

Übung 3D Maschinelles Sehen

Musterlösung

Prof. Dr.-Ing. Volker Willert

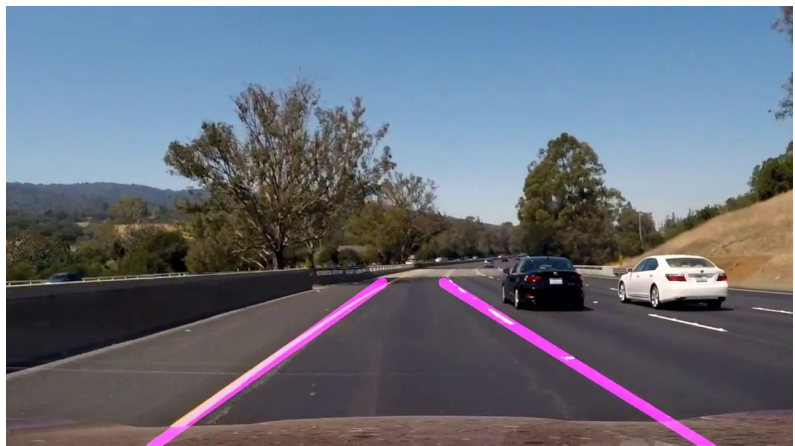
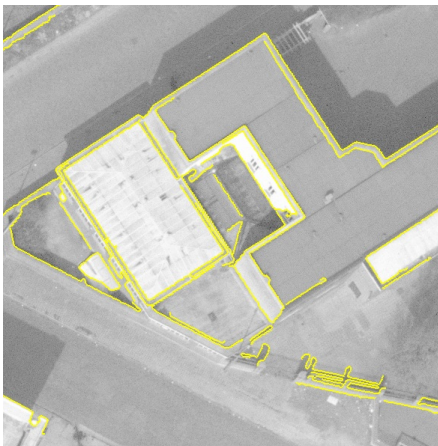


Übungsblatt 3

Sowohl in der Bildverarbeitung, als auch der Punktwolkenverarbeitung können viele Teilprobleme mit einer Ausgleichsrechnung gelöst werden. Beispielsweise

- das Bestimmen von intrinsischen Kameraparametern anhand von 2D-3D Punktkorrespondenzen,
- das Einpassen einer linear parametrisierten 2D-Kurve (z.B. Gerade oder Parabel) in eine Menge von Bildpunktkoordinaten, oder
- das Berechnen der Kameraorientierung anhand von mehr als drei Weltpunkten usw..

Speziell das Einpassen von Konturen wird als Ausgleichsproblem formuliert und gelöst. Gegeben sind dabei 2D Koordinaten entlang einer Kontur. Gesucht sind die Modellparameter der Kontur, z.B. einer Geraden. Anwendung finden solche Berechnungen unter anderem im Bereich der automatisierten Kartierung oder der visuell gestützten Fahrerassistenz.



Das allgemeine Problem der Ausgleichsrechnung lautet:

Gegeben sind N Datenpaare (\mathbf{x}_i, t_i) , $i = 1, \dots, N$ und $k < n$ Funktionen f_1 bis f_k . Gesucht ist eine Linearkombination

$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k w_j f_j(\mathbf{x})$ dieser f_j , so dass die Summe der quadrierten Abweichungen von f an den Stellen \mathbf{x}_i zu t_i minimal wird:

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^N (f(\mathbf{x}_i) - t_i)^2 = \operatorname{argmin}_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^k w_j f_j(\mathbf{x}_i) - t_i \right)^2$$

Dieses Problem nennt man auch *Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate* oder *Regression*.

Aufgabe 3.1: 2D Gerade einpassen

Gegeben sind folgende $n = 3$ Bildpunktkoordinaten: $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 1)$, $(x_3, y_3) = (3, 2)$.

- Geben Sie alle k Funktionen f_j an und bestimmen Sie die Pseudoinverse.

Antwort:

$$f(x_i) = a_1 x_i + a_2 \Rightarrow \begin{matrix} f_1(x_i) = x_i \\ f_2(x_i) = 1 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{f}(x_i) = \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Pseudoinversen \mathbf{F}^+ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^+(\mathbf{x}) &= (\mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Berechnen Sie die optimalen Parameter \mathbf{w}^* der Geraden mit der Pseudonormallösung.

Antwort:

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{F}^+(\mathbf{x})\mathbf{y} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Bewerten Sie die Qualität Ihrer Ausgleichsgeraden mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten.

Antwort:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{3}(1+1+2) = \frac{4}{3}$$

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right)}} = \frac{(1+2+6-3 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3})}{\sqrt{(1+4+9-3 \cdot 4)(1+1+4-3 \cdot \frac{16}{9})}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \frac{2}{3}}} \approx 0,87$$

Da der Wert des empirischen Korrelationskoeffizienten kleiner als 1 ist, liegt kein streng linearer Zusammenhang zwischen \mathbf{x} und \mathbf{y} vor. Da sein Wert jedoch „nah“ an 1 liegt, approximiert die Ausgleichsgerade die Daten relativ gut.

Aufgabe 3.2: Interpolation von Tiefenwerten

Gegeben sind vier Tiefenwerte an vier benachbarten Pixeln, die in einem Quadrat in einem Tiefenbild angeordnet sind: $Z(100, 50) = 6$, $Z(101, 50) = 10$, $Z(100, 51) = 4$ und $Z(101, 51) = 1$.

Approximieren Sie die Tiefenwerte Z_i dieses 2×2 großen Bildausschnitts mit einem Polynom zweiter Ordnung $Z_i \approx w_1 x_i^2 + w_2 x_i y_i + w_3 y_i^2$.

Antwort:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \begin{pmatrix} x_i^2 \\ x_i y_i \\ y_i^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 & 5000 & 2500 \\ 10201 & 5050 & 2500 \\ 10000 & 5100 & 2601 \\ 10201 & 5151 & 2601 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zunächst wird die Pseudoinverse $\mathbf{F}(\mathbf{x})^+$ berechnet:

$$\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) = (\mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -0.2469 & 0.2515 & 0.2510 & -0.2554 \\ 0.9849 & -0.9951 & -1.0049 & 1.0147 \\ -0.9820 & 0.9842 & 1.0059 & -1.0076 \end{pmatrix}$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich die Pseudonormallösung \mathbf{a}^+ bestimmen:

$$\mathbf{a}^+ = \mathbf{F}^+(\mathbf{x})\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1.7820 \\ -7.0460 \\ 6.9659 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Hyperparabel hat somit die Gestalt

$$Z_i(\mathbf{x}_i) = 1,782x_i^2 - 7.046x_i y_i + 6.9659y_i^2$$

Aufgabe 3.3: Der RANSAC Algorithmus

Gegeben sind vier Bildpunktkoordinaten $\mathbf{x}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (2, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (3, 2)$ und $\mathbf{x}_4 = (1, 3)$, wobei drei Punkte in der Nähe einer geraden Kante liegen und einer nicht (Ausreißer). Bestimmen Sie diese drei Punkte und die Geradengleichung, welche die Kante am besten approximiert mit dem RANSAC Algorithmus. Gehen Sie wie folgt vor:

- Zeichnen Sie die vier Punkte in ein Koordinatensystem ein.
- RANSAC Schritt 1: Wählen Sie zufällig so viele Punkte aus den Datenpunkten wie nötig sind, um die Parameter des Modells zu berechnen. Das geschieht in Erwartung, dass diese Menge frei von Ausreißern ist. (Wählen Sie zu Übungszwecken „zufällig“ im ersten Iterationsschritt \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_4 , im zweiten \mathbf{x}_2 und \mathbf{x}_3).
- RANSAC Schritt 2: Ermitteln Sie mit den gewählten Punkten die Modellparameter (Geradenparameter).
- RANSAC Schritt 3: Bestimmen Sie die Teilmenge der Messwerte, deren Abstand zur Modellkurve kleiner als ein bestimmter Grenzwert g ist (es wird für dieses Beispiel $g = 0.5$ gewählt). Diese Teilmenge wird *consensus set* genannt. Enthält dieses eine gewisse Mindestanzahl an Werten, wurde vermutlich ein gutes Modell gefunden und das consensus set wird gespeichert.
- Wiederholen Sie die Schritte 1 – 3 mehrmals.

Der RANSAC Algorithmus wird nun für alle 6 Kombinationsmöglichkeiten zweier Bildpunktkoordinaten angewendet, um eine Geradenapproximation $y = ax + b$ der Punkte zu finden, welche nicht durch Ausreißer gestört wird. Dabei gelte im Folgenden die Notation $\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$.

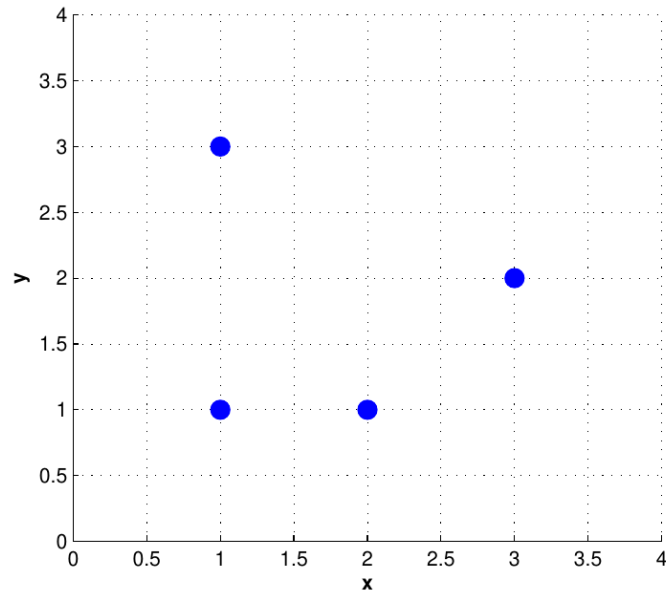


Abbildung 1: Plot der Bildpunktkoordinaten

1. Iteration: $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Zunächst wird eine Geradengleichung für diese Punkte bestimmt. Diese kann durch Einzeichnen der Geraden im Koordinatensystem und Ablesen der Parameter oder analytisch erfolgen. Durch Verwenden der HESSESchen Normalform ist eine leichte Abstandsbestimmung eines Punkts von einer Geraden möglich, so dass im folgenden die RANSAC-Schritte analytisch berechnet werden.

$$y = ax + b = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}x + y_1 - x_1 \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}$$

$$\Leftrightarrow (x_4 - x_1)y = (y_4 - y_1)x + y_1(x_4 - x_1) - x_1(y_4 - y_1)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2x - 2$$

$$\boxed{G_1 : x = 1}$$

Die HESSESche Normalform hat die allgemeine Form

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

wobei α der Winkel zwischen Abszisse und dem Normalenvektor vom Ursprung auf die Gerade ist und sich aus dem Zusammenhang

$$\alpha = -\arctan \frac{1}{a}$$

berechnet. Für die zufällig gewählten Daten des ersten Iterationsschritts lautet die Geradendarstellung in HESSEScher Normalform

$$\alpha = -\arctan \frac{1}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 0.$$

Mit dieser Darstellung lassen sich durch Einsetzen der übrigen Punkte in die Gleichung leicht die Abstände zu dieser Geraden angeben:

$$|d(\mathbf{x}_2, G_1)| = 1 > 0,5$$

$$|d(\mathbf{x}_3, G_1)| = 2 > 0,5$$

Da beide Punkte über dem zulässigen Grenzwert von $g = 0,5$ liegen, gibt es für diese Iteration keinen Punkt, der das Geradenmodell unterstützt. Das *consensus set* ist daher leer:

$$S_1 = \{\}$$

Die RANSAC-Schritte 1-3 werden im Folgenden für weitere zufällige Kombinationen zweier Bildpunktkoordinaten angewendet.

2.Iteration: $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$y = ax + b = \frac{1}{1}x + 1 - 2 \cdot 1 = x - 1 \quad \Rightarrow \quad G_2 : y = x - 1$$

G_2 in HESSEScher Normalform:

$$\alpha = -\arctan \frac{1}{a} = -\frac{1\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$|d(\mathbf{x}_1, G_2)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0,5$$

$$|d(\mathbf{x}_4, G_2)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{3}{\sqrt{2}} > 0,5$$

$$\Rightarrow \quad S_2 = \{\}$$

3.Iteration: $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$y = ax + b = \frac{0}{1}x + 1 - 1 \cdot \frac{0}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad G_3 : y = 1$$

G_3 in HESSEScher Normalform:

$$\alpha = -\arctan \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = y - 1 = 0$$

$$|d(\mathbf{x}_3, G_3)| = |2 - 1| = 1 > 0,5$$

$$|d(\mathbf{x}_4, G_3)| = |3 - 1| = 2 > 0,5$$

$$\Rightarrow \quad S_3 = \{\}$$

4.Iteration: $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$y = ax + b = \frac{1}{2}x + 1 - 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad G_4 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

G_4 in HESSEScher Normalform:

$$\alpha = -\arctan \frac{1}{a} = -1,1071 \quad \Rightarrow \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,4472x - 0,8944y + 0,4472 = 0$$

$$\begin{aligned}
|d(\mathbf{x}_2, G_4)| &= |0,4472 \cdot 2 - 0,8944 \cdot 1 + 0,4472| = 0,4472 < 0,5 \\
|d(\mathbf{x}_4, G_4)| &= |0,4472 \cdot 1 - 0,8944 \cdot 3 + 0,4472| = 1,7888 > 0,5 \\
&\Rightarrow \boxed{S_4 = \{\mathbf{x}_2\}}
\end{aligned}$$

5.Iteration: $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$y = ax + b = -\frac{2}{1}x + 1 + 2 \cdot \frac{2}{1} = -2x + 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{G_5: y = -2x + 5}$$

G_5 in HESSEScher Normalform:

$$\alpha = -\arctan \frac{1}{a} = 0,4636 \quad \Rightarrow \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,8944x + 0,4472y - 2,2361 = 0$$

$$\begin{aligned}
|d(\mathbf{x}_1, G_5)| &= |0,8944 \cdot 1 + 0,4472 \cdot 1 - 2,2361| = 0,8945 > 0,5 \\
|d(\mathbf{x}_3, G_5)| &= |0,8944 \cdot 3 + 0,4472 \cdot 2 - 2,2361| = 1,3415 > 0,5 \\
&\Rightarrow \boxed{S_5 = \{\}}
\end{aligned}$$

6.Iteration: $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$y = ax + b = -\frac{1}{2}x + 3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{G_6: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}$$

G_6 in HESSEScher Normalform:

$$\alpha = -\arctan \frac{1}{a} = 1,1071 \quad \Rightarrow \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,4472x + 0,8944y - 3,1305 = 0$$

$$\begin{aligned}
|d(\mathbf{x}_1, G_6)| &= |0,4472 \cdot 1 + 0,8944 \cdot 1 - 3,1305| = 1,7889 > 0,5 \\
|d(\mathbf{x}_2, G_6)| &= |0,4472 \cdot 2 + 0,8944 \cdot 1 - 3,1305| = 1,3417 > 0,5 \\
&\Rightarrow \boxed{S_6 = \{\}}
\end{aligned}$$

Da Set S_4 die meisten Elemente enthält, wird das Modell der vierten Iteration gewählt. Wie nachfolgendem Plot zu entnehmen ist, stellt dieses eine gut Annäherung für die drei Bildkoordinaten in Kantennähe dar, ohne dass der Ausreißer dieses Modell stören würde.

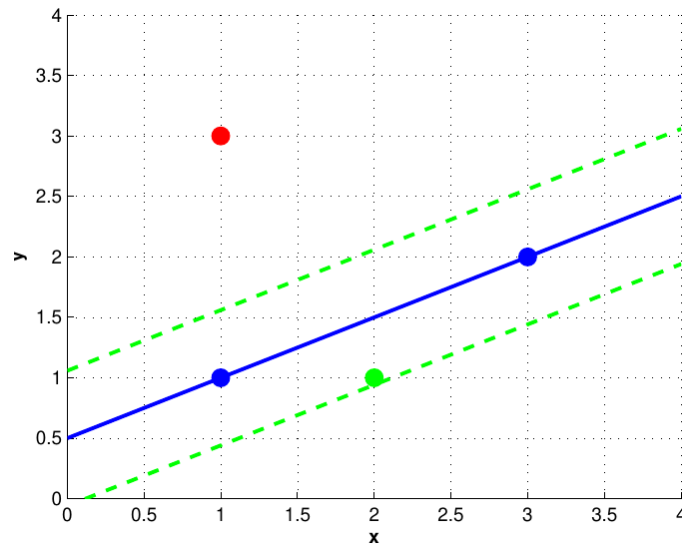


Abbildung 2: Ergebnis des RANSAC-Algorithmus mit $g = 0.5$

Nach Durchführung von mehreren Iterationen wird diejenige Teilmenge gewählt, welche die meisten Punkte enthält (so denn eine gefunden wurde). Nur mit dieser Teilmenge werden mit einem der üblichen Ausgleichsverfahren die Modellparameter berechnet. Eine alternative Variante des Algorithmus beendet die Iterationen vorzeitig, wenn im Schritt 3 genügend Punkte das Modell unterstützen. Diese Variante wird als präemptives - das heißt vorzeitig abbrechendes - RANSAC bezeichnet. Bei diesem Vorgehen muss im Vorfeld bekannt sein, wie groß der Ausreißeranteil etwa ist, damit eingeschätzt werden kann, ob genügend Messwerte das Modell unterstützen.

Der Algorithmus hängt im Wesentlichen von drei Parametern ab:

1. dem maximalen Abstand eines Datenpunktes vom Modell, bis zu dem ein Punkt nicht als grober Fehler gilt;
 2. der Anzahl der Iterationen und
 3. der Mindestgröße des Consensus sets, also der Mindestanzahl der mit dem Modell konsistenten Punkte.
- Was passiert, wenn man den Grenzwert $g = 0.1$ wählt? Es werden nie drei Punkte zugeordnet.
 - Was passiert, wenn man den Grenzwert um $g = 2$ wählt? Es werden immer alle vier Punkte zugeordnet.
 - Was folgt daraus für die Wahl des Grenzwertes? Nicht zu klein und nicht zu groß, hängt von der Verteilung der Datenpunkte im Datenraum ab.

Die Anzahl von Wiederholungen kann so festgelegt werden, dass mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $p_n(\text{Ausreißer} = 0)$ mindestens einmal eine ausreißerfreie Teilmenge aus den Datenpunkten ausgewählt wird. Dazu definieren wir folgende Parameter: die Anzahl der Datenpunkte s , die zur Berechnung eines Modells notwendig sind, der relative Anteil an Ausreißern in den Daten ϵ und die Anzahl der Wiederholungen n .

Die Mindestanzahl n der erforderlichen Wiederholungen hängt nur vom relativen Ausreißeranteil ϵ ab, der Anzahl der Modellparameter s sowie der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von mindestens einer ausreißerfreien Teilmenge mit n Wiederholungen $p_n(\text{Ausreißer} = 0)$, nicht aber von der Gesamtzahl der Messwerte. Sie kann wie folgt berechnet werden:

$$n = \frac{\ln(1 - p_n(\text{Ausreißer} = 0))}{\ln(1 - (1 - \epsilon)^s)}.$$

Berechnen Sie die minimale Anzahl n der erforderlichen Wiederholungen für die Anpassung einer Linie an eine Punktwolke mit 4 Punkten, die einen Ausreißer enthält. Die Wahrscheinlichkeit, aus allen Datenpunkten mindestens eine ausreißerfreie Teilmenge auszuwählen, wird auf $p_n(\text{Ausreißer} = 0) = 0.99$ gesetzt.

Antwort: Für das Beispiel aus Aufgabe 4.1 ergibt sich mit $p_n(A = 0) = 0,99$, $s = 2$ sowie $\epsilon = 0,25$ folgende Mindestanzahl an Wiederholungen:

$$n = \left\lceil \frac{\ln(1 - 0,99)}{\ln(1 - (1 - 0,25)^2)} \right\rceil = \lceil 5,57 \rceil = 6$$