# Типовой расчёт № 4

Анужин Баатарцогт, M3112 05/15/2020

## Задание 1

(1 балл) Возьмём все перестановки из пяти чисел. В скольких из них ни одно число не стоит на своём месте?

## Решение:

n - количество всего элементов, r - число элементов стояших на месте, n-r - число перемешений
$N^{(r)} = C_n^r P_(n-r)$
$N^{(0)} = P_5 - C_5^1 P_4 + C_5^2 P_3 - C_5^3 P_2 + C_5^4 P_1 - C_5^5 P_0 = 120 - 5*24 + 10*6 - 10*2 + 5*1 - 1*1 = 44$

Ответ : 44 случая

## Задание 2

(1 балл) Я хочу послать своему другу 8 фотографий. Сколькими способами можно разложить их по 5-ти конвертам ?

## Решение:

Каждая фотография может находиться 1-5 кармане, то есть
$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^8$

## Задание 3

(1 балл) У скольких натуральных чисел меньше 10000, сумма равна 10?.

## Решение:

Разбим числа на части 0-99, 100-999, 1000-9999. N - число способов.
1. При 0 - 99 : 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91.

$$N_1 = 9$$

2. При 100 - 999:

1(0-9)(9-0), N = 10

2(0-8)(8-0), N = 9

3(0-7)(7-0), N = 8

...

9(0-1)(1-0), N = 2

$$N_2 = \sum_{n=1}^{10} n = 54$$

3. При 1000-9999:

10(0-9)(9-0), N = 10

11(0-8)(8-0), N = 9

12(0-7)(7-0), N = 8

...

20(0-8)(8-0), N = 9

21(0-7)(7-0), N = 8

22(0-6)(6-9), N = 7

...

30(0-7)(7-0), N = 8

31(0-6)(6-0), N = 7

32(0-5)(5-0), N = 6

Итак видно что числа способов уменьшивается на 1 при возрастений числа

.

$$N_3 = \sum_{n=1}^{10} n + \sum_{n=1}^{9} n + \sum_{n=1}^{8} n + \sum_{n=1}^{7} n + \sum_{n=1}^{6} n + \sum_{n=1}^{5} n + \sum_{n=1}^{4} n + \sum_{n=1}^{3} n + \sum_{n=1}^{2} n = 219$$

N = $\mathrm{N}_1 + N_2 + N_3 = 9 + 54 + 219 = 282$

Ответ : 282

## Задание 4

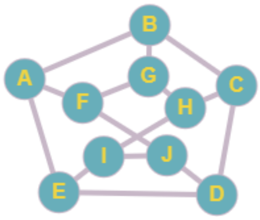
(1 балл) Сколькими способами можно разбить 14 человек на пары?

## Решение:

$N = \frac{C_{14}^2 \times C_{12}^2 \times C_{10}^2 \times C_8^2 \ldots \times C_2^2}{7!} = 135135$

Ответ : 135135

## Задание 5




(2 балла) Для представленного графа определите:
1. есть ли в графе Эйлеров цикл или Эйлерова цепь? Если есть, то выпишите. Если нет, то обоснуйте отсутствие;

## Решение:

В этом графе нет Эйлеров цикла. Потому что граф имеет эйлерова цикл если вершины имеет чётную степень и находится в одном компоненте связности. В этом графе вершины a-j имеют нечетную степень 3, зато они находится в одном компоненте связности.
В этом графе нет Эйлерова цепь. В неориентированном графе есть эйлеровый цепь если граф связной и количество вершин с нечётной степенью равен 0 или 2. В нашем графе количество вершин с нечетной степенью равно 10.

2. Есть ли в графе Гамильтонов цикл, Гамильтонова цепь? Если есть, то выпишите. Если нет, то обоснуйте отсутствие;

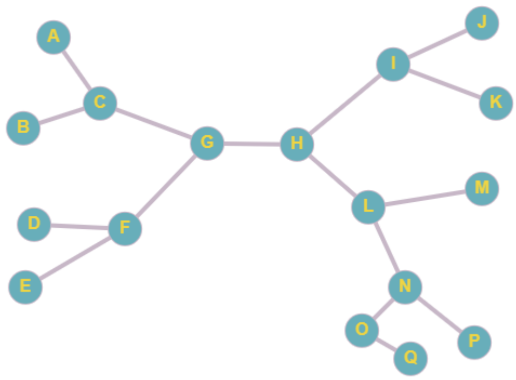
## Решение:

Цикл - это просто ребро, соединяющее вершину с самим собой; таким образом, гамильтонов цикл - это путь, идущий от вершины к себе, посещающий каждую вершину в пути один раз.
В нашем графе существует Гамильтонова цикл $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow J \Rightarrow F \Rightarrow G \Rightarrow H \Rightarrow I \Rightarrow E \Rightarrow A$
В графе есть Гамильтонова цепь : $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow E \Rightarrow I \Rightarrow H \Rightarrow G \Rightarrow F \Rightarrow J$

## Задание 6

(1 балл) Нарисуйте дерево с диаметром 7, причем вершин центра должна быть 2, а листьев не менее 8.

Решение:




Центры H, L. Диаметр равен 7 $A \Rightarrow C \Rightarrow G \Rightarrow H \Rightarrow L \Rightarrow N \Rightarrow O \Rightarrow Q$

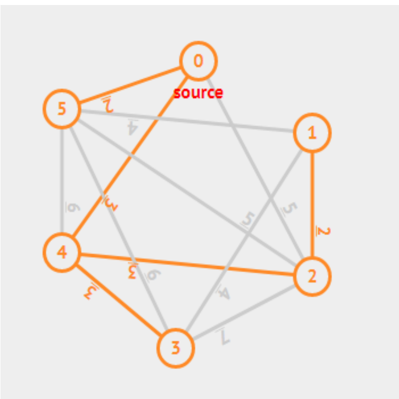
## Задание 7

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & - & - & 6 & 2 \\ & 0 & 2 & 4 & - & 4 \\ & & 0 & 7 & 5 & 5 \\ & & & 0 & 4 & 6 \\ & & & & 0 & 2 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(3 балла) Граф задан матрицей расстояний. Требуется:

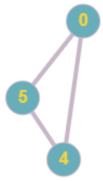
1. построить минимальное остовное дерево;
2. построить фундаментальную систему циклов, ассоциированную с этим остовом;
3. найти кратчайшие пути от вершины 4 до всех остальных вершин графа.

Решение:

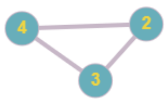



1. Вес минимального остовного дерева равен 13.
2. Фундаментальная система циклов:

Фундаментальный цикл графа G относительно остова T — простой цикл C, полученный путем добавления к остову T ребра e1e2 $\notin T$.








3.Найти кратчайшие пути от вершины 4 до всех остальных вершин графа.

$4 \Rightarrow 0 : d = 3$

$4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1 : d = 3 + 2 = 5$

$4 \Rightarrow 2 : d = 3$

$4 \Rightarrow 3 : d = 3$

$4 \Rightarrow 0 \Rightarrow 5 : d = 3 + 2 = 5$