Combinatoria 5

Temas:

1. **Recurrencia lineal homogénea**
2. **Recurrencia lineal no homogénea**

Recurrencia homogénea

Se dice que una recurrencia lineal es homogénea de orden k si existen $c_1, c_2, \ldots c_k \in \mathrm{R}$ y valores iniciales para $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tal que $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$

Analicemos con orden 2 la receta para a partir de una fórmula de recurrencia hallar su forma cerrada, luego esto se puede hacer para orden k.

Ecuación característica

Sea $q = 0 \in \mathrm{R}$. La sucesión q^n satisface la recurrencia $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \iff q$ es raíz de $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ la cual es conocida como ecuación característica de la recurrencia.

`Por qué funciona?`

Si evaluamos q^n en la recurrencia tenemos que $q^n = c_1 q^{n-1} + c_2 q^{n-2}$, luego, al dividir por q^{n-2} y llevar todo al miembro izquierdo resulta en $q^2 - c_1 q - c_2 = 0$ lo cual q cumple por ser solución de la ecuación característica.

Generar infinitas soluciones

Si q y p son soluciones de la recurrencia $\implies Aq + Bp$ es solución para cualquier $A, B \in R$, lo cual simpre genera una solución y genera infinitas soluciones, pero, serán todas?

Todas las soluciones son generadas

Vamos a probar que toda solución de la recurrencia puede ser expresada como combinación lineal de las soluciones de la ecuación característica si q y p

$$\begin{aligned} Aq + Bp &= a_1 \\ Aq^2 + Bp^2 &= a_2 \end{aligned}$$

Para que este sistema tenga solución el siguiente determinante debe ser distinto de cero, lo cual se cumple porque $q = p$

$$\begin{vmatrix} q & p \\ q^2 & p^2 \end{vmatrix} = 0$$

Pero que ocurriría si la solución de la ecuación característica es doble? En ese caso una solución es q^n y otra es nq^n. Vamos a probar que esta última es solución evaluando en la recurrencia, por Vietta tenemos que se cumple lo siguiente:

$$x^2 - c_1x - c_2 = 0$$

Como q es raíz doble entonces:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = c_1 = 2q \\ -x_1x_2 = c_2 = -q^2 \end{aligned}$$

Y por tanto, al evaluar en la recurrencia resulta:

$$nq^n = 2q(n-1)q^{n-1} - q^2(n-2)q^{n-2}$$

Lo cual al realizar las multiplicaciones y reducir términos semejantes resulta en la igualdad.

Vamos a probar que toda solución de la recurrencia puede ser expresada como combinación lineal de las soluciones q^n y nq^n

$$\begin{aligned} Aq + Bq &= a_1 \\ Aq^2 + B2q^2 &= a_2 \end{aligned}$$

Para que este sistema tenga solución el siguiente determinante debe ser distinto de cero, lo cual se cumple porque $q = 0$

$$\begin{vmatrix} q & p \\ q^2 & 2q^2 \end{vmatrix} = q^3 = 0$$

Forma genérica

Sea la relación de recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

Cuya ecuación característica es:

$$x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

Si esta tiene k reíces distintas la solución es de la forma:

$$A_1 q_1^n + A_2 q_2^n + \cdots + A_k q_k^n$$

Si existe una raíz q_r con multiplicidad t entonces esta produce las soluciones $q_r^n, nq_r^n, n^2 q_r^n, \ldots, n^{t-1} q_r^n$

Recurrencia no homogénea

Sea P_n una solución particular de la recurrencia $a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n)$ entonces la solución general es $P_n + H_n$ donde H_n es una solución de la homogénea.

Si el término no homogéneo de la recurrencia es de la forma $p(n)s^n$ donde $p(n)$ es un polinomio de grado r y s es constante hay que analizar los siguientes casos:

1. Si s no es raíz de la ecuación característica hay una solución $q(n)s^n$ donde $q(n)$ tiene a lo sumo grado r, el cual, comienza genérico y se obtiene el valor de los coeficientes evaluándolo en la recurrencia, reduciendo términos semejantes e igualándolos.
2. Si s es raíz de multiplicidad t hay una solución $n^t q(n)s^n$ donde q tiene grado a lo sumo r, aplicando luego el mismo procedimiento que el caso anterior.

Si el término no homogéneo de la recurrencia es de la forma $p_1(n)s_1^n + \cdots p_m(n)s_m^n$ entonces hay una solución particular de la forma $f_1(n) + \cdots + f_m(n)$ donde $f_i(n)$ es una solución particular de $a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} + P_i(n)s_i^n$

Ejercicios

Problema 1

> Encuentre la forma cerrada de las siguientes recurrencias:
>
> 1. $a_n = 5a_{n-1} + 8 - 6a_{n-2}$ con $a_0 = 1$, $a_1 = 2$
> 2. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 4 * 3^n + 4$ con $a_0 = 10$, $a_1 = 35$

1. Solución

Primeramente resolvamos la homogénea:

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

La ecuación característica sería la siguiente:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

La solución de la homogénea entonces está definida como $A2^n + B3^n$, pasemos ahora al término independiente de la no homogénea.

El término 8 analizándolo de la forma $p(n)s^n$ podemos verlo como $8 * 1^n$, de donde $p(n) = 8$ y $s = 1$, como 1 no es raíz de la ecuación característica la solución viene dada por $q(n)s^n$ y como $q(n)$ tiene grado a lo sumo el de $p(n) \implies q(n) = c$. Luego, evaluando esta solución particular para hallar el valor de c resulta en:

$$c = 5c - 6c + 8$$

De donde $c = 4$, y por tanto ya podemos decir que la solución particular de la recurrencia es $A2^n + B3^n + 4$, y mediante la solución del sistema de ecuaciones con los valores iniciales obtenemos los valores de A y B

$$\begin{aligned} A + B + 4 &= 1 \\ 2A + 3B + 4 &= 2 \end{aligned}$$

De donde $B = 4$ y $A = -7$ y por tanto la forma cerrada de la recurrencia resulta:

$$a_n = -7 * 2^n + 4 * 3^n$$

2. Solución

Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 4 * 3^n + 4$ con $a_0 = 10, a_1 = 35$ vamos a empezar buscando la forma de la homogénea. La ecuación característica sería la siguiente:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Lo cual da como solución de multiplicidad dos a $x = 1$, entonces, la forma de la homogénea sería $A * 1^n + Bn * 1^n = A + Bn$

Pasemos ahora a los términos de la no homogénea comenzando por $4 * 3^n$, como 3 no es raíz de la ecuación la solución tendrá la forma $c * 3^n$, evaluémosla en la recurrencia:

$$c * 3^n = 2c * 3^{n-1} - c * 3^{n-2} + 4 * 3^n$$

$$9c * 3^{n-2} = 2 * 3c * 3^{n-2} - c * 3^{n-2} + 4 * 9 * 3^{n-2}$$

$$9c * 3^{n-2} - 6c * 3^{n-2} + c * 3^{n-2} = 36 * 3^{n-2}$$

$$(9c - 6c + c)3^{n-2} = 36 * 3^{n-2}$$

$$4c = 36$$

$$c = 9$$

El próximo término es 4, o sea, $4 * 1^n$, pero en este caso 1 si es raíz y de multiplicidad 2, por lo que la solución tendrá la forma n^2c porque el polinomio del término es de grado cero.

$$n^2c = 2(n-1)^2c - (n-2)^2c + 4$$

A través de trabajo algebraico llegamos a $c = 2$, con lo cual la solución general de la recurrencia tiene la forma $A + Bn + 9 * 3^n + 2n^2$. Ahora pasemos a hallar los valores de A, B para la solución particular:

$$A + 9 = 10$$

$$A + B + 27 + 2 = 35$$

Y resolviendo el sistema resulta en $A = 1, B = 5$, por lo que la forma cerrada de la recurrencia es:

$$a_n = 1 + 5n + 9*3^n + 2n^2$$

Problema 2

> Determine el número de cadenas de longitud n sobre el alfabeto $\{a, b, c, d\}$ tal que todas las a aparezcan antes que las b.

Solución

Problema 3

> Prueba que $\forall a \in Z$ y $b, n \in Z_{+}^{*}$ se cumple que la siguiente expresión es entera siempre que $4 \div (b - a^2)$
>
> $$\frac{1}{\sqrt{b}}[(\frac{a+\sqrt{b}}{2})^2 - (\frac{a-\sqrt{b}}{2})^2]$$

Solución