Bewijsgids

Andreas Nuyts

6 juni 2025

Inhoudsopgave

1 Motivatie

Enkele studenten brachten ter sprake dat ze wat houvast missen om op een goeie manier bewijzen uit te schrijven. Met dit document hoop ik daaraan tegemoet te komen.

Voor de duidelijkheid: Dit document is momenteel ('24-'25) geen deel van het officiële lesmateriaal van eenderwelk vak, maar wordt aangeboden voor wie erbij gebaat is.

1.1 Achtergrond

Ik geef graag iets mee over de achtergrond ervan. Mijn onderzoek gaat over bewijsassistenten (proof assistants): software waarin je op volledig rigoureuze wijze bewijzen kan neerschrijven om ze vervolgens te laten verifiëren door de computer, die dan ook zinvolle feedback kan geven wanneer er een fout gevonden wordt, of over wat er nog nodig is in de nog ontbrekende delen van een bewijs.

Wiskundige uitspraken (soms benoemd als stellingen, proposities, predicaten, logische formules) zijn opgebouwd uit **logische verbindingswoorden**[1] (en, of, als …dan …, voor alle, er bestaat, niet) en domein-specifieke uitspraken (bv. $3 \leq 5$; 3 is een deler van 6; 6 is een deler van 3 (niet elke uitspraak hoeft waar te zijn); $abc \in \Sigma^*$ met Σ het Latijnse alfabet; …). De logische verbindingswoorden (en veel domein-specifieke uitspraken) hebben een notatie in wiskundige symbolen ($\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\neg$), waardoor wiskundige uitspraken ook in symbolen neergeschreven kunnen worden.

Wanneer je *bewijzen* van stellingen volledig rigoureus neerschrijft, zoals bij het gebruik van een bewijsassistent, dan zijn ook deze opgebouwd uit *bewijsoperatoren.* Anders dan de logische verbindingswoorden, hoeven de meeste mensen, ook exacte wetenschappers die bewijzen in woorden willen kunnen uitschrijven, hier niet mee bekend te zijn. Die bewijsoperatoren komen echter overeen met bewijstechnieken of redeneerwijzen die wel breed bekend zijn en die gecommuniceerd kunnen worden d.m.v. standaardformuleringen in de Nederlandse / Engelse / andere gebruikte taal. De bedoeling van dit document is om heel duidelijk te maken in welke omstandigheden welke bewijsstappen genomen kunnen worden en welke formulering in woorden daarbij hoort.

2 Opbouw van dit document

Wat we in een bewijs trachten te doen, is twee dingen met elkaar te verzoenen:

- Enerzijds de objecten waarover we beschikken, de kennis die we hebben en de aannames die we gerechtvaardigd mogen maken. Dit noemen we de **context**.
- Anderzijds het **te bewijzen**. Dit wordt soms het doel (goal) of de bewijsverplichting (proof obligation) genoemd.

In elke bewijsstap, ga je ofwel de kennis die je hebt, **gebruiken**, ofwel een redeneerstap zetten die te maken heeft met wat te **bewijzen** valt. Wanneer het te bewijzen een negatie is van een andere uitspraak, dan kunnnen we zeggen dat we die andere uitspraak **weerleggen**.

Dit document lijst de meest gebruikte *logische verbindingswoorden* op. Voor elk van deze geven we mee:

- De notatie in symbolen,
- De formulering in woorden,
- Het tegendeel (dus van de negatie) in symbolen en in woorden,
- De stap(pen) die je kan zetten om een formule van deze vorm te:
  - bewijzen,
  - weerleggen,

[1] Engels: logical connectives

– gebruiken (idealiter met referentie naar waar deze kennis ook weer te vinden is),

telkens met één of enkele voorbeelden van standaardformuleringen. Deze standaardformuleringen kan je in feite droogweg aan elkaar rijgen om tot een bewijs te komen. Een wiskundig bewijs hoeft immers geen literair werk met rijk gekleurde taal te zijn. Wat telt is eenduidigheid en precisie, en als we daarin kunnen uitblinken door telkens weer dezelfde formuleringen te gebruiken, dan is dat vooral een goede zaak.

3 Enkele analogieën

3.1 Inventory game

Je kan bewijsvoering als een spel zien, waarbij je gaandeweg items – wiskundige objecten alsook stukjes kennis – in de **context** verzamelt: dit is je inventory. Aan de hand hiervan geraak je dichter bij je doel.

Soms gebeuren er bijzondere dingen. Maak je bv. een gevalsonderscheid, dan moet je in elk van de gevallen terug beginnen met het inventory / de context / de kennis die je had op het moment van het maken van het gevalsonderscheid. Kennis die je in één scenario opdoet, is immers niet noodzakelijk van toepassing in een ander scenario.

3.2 Discussie

Je kan je, n.a.v. een wiskundige propositie P, een discussie voorstellen tussen iemand die meent dat de uitspraak waar is, en iemand die meent dat ze niet waar is.

Wanneer de propositie P poneert: 'er bestaat een $x \in A$ zodat $Q(x)$ waar is', dan is het aan degene die P verdedigt om een dergelijke $a \in A$ te vinden of te construeren, waarna verder kan gediscussieerd worden of $Q(a)$ nu inderdaad waar is.

Wanneer de propositie P echter poneert: 'voor alle $x \in A$ zal $Q(x)$ waar zijn', dan is het aan degene die P contesteert, om te trachten een tegenvoorbeeld $b \in A$ te vinden, waarna verder kan gediscussieerd worden of $Q(b)$ nu waar is of niet.

Een bewijs is geen weergave van één zo'n discussie. Het is een volledig waterdicht script om élke discussie te kunnen winnen, ongeacht wat de gesprekspartner zegt. Is het aan de tegenstander om met een tegenvoorbeeld te komen, dan beschouwen we dit tegenvoorbeeld als een onbekende input en ontwikkelen we onze verdere argumentatie op zo'n manier dat ze van toepassing is op élk mogelijk kandidaat-tegenvoorbeeld dat de gesprekspartner zou kunnen noemen.

Deze analogie betekent ook dat je een bewijs kan 'gebruiken'. Soms gebeurt het dat je denkt van eenzelfde stelling een bewijs én een tegenvoorbeeld te hebben. Tenzij er strijdige aannames gemaakt zijn, kan dit natuurlijk niet, en is er ergens een redeneerfout gemaakt. Je kan deze kwestie meestal ophelderen door het tegenvoorbeeld in het bewijs in te voeren. Hiermee bedoelen we hetvolgende: het bewijs is een waterdicht script om elke discussie te winnen van iemand die de propositie P tracht te weerleggen. Het (volledig beargumenteerd) tegenvoorbeeld is in feite een bewijs van $\neg P$, en dus een waterdicht script om elke discussie te winnen van iemand die P tracht te verdedigen. Je kan nu op basis van beide scripts de discussie afspelen, en doorgaans wordt de redeneerfout dan plots erg duidelijk.

Wanneer je een propositie P mag 'aannemen' (ze is opgenomen in de context), betekent dit dat je over een hulplijn beschikt die P zal verdedigen. Wanneer P bijvoorbeeld stelt dat voor alle $x \in A$, geldt dat $Q(x)$ waar is, en je wil weten dat $Q(a)$ waar is, dan kan je de hulplijn bellen met $a \in A$ als kandidaat-tegenvoorbeeld, en dan zal de hulplijn sluitend argumenteren dat $Q(a)$ waar is. Die input kan je dan zelf weer gebruiken in je eigen argumentatie.

Hieronder voegen we ook telkens toe hoe een bepaald logisch verbindingswoord i.h.k.v. een dergelijke discussie gezien kan worden. We spreken hierbij in termen van de **verdediger**, die het standpunt verdedigt dat de propositie waar is, en de **aanvaller**, die de propositie tracht te weerleggen.

4 Logische verbindingswoorden

4.1 Algemeen

(Hier beschouwen we geen logisch verbindingswoord, maar lichten we even toe hoe we spreken over een symbool P dat een wiskundige uitspraak voorstelt.)

In symbolen P

In woorden P is waar / P geldt / P.

Tegendeel in symbolen $\neg P$

Tegendeel in woorden P is vals / P is niet waar / P geldt niet / Niet P / Het is niet zo dat P geldt / …

4.2 Conjunctie: En

In symbolen $P \wedge Q$.
Meerdere operanden: $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$.

In woorden P is waar **en** Q is waar.
Meerdere operanden: P_1 is waar **en** P_2 is waar **en** … **en** P_n is waar.

Tegendeel in symbolen $\neg P \vee \neg Q$.
Meerdere operanden: $\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \ldots \neg P_n$

Tegendeel in woorden P is vals **of** Q is vals.
Meerdere operanden: P_1 is vals **of** P_2 is vals **of** … **of** P_n is vals.

Hoe bewijzen Bewijs P en bewijs Q.
Meerdere operanden: Bewijs P_1 en bewijs P_2 en … en bewijs P_n.

Formulering We moeten bewijzen dat $P \wedge Q$. P is waar want …. Q is waar want ….

Voorbeeld We moeten aantonen dat $\sim$ een equivalentierelatie is, dus dat $\sim$ reflexief, symmetrisch en transitief is.

- Ten eerste is $\sim$ reflexief, want …
- Ten tweede is $\sim$ symmetrisch, want …
- Ten derde is $\sim$ transitief, want …

Hoe weerleggen Weerleg P of weerleg Q; je mag kiezen.
Meerdere operanden: Weerleg P_1 of weerleg P_2 of … of weerleg P_n; je mag kiezen.

Formulering We weerleggen dat $P \wedge Q$. Q is immers niet waar, want …

Voorbeeld We moeten aantonen dat $\leq$ géén equivalentierelatie is. De relatie $\leq$ is immers niet symmetrisch, want ….

Hoe gebruiken Als je weet dat $P \wedge Q$ geldt, dan mag je besluiten dat P geldt. Je mag dan ook besluiten dat Q geldt.
Meerdere operanden: Als je weet dat $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ geldt, dan mag je besluiten dat P_i geldt voor elke $i = 1, \ldots, n$.

Formulering In de lijn gemarkeerd met (*) hebben we bewezen dat $P \wedge Q$ geldt. Dus weten we dat P geldt.

Voorbeeld Aangezien het gegeven is dat / aangezien we hierboven al hebben aangetoond dat $\sim$ een equivalentierelatie is, weten we dat $\sim$ transitief is.

Discussie De aanvaller duidt een van de operanden (P of Q / P_1 of … of P_n) aan waarvan die meent dat de propositie onwaar is. De discussie wordt verder gevoerd over de aangeduide propositie. Krijgt de aanvaller het daar echter moeilijk, dan mag die diens keuze nog wijzigen en overgaan naar een andere operand, en later zelfs weer terugkeren. De replieken die de verdediger geeft voor de ene operand, kan de aanvaller tegen hen gebruiken in de andere operand. Op die manier kan de aanvaller bv. elke propositie van de vorm $P \wedge \neg P$ weerleggen door de verdediger telkens in de ene operand aan te vallen met diens replieken uit de andere operand, zonder zelf iets aan de discussie bij te dragen.

4.3 Disjunctie: Of

In symbolen $P \vee Q$.
Meerdere operanden: $P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n$

In woorden P is waar **of** Q is waar.
Meerdere operanden: P_1 is waar **of** P_2 is waar **of** … **of** P_n is waar.

Tegendeel in symbolen $\neg P \wedge \neg Q$
Meerdere operanden: $\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \ldots \wedge \neg P_n$

Tegendeel in woorden P is vals **en** Q is vals.
Meerdere operanden: P_1 is vals **en** P_2 is vals **en** … **en** P_n is vals.

Hoe bewijzen Bewijs P of bewijs Q; je mag kiezen.
Meerdere operanden: Bewijs P_1 of bewijs P_2 of … of bewijs P_n; je mag kiezen.

Formulering We moeten aantonen dat $P \vee Q$. We tonen aan dat P: …
We moeten aantonen dat $P \vee Q$. P is waar want …

Voorbeeld **We moeten aantonen dat** de relatie ‘is een deler van’ een totale orde is op de verzameling $X = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dus dat elke $x, y \in X$ vergelijkbaar zijn voor deze relatie, **wat betekent dat** $x \mid y$ **of** $y \mid x$.

Zijn dus $x, y \in X$. Dan bestaan er $m, n \in \mathbb{N}$ zodat $x = 2^m$ en $y = 2^n$. Aangezien $\leq$ een totale orde is op $\mathbb{N}$, weten we dus dat $m \leq n$ of $n \leq m$. We maken een gevalsonderscheid:

$\boxed{m \leq n}$ **Dan is** $x = 2^m \mid 2^n = y$**, dus zijn beide elementen vergelijkbaar.**

$\boxed{n \leq m}$ **Dan is** $y = 2^n \mid 2^m = x$**, dus zijn beide elementen vergelijkbaar.**

Hoe weerleggen Weerleg P en weerleg Q.
Meerdere operanden: Weerleg P_1 en weerleg P_2 en … en weerleg P_n.

Formulering We moeten weerleggen dat $P \vee Q$. Ten eerste kan P niet gelden, want …. Ten tweede kan Q niet gelden, want ….

Voorbeeld We tonen aan dat de relatie ‘is een deler van’ geen totale orde is op $\mathbb{N}$. Neem immers $4, 5 \in \mathbb{N}$. We tonen aan dat 4 en 5 niet vergelijkbaar zijn. Ten eerste is $4 \nmid 5$. Ten tweede is $5 \nmid 4$.

Hoe gebruiken Maak een gevalsonderscheid:

- Je moet het bewijs kunnen afwerken als P waar is (je mag P dus toevoegen aan de context), zonder dat je iets meer weet over Q.
- Je moet **bovendien** het bewijs **ook** kunnen afwerken als Q waar is (je mag Q dus toevoegen aan de context), zonder dat je iets meer weet over P.

Betreft het een disjunctie met n operanden, dan moet je n gevallen onderscheiden, voor $i = 1, \ldots, n$. Voor **elke** i moet je het bewijs kunnen afwerken als P_i waar is (je mag P_i dus toevoegen aan de context) zonder dat je meer weet over de andere gevallen.

Formulering We weten uit ... dat $P \vee Q$. We maken een gevalsonderscheid:

- Indien P, dan ...
- Indien Q, dan ...

Voorbeeld *(Uit het voorgaande voorbeeld)* Aangezien $\leq$ een totale orde is op $\mathbb{N}$, weten we dus dat $m \leq n$ of $n \leq m$. We maken een gevalsonderscheid: *(bullet list, met telkens duidelijke markering over welk geval we spreken)*

Discussie De verdediger duidt een van de operanden (P of Q / P_1 of ... of P_n) aan waarvan die meent dat de propositie waar is. De discussie wordt verder gevoerd over de aangeduide propositie. Krijgt de verdediger het daar echter moeilijk, dan mag die diens keuze nog wijzigen en overgaan naar een andere operand, en later zelfs weer terugkeren. De replieken die de aanvaller geeft voor de ene operand, kan de verdediger tegen hen gebruiken in de andere operand. Op die manier kan de verdediger bv. elke propositie van de vorm $P \vee \neg P$ bewijzen door de aanvaller telkens in de ene operand te pareren met diens replieken uit de andere operand, zonder zelf iets aan de discussie bij te dragen.

4.4 Implicatie: Als ... dan ...

In symbolen $P \Rightarrow Q$

In woorden Als P, dan Q.
P impliceert Q.

Tegendeel in symbolen $P \wedge \neg Q$

Tegendeel in woorden P is waar, en toch is Q niet waar.

Hoe bewijzen Neem aan dat P waar is (voeg P toe aan de context), en bewijs Q.

Formulering We veronderstellen P / we nemen aan dat P waar is, en we bewijzen Q: ...

Voorbeeld We tonen aan dat het kwadraat van een even natuurlijk getal, even is[2]. Zij $x \in \mathbb{N}$. **We nemen aan dat x even is.** Dan is er een $y \in \mathbb{N}$ zodat $x = 2y$. **We tonen nu aan dat x^2 even is.** Nu is $x^2 = (2y)^2 = 4y^2 = 2 \cdot (2y^2)$, wat duidelijk deelbaar is door 2 en dus even.

Hoe weerleggen Toon aan dat P waar is, en Q toch vals is.

Formulering *(Typisch is er voorafgaandelijk een universele kwantor $\forall$ en betreft het dus een algemene implicatie.)* We weerleggen dat uit P steeds volgt dat Q waar is. Het is immers zo dat P waar is, want .... Toch is Q niet waar, want ....

Voorbeeld Een veelvoud van een oneven natuurlijk getal is niet steeds oneven[3] Beschouw immers het getal 3, waarvan 6 een veelvoud is. Nu is 3 oneven, maar toch is 6 even.

Hoe gebruiken Optie 1: **Modus ponens:** Als je weet dat $P \Rightarrow Q$ en **daarenboven** weet dat P geldt, dan mag je besluiten dat Q geldt.

Formulering We hebben in ... aangetoond dat P waar is en we weten uit ... dat daaruit volgt dat Q waar is.

Voorbeeld We hebben hierboven aangetoond dat x oneven is. Aangezien het kwadraat van een oneven getal steeds oneven is, mogen we besluiten dat x^2 oneven is.

Optie 2: Aanpassen van het doel: Als je weet dat $P \Rightarrow Q$, en Q is wat bewezen moest worden, dan volstaat het P te bewijzen.

Formulering Aangezien $P \Rightarrow Q$, volstaat het P te bewijzen.

[2] $\forall x \in \mathbb{N} : x \text{ is even} \Rightarrow x^2 \text{ is even}$

[3] $\neg(\forall x, y \in \mathbb{N} : (x \text{ is oneven} \wedge x \mid y) \Rightarrow y \text{ is oneven})$.

Voorbeeld We moeten aantonen dat x^2 even is. Aangezien we weten dat het kwadraat van een even natuurlijk getal steeds even is, volstaat het te bewijzen dat x even is.

Optie 3: **Contrapositie:** Als je weet dat $P \Rightarrow Q$, dan mag je besluiten dat $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Formulering

- We weten dat $P \Rightarrow Q$. Aangezien Q niet geldt, kan dus ook P niet gelden.
- We weten dat $P \Rightarrow Q$. Door contrapositie volgt dat $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Voorbeeld We weten dat het kwadraat van een even natuurlijk getal steeds even is. Aangezien $x \in \mathbb{N}$ en we hierboven hebben aangetoond dat x^2 oneven is, kunnen we door contrapositie besluiten dat x oneven is.

Discussie Aanvaller Aart en verdediger Vera discussiëren verder over Q. Hierbij kan Vera gebruik maken van een hulplijn die de propositie P zal verdedigen wanneer Vera deze contesteert. Deze hulplijnrol wordt in feite ingevuld door Aart: die verbindt zich ertoe P te zullen verdedigen. Slaagt Aart er niet in deze hulplijnrol naar behoren te vervullen, dan verliest Aart de discussie in de zin dat hij niet heeft kunnen beargumenteren dat de aanname van de implicatie waar is, wat nodig is om de implicatie in haar geheel te weerleggen.

4.5 Equivalentie: Als en slechts als

In symbolen $P \Leftrightarrow Q$. Deze formule betekent, per definitie, $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

In woorden P als en slechts als (a.s.a.) Q.
Zeldzaam: P dan en alleen dan, indien Q.
Zeldzaam: P dan en slechts dan, als (desda) Q.

Tegendeel in symbolen $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

Tegendeel in woorden P geldt en toch geldt Q niet, of omgekeerd.

Hoe bewijzen Bewijs beide implicaties.

Formulering We tonen aan dat $P \Leftrightarrow Q$:

$\boxed{\Rightarrow}$ Neem aan dat P geldt. We tonen aan dat Q: …
$\boxed{\Leftarrow}$ Neem aan dat Q geldt. Dan geldt P, want …

Voorbeeld Een natuurlijk getal x is even a.s.a. x^2 even is. We tonen dit aan:

$\boxed{\Rightarrow}$ Zij x even. Dan hebben we hierboven al aangetoond dat x^2 even is.
$\boxed{\Leftarrow}$ Zij x^2 even. We weten dat het kwadraat van een oneven getal steeds oneven is. Door contrapositie besluiten we, aangezien x^2 niet oneven is, dat dan ook x niet oneven en dus wel even is.

Hoe weerleggen Weerleg één van beide implicaties.

Voorbeeld Zij $x \mid y$. We weerleggen dat x even is a.s.a. y even is. **Met name hoeft het feit dat y even is, niet te impliceren dat x even is.** Neem bijvoorbeeld $x = 5$ en $y = 10$. Dan is y even, maar toch is x oneven.

Hoe gebruiken Je kan beide implicaties gebruiken. Door contrapositie weet je bovendien dat $\neg P \Leftrightarrow \neg Q$.

Discussie Volgens $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$, zie conjunctie en implicatie.

4.6 Negatie: Niet

In symbolen $\neg P$

In woorden Niet P / P is vals / P is niet waar / P geldt niet / Het is niet zo dat P geldt.

Tegendeel in symbolen P

Terzijde: In de constructieve logica is $\neg\neg P$ een zwakkere uitspraak dan P. Om P te beweren, moeten we concrete evidentie kunnen voorleggen. Om $\neg\neg P$ te beweren, moeten we slechts weerleggen dat het onmogelijk zou zijn om concrete evidentie voor te leggen. Doorgaans, en ook hier, beperken we ons tot de klassieke logica en nemen we aan dat $\neg\neg P \Leftrightarrow P$.

Tegendeel in woorden P is waar / P geldt.

Hoe bewijzen Optie 1: weerleg P.

Formulering We weerleggen P: …

Voorbeeld *Zie alle voorbeelden van weerleggingen hierboven.*

Optie 2: uit het ongerijmde: veronderstel P, en leid een contradictie af.

Formulering We tonen uit het ongerijmde, dat P niet waar is. Veronderstel dat P wel waar is. Dan …. Dit is een contradictie.

Voorbeeld Er bestaat geen rationaal getal waarvan het kwadraat 2 is. **Zij immers $\frac{p}{q}$ zo'n getal.** Zonder verlies van algemeenheid, mogen we aannemen dat $\frac{p}{q}$ een onvereenvoudigbare breuk is. Omdat $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$, weten we dat $p^2 = 2q^2$. Dus is p^2 even, dus is p even, dus bestaat er een $r \in \mathbb{N}$ zodat $p = 2r$. Dan is $p^2 = 4r^2 = 2q^2$, dus $q^2 = 2r^2$, dus q^2 is even, dus is q even. **Dan zijn p en q beide even, wat in strijd is met de aanname dat $\frac{p}{q}$ een onvereenvoudigbare breuk was.**

Hoe weerleggen Bewijs P

Hoe gebruiken Optie 1: Met contrapositie (zie paragraaf 4.4).

Optie 2: Als je weet dat $\neg P$ geldt en **daarenboven** weet dat P geldt, dan heb je een contradictie. Gek genoeg is dit (gesteld dat je geen redeneerfouten gemaakt hebt) geen mislukking, maar een succes: je mag het te bewijzen als bewezen beschouwen. Immers:

- Als er nog geen aannames gemaakt zijn, dan kan dit niet voorkomen.
- Als er wel aannames gemaakt zijn, bv. omdat je een stelling met aannames tracht te bewijzen, dan blijkt dat deze aannames onmogelijk zijn, en mag je dus onder die aannames eender wat concluderen.
- Als er een gevalsonderscheid gemaakt is, dan betekent dit dat het huidige geval zich niet kan voordoen.

Formulering We hebben P bewezen, maar we weten uit … dat P niet geldt. Dit is een contradictie.

Voorbeeld *Zie voorbeeld van bewijs uit het ongerijmde hierboven.*

Discussie De rollen van aanvaller en verdediger wisselen om en de discussie gaat verder over P.

4.7 Universele kwantor: Voor alle

In symbolen $\forall x \in A : Q(x)$.
Met extra voorwaarde: $\forall x \in A : P(x) \Rightarrow Q(x)$

In woorden **Voor alle** $x \in A$ geldt $Q(x)$.
Met extra voorwaarde: **Voor alle** $x \in A$ **waarvoor** $P(x)$, geldt $Q(x)$.

Tegendeel in symbolen $\exists x \in A : \neg Q(x)$.
Met extra voorwaarde: $\exists x \in A : P(x) \wedge \neg Q(x)$.

Tegendeel in woorden **Er bestaat** een $x \in A$ zodat $Q(x)$ niet geldt.
Met extra voorwaarde: **Er bestaat** een $x \in A$ **waarvoor** $P(x)$ geldt, maar $Q(x)$ niet.

Hoe bewijzen Beschouw een willekeurige $x \in A$ (dit is een object dat je toevoegt aan de context en vanaf nu dus over beschikt, onder de naam x) en bewijs $Q(x)$.
Met extra voorwaarde: … en bewijs $Q(x)$ in de veronderstelling dat $P(x)$ geldt (dit is weer kennis die je kan toevoegen aan de context).

Formulering *Zonder extra voorwaarde:*

- Zij $x \in A$. We tonen aan dat $Q(x)$.
- Neem een willekeurige $x \in A$. We tonen aan dat $Q(x)$.
- Fixeer $x \in A$. We tonen aan dat $Q(x)$.[4]

Met extra voorwaarde:

- Zij $x \in A$ waarvoor $P(x)$. We tonen aan dat $Q(x)$.
- Neem een willekeurige $x \in A$ zodat $P(x)$. We tonen aan dat $Q(x)$.
- Fixeer een $x \in A$ die voldoet aan $P(x)$. We tonen aan dat $Q(x)$.

Voorbeeld Het kwadraat van een even natuurlijk getal is steeds even.[5] **Zij $x \in \mathbb{N}$ even. We tonen aan dat x^2 even is.** ….

Hoe weerleggen Kom **zelf** op de proppen met een $a \in A$ die **niet** voldoet aan $Q(a)$. Die a vind je misschien in de context (d.w.z. ze is eerder gegeven), ofwel moet je ze construeren uit andere objecten.
Met extra voorwaarde: Kom **zelf** op de proppen met een x die **wel** voldoet aan $P(x)$ maar **niet** aan $Q(x)$.

Formulering We weerleggen dat $\forall x \in A : P(x) \Rightarrow Q(x)$. Hiertoe construeren we een tegenvoorbeeld $a \in A$. We construeren a als volgt …. Inderdaad voldoet a nu aan $P(a)$, want …. Echter voldoet a niet aan $Q(a)$.

Voorbeeld Een veelvoud van een oneven natuurlijk getal is niet steeds oneven[6] **Beschouw immers het getal 3, waarvan 6 een veelvoud is. Nu is 3 oneven, maar toch is 6 even.**[7]

Hoe gebruiken Als je weet dat $\forall x \in A : Q(x)$, en je beschikt over, of construeert, een concreet object $a \in A$, dan mag je besluiten dat $Q(a)$.
Met extra voorwaarde: Als je weet dat $\forall x \in A : P(x) \Rightarrow Q(x)$, en je beschikt over, of construeert, een concreet object $a \in A$ dat voldoet aan $P(a)$, dan mag je besluiten dat $Q(a)$.

Formulering We weten dat $\forall x \in A : P(x) \Rightarrow Q(x)$. Aangezien $a \in A$ voldoet aan $P(a)$, concluderen we dat $Q(a)$ geldt.

Voorbeeld We hebben aangetoond dat q^2 even is. We weten dat elk natuurlijk getal $x \in \mathbb{N}$ met een even kwadraat, zelf even is.[8] Dus is q even.

[4] Met 'fixeren' wordt bedoelt dat x weliswaar willekeurig is, maar nu voor eens en voor altijd gegeven wordt en doorheen de verdere argumentatie niet meer wijzigt.
[5] $\forall x \in \mathbb{N} : x \text{ is even} \Rightarrow x^2 \text{ is even}$
[6] $\neg(\forall x, y \in \mathbb{N} : (x \text{ is oneven} \wedge x \mid y) \Rightarrow y \text{ is oneven})$.
[7] $(3 \text{ is oneven} \wedge 3 \mid 6) \wedge \neg(6 \text{ is oneven})$
[8] $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 \text{ is even} \Rightarrow x \text{ is even}$

Discussie De aanvaller kiest een waarde $a \in A$ waarvan die meent dat $Q(a)$ onwaar is; een kandidaat-tegenvoorbeeld dus. De discussie gaat verder over $Q(a)$. Net als bij conjunctie, mag de aanvaller later nog terugkomen op de keuze van kandidaat-tegenvoorbeeld.

4.8 Existentiële kwantor: Er bestaat

In symbolen $\exists x \in A : Q(x)$.
Met extra voorwaarde: $\exists x \in A : P(x) \wedge Q(x)$.

In woorden **Er bestaat** een $x \in A$ **zodat** $Q(x)$ geldt.
Met extra voorwaarde: **Er bestaat** een $x \in A$ **waarvoor** $P(x)$ geldt, **zodat** $Q(x)$ geldt.

Tegendeel in symbolen $\forall x \in A : \neg Q(x)$.
Met extra voorwaarde: $\forall x \in A : P(x) \Rightarrow \neg Q(x)$.

Tegendeel in woorden Voor alle $x \in A$ is $Q(x)$ vals. / Voor geen enkele $x \in A$ geldt $Q(x)$.
Met extra voorwaarde: Voor alle $x \in A$ waarvoor $P(x)$ geldt, is $Q(x)$ vals. / Voor geen enkele $x \in A$ waarvoor $P(x)$ geldt, geldt ook $Q(x)$.

Opmerking Het kan vreemd lijken, dat $P(x)$ en $Q(x)$ in de oorspronkelijke formule $\exists x \in A.P(x) \wedge Q(x)$ op gelijke voet staan, maar vervolgens anders behandeld worden in de bewoordingen en de negatie.

- In de bewoordingen kan je 'waarvoor' en 'zodat' eigenlijk als synoniemen beschouwen.
- In het algemeen is $A \Rightarrow B$ equivalent met $\neg A \vee B$.[9] Beide formules hebben immers dezelfde negatie $A \wedge \neg B$. Stel je nu $A = P(x)$ en $B = \neg Q(x)$, dan zie je dat $P(x) \Rightarrow \neg Q(x)$ equivalent is met $\neg P(x) \vee \neg Q(x)$.

We blijven beide predicaten dus op gelijke voet behandelen. Dit betekent ook dat je ze vrijelijk van rol kan laten wisselen.

Hoe bewijzen Kom **zelf** op de proppen met een $a \in A$ die voldoet aan $Q(a)$. Die a vind je misschien in de context (d.w.z. ze is eerder gegeven), ofwel moet je ze construeren uit andere objecten.
Met extra voorwaarde: Bewijs bovendien dat a ook aan de extra voorwaarde $P(a)$ voldoet.

Formulering We moeten bewijzen dat er een $x \in A$ bestaat zodat $Q(x)$ geldt. Beschouw $a \in A$. Daarvoor geldt inderdaad $Q(a)$, want ...

Voorbeeld We bewijzen dat er een even priemgetal bestaat.[10] Beschouw het getal 2. Dat getal is duidelijk even, want het is deelbaar door 2. Het is ook priem, want het is alleen deelbaar door 1 en zichzelf.

Hoe weerleggen Beschouw een willekeurige $x \in A$ (dit is een object dat je toevoegt aan de context en vanaf nu dus over beschikt, onder de naam x) en weerleg $Q(x)$.
Met extra voorwaarde: ... en weerleg $Q(x)$ in de veronderstelling dat $P(x)$ geldt (dit is weer kennis die je kan toevoegen aan de context).

Formulering *Zonder extra voorwaarde:* We weeerleggen dat er een $x \in A$ bestaat zodat $Q(x)$.

- Zij immers $x \in A$. Dan geldt $Q(x)$ niet want ...
- Neem immers een willekeurige $x \in A$. We weerleggen $Q(x)$.
- Fixeer immers $x \in A$. We tonen aan dat $Q(x)$ niet geldt.

Met extra voorwaarde: We weeerleggen dat er een $x \in A$ bestaat die voldoet aan $P(x)$ zodat $Q(x)$.

- Zij immers $x \in A$ waarvoor $P(x)$. Dan geldt $Q(x)$ niet want ...
- Neem immers een willekeurige $x \in A$ waarvoor $P(x)$. We weerleggen $Q(x)$.

[9] Dit moet je lezen als $(\neg A) \vee B$.
[10] $\exists x \in \mathbb{N} : x$ is even $\wedge\ x$ is priem

- Fixeer immers een $x \in A$ die voldoet aan $P(x)$. We tonen aan dat $Q(x)$ niet geldt.

Voorbeeld We weerleggen de stelling dat er een priemgetal bestaat dat deelbaar is door 9.[11] Zij immers x een natuurlijk getal dat deelbaar is door 9. Dan is x ook deelbaar door 3, maar niet gelijk aan 3, en dus niet alleen deelbaar door 1 en door zichzelf. Dus is x niet priem.

Hoe gebruiken Als je weet dat $\exists x \in A : Q(x)$, dan beschik je over een object $x \in A$ en weet je dat $Q(x)$ geldt.
Met extra voorwaarde: Als je weet dat $\exists x \in A : P(x) \wedge Q(x)$, dan beschik je over een object $x \in A$ en weet je dat $P(x)$ geldt en dat $Q(x)$ geldt.

Formulering *(Meestal worden hier heel weinig woorden aan vuilgemaakt: de formulering 'er bestaat' geeft al aan dat het object beschikbaar is.)*

Voorbeeld Zij $r \in \mathbb{R}_0^+$ een positief reëel getal verschillend van 0. In de analyse wordt bewezen dat **er een** $x \in \mathbb{R}$ **bestaat zodat** $x^2 = r$.[12] Evident is dan ook $(-x)^2 = r$. Uit de algebra weten we, omdat $\mathbb{R}$ een veld is, dat de vergelijking $y^2 = r$ maar 2 verschillende oplossingen kan hebben. Dat zijn dus x en $-x$. Eén van deze twee is positief; dit getal kunnen we noteren als $|x|$. Dit getal noemen we nu $\sqrt{r} := |x|$. Dus is $\sqrt{r}^2 = |x|^2 = x^2$ en **hiervan weten we dat** $x^2 = r$.

Discussie De verdediger kiest een waarde $a \in A$ waarvan die meent dat $Q(a)$ waar is; een kandidaat-voorbeeld dus. De discussie gaat verder over $Q(a)$. Net als bij disjunctie, mag de verdediger later nog terugkomen op de keuze van kandidaat-voorbeeld.

4.9 Gelijkheid

In symbolen $x = y$

In woorden x is y. x is gelijk aan y.

Tegendeel in symbolen $x \neq y$

Tegendeel in woorden x is niet gelijk aan y. x is verschillend van y.

Hoe bewijzen Doorgaans door de uitdrukkingen in beide leden te herschrijven tot ze gelijk worden.

Hoe weerleggen Doorgaans door de uitdrukkingen in beide leden te herschrijven tot ze duidelijk verschillend worden.

Hoe gebruiken Wanneer je weet dat $x = y$, dan mag je overal de uitdrukking x vervangen door (herschrijven tot) y en vice versa. Beide objecten x en y worden als identiek gezien: wat geldt voor de ene, geldt voor de andere, want ze zijn een en hetzelfde.

5 Andere bewijstechnieken

5.1 Inductie op de natuurlijke getallen

We hebben hierboven aangegeven hoe je *kennis* kan gebruiken: als je weet dat een bepaalde propositie waar is, dan kan je daar iets mee. Soms kan je niet alleen met *kennis* maar ook met een wiskundig *object* iets aanvangen. Stel dat we beschikken over een natuurlijk getal $k \in \mathbb{N}$ en we willen daarover een uitspraak $P(k)$ bewijzen. Een veelgebruikte techniek hiervoor is een bewijs per inductie:

- Vind een geschikte inductiehypothese, d.w.z. een predicaat $H(n)$ op de natuurlijke getallen $n \in \mathbb{N}$, dus een uitspraak $H(n)$ die betekenisvol is voor elk natuurlijk getal n. Soms kan je gewoon $P(n)$ zelf als inductiehypothese nemen, maar dit lukt niet altijd.
- Toon aan dat het volstaat $H(k)$ te bewijzen, m.a.w. dat $H(k) \Rightarrow P(k)$.

[11] $\exists x \in \mathbb{N} : x$ is priem $\wedge\ 9 \mid x$
[12] $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = r$.

- Toon per inductie aan dat $H(n)$ geldt voor *alle* natuurlijke getallen n. Hiertoe moet je twee dingen aantonen:
  - **Inductiebasis:** $H(0)$ is waar.
  - **Inductiestap:** $\forall n \in \mathbb{N} : H(n) \Rightarrow H(n+1)$. Merk op dat de $n \in \mathbb{N}$ hier dus een *gegeven onbekende* is, en dat je de inductiehypothese *mag aannemen* voor n, maar *moet bewijzen* voor $n+1$.

  Beschik je in de plaats over een natuurlijk getal $k \in \mathbb{N}_0$ verschillend van 0, dan is dezelfde bewijstechniek van toepassing, maar bewijs je als inductiebasis dat $H(1)$ waar is.

Voor een voorbeeld, zie lemma 6.6.

6 Uitgebreide voorbeelden

In deze sectie schrijven we enkele bewijzen in woorden uit, waarbij we regelmatig weergeven wat op een bepaald punt in het bewijs de context en het te bewijzen is. We gebruiken daarbij volgende notatie:

$$\text{objecten in de context} \mid \text{aannames in de context} \vdash \text{te bewijzen}$$

Deze notities maken uiteraard geen deel uit van het eigenlijke bewijs, en worden in de praktijk nooit uitgeschreven.

Daarnaast verwijzen we naar de standaardmethoden uit paragrafen 4 en 5 om proposities te bewijzen, te weerleggen of te gebruiken.

6.1 Continuïteit 1 (analyse)

Stelling 6.1. De functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = 2x$ is continu.

Bewijs. We moeten aantonen dat g continu is.

$$\emptyset \mid \emptyset \vdash \forall x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : |x-y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Dat betekent dat g continu is in elk punt $x \in \mathbb{R}$. Fixeer dus een $x \in \mathbb{R}$. **(Bewijs $\forall$.)**

$$x \in \mathbb{R} \mid \emptyset \vdash \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : |x-y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

Zij $\varepsilon > 0$. **(Bewijs $\forall$.)**

$$x \in \mathbb{R}; \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ \mid \emptyset \vdash \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : |x-y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

We moeten een $\delta > 0$ kiezen zodat voor alle $y \in \mathbb{R}$ geldt: als $|x-y| < \delta$, dan $|g(x) - g(y)| = |2x - 2y| = 2|x-y| < \varepsilon$. Stel nu $\delta = \varepsilon/2$, **(Bewijs $\exists$.)**

$$x \in \mathbb{R}; \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ \mid \emptyset \vdash \forall y \in \mathbb{R} : |x-y| < \varepsilon/2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

en neem $y \in \mathbb{R}$ willekeurig. **(Bewijs $\forall$.)**

$$x \in \mathbb{R}; \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+; y \in \mathbb{R} \mid \emptyset \vdash |x-y| < \varepsilon/2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

Als dan $|x-y| < \varepsilon/2$, **(Bewijs $\Rightarrow$)**

$$x \in \mathbb{R}; \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+; y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < \varepsilon/2 \vdash |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

dan volgt onmiddellijk dat $|g(x) - g(y)| = 2|x-y| < 2\varepsilon/2 = \varepsilon$. **(Rekenregels.)** □

6.2 Continuïteit 2 (analyse)

Stelling 6.2. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie. Als f continu is, dan is ook $g(x) = 2f(x)$ continu.

Bewijs.

$$\emptyset \mid \emptyset \vdash \forall (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}). f \text{ is continu} \Rightarrow g(x) = 2f(x) \text{ is continu}$$

Zij f een continue functie. We moeten aantonen dat g continu is. **(Bewijs $\forall$ met voorwaarde.)**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continu} \vdash g(x) = 2f(x) \text{ is continu}$$

Dat betekent dat g continu moet zijn in elk punt $x \in \mathbb{R}$. **(Definitie continuïteit op domein.)**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continu} \vdash \forall x \in \mathbb{R} : g(x) = 2f(x) \text{ is continu in } x$$

Fixeer dus een $x \in \mathbb{R}$. **(Bewijs $\forall$.)**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \in \mathbb{R} \mid f \text{ is continu} \vdash g(x) = 2f(x) \text{ is continu in } x$$

Dan is f continu in x. **(Gebruik $\forall$.)**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \in \mathbb{R} \mid f \text{ is continu in } x \vdash g(x) = 2f(x) \text{ is continu in } x$$

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. **(Bewijs $\forall$ + definitie continuïteit in een punt.)**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}; \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ \mid f \text{ is continu in } x \vdash \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \Rightarrow |2f(x) - 2f(y)| < \varepsilon$$

We moeten nu een $\delta > 0$ vinden zodat, voor alle $y \in \mathbb{R}$, als $|x - y| < \delta$, dan $|2f(x) - 2f(y)| = 2|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. **(Herinnering aan het te bewijzen.)**

Aangezien f continu is in x, bestaat er, voor elke keuze van $\varepsilon' > 0$ een $\delta' > 0$ zodat voor alle $y \in \mathbb{R}$, als $|x - y| < \delta'$, dan $|f(x) - f(y)| < \varepsilon'$. **(Definitie continuïteit in een punt.)**

$$\begin{aligned} & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}; \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ \\ & \mid \forall \varepsilon' > 0 : \exists \delta' > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon' \\ & \vdash \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \Rightarrow |2f(x) - 2f(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Kies nu $\varepsilon' = \varepsilon/2$. **(Gebruik $\forall$.)**

$$\begin{aligned} & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}; \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ \\ & \mid \exists \delta' > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 \\ & \vdash \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \Rightarrow |2f(x) - 2f(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Dit levert ons een waarde voor δ'. **(Gebruik $\exists$.)**

$$\begin{aligned} & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}; \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+; \delta' \in \mathbb{R}_0^+ \\ & \mid \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 \\ & \vdash \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \Rightarrow |2f(x) - 2f(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Kies nu $\delta = \delta'$. **(Bewijs $\exists$.)**

$$\begin{aligned} & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}; \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+; \delta' \in \mathbb{R}_0^+ \\ & \mid \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 \\ & \vdash \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta' \Rightarrow |2f(x) - 2f(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Zij dan $y \in \mathbb{R}$ met $|x - y| < \delta'$. **(Bewijs $\forall$ met voorwaarde.)**

$$\begin{aligned} & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}; \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+; \delta' \in \mathbb{R}_0^+; y \in \mathbb{R} \\ & \mid \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2; |x - y| < \delta' \\ & \vdash |2f(x) - 2f(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Dan weten we dat $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$, **(Gebruik $\Rightarrow$ door modus ponens.)**

$$\begin{aligned} & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}; \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+; \delta' \in \mathbb{R}_0^+; y \in \mathbb{R} \\ & \mid |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 \\ & \vdash |2f(x) - 2f(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

waaruit onmiddellijk volgt dat $|2f(x) - 2f(y)| = 2|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. **(Rekenregels.)** □

6.3 Discontinuïteit (analyse)

Definitie 6.3. De **Heaviside step function** $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ 1 & \text{als } x \geq 0 \end{cases}.$$

Stelling 6.4. De Heaviside step function is niet continu.

Bewijs.

$$\varnothing \mid \varnothing \vdash \neg(H \text{ is continu})$$

$$\varnothing \mid \varnothing \vdash \neg(\forall x \in \mathbb{R} : H \text{ is continu in } x)$$

We tonen aan dat H een discontinuïteit vertoont in $x = 0$. **(Weerleg $\forall$.)**

$$\varnothing \mid \varnothing \vdash \neg(H \text{ is continu in } 0)$$

Continuïteit stelt dat we $H(0)$ met een willekeurig kleine foutenmarge $\varepsilon > 0$ kunnen bereiken door eenvoerwaarde voldoende dicht bij $x = 0$ te kiezen. **(Definitie continuïteit.)**

$$\varnothing \mid \varnothing \vdash \neg(\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : |0 - y| < \delta \Rightarrow |H(0) - H(y)| < \varepsilon)$$

We tonen aan dat dit niet geldt voor de foutenmarge $\varepsilon = 1/2$. **(Weerleg $\forall$.)**

$$\varnothing \mid \varnothing \vdash \neg(\exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : |0 - y| < \delta \Rightarrow |H(0) - H(y)| < 1/2)$$

Zij immers $\delta > 0$. **(Weerleg $\exists$.)**

$$\delta \in \mathbb{R}_0^+ \mid \varnothing \vdash \neg(\forall y \in \mathbb{R} : |0 - y| < \delta \Rightarrow |H(0) - H(y)| < 1/2)$$

Kies nu $y = -\delta/2$. Dan is $|0 - y| = \delta/2 < \delta$. **(Weerleg $\forall$ met voorwaarde.)**

$$\delta \in \mathbb{R}_0^+ \mid \varnothing \vdash \neg(|H(0) - H(-\delta/2)| < 1/2)$$

Nu is $|H(0) = H(-\delta/2)| = |1 - 0| = 1 \not< 1/2$. □

6.4 Niet-continuïteit (vastepuntstheorie)

We kunnen de Heaviside step function uitbreiden tot een functie $\overline{H} : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ door te stellen: $\overline{H}(-\infty) = 0$ en $\overline{H}(+\infty) = 1$.

Stelling 6.5. De functie $\overline{H}$ op de tralie $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ is niet continu.

Bewijs.

$$\varnothing \mid \varnothing \vdash \neg\Big(\forall X \subseteq \overline{\mathbb{R}} : X \text{ is gericht} \Rightarrow \sup \overline{H}(X) = \overline{H}(\sup X)\Big)$$

We tonen aan dat er een gerichte verzameling X bestaat, zodat $\sup \overline{H}(X) \neq \overline{H}(\sup X)$. **(Weerleg $\forall$ met voorwaarde.)**

$$\varnothing \mid \varnothing \vdash \exists X \subseteq \overline{\mathbb{R}} : X \text{ is gericht} \wedge \sup \overline{H}(X) \neq \overline{H}(\sup X)$$

Beschouw de verzameling $X = \mathbb{R}^- \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. **(Bewijs $\exists$.)**

$$\varnothing \mid \varnothing \vdash \mathbb{R}^- \text{ is gericht} \wedge \sup \overline{H}(\mathbb{R}^-) \neq \overline{H}(\sup \mathbb{R}^-)$$

(Bewijs $\wedge$.)

- We tonen aan dat $\mathbb{R}_0^-$ gericht is,

  $$\varnothing \mid \varnothing \vdash \mathbb{R}_0^- \text{ is gericht}$$

  dus dat elke eindige deelverzameling van $\mathbb{R}_0^-$, een bovengrens heeft in X. **(Definitie gerichte verzameling.)**

  $$\varnothing \mid \varnothing \vdash \forall Y \subseteq \mathbb{R}_0^- : Y \text{ is eindig} \Rightarrow \exists b \in X : b \text{ is een bovengrens van } Y$$

  Zij Y een eindige deelverzameling van $\mathbb{R}_0^-$. **(Bewijs $\forall$ met voorwaarde.)**

  $$Y \subseteq \mathbb{R}_0^- \mid Y \text{ is eindig} \vdash \exists b \in X : b \text{ is een bovengrens van } Y$$

  Uit lemma 6.6 volgt dan dat Y een maximum $m \in Y$ heeft. **(Gebruik $\forall$: kies $\mathbb{R}_0^-$ als totaal geordende verzameling en $Y \subseteq \mathbb{R}_0^-$ als eindig deel.)**

  $$Y \subseteq \mathbb{R}_0^-; m \in Y \mid Y \text{ is eindig}, m \text{ is het maximum van } Y \vdash \exists b \in X : b \text{ is een bovengrens van } Y$$

  Dan is m ook een bovengrens van Y **(gebruik via modus ponens van de implicatie: m is een maximum van $Y \Rightarrow m$ is een bovengrens van Y)**

  $$Y \subseteq \mathbb{R}_0^-; m \in Y \mid Y \text{ is eindig}, m \text{ is een bovengrens van } Y \vdash \exists b \in X : b \text{ is een bovengrens van } Y$$

  en aangezien $m \in Y \subseteq X$ heeft Y dus een bovengrens in X.

  $$Y \subseteq \mathbb{R}_0^-; m \in Y \mid Y \text{ is eindig}, m \text{ is een bovengrens van } Y \vdash m \text{ is een bovengrens van } Y$$

- We tonen aan dat $\sup \overline{H}(\mathbb{R}_0^-) \neq \overline{H}(\sup \mathbb{R}_0^-)$.

  $$\varnothing \mid \varnothing \vdash \sup \overline{H}(\mathbb{R}_0^-) \neq \overline{H}(\sup \mathbb{R}_0^-)$$

  Enerzijds hebben we: **(Definitie $\overline{H}$, supremum van een singleton.)**

  $$\sup \overline{H}(\mathbb{R}_0^-) = \sup\{0\} = 0.$$

  Anderzijds hebben we: **(Supremum van een interval, definitie $\overline{H}$.)**

  $$\overline{H}(\sup \mathbb{R}_0^-) = \overline{H}(0) = 1.$$

  $$\varnothing \mid \varnothing \vdash 0 \neq 1$$

  Dus zijn beide leden niet gelijk. **(Weerleg gelijkheid.)** ☐

Lemma 6.6. Zij $(L, \leq)$ een totaal geordende verzameling, en $X \subseteq L$ eindig en niet-leeg. Dan heeft X een maximum.

Bewijs.

$$\varnothing \mid \varnothing \vdash \forall \text{totaal geordende verz. } (L, \leq) : \forall X \subseteq L : X \text{ is eindig} \wedge X \text{ is niet-leeg} \Rightarrow X \text{ heeft een max.}$$

Zij $(L, \leq)$ een totaal geordende verzameling, **(Bewijs $\forall$)**

$$\text{totaal geordende verz. } (L, \leq) \mid \varnothing \vdash \forall X \subseteq L : X \text{ is eindig} \wedge X \text{ is niet-leeg} \Rightarrow X \text{ heeft een max.}$$

en $X \subseteq L$ eindig en niet-leeg. **(Bewijs $\forall$ met voorwaarde; gebruik $\wedge$)**

$$\text{totaal geordende verz. } (L, \leq); X \subseteq L \mid X \text{ is eindig}; X \text{ is niet-leeg} \vdash X \text{ heeft een max.}$$

Aangezien X eindig is, is het aantal elementen van X een natuurlijk getal k. **(Definitie eindigheid.)**

$$\text{totaal geordende verz. } (L, \leq); X \subseteq L; k \in \mathbb{N} \mid X \text{ heeft } k \text{ elem.}; X \text{ is niet-leeg} \vdash X \text{ heeft een max.}$$

Het feit dat X niet-leeg is, betekent dat $k \neq 0$. **(Definitie leeg.)**

$$\text{totaal geordende verz. } (L, \leq); X \subseteq L; k \in \mathbb{N}_0 \mid X \text{ heeft } k \text{ elem.} \vdash X \text{ heeft een max.}$$

We vervolgen het bewijs per inductie op k. **(Formeel is de inductiehypothese nu $H(n)$ = "$\forall X \subseteq L : X$ heeft n elem. $\Rightarrow X$ heeft een max.". Deze uitspraak zullen we bewijzen voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.)**

$$\text{totaal geordende verz. } (L, \leq) \mid \oslash \vdash \forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall X \subseteq L : X \text{ heeft } n \text{ elem.} \Rightarrow X \text{ heeft een max.}$$

Inductiebasis

$$\text{totaal geordende verz. } (L, \leq) \mid \oslash \vdash \forall X \subseteq L : X \text{ heeft 1 elem.} \Rightarrow X \text{ heeft een max.}$$

Zij $X \subseteq L$ een verzameling met 1 element. **(Bewijs $\forall$ met voorwaarde.)**

$$\text{totaal geordende verz. } (L, \leq); X \subseteq L \mid X \text{ heeft 1 elem.} \vdash X \text{ heeft een max.}$$

Aangezien X juist één element heeft, is X een singleton $\{x\}$.

$$\text{totaal geordende verz. } (L, \leq); X \subseteq L; x \in L \mid X = \{x\} \vdash X \text{ heeft een max.}$$

We tonen aan dat X een maximum heeft, **(Definitie maximum.)**

$$\text{totaal geordende verz. } (L, \leq); X \subseteq L; x \in L \mid X = \{x\} \vdash \exists y \in X : \forall z \in X : z \leq y$$

namelijk x. **(Bewijs $\exists$)**

$$\text{totaal geordende verz. } (L, \leq); X \subseteq L; x \in L \mid X = \{x\} \vdash \forall z \in X : z \leq x$$

Inderdaad, zij $z \in X$. **(Bewijs $\forall$)**

$$\text{totaal geordende verz. } (L, \leq); X \subseteq L; x \in L; z \in X \mid X = \{x\} \vdash z \leq x$$

Dan is $z = x$ aangezien $X = \{x\}$,

$$\text{totaal geordende verz. } (L, \leq); X \subseteq L; x \in L; z \in X \mid X = \{x\}; z = x \vdash z \leq x$$

en dus ook $z = x \leq x$ wegens reflexiviteit van de orderelatie.

Inductiestap Stel dat elke verzameling $X \subseteq L$ met n elementen, een maximum heeft. We tonen aan dat dit ook geldt voor elke verzameling $Y \subseteq L$ met $n + 1$ elementen.

$$\begin{array}{l} \text{totaal geordende verz. } (L, \leq); n \in \mathbb{N}_0 \\ \mid \forall X \subseteq L : X \text{ heeft } n \text{ elem.} \Rightarrow X \text{ heeft een max.} \\ \vdash \forall Y \subseteq L : Y \text{ heeft } n+1 \text{ elem.} \Rightarrow Y \text{ heeft een max.} \end{array}$$

Zij $Y \subseteq L$ een verzameling met $n + 1$ elementen. **(Bewijs $\forall$ met voorwaarde)**

$$\begin{array}{l} \text{totaal geordende verz. } (L, \leq); n \in \mathbb{N}_0; Y \subseteq L \\ \mid \forall X \subseteq L : X \text{ heeft } n \text{ elem.} \Rightarrow X \text{ heeft een max.}; \quad Y \text{ heeft } n+1 \text{ elem.} \\ \vdash Y \text{ heeft een max.} \end{array}$$

Kies een $y \in Y$.

$$\begin{array}{l} \text{totaal geordende verz. } (L, \leq); n \in \mathbb{N}_0; Y \subseteq L; y \in Y \\ \mid \forall X \subseteq L : X \text{ heeft } n \text{ elem.} \Rightarrow X \text{ heeft een max.}; \quad Y \text{ heeft } n+1 \text{ elem.} \\ \vdash Y \text{ heeft een max.} \end{array}$$

Dan heeft $Y \backslash \{y\}$ juist n elementen en dus een maximum $x \in Y \backslash \{y\}$. **(Gebruik ∀ met voorwaarde.)**

> totaal geordende verz. $(L, \leq); n \in \mathbb{N}_0; Y \subseteq L; y \in Y; x \in Y$
> $\mid \forall X \subseteq L : X$ heeft n elem. $\Rightarrow X$ heeft een max.; $\quad Y$ heeft $n+1$ elem.;
> x is het max. van $Y \setminus \{y\}$
> $\vdash Y$ heeft een max.

Omdat $\leq$ een totale orde is, zijn x en y vergelijkbaar.

> totaal geordende verz. $(L, \leq); n \in \mathbb{N}_0; Y \subseteq L; y \in Y; x \in Y$
> $\mid \forall X \subseteq L : X$ heeft n elem. $\Rightarrow X$ heeft een max.; $\quad Y$ heeft $n+1$ elem.;
> x is het max. van $Y \setminus \{y\}$; $\quad x \leq y \vee y \leq x$
> $\vdash Y$ heeft een max.

We maken een gevalsonderscheid: **(Gebruik ∨)**

$\boxed{x \leq y}$

> totaal geordende verz. $(L, \leq); n \in \mathbb{N}_0; Y \subseteq L; y \in Y; x \in Y$
> $\mid \forall X \subseteq L : X$ heeft n elem. $\Rightarrow X$ heeft een max.; $\quad Y$ heeft $n+1$ elem.;
> x is het max. van $Y \setminus \{y\}$; $\quad x \leq y$
> $\vdash \exists m \in Y : \forall z \in Y : z \leq m$

We beweren dat y het maximum is van Y. (**Bewijs ∃**)

> totaal geordende verz. $(L, \leq); n \in \mathbb{N}_0; Y \subseteq L; y \in Y; x \in Y$
> $\mid \forall X \subseteq L : X$ heeft n elem. $\Rightarrow X$ heeft een max.; $\quad Y$ heeft $n+1$ elem.;
> x is het max. van $Y \setminus \{y\}$; $\quad x \leq y$
> $\vdash \forall z \in Y : z \leq y$

Zij immers $z \in Y$. **(Gebruik ∀)**
Ofwel is $z = y$, ofwel is $z \in Y \setminus \{y\}$. **(Definitie verschil van verzamelingen. Gebruik ∨.)**

- In het eerste geval is $z = y \leq y$.
- In het tweede geval is $z \leq x \leq y$.

Dus is y een bovengrens van Y vervat in Y, dus een maximum.

$\boxed{y \leq x}$

> totaal geordende verz. $(L, \leq); n \in \mathbb{N}_0; Y \subseteq L; y \in Y; x \in Y$
> $\mid \forall X \subseteq L : X$ heeft n elem. $\Rightarrow X$ heeft een max.; $\quad Y$ heeft $n+1$ elem.;
> x is het max. van $Y \setminus \{y\}$; $\quad y \leq x$
> $\vdash \exists m \in Y : \forall z \in Y : z \leq m$

We beweren dat x het maximum is van Y. (**Bewijs ∃**)

> totaal geordende verz. $(L, \leq); n \in \mathbb{N}_0; Y \subseteq L; y \in Y; x \in Y$
> $\mid \forall X \subseteq L : X$ heeft n elem. $\Rightarrow X$ heeft een max.; $\quad Y$ heeft $n+1$ elem.;
> x is het max. van $Y \setminus \{y\}$; $\quad y \leq x$
> $\vdash \forall z \in Y : z \leq x$

Zij immers $z \in Y$. **(Gebruik ∀)**
Ofwel is $z = y$, ofwel is $z \in Y \setminus \{y\}$. **(Definitie verschil van verzamelingen. Gebruik ∨.)**

- In het eerste geval is $z = y \leq x$.
- In het tweede geval is $z \leq x$.

Dus is x een bovengrens van Y vervat in Y, dus een maximum. □