

Оглавление

0.1	Смешанное произведение	1
0.2	Свойства смешанного произведения	1
1	Аффинное (точечное) пространство	3
1.1	Определение	3
2	Прямые на плоскости	5
2.1	Определения	5

Лекция 6: Смешанное произведение. Аффинное пространство

30.10.2023

0.1 Смешанное произведение

Определение 1. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы в \mathbb{R}^3

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c})$ – смешанное произведение

Геометрический смысл: $\pm V_{\text{параллелепипеда}}$

Доказательство.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \alpha = S_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} |\mathbf{c}| \cos \alpha = \pm V_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}}$$

□

В координатах:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c}) = (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1)(c_1, c_2, c_3) =$$
$$a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

0.2 Свойства смешанного произведения

(по свойствам определителей)

1. $(\mathbf{e} + \mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{e}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ для каждого аргумента
2. $(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \alpha \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha \mathbf{c}) = \alpha (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$

3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} - \text{ЛЗ}$
4. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$
5. Знак смешанного произведения – ориентация тройки.

Глава 1

Аффинное (точечное) пространство

1.1 Определение

Определение 2. V – векторное пространство, E – множество. Назовем E точечным (аффинным) пространством, если определена операция $+: E \times V \rightarrow E$, т.е. $(e; \mathbf{v}) \mapsto (e + \mathbf{v})$ со свойствами:

1. $(e + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = e + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$
2. $e + 0 = e$
3. $\forall e_1, e_2 \in E \exists! \mathbf{v} \in V : e_2 = e_1 + \mathbf{v}$

Такой вектор будем обозначать $\mathbf{v} = \overrightarrow{e_1 e_2}$

Определение 3 (Построение точек). Если в V есть базис $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ и мы зафиксируем $e_0 \in E \Rightarrow \forall e \in E \exists! \mathbf{w} : e_0 + \mathbf{w} = e$, при этом: $\exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n : \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \Rightarrow e = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – координаты e .

Если имеем $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n$, то: $e + \mathbf{v} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$

Определение 4 (Расстояние). Пусть e_0 – начало координат, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ – ОНБ. $e_1 = e_0 + \mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, $e_2 = e_0 + \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$

$$\text{dist}(e_1, e_2) = |\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1| = \sqrt{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1)}$$

Определение 5 (Преобразование начала координат). (Если хотим перейти от начала координат e_0 к e'_0)

Есть базис $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ и вектор $e'_0 - e_0 = \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$. И пусть точка $e = (e_1, \dots, e_n)$ – координаты с началом e_0 и $e = (e'_1, \dots, e'_n)$ –

координаты с началом в e'_0 . Тогда:

$$e = e_0 + e_1 \mathbf{v}_1 + \dots + e_n \mathbf{v}_n$$

$$e'_0 = e_0 + e_1 \mathbf{w}_1 + \dots + e_n \mathbf{w}_n \Leftrightarrow e_0 = e'_0 - \mathbf{w}_1 \mathbf{v}_1 - \dots - \mathbf{w}_n \mathbf{v}_n$$

Упражнение: почему равносильно?

$$\text{Имеем } e = e'_0 + (e_1 - \mathbf{w}_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (e_n - \mathbf{w}_n) \mathbf{v}_n$$

$$\text{Значит } (e'_1, \dots, e'_n) = (e_1 - \mathbf{w}_1, \dots, e_n - \mathbf{w}_n)$$

Глава 2

Прямые на плоскости

2.1 Определения

Определение 6. E – точечное пространство, V – векторное пространство, $\dim V = 2$. Тогда прямая – это подмножество $l \subset E$, если: $\forall e \in E, \mathbf{v} \in V \setminus \{0\}$:

$$l = \{e + \alpha \mathbf{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

\mathbf{v} – направляющий вектор прямой.

Определение 7 (Параметрическое уравнение прямой).

Пусть $e = (e_1, e_2)$ $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$

$e + t\mathbf{v} = (e_1 + tv_1, e_2 + tv_2) = (x, y)$

$\begin{cases} x = e_1 + tv_1 \\ y = e_2 + tv_2 \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой.

Определение 8 (Каноническое уравнение прямой). Если выразить t из параметрического уравнения, то получим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - e_1}{v_1} = \frac{y - e_2}{v_2}$$

Если $v_1 \vee v_2 = 0$ то $x = e_1 \vee y = e_2$, но $v_1 \wedge v_2$ быть не может.

Определение 9 (Построение прямой по точкам). Пусть $e = (x_0, y_0)$, $e_1 = (x_1, y_1)$ $e\vec{e}_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ – направляющий вектор. Пусть e – начало, тогда уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Теорема 1 (Прямая в стандартных координатах). Из канонического уравнения прямой получаем:

$$x(v_2) - y(v_1) - e_1 v_2 + e_2 v_1 = 0 \Leftrightarrow \forall A, B, C : A^2 + B^2 \neq 0 : Ax + By + C = 0$$

Доказательство.

$$Ax + C = -By \Rightarrow \frac{x + \frac{C}{A}}{B} = \frac{y - 0}{-A}, \quad A \neq 0$$

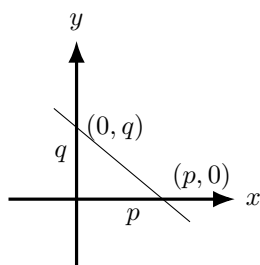
□

Определение 10 (Уравнение в отрезках). Если $A, B, C \neq 0$, то

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$$p = -\frac{C}{A}, q = -\frac{C}{B}$$

$(p, 0)$ и $(0, q)$ — подходят:



Теорема 2. Если A, B — коэффициенты уравнения прямой, то вектор (нормаль) $(A, B) \perp \mathbf{v}$.

Доказательство.

$$(A, B) = (v_2, -v_1) \perp (v_1, v_2), \text{ т.к. } (v_1, v_2) \cdot (v_2, -v_1) = 0$$

□