Оглавление

Лекция 7: Прямые на плоскости. Плоскости в пространстве

06.11.2023

0.1 Угол между прямыми

Определение 1 (Угол между прямыми). Даны прямые l_1, l_2:

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$\angle(l_1, l_2) = \angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$$
$$\cos\angle(l_1, l_2) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$
$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Определение 2. (другое определение)

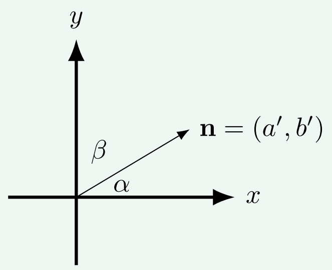
$$l_1 : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} \qquad l_2 : \frac{x - x_1}{w_1} = \frac{y - y_1}{w_2}$$
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \qquad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$
$$\cos \angle(l_1, l_2) = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}$$
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$$
$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2}$$

0.2 Уравнение нормали

Определение 3. $(a, b) = \mathbf{n}$ называется вектором нормали к прямой

$$ax + by + c = 0 \qquad | : \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a'x + b'y + c' = 0 \text{ – Нормальное уравнение прямой}$$
$$a'^2 + b'^2 = 1 \qquad a' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad b' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$(a', b') \text{ – единичный вектор}$$

$|c'| = |\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}|$ – расстояние от начала координат до прямой. (?)
(a', b') называют направляющими косинусами, т.к.

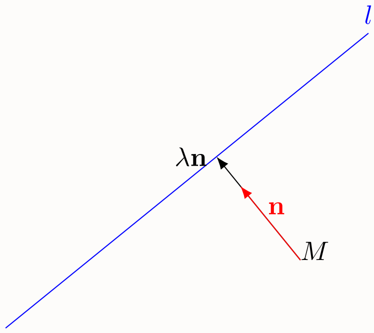


$$|\mathbf{n}| = 1 \qquad a'^2 + b'^2 = 1$$
$$a' = \cos \alpha$$
$$b' = \sin \alpha = \cos \beta$$

Теорема 1. Насстояние от точки (x_1, y_1) до прямой $ax + by + c = 0$ – это

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Доказательство. $M + \lambda\mathbf{n} \in l$ – прямая $\mathbf{n}$ – нормаль (a, b)



$$\text{dist}(M, l) = |\lambda| \cdot |\mathbf{n}| \text{ из рисунка}$$

$$M + \lambda\mathbf{n} = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b) \in l \Rightarrow a(x_0\lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c = 0$$

$$ax_0 + by_0 + c + \lambda(a^2 + b^2) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{(ax_0 + by_o + c)}{a^2 + b^2}$$

$$\text{тогда } |\lambda| \cdot |\mathbf{n}| = |-\frac{(ax_0 + by_o + c)}{a^2 + b^2}| \cdot |\sqrt{a^2 + b^2}| = |\frac{(ax_0 + by_o + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}}|$$

$\square$

0.3 Уравнение прямой, проходящей через точку пересечения двух других

Определение 4. Есть 2 прямые: $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ и точка M – точка пересечения. Тогда $\exists \lambda_1, \lambda_2$:

$$l_3 : \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \text{ прямая, проходящая через M}$$

Эта прямая проходит через M, т.к. при подстановке координат M в уравнение, первое и второе слагаемые обращаются в 0.

Глава 1

Плоскости в пространстве

1.1 Уравнение плоскости

$\dim V = 3$

Определение 5 (Плоскость по 3 точкам). Пусть $e_1, e_2, e_3 \in E$, $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{e_1 e_2}; \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{e_1 e_3}$

Плоскость – множество точек $\{e_1 + \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Определение 6. Плоскость – множество решений линейного уравнения:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Теорема 2. Определение 1 равносильно определению 2.

Теорема 3. $(A, B, C) = \mathbf{n} \perp$ плоскости

Доказательство.

$$e_1 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\mathbf{n} \perp \mathbf{v}_1 \qquad \mathbf{n} \perp \mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{n} = (A, B, C)$$

D такое число, что

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \qquad (D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0)$$

$$- \begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{array}$$

$$\overline{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

$$(A; B; C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$$

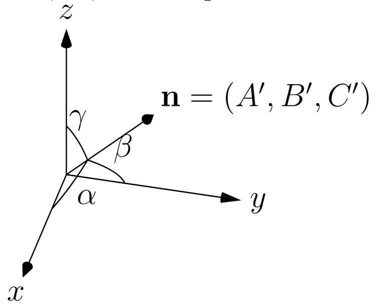
$$(x, y, z) = e_1 + \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$$

□

Определение 7 (Нормальное уравнение плоскости).

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad |: \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \neq 0$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$
$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1$$

A', B', C' – направляющие косинусы



$$A' = \cos\alpha$$
$$B' = \cos\beta$$
$$C' = \cos\gamma$$

Теорема 4. (доказательство аналогично прямой на плоскости) Пусть $Ax+By+Cz+D = 0$ – плоскость, а (x_0, y_0, z_0) – точка, тогда расстояние от точки до плоскости:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Определение 8 (Уравнение плоскости в отрезках).

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

p, q, r – отрезки высекаемые плоскостью на OX, OY, OZ

1.2 Угол между плоскостями

Определение 9 (Угол между плоскостями).

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 = \alpha_1$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 = \alpha_2$$
$$\cos\angle(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$
$$\alpha_1 \perp \alpha_2 : A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$
$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 : \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

1.3 Плоскость через прямую пересечения двух плоскостей

Определение 10.

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$\alpha_3 : \lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

1.4 Плоскость через точку пересечения трех плоскостей

Определение 11.

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$\alpha_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$
$$\alpha_4 : \lambda_1(A_1x + \ldots + D_1) + \lambda_2(A_2x + \ldots + D_2) + \lambda_3(A_3x + \ldots + D_3) = 0$$

Глава 2

Прямая в пространстве

2.1 Уравнение прямой

Определение 12. Прямая – пересечение двух не параллельных плоскостей.

Определение 13 (Каноническое уравнение прямой в пространстве)**.** Если есть (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1), то прямая через эти точки задается уравнением:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Определение 14 (Каноническое уравнение прямой в пространстве)**.** Если есть 2 уравнения плоскости, то прямая задается как

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \qquad \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{n}_1 \qquad \mathbf{v} \perp \mathbf{n}_2 \qquad \mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Определение 15. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – направляющий вектор

Определение 16 (Параметрическое уравнение прямой в пространстве)**.**

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_1t \\ y = y_0 + v_2t \\ z = z_0 + v_3t \end{cases}$$

Теорема 5. Любая прямая – прямая пересечения двух непараллельных плоскостей, и наоборот.

Доказательство.

$\Rightarrow$: каноническое уравнение:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} \text{ – плоскость} \\ \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \text{ – плоскость} \end{cases}$$

$\Leftarrow$: пусть есть 2 плоскости:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_1z \\ y = y_0 + v_2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

□