Übung 3D Maschinelles Sehen
Musterlösung

Prof. Dr.-Ing. Volker Willert

thws Technical University of Applied Sciences Würzburg-Schweinfurt

Übungsblatt 5

In dieser Übung behandeln wir *Triangulationsverfahren*, die *Epipolargeometrie* und die *diskrete Epipolareinschränkung*, sowie *den Achtpunktalgorithmus* und die *Rektifizierung*. Die Fragen sind kleinteilig und können als Beispiele für potentielle Klausuraufgaben gesehen werden.

Aufgabe 5.1: Triangulationsverfahren

5.1a)

Nennen Sie ein Triangulationsverfahren und erklären Sie, wie es umgesetzt wird.

Antwort: Algebraischer Ansatz mittels Projektionsgleichung: Für jeden projizierten Punkt $\mathbf{x}_i$ kann die Projektionsgleichung für den gesuchten unbekannten 3D Punkt $\mathbf{X}$ bei bekannter Projektionsmatrix $\mathbf{\Pi}_i$ aufgestellt werden, woraus sich pro Ansicht ein homogenes Gleichungssystem ergibt: $\widehat{\mathbf{x}}_i \mathbf{Pi}_i \mathbf{X} = \mathbf{0}$. Zwei dieser Gleichungen sind linear unabhängig. Damit ergibt sich für zwei Ansichten $\mathbf{\Pi}_1$ und $\mathbf{\Pi}_2$ und den projizierten Koordinaten $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ vier lineare Gleichungen für den unbekannten Punkt $\mathbf{X}$. Löst man dieses überbestimmte lineare Gleichungssystem, hat man eine gute Schätzung für den triangulierten 3D Punkt.

5.1b)

Welches der folgenden Triangulationsverfahren kann nicht einfach auf mehr als zwei Ansichten erweitert werden?

- × Geometrische Konstruktion minimaler Abstände von Strahlen
- ☐ Algebraischer Ansatz mittels Projektionsgleichung
- ☐ Nichtlinearer Ansatz über den Reprojektionsfehler

5.1c)

Welche Triangulationsmethode führt auf ein (über)bestimmtes lineares Gleichungssystem? Wie kann dieses Gleichungssystem numerisch stabil gelöst werden?

Antwort: Algebraischer Ansatz mittels Projektionsgleichung: Sie oben!

Aufgabe 5.2: Epipolargeometrie

5.2a)

Konstruieren Sie die Epipole eines Stereokamerasystems für eine beliebige Relativpose. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

Antwort: Siehe Foliensatz Epipolargeometrie, Seite 15.

5.2b)

Welche Punkte haben alle Epipolarebenen gemeinsam? Was für eine Kurve beschreiben diese Punkte?

Antwort: Alle Punkte, die auf der Verbindungsgeraden der beiden optischen Zentren liegen.

5.2c)

Welche Größe der Epipolargeometrie entspricht dem Nullraum der Essential-Matrix?

- ☐ Epipolarline
- ☐ Basisabstand
- ☐ Epipolarebene
- × Epipol
- ☐ Schnittpunkt der Strahlen zweier korrespondierender Punkte
- ☐ Translationsvektor zwischen den optischen Zentren
- ☐ Rotationsmatrix der Relativpose

5.2d)

Welche Aussagen bezüglich der Essential-Matrix sind richtig?

- × die Spalten der Essential-Matrix entsprechen den Kreuzprodukten zwischen dem Translationsvektor und den Spalten der Rotationsmatrix
- × das Produkt aus der schiefsymmetrischen Matrix des Translationsvektors und der Rotationsmatrix
- ☐ die Essential-Matrix hat vollen Rang
- × die Essential-Matrix hat zwei linear unabhängige Zeilenvektoren
- ☐ kein Eigenwert der Essential-Matrix ist gleich Null
- × die Essential-Matrix hat zwei identische Eigenwerte

Aufgabe 5.3: Epipolareinschränkung & Achtpunkt-Algorithmus

5.3a)

Wieviele korrespondierende Punktepaare werden mindestens benötigt, um die Relativpose aus der diskreten Epipolareinschränkung zu berechnen?

- ☐ 3
- ☐ 4
- × 5
- ☐ 6
- ☐ 8

5.3b)

Erklären Sie, warum man beim Achtpunktalgorithmus eine Projektion auf den Essentialraum vornehmen muss.

Antwort: Löst man das lineare Gleichungssystem der Punktkorrespondenzen der diskreten Epipolareinschränkung nach der Essential-Matrix auf, dann erfüllt diese Matrix noch nicht alle Eigenschaften einer Essential-Matrix. Durch das Setzen der Eigenwerte der Essentialmatrix auf die Werte $[1, 1, 0]$ sind die Eigenschaften erfüllt. Dieser Vorgang wird Projektion auf den Essentialraum genannt.

5.3c)

Wieviele Lösungen ergeben sich beim Achtpunktalgorithmus für welche Größen?

Antwort: Es ergeben sich vier Lösungen für die Relativpose zwischen zwei Kameras.

5.3d)

Berechnen Sie eine erste Approximation der Essentialmatrix für folgende Relativpose: $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & 0 & sin(\pi/4) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\pi/4) & 0 & \cos(\pi/4) \end{bmatrix}$, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Antwort: $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

5.3e)

Die SVD einer Essentialmatrix ist folgendermaßen gegeben:

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie daraus alle möglichen Relativposen zwischen den Kameras. Benutzen Sie dazu die folgenden Formeln:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{R}_Z^\top\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{V}^\top, \quad \widehat{\mathbf{T}} = \mathbf{U}\mathbf{R}_Z\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{S}\mathbf{U}^\top,$$

wobei gilt:

$$\mathbf{R}_Z^\top\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -T_z & T_y \\ T_z & 0 & -T_x \\ -T_y & T_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Antwort: $\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$, $\widehat{\mathbf{T}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\widehat{\mathbf{T}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Aufgabe 5.4: Rektifizierung

5.4a)

Wozu benötigt man eine Rektifizierung bei einem Stereosystem?

Antwort: Damit die Korrespondenzsuche entlang horizontaler Scanlinien erfolgen kann. Eine exakte parallele Ausrichtung der Bildebenen ist physikalisch nur schwer möglich, daher benötigt man eine softwareseitige Nachjustierung, die sogenannte Rektifizierung.

5.4b)

Wo liegen die Epipole nach der Rektifizierung?

Antwort: Die Epipole liegen nach der Rektifizierung im Unendlichen entlang der Richtung der horizontalen Achsen der Bildebenen.

5.4c)

Folgender normierter Translationsvektor ergibt sich aus dem Achtpunktalgorithmus: $\mathbf{T}/\|\mathbf{T}\| = \frac{1}{\sqrt{6}}[1,1,2]^\top$. Konstruieren Sie die Rotationsmatrix $\mathbf{R}_{rect}$, welche parallele Scanlinien erzeugt.

Antwort: $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{r}_2 \propto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, daraus folgt: $\mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$