Teoría de Números 5

Temas

Ejercicios

Problema 1

> Demuestre o refute
>
> - $37621 + 2^{30} + 471 + 59603 * 25$ es divisible por 12
> - $375121 * 4^{105} - 35^{91}$ es primo relativo con 6 y el número $9^{1684} - 7^{52688}$ es divisible por 10
> - $2^{70} + 3^{70}$ es divisible por 13
> - 3^{47} deja resto 4 cuando se divide por 23

Solución

Problema 2

> Prueba que es finita la cantidad de números k tal que $\sum_{k=1}^{\infty} k!$ es un cuadrado perfecto.

Solución

Sea $S(t) = \sum_{k=1}^{t}$. Nótese que para los siguientes casos:

- $S(1) = 1$ cumple
- $S(2) = 3$ no cumple
- $S(3) = 9$ cumple
- $S(4) = 33$ no cumple
- $S(5) = 153$ no cumple
- $S(6) = 873$ tampoco

Para $t \geq 7$ tenemos que los terminos $i!$ en la sumatoria a partir de 7! serán divisibles entre 7, entonces la congruencia de $S(t)$ módulo 7 no va a variar. Como los cuadrados perfectos solo dejan resto 1, 4, 2 , 0 módulo 7 y $S(6)$ deja resto 5, se cumple que para $t > 6$ no existe t tal que $S(t)$ sea un cuadrado perfecto.

Problema 3

> Prueba que las siguientes ecuaciones no tienen solución:
>
> - $3x^2 + 5 + 9xy = y^2$
> - $x^4 - 5x^3 + 30x^2 = 18$
> - $x^2 + y^2 - 8z = 6$

Solución

1. $$3x^2 + 5 + 9xy = y^2$$

La ecuación puede transformarse en $3x(x + 3y) = y^2 - 5$. Nótese que $3x(x + 3y) \equiv 0 \ mod(3)$, por tanto $y^2 - 5 \equiv 0 \ mod(3) \implies y^2 \equiv 5 \ mod(3) \implies y^2 \equiv -1 \ mod(3)$ lo cual es imposible porque los cuadrados son congruentes con 0 o 1 módulo 3.

2. $$x^4 - 5x^3 + 30x^2 = 18$$

La ecuacion puede transformarse en $x^2(x^2 - 5x + 30) = 18$. Nótese que $18 \equiv 3 \ mod(5)$ y como todo cuadrado es congruente con 0, 1 0 -1 módulo 5 entonces $x^2(x^2 - 5x + 30) \equiv x^2(x^2) \ mod(5)$ y $x^4 \equiv 0, 1 \ mod(5)$ lo cual genera una contradicción.

3. $$x^2 + y^2 - 8z = 6$$

Esta ecuacion no es necesario ni transformarla, $6 \equiv 6 \ mod(8)$, $8z \equiv 0 \ mod(8)$ y como los cuadrados son congruentes con 0,1,4 módulo 8 entonces $x^2 + y^2 \equiv 0, 2 \ mod(8)$ contradicción.

Problema 4

> Demuestre que dados 3 números cualesquiera enteros siempre es posible seleccionar dos tal que $a^3 * b - a * b^3$ es divisible por 10.

Solución

Nótese que $a^3 * b - a * b^3 = ab(a^2 - b^2)$, y que cualquier número $x^2 \equiv 0, 1, -1$ $mod(5)$. Hagamos el siguiente análisis:

- Para que sea divisible entre 10 debe ser divisible por 2 y 5 simultáneamente, y la expresión $ab(a^2 - b^2)$ es evidente que para cualquier a, b es par (supongamos que al menos uno de los dos en par $\implies$ el producto es par, en caso contrario, ambos son impares $\implies$ su diferencia es par).
- Si tomamos como uno de los tres números a seleccionar $x \equiv 0\ mod(5)$ es trivial que el resultado será divisile por 5, luego, seleccionando los otros 2 restos distintos de cero para los cuadrados de los números tenemos las posibilidades 1,-1 para tres números, de los cuales por Principio de las Casillas dos tendrán el mismo resto y su diferencia será cero módulo 5, lo cual demuestra la orden del ejercicio.

Problema 5

> Un número es de Fermat si es $2^{2^n} + 1$ para todo $n \geq 0$.
>
> - Prueba que todos los números de Fermat son primos relativos dos a dos.
> - Prueba que hay infinitos primos con esta demostración. *

Solución

Tenemos los números $2^{2^r} + 1$ y $2^{2^s} + 1$. Supongamos que existe un número p que divide a ambos, entonces $2^{2^r} \equiv -1\ mod(p)$, sin pérdida de generalidad $s > r$, luego al elevar 2^{2^r} al cuadrado $s - r$ veces resulta que $2^{2^s} \equiv 1\ mod(p)$, lo cual es una contradicción porque $2^{2^s} \equiv -1\ mod(p)$, en cuyo caso p debería ser 2, lo cual es absurdo.

Problema 6

> Halla a, b, c tal que $2^a + 2^b = c!$

Solución

Nótese que $2^a + 2^b = 2^b(2^{b_1} + 1)$ suponiendo que $a = b + b_1$ con $b_1 > 0$, o sea $a > b$, luego para $c \geq 7$ tenemos que $c! \equiv 0 \; mod(7)$ y cualquier potencia de 2 es congruente con 1,2,4 módulo 7, luego no existe ninguna distribucion de esos restos que cumpla que $2^b(2_1^b + 1) \equiv 0 \; mod(7)$. Para $c < 7$ probando llegamos a que son soluciones $(0, 0, 2)$, $(1, 2, 3)$ y $(4, 3, 4)$