(y), x_2 := g_2(y)$

$f(x_1) = f(g_1(y)) = g = f(g_2(y)) = f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2)$

$x_1 \neq x_2$ □

Пример.

1. $f(x) = 2x$

   xwy, если $g = f(x)$

2. xwy, если $x^2 = y$

Определение 2. Бинарное отношения w на X называется

1. Рефлексивным, если xwy и ywz
2. Симметричным, если из того что xwy и ywz следует, что xwf

Пример. 1. $=, \leq$ - рефлексивное

$<$, параллельно на множестве прямых - не рефлексивно

2. $=, ||$ - симметрично

$leq, <$ - не симметрично

3. $=, <, \vdots$ - транзитивно

$\perp$ - на множестве прямх - не транзитивно

Определение 3. Бинарное отношение на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Обозначение. Обычно обозначается $\sim$.

Пример. 1. $=$ на $\mathbb{R}$

2. Множество $\mathbb{Z}$ $a \sim b$, если $a - b \vdots 5$

Обозначение. $\overset{\equiv}{5}$

3. Множество проямых на плоскости $l_1 \sim l_2$, если $l_2 || l_2'$, если $L_1 = l_2$

4. Пусть множество - это множество направленных отрезков $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, если $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$, $AB||CD$.

5. $f(x), g(x)$ - функции $f \sim g$, если $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{f(y)} = 1$

Определение 4. Пусть на X задано отношение эквивалентности. Классом эквивалентности x называется множество элементов $\{y \in X | y \sim X\}$.

Обозначение. $\overline{x}$, $[x]$, $((x)$

Примечание. Черта над x должна быть немного загнута вниз слева. Также первый вариант обозначения является основным.

Пример. $R, x \sim y, x - y \in \mathbb{Z}$

$x = 0,1$

0,1; 1,1;$-0.9 \in \overline{x}$

$\overline{x} = \{y | \{y\} = \{x\}\}$

Пример. $1,1 \in \overline{0,1}$
$0,1 \in \overline{1,1}$
{y} = 0, 1

5 классов эквивалентности:
5k
5k + 1
5k + 2
5k + 3
5k + 4

Теорема 1. (Разбиение на классы жкивалентности) На множестве X задано отношение эквивалентности . Тогда, множество X разбивается на классы эквивалентности, т.е. X является обьединением не пересекающихся подмножеств, каждое из которых является классом эквивалентности некоторого элемента.

Пример.

1. $\overline{\overline{\overline{5}}}$

   $a \sim b$, если $a - b \vdots 5$

2. = в каждом классе 1 элемент

3. Направленные отрезки $overline AB \sim \overline{CD}$, если $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$, $AB \upuparrows CD$

   Класс эквивалентности - вектор.

4. R $a \sim b$, если $\alpha - \beta = 2\pi\kappa$

Доказательство.

1. Докажем, что любой элемент X принадлежит некоторому классу эквивалентности.

   $X \in \overline{X}$, т.к. $\sim$???, X x

2. Докажем, что классы не пересекаются

   т.е. докажем, что если $\exists z \in \overline{x} \cap \overline{y}$, то $\overline{x} = \overline{y}$

   $z \in x => z \sim x =>$ (симм) $x \sim z$

   $z \in \overline{y} =>$ z Y

   x z, z y => (тр) x y $=> x \in y => x \in \overline{y}$

   аналогично $y \in \overline{x}$

$x = \overline{y}$
Докажем, что $\overline{x} \subset y$
Пусть $\exists f \in \overline{x} => f \sim x$
$f \sim x, x = y => f \sim y$
Аналогично $\overline{y} \subset \overline{x}$
$\overline{x} = \overline{y}$ □

0.2 Множество с алгебраическими операциями

Определение 5. X - множество бинарныой алгебраической операции на X Назвается отображением $X \times X \to X$

Обозначение.

1. Буква, например $f : X \times X \to X$ пишут $f(x, y)$ или xfy
2. Спец. символ: $+$, $\cdot$, 0, * Пишут x + y, x * y

   часто вместо $x \cdot y$, x * y пишут xy

Пример.

1. $X = \mathbb{Z}$

   Определить $+$, $\cdot$, -
2. X - множество отображений $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

   операция - композиция.
3. X - множество векторов

Обозначение. Множество X с операцией V обозначается (V, *)

Определение 6. Бинарная операция * на X Назвается

1. Ассоциативной, если $(x * y * z) = x * (y * z) \forall x, y, z$
2. Коммутативной, если $x * y = y * x \forall x, y$

Пример.

1. $+$, $\cdot$ - коммутативные, ассоциативные

   X : y на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не ассоциативно, не коммутативно

   x - y на $\mathbb{R}$

   x - векторное произведение
2. ассоциативны, не коммутативны o - композиция для отображения $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Обозначение. Пусть * - ассоциативно
Тогда пишут a * b * c, a * b * c * d
Используют обозначение степени, например a^4 = a * a * a * a
Если операция обозначается $+$, пишут
$4a = a + a + a + a$

Пример.

1. (Z, $\cdot$) e = 1
2. (Z, $+$) e = 0

3. (2Z, $\cdot$) нет ? элемента, множества четных чисел

Замечание. Если операция обозначается $+$, то нейтральный элемент обозначается 0.

Свойство. (единственности единичного элемента)

На x Задана операция *. Тогда существует не более одного единичного элемента.

Доказательство. Пусть e_1, e_2 - единичные, т.е.

$\forall_x\ e_1 + x = x, x + e_1 = x\ e_2 * x = x, x * e_2 = x$

$e_2 =$(ед. эл.)$e_1 * e_2 =$(ед.эл.)$e_1 => e_1 = e_2$

□

Определение 7. Полугруппой называется множество с заданной на нем бинарной ассоциативной операцией.

Определение 8. Моноидом называется полугруппа, в которой есть нейтральный элемент

Пример.

1. ($\mathbb{Z}$, $+$) - моноид
2. (Z, $\cdot$) - моноид
3. (2$\mathbb{Z}$, $\cdot$) - полугруппа, не моноид
4. ($\mathbb{Z}$, -) - вектор $\subset x$ - не полугруппа

0.3 Группы

Определение 9. Множество G с бинарной операцией * называется группой, если выполнены следующие условия.

1. Операция * ассоциативна, т.е. (a * e) * c = a * (b * c) $\forall a, b, c$
2. $\exists$ единица $e : a * e = e * a = a \forall a$
3. $\forall a \exists$ Обратный элемент a' $\in G$ такой, что $a * a^-1 = a^-1 * a = e$

Обозначение. Если операция обозначается -1, то единичные жлементы обозначаются о, а обратный элемент a обозначается -a.

Определение 10. Пусть (G, *) - группа, если * коммутативна, то группа G называется коммутативной или абелевой.