PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de ingeniería
ICS3153 Optimización Avanzada
Profesor: Cristóbal Guzmán (crguzmanp@uc.cl)
Alumno: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

# Tarea 3

## Pregunta 1

a) Consideremos en primer lugar que $f, g \in \Gamma_0(E)$. Por lo tanto tanto $f$ como $g$ son propias, lo cual también implica que $f+g$ es propia.

Partiremos tomando un $z \in [\partial f(x) + \partial g(x)] \;\Rightarrow \boxed{\exists z_1 \in \partial f(x) \wedge z_2 \in \partial g(x) : z = z_1 + z_2 \;\; (1)}$

Ahora como $x \in [dom(f) \cap dom(g)] \;\Rightarrow \boxed{x \in dom(f) \wedge x \in dom(g) \;\; (2)}$

Por (1) y (2) tenemos que $z_1 \in \partial f(x) \wedge x \in dom(f)$, de este modo:

$$\boxed{f(x) + \langle z_1, u - x\rangle \leq f(u) \;\; \forall u \in E \;\; (3)}$$

Nuevamente, por (1) y (2) tenemos que $z_2 \in \partial g(x) \wedge x \in dom(g)$, de este modo:

$$\boxed{g(x) + \langle z_2, v - x\rangle \leq g(v) \;\; \forall v \in E \;\; (4)}$$

Ahora, tomemos un $w \in E$ arbitrario.

Por (3) tenemos que:

$$\boxed{f(x) + \langle z_1, w - x\rangle \leq f(w) \;\; (5)}$$

Y por (4) tenemos que:

$$\boxed{g(x) + \langle z_2, w - x\rangle \leq g(w) \;\; (6)}$$

Sumando (5) y (6) llegamos a que:

$$f(x) + \langle z_1, w - x\rangle + g(x) + \langle z_2, w - x\rangle \leq f(w) + g(w)$$

$\Leftrightarrow$

$$f(x) + g(x) + \langle z_1 + z_2, w - x\rangle \leq f(w) + g(w)$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{(f+g)(x) + \langle z_1 + z_2, w - x\rangle \leq (f+g)(w) \;\; (7)}$$

Como se demostró (7) para un $w \in E$ arbitrario, entonces:

$$\boxed{(f+g)(x) + \langle z_1 + z_2, w - x \rangle \leq (f+g)(w) \ \ \forall w \in E \ \ (8)}$$

Ahora como por (2) tenemos que $x \in dom(f) \wedge x \in dom(g)$

$\Rightarrow \exists M_1 > 0$ con $M_1 \in \mathbb{R} \ \wedge \ M_2 > 0$ con $M_2 \in \mathbb{R}$, tales que:

$$f(x) \leq M_1 \ \wedge \ g(x) \leq M_2$$

$\Rightarrow$

$$f(x) + g(x) \leq (M_1 + M_2)$$

$\Rightarrow$

$$(f+g)(x) \leq (M_1 + M_2)$$

Definimos $M = M_1 + M_2$.

$\Rightarrow$

$$(f+g)(x) \leq M$$

Como $M_1 > 0$ con $M_1 \in \mathbb{R}$ y $M_2 > 0$ con $M_2 \in \mathbb{R}$, entonces $M > 0$ con $M \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ \exists M > 0$ con $M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(f+g)(x) \leq M$$

Lo cual implica que: $\boxed{x \in dom(f+g) \ \ (9)}$

Además como dijimos en un inicio $f, g \in \Gamma_0(E) \ \Rightarrow \ f + g \in \Gamma_0(E) \Rightarrow f + g$ es propia.

Así, de este modo usando (8) y (9) llegamos a que:

$$[z_1 + z_2] \in \partial(f+g)(x)$$

Ahora como dijimos en un inicio que $z = z_1 + z_2$, entonces tenemos que:

$$z \in (f+g)(x)$$

Como partimos de que $z \in [\partial f(x) + \partial g(x)]$ y llegamos a que $z \in (f+g)(x)$, entonces:

$$\text{Si } z \in [\partial f(x) + \partial g(x)] \ \Rightarrow \ z \in \partial(f+g)(x)$$

Y como sabemos esto implica que:

$$[\partial f(x) + \partial g(x)] \subseteq \partial(f+g)(x)$$

que es justamente lo que queríamos demostrar.

---

b) Ahora lo que debemos hacer es encontrar un contraejemplo, de modo que los conjuntos del inciso anterior no sean iguales.

Consideremos las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ +\infty & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Notemos que $\boxed{\partial f(0) = \emptyset \;\; (1)}$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Notemos que $\boxed{\partial g(0) = \emptyset \;\; (2)}$

Ahora podemos definir $f+g$.

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Se puede observar que $\boxed{\partial(f+g)(0) = \mathbb{R} \;\; (3)}$

De esta forma:

$$\partial f(0) + \partial g(0) = \emptyset + \emptyset = \emptyset \neq \mathbb{R} = \partial(f+g)(0)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\partial f(0) + \partial g(0) \neq \partial(f+g)(0) \;\; (4)}$$

Ahora notemos que tanto $f$ como $g$ son propias, convexas y semicontinuas inferior, de este modo $f, g \in \Gamma_0(E)$.

Además es claro que $0 \in dom(f)$ y $0 \in dom(g) \;\Rightarrow\; 0 \in dom(f) \cap dom(g)$.

Así de este modo, encontramos $f, g \in \Gamma_0(E)$ junto con un $x \in dom(f) \cap dom(g)$ (en particular $x = 0$) tales que $\partial f(0) + \partial g(0) \neq \partial(f+g)(0)$ que es justamente lo que estabamos buscando.

De hecho, de manera más general, para todo $k \in (0,1)$ podemos definir las funciones:

$$f_k(x) = \begin{cases} -(-x)^k & \text{si } x \leq 0 \\ +\infty & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Notemos que $\boxed{\partial f_k(0) = \emptyset \quad (5)}$

$$g_k(x) = \begin{cases} x^k & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Notemos que $\boxed{\partial g_k(0) = \emptyset \quad (6)}$

Ahora podemos definir $f + g$.

$$(f+g)_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Se puede observar que $\boxed{\partial (f+g)_k(0) = \mathbb{R} \quad (7)}$

De esta forma:

$$\partial f_k(0) + \partial g_k(0) = \emptyset + \emptyset = \emptyset \neq \mathbb{R} = \partial (f+g)_k(0)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\partial f_k(0) + \partial g_k(0) \neq \partial (f+g)_k(0) \quad (8)}$$

Ahora notemos que tanto $f_k$ como $g_k$ son propias, convexas y semicontinuas inferior, de este modo $f_k, g_k \in \Gamma_0(E)$.

Además es claro que $0 \in dom(f_k)$ y $0 \in dom(g_k) \;\Rightarrow\; 0 \in dom(f_k) \cap dom(g_k)$.

Así de este modo, encontramos $f_k, g_k \in \Gamma_0(E)$ junto con un $x \in dom(f_k) \cap dom(g_k)$ (en particular $x = 0$) tales que $\partial f_k(0) + \partial g_k(0) \neq \partial (f+g)_k(0)$ que es justamente lo que estabamos buscando.

---

c) Sea un $d \in E$ arbitrario.

Definamos la función $h \equiv f + g$.

Sea un $z \in dom(f) \cap dom(g)$ arbitrario, entonces $[z \in dom(f)] \wedge [z \in dom(g)]$, de este modo:

$\Rightarrow \exists M_1 > 0$ con $M_1 \in \mathbb{R} \;\wedge\; M_2 > 0$ con $M_2 \in \mathbb{R}$, tales que:

$$f(z) \leq M_1 \;\wedge\; g(z) \leq M_2$$

$\Rightarrow$

$$f(z) + g(z) \leq (M_1 + M_2)$$

$\Rightarrow$

$$(f + g)(z) \leq (M_1 + M_2)$$

Definimos $M = M_1 + M_2$.

$\Rightarrow$

$$(f + g)(z) \leq M$$

Como $M_1 > 0$ con $M_1 \in \mathbb{R}$ y $M_2 > 0$ con $M_2 \in \mathbb{R}$, entonces $M > 0$ con $M \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ \exists M > 0$ con $M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(f + g)(x) \leq M$$

Lo cual implica que $z \in dom(f + g)$

De este modo, como se partió de que $z \in dom(f) \cap dom(g)$ y llegamos a que $z \in dom(f + g)$, entonces:

$$\text{Si } z \in [dom(f) \cap dom(g)] \ \Rightarrow \ z \in dom(f + g)$$

Lo cual implica que:

$$\boxed{[dom(f) \cap dom(g)] \subseteq dom(f + g) \quad (1)}$$

Por otro lado, sabemos que:

$$[int(dom(f)) \subseteq dom(f)] \wedge [int(dom(g)) \subseteq dom(g)]$$

Lo cual implica que:

$$[int(dom(f)) \cap int(dom(g))] \subseteq [dom(f) \cap dom(g)]$$

Y utilizando (1) llegamos a que:

$$[int(dom(f)) \cap int(dom(g))] \subseteq [dom(f) \cap dom(g)] \subseteq dom(f + g)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{[int(dom(f)) \cap int(dom(g))] \subseteq dom(f + g) \quad (2)}$$

También como tenemos que la intersección finita de abiertos es abierto, y considerando que tanto $int(dom(f))$ como $int(dom(g))$ son abiertos, entonces $int(dom(f)) \cap int(dom(g))$ es abierto.

De este modo, tenemos que el abierto $[int(dom(f)) \cap int(dom(g))]$ esta contenido en $dom(f+g)$

Como por definición de interior de un conjunto $C$ sabemos que $int(C)$ es la unión de todos los conjuntos abiertos que son subconjuntos de $C$, entonces tenemos que:

$$\boxed{[int(dom(f)) \cap int(dom(g))] \subseteq int(dom(f+g)) \quad (3)}$$

Como definimos que $h \equiv f+g$, entonces:

$$\boxed{[int(dom(f)) \cap int(dom(g))] \subseteq int(dom(h)) \quad (4)}$$

Notemos que como tanto $f$ como $g$ pertenecen a $\Gamma_0(E)$, entonces $h \equiv f+g \in \Gamma_0(E)$.

Por otro lado, como por enunciado tenemos que $x \in int(dom(f)) \cap int(dom(g))$ por (4) tenemos que $x \in int(dom(h))$. De esta forma por teorema visto en clases tenemos que:

$$h'(x;d) = \sup_{y \in \partial h(x)} \langle y, d \rangle = \sigma_{\partial h(x)}(d)$$

De esta forma:

$$\sigma_{\partial h(x)}(d) = h'(x;d) = \inf_{\epsilon>0} \left( \frac{h(x+\epsilon d) - h(x)}{\epsilon} \right) = \inf_{\epsilon>0} \left( \frac{f(x+\epsilon d) + g(x+\epsilon d) - [f(x)+g(x)]}{\epsilon} \right)$$

$$= \inf_{\epsilon>0} \left( \frac{[f(x+\epsilon d) - f(x)] + [g(x+\epsilon d) - g(x)]}{\epsilon} \right) = \inf_{\epsilon>0} \left( \left[ \frac{f(x+\epsilon d) - f(x)}{\epsilon} \right] + \left[ \frac{g(x+\epsilon d) - g(x)}{\epsilon} \right] \right)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\sigma_{\partial h(x)}(d) = \inf_{\epsilon>0} \left( \left[ \frac{f(x+\epsilon d) - f(x)}{\epsilon} \right] + \left[ \frac{g(x+\epsilon d) - g(x)}{\epsilon} \right] \right) \quad (5)}$$

Ahora definimos:

$$q_1(\epsilon) = \left[ \frac{f(x+\epsilon d) - f(x)}{\epsilon} \right] \text{ y } q_2(\epsilon) = \left[ \frac{g(x+\epsilon d) - g(x)}{\epsilon} \right]$$

Lo cual por (5) implica que:

$$\boxed{\sigma_{\partial h(x)}(d) = \inf_{\epsilon>0} [q_1(\epsilon) + q_2(\epsilon)] \quad (6)}$$

Como vimos en clases, ya que $f, g \in \Gamma_0(E)$, entonces $f$ y $g$ son convexas, por ende tanto $q_1$ como $q_2$ son funciones crecientes, lo cual implica que $q(\epsilon) = q_1(\epsilon) + q_2(\epsilon)$ es creciente también, por lo cual se puede reemplazar el infimo por el limite. De este modo, uniendo esto con (6) tenemos que:

$$\sigma_{\partial h(x)}(d) = \inf_{\epsilon>0} [q_1(\epsilon) + q_2(\epsilon)] = \inf_{\epsilon>0} [q(\epsilon)] = \lim_{\epsilon \to 0^+} [q(\epsilon)] = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left( \left[ \frac{f(x+\epsilon d) - f(x)}{\epsilon} \right] + \left[ \frac{g(x+\epsilon d) - g(x)}{\epsilon} \right] \right)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\sigma_{\partial h(x)}(d) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left( \left[ \frac{f(x+\epsilon d) - f(x)}{\epsilon} \right] + \left[ \frac{g(x+\epsilon d) - g(x)}{\epsilon} \right] \right) \quad (7)}$$

Ahora como sabemos que tanto $\lim_{\epsilon \to 0^+} \left( \left[ \frac{f(x+\epsilon d)-f(x)}{\epsilon} \right] \right)$ como $\lim_{\epsilon \to 0^+} \left( \left[ \frac{g(x+\epsilon d)-g(x)}{\epsilon} \right] \right)$, existen (de hecho son las derivadas direccionales $f'(x; d)$ y $g'(x; d)$), entonces por propiedades de los limites podemos separar el limite de (7).

De este modo:

$$\sigma_{\partial h(x)}(d) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left( \left[ \frac{f(x+\epsilon d) - f(x)}{\epsilon} \right] + \left[ \frac{g(x+\epsilon d) - g(x)}{\epsilon} \right] \right)$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[ \frac{f(x+\epsilon d) - f(x)}{\epsilon} \right] + \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[ \frac{g(x+\epsilon d) - g(x)}{\epsilon} \right] = f'(x; d) + g'(x; d)$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_{\partial h(x)}(d) = f'(x; d) + g'(x; d)$$

Como habiamos definido que $h \equiv f + g$, entonces:

$$\boxed{\sigma_{\partial (f+g)(x)}(d) = f'(x; d) + g'(x; d) \quad (8)}$$

Ahora como por enunciado tenemos que $\boxed{f \in \Gamma_0(E)}$

Y como $x \in int(dom(f)) \cap int(dom(g)) \;\Rightarrow\; \boxed{x \in int(dom(f))}$

De esta forma:

$$\boxed{f'(x; d) = \sup_{y_1 \in \partial f(x)} \langle y_1, d \rangle \quad (9)}$$

Análogamente como por enunciado tenemos que $\boxed{g \in \Gamma_0(E)}$

Y como $x \in int(dom(f)) \cap int(dom(g)) \;\Rightarrow\; \boxed{x \in int(dom(g))}$

De esta forma:

$$\boxed{g'(x; d) = \sup_{y_2 \in \partial g(x)} \langle y_2, d \rangle \quad (10)}$$

Reemplazando (9) y (10) en (8) tenemos que:

$$\sigma_{\partial (f+g)(x)}(d) = f'(x; d) + g'(x; d) = \sup_{y_1 \in \partial f(x)} \langle y_1, d \rangle + \sup_{y_2 \in \partial g(x)} \langle y_2, d \rangle$$

$$= sup\{\langle y_1, d \rangle : y_1 \in \partial f(x)\} + sup\{\langle y_2, d \rangle : y_2 \in \partial g(x)\}$$

$$= sup\{\langle y_1, d\rangle + \langle y_2, d\rangle : y_1 \in \partial f(x) \wedge y_2 \in \partial g(x)\}$$

$$= sup\{\langle y_1 + y_2, d\rangle : y_1 \in \partial f(x) \wedge y_2 \in \partial g(x)\}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\sigma_{\partial(f+g)(x)}(d) = sup\{\langle\ y_1 + y_2, d\rangle : y_1 \in \partial f(x) \wedge y_2 \in \partial g(x)\} \quad (11)}$$

Para $sup\{\langle y_1 + y_2, d\rangle : y_1 \in \partial f(x) \wedge y_2 \in \partial g(x)\}$ si definimos $y = y_1 + y_2$ como $y_1 \in \partial f(x)$, $y_2 \in \partial g(x)$, entonces $y \in [\partial f(x) + \partial g(x)]$, de este modo:

$$sup\{\langle y_1 + y_2, d\rangle : y_1 \in \partial f(x) \wedge y_2 \in \partial g(x)\} = sup\{\langle y, d\rangle : y \in [\partial f(x) + \partial g(x)]\}$$

Así reemplazando en (11) llegamos a que:

$$\sigma_{\partial(f+g)(x)}(d) = sup\{\langle y_1 + y_2, d\rangle : y_1 \in \partial f(x) \wedge y_2 \in \partial g(x)\} = sup\{\langle y, d\rangle : y \in [\partial f(x) + \partial g(x)]\}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\sigma_{\partial(f+g)(x)}(d) = sup\{\langle y, d\rangle : y \in [\partial f(x) + \partial g(x)]\} \quad (12)}$$

Ahora por definición de la función $\sigma$ tenemos que:

$$sup\{\langle y, d\rangle : y \in [\partial f(x) + \partial g(x)]\} = \sigma_{[\partial f(x) + \partial g(x)]}(d)$$

Y reemplazando esto en (12) llegamos a que:

$$\sigma_{\partial(f+g)(x)}(d) = sup\{\langle y, d\rangle : y \in [\partial f(x) + \partial g(x)]\} = \sigma_{[\partial f(x) + \partial g(x)]}(d)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\sigma_{\partial(f+g)(x)}(d) = \sigma_{[\partial f(x) + \partial g(x)]}(d) \quad (13)}$$

Ahora como se probo esto para un $d \in E$ arbitrario, entonces:

$$\boxed{\sigma_{\partial(f+g)(x)}(d) = \sigma_{[\partial f(x) + \partial g(x)]}(d) \quad \forall d \in E \quad (14)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\sigma_{\partial(f+g)(x)} \equiv \sigma_{[\partial f(x) + \partial g(x)]} \quad (15)}$$

Ahora como $f, g \in \Gamma_0(E)$ entonces $f$ y $g$ son convexas y propias, por lo tanto $h \equiv f + g$ también es convexa y propia, por ende $\partial h(x) = \partial(f + g)(x)$ es un convexo cerrado.

$$\boxed{\partial(f+g)(x) \ \text{ es un convexo cerrado } \quad (16)}$$

Ahora como $f \in \Gamma_0(E)$ entonces $f$ es convexa y propia, por lo tanto:

$$\boxed{\partial f(x) \ \text{ es un convexo cerrado } \quad (17)}$$

Y como $g \in \Gamma_0(E)$ entonces $g$ es convexa y propia, por lo tanto:

$$\boxed{\partial g(x) \ \text{ es un convexo cerrado } \quad (18)}$$

Ahora, lo que demostraremos es que sean $A$ y $B$ dos conjuntos cualesquiera convexos y cerrados, entonces $A+B$ también es un convexo cerrado.

Partiremos demostrando que si $A$ y $B$ son convexos, entonces $A+B$ es conexo.

Sean $c_1, c_2 \in A+B$ arbitrarios $\Rightarrow \exists\ a_1, a_2 \in A \wedge \exists\ b_1, b_2 \in B : (c_1 = a_1 + b_1 \wedge c_2 = a_2 + b_2)$

Ahora sea un $\lambda \in [0,1]$ arbitrario, entonces:

$$\lambda c_1 + [1-\lambda]c_2 = \lambda(a_1+b_1) + [1-\lambda](a_2+b_2) = \lambda a_1 + \lambda b_1 + [1-\lambda]a_2 + [1-\lambda]b_2$$

$$= (\lambda a_1 + [1-\lambda]a_2) + (\lambda b_1 + [1-\lambda]b_2)$$

$\Rightarrow$

$$\lambda c_1 + [1-\lambda]c_2 = (\lambda a_1 + [1-\lambda]a_2) + (\lambda b_1 + [1-\lambda]b_2)$$

Ahora como $a_1, a_2 \in A$ y $\lambda \in [0,1]$ sumado a que $A$ es convexo, entonces $(\lambda a_1 + [1-\lambda]a_2) \in A$

También como $b_1, b_2 \in B$ y $\lambda \in [0,1]$ sumado a que $B$ es convexo, entonces $(\lambda b_1 + [1-\lambda]b_2) \in B$

$\Rightarrow$

$$(\lambda a_1 + [1-\lambda]a_2) + (\lambda b_1 + [1-\lambda]b_2) \in (A+B)$$

De esta forma:

$$\lambda c_1 + [1-\lambda]c_2 = (\lambda a_1 + [1-\lambda]a_2) + (\lambda b_1 + [1-\lambda]b_2) \in (A+B)$$

Así tenemos que:

$$\text{Si } c_1, c_2 \in (A+B) \ \Rightarrow \ \lambda c_1 + [1-\lambda]c_2 \in (A+B)$$

Y como se demostró esto para un $c_1, c_2 \in (A+B)$ arbitrarios y para un $\lambda \in [0,1]$ arbitrario, entonces se demostró que $A+B$ es convexo.

De esta forma se demostró que:

$$\boxed{\text{Si } A, B \text{ son convexos entonces } (A+B) \text{ es convexo} \quad (19)}$$

Ahora demostraremos que si $A$ y $B$ son cerrados, entonces $A+B$ es cerrado.

Sea $z \in \overline{A+B}$ arbitrario $\Rightarrow$ $\exists (z_n)_{n\in\mathbb{N}} : (z_n)_n \subseteq (A+B)$ y que $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$. Ahora como $z_n \in A+B$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists a_n \in A \wedge b_n \in B : z_n = a_n + b_n$, de esta forma:

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b \text{ con } a \in \overline{A} \wedge b \in \overline{B}$$

De esta forma $z = a + b$ con $a \in \overline{A} \wedge b \in \overline{B}$ $\Rightarrow$ $z \in \overline{A} + \overline{B}$

Así como partimos de que $z \in \overline{A+B}$ y llegamos a que $z \in \overline{A} + \overline{B}$ para un $z$ arbitrario, entonces:

$$\overline{A+B} \subseteq \overline{A} + \overline{B}$$

Y como tanto $A$ como $B$ son cerrados, entonces $\overline{A} = A$ y $\overline{B} = B$, entonces:

$$\overline{A+B} \subseteq \overline{A} + \overline{B} = A + B$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\overline{A+B} \subseteq A + B \quad (20)}$$

Y como por definición de clausura tenemos que:

$$\boxed{A+B \subseteq \overline{A+B} \quad (21)}$$

Entonces uniendo (20) y (21) llegamos a que:

$$\boxed{A+B = \overline{A+B} \quad (22)}$$

Lo cual implica que $A+B$ es cerrado.

De esta manera, llegamos a que:

$$\boxed{\text{Si } A \text{ y } B \text{ son cerrados, entonces } (A+B) \text{ es cerrado} \quad (23)}$$

Usando (17) y (18) tenemos que $\partial f(x)$ y $\partial g(x)$ son convexos cerrados y usando (19) junto con (23) tenemos que $\partial f(x) + \partial g(x)$ es un convexo cerrado.

$$\boxed{\partial f(x) + \partial g(x) \text{ es un convexo cerrado} \quad (24)}$$

Recordando (15), es decir que:

$$\sigma_{\partial(f+g)(x)} \equiv \sigma_{[\partial f(x)+\partial g(x)]}$$

y teniendo en cuenta a (16) y (24), es decir que tanto $\partial f(x) + \partial g(x)$ como $\partial(f+g)(x)$ son convexos cerrados, y sumado al teorema visto en clases que dice que existe un único convexo cerrado $C$ tal que $\sigma \equiv \sigma_C$ entonces como:

$$\sigma_{\partial(f+g)(x)} \equiv \sigma_{[\partial f(x)+\partial g(x)]}$$

llegamos a que:

$$\boxed{\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x)}$$

que era justamente lo que queríamos demostrar.

---

## Pregunta 2

a) Notemos que como:

$$f(t) = \begin{cases} -ln(-t) & \text{si } t < 0 \\ +\infty & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [\langle x, y \rangle - f(x)] = \sup_{x \in \mathbb{R}} [x \cdot y - f(x)] = \sup_{x \in dom(f)} [x \cdot y - f(x)] = \sup_{x<0} [x \cdot y - f(x)]$$

$$= \sup_{x<0} [x \cdot y - (-ln[-x])] = \sup_{x<0} [x \cdot y + ln(-x)]$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{f^*(y) = \sup_{x<0} [x \cdot y + ln(-x)] \quad (1)}$$

Ahora nos pondremos por casos:

$\underline{(i)\ y < 0:}$ Esto implica que si hacemos tender $x \to -\infty$, entonces: $x \cdot y \to +\infty$.

También como $x \to -\infty$ entonces $-x \to +\infty$ y por lo tanto $ln(-x) \to +\infty$.

De esta forma como si $x \to -\infty$ implica que $x \cdot y \to +\infty$ y que $ln(-x) \to +\infty$, entonces:

Si $x \to -\infty$ entonces $[x \cdot y + ln(-x)] \to +\infty$

Ahora considerando (1), es decir que:

$$f^*(y) = \sup_{x<0} [x \cdot y + ln(-x)]$$

Entonces tenemos que: $\boxed{f^*(y) = +\infty \text{ cuando } \ y < 0 \ \ (2)}$

$\underline{(ii)\ y = 0:}$ Lo primero que notaremos es que por (1) tenemos que:

$$f^*(0) = \sup_{x<0} [x \cdot 0 + ln(-x)] = \sup_{x<0} [ln(-x)]$$

De esta forma, si hacemos tender $x \to -\infty$ entonces $-x \to +\infty$ lo que implica que $ln(-x) \to \infty$.

Así tenemos que:

$$\boxed{f^*(0) = +\infty \quad (3)}$$

$\underline{(iii)\ y > 0:}$ Lo primero que haremos es definir $g(x) = x \cdot y + ln(-x)$.

Así por (1) tenemos que:

$$f^*(y) = \sup_{x<0} [x \cdot y + ln(-x)] = \sup_{x<0} [g(x)]$$

Notemos que:

$$g'(x) = y + \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = y + \frac{1}{x}$$

Y por otro lado tenemos que:

$$g''(x) = [g'(x)]' = \left(y + \frac{1}{x}\right)' = \left(y + x^{-1}\right)' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Notemos que como para todo $x < 0$ se cumple que $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ por ende para todo $x < 0$ $g(x)$ es cóncava. De esta forma, para encontrar el supremo que en este caso será igual al máximo, basta con usar las condiciones de primer orden, es decir encontrar un $x_1$ tal que $g'(x_1) = 0$.

$$g'(x_1) = 0 \;\Rightarrow\; y + \frac{1}{x_1} = 0 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{x_1} \;\Rightarrow\; -y = \frac{1}{x_1} \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{1}{y}$$

De este modo, tenemos que:

$$f^*(y) = \sup_{x<0}[x \cdot y + ln(-x)] = \sup_{x<0}[g(x)] = g(x_1) = g\left(-\frac{1}{y}\right) = \left(-\frac{1}{y}\right) \cdot y + ln\left(-\left[-\frac{1}{y}\right]\right)$$

$$= -\frac{y}{y} + ln\left(-\left[-\frac{1}{y}\right]\right) = -1 + ln\left(\frac{1}{y}\right) = -1 - ln(y)$$

De esta forma:

$$\boxed{f^*(y) = -1 - ln(y) \text{ cuando } y > 0 \;\; (4)}$$

Así llegamos a que:

$$\boxed{f^*(y) = \begin{cases} -1 - ln(y) & \text{si } y > 0 \\ +\infty & \text{si } y \leq 0 \end{cases}}$$

Ahora notemos que por desigualdad de fenchel tenemos que:

$$f(x) + f^*(y) \geq x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

En especifico tenemos que sea un $x < 0$ arbitrario y un $y > 0$ arbitrario, entonces:

$$\boxed{f(x) + f^*(y) \geq x \cdot y \;\; (5)}$$

Ahora como $y > 0 \;\Rightarrow\; f^*(y) = -1 - ln(y)$

Y como $x < 0 \;\Rightarrow\; f(x) = -ln(-x)$

Reemplazando estos valores en 5 llegamos a que:

$$-ln(-x) - 1 - ln(y) \geq x \cdot y$$

$\Rightarrow$

$$-ln(-x \cdot y) - 1 \geq x \cdot y$$

$\Rightarrow$

$$ln(-x \cdot y) + 1 \leq -x \cdot y$$

$\Rightarrow$

$$ln(-x \cdot y) \leq -x \cdot y - 1$$

Como $-x \cdot y - 1 = -[x \cdot y + 1]$, entonces:

$\Rightarrow$

$$ln(-x \cdot y) \leq -[x \cdot y + 1]$$

Ahora definimos $\alpha = x \cdot y$. De este modo:

$$ln(-\alpha) \leq -[\alpha + 1]$$

Como se tomo un $x < 0$ arbitrario y un $y > 0$ también arbitrario, entonces como definimos $\alpha = x \cdot y$, entonces $\alpha < 0$, y como $x$ e $y$ son arbitrarios, entonces $\alpha$ también es arbitrario. De esta forma:

$\Rightarrow$

$$\boxed{ln(-\alpha) \leq -[\alpha + 1] \ \ \forall \alpha < 0 \ \ (6)}$$

Ahora notemos que sea un $\alpha \geq 0$ arbitrario, entonces:

$$ln(-\alpha) = -\infty$$

De este modo:

$$ln(-\alpha) \leq c \ \ \forall c \in \mathbb{R}$$

En particular tomemos $c = -[\alpha + 1]$ el cual es un número real. Esto nos deja que:

$$ln(-\alpha) \leq -[\alpha + 1]$$

Como esto se demostró para un $\alpha \geq 0$ arbitrario, entonces:

$$\boxed{ln(-\alpha) \leq -[\alpha + 1] \ \ \forall \alpha \geq 0 \ \ (7)}$$

Ahora uniendo (6) y (7) llegamos a que:

$$\boxed{ln(-\alpha) \leq -[\alpha + 1] \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ (8)}$$

que es justamente lo que queríamos demostrar.

---

b) Lo que nos están pidiendo demostrar es que:

$$\varphi(tx) = \varphi(x) - ln(t) \quad (\forall x \in E)(\forall t > 0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\varphi(x) + \varphi^*(z) + ln\langle x, -z\rangle \geq -1 \quad (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0)$$

Lo primero que demostraremos será $\Rightarrow$.

$\underline{\Rightarrow}$: Como tenemos que se cumple que:

$$\varphi(tu) = \varphi(u) - ln(t) \quad (\forall u \in E)(\forall t > 0)$$

Entonces se cumple que:

$$-\varphi(tu) - ln(t) = -\varphi(u) \quad (\forall u \in E)(\forall t > 0)$$

En particular, si tomamos un $t > 0$ arbitrario se cumple que:

$$-\varphi(tu) - ln(t) = -\varphi(u) \quad (\forall u \in E)$$

Ahora, sean $z, x \in E$ arbitrarios tales que $\langle x, z\rangle < 0$ y $t > 0$ arbitrario, entonces:

$$\varphi^*(z) = \sup_{u\in E}[\langle u, z\rangle - \varphi(u)] = \sup_{u\in E}[\langle u, z\rangle - \varphi(tu) - ln(t)] = \sup_{u\in E}[\langle u, z\rangle - \varphi(tu)] - ln(t)$$

$$= \sup_{u\in E}[\langle tu, \frac{z}{t}\rangle - \varphi(tu)] - ln(t) = \sup_{a\in E}[\langle a, \frac{z}{t}\rangle - \varphi(a)] - ln(t) \geq \langle x, \frac{z}{t}\rangle - \varphi(x) - ln(t)$$

$$= \frac{\langle x, z\rangle}{t} - \varphi(x) - ln(t)$$

$\Rightarrow$

$$\varphi^*(z) \geq \frac{\langle x, z\rangle}{t} - \varphi(x) - ln(t)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\varphi(x) + \varphi^*(z) \geq \frac{\langle x, z\rangle}{t} - ln(t) \quad (1)}$$

Como esto se cumple para un $t > 0$ arbitrario, entonces se cumple en particular para $t = \langle x, -z\rangle$ el cual es positivo pues en un inicio dijimos que $\langle x, z\rangle < 0 \;\Rightarrow\; -\langle x, z\rangle > 0 \;\Rightarrow\; \langle x, -z\rangle > 0$

De este modo, reemplazando en (1) con $t = \langle x, -z\rangle$ llegamos a que:

$$\varphi(x) + \varphi^*(z) \geq \frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, -z\rangle} - ln(\langle x, -z\rangle) = \frac{\langle x, z\rangle}{-\langle x, z\rangle} - ln(\langle x, -z\rangle) = -1 - ln(\langle x, -z\rangle)$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(x) + \varphi^*(z) \geq -1 - ln(\langle x, -z\rangle)$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(x) + \varphi^*(z) + ln(\langle x, -z\rangle) \geq -1$$

Y como esta desigualdad se demostró para $x, z \in E$ arbitrarios tales que $\langle x, z\rangle < 0$, entonces:

$$\boxed{\varphi(x) + \varphi^*(z) + ln(\langle x, -z\rangle) \geq -1 \ \ (\forall x, z \in E) \ \ (2)}$$

que es justamente lo que queríamos demostrar.

Ahora demostraremos $\Leftarrow$.

$\underline{\Leftarrow}$: Como nos están pidiendo demostrar:

$$\varphi(x) + \varphi^*(z) + ln\langle x, -z\rangle \geq -1 \quad (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0)$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(tx) = \varphi(x) - ln(t) \quad (\forall x \in E)(\forall t > 0)$$

Entonces lo que haremos será demostrar $(i)$ y $(ii)$ donde $(i)$ y $(ii)$ están definidos por:

$(i)$

$$\varphi(x) + \varphi^*(z) + ln\langle x, -z\rangle \geq -1 \quad (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0)$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(tx) \geq \varphi(x) - ln(t) \quad (\forall x \in E)(\forall t > 0)$$

$(ii)$

$$\varphi(x) + \varphi^*(z) + ln\langle x, -z\rangle \geq -1 \quad (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0)$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(tx) \leq \varphi(x) - ln(t) \quad (\forall x \in E)(\forall t > 0)$$

Partiremos demostrando $(i)$.

Notemos que como partimos de que se cumple que:

$$\varphi(u) + \varphi^*(v) + ln\langle u, -v\rangle \geq -1 \quad (\forall u, v \in E : \langle u, v\rangle < 0)$$

Entonces si consideramos $x, z \in E$ arbitrarios tales que $\langle x, z\rangle < 0$ y un $t > 0$ arbitrario, entonces podemos tomar $u = tx$, $v = z$ y es claro que como $\langle x, z\rangle < 0$, entonces $\langle u, v\rangle = \langle tx, z\rangle = t \cdot \langle x, z\rangle < 0$ entonces podemos usar la desigualdad para este $u$ y $v$ particulares.

De esta forma:

$$\varphi(tx) + \varphi^*(z) + ln\langle tx, -z\rangle \geq -1$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(tx) + \varphi^*(z) + ln(t \cdot \langle x, -z\rangle) \geq -1$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(tx) + \varphi^*(z) + ln(t) + ln(\langle x, -z\rangle) \geq -1$$

$\Rightarrow$

$$\varphi^*(z) \geq -1 - \varphi(tx) - ln(t) - ln(\langle x, -z\rangle)$$

Ahora multiplicaremos por $(-1)$ la desigualdad quedándonos que:

$$-\varphi^*(z) \leq 1 + \varphi(tx) + ln(t) + ln(\langle x, -z\rangle)$$

Como se tomo un $z \in E$ arbitrario, entonces:

$$\boxed{\text{Dado un } x \in E, \text{ entonces } [-\varphi^*(z) \leq 1 + \varphi(tx) + ln(t) + ln\langle x, -z\rangle \quad (\forall z \in E : \langle x, z\rangle < 0)] \quad (3)}$$

Ahora como $\varphi \in \Gamma_0(E)$, entonces $\varphi = \varphi^{**}$. De este modo usando este hecho y (3) llegamos a que:

$$\varphi(x) = \varphi^{**}(x) = (\varphi^*)^*(x) = \sup_{z \in E : \langle x, z\rangle < 0} [\langle x, z\rangle - \varphi^*(z)]$$

$$\leq \sup_{z \in E : \langle x, z\rangle < 0} [\langle x, z\rangle + 1 + \varphi(tx) + ln(t) + ln\langle x, -z\rangle] = \sup_{z \in E : \langle x, z\rangle < 0} [\langle x, z\rangle + 1 + ln\langle x, -z\rangle] + \varphi(tx) + ln(t)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\varphi(x) \leq \sup_{z \in E : \langle x, z\rangle < 0} [\langle x, z\rangle + 1 + ln\langle x, -z\rangle] + \varphi(tx) + ln(t) \quad (4)}$$

Ahora notemos que la desigualdad demostrada en $a$) nos dice que:

$$ln(-\alpha) \leq -[\alpha + 1] \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

En particular tomemos $\alpha = \langle x, u\rangle$ con $x \in E$ que ya hemos estado considerando y $u \in E$ arbitrario, entonces:

$$ln(-\langle x, u\rangle) \leq -[\langle x, u\rangle + 1]$$

$\Rightarrow$

$$\langle x, u\rangle + 1 + ln(-\langle x, u\rangle) \leq 0$$

$\Rightarrow$

$$\langle x, u\rangle + 1 + ln\langle x, -u\rangle \leq 0$$

Como esto se demostró para un $u \in E$ arbitrario, entonces:

$$\langle x, u\rangle + 1 + ln\langle x, -u\rangle \leq 0 \ \ (\forall u \in E)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\sup_{z \in E: \langle x, z\rangle < 0} [\langle x, z\rangle + 1 + ln\langle x, -z\rangle] \leq 0 \ \ (5)}$$

Ahora usando (4) y (5) tenemos que:

$$\varphi(x) \leq \sup_{z \in E: \langle x, z\rangle < 0} [\langle x, z\rangle + 1 + ln\langle x, -z\rangle] + \varphi(tx) + ln(t) \leq \varphi(tx) + ln(t)$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(x) \leq \varphi(tx) + ln(t)$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(x) - ln(t) \leq \varphi(tx)$$

Como se tomo un $x \in E$ arbitrario y un $t > 0$ también arbitrario, entonces:

$$\boxed{\varphi(x) - ln(t) \leq \varphi(tx) \ \ (\forall x \in E)(\forall t > 0)}$$

que es justamente lo que estábamos buscando demostrar en $(i)$.

Ahora demostraremos $(ii)$:

Notemos que como partimos de que se cumple que:

$$\varphi(u) + \varphi^*(v) + ln\langle u, -v\rangle \geq -1 \quad (\forall u, v \in E : \langle u, v\rangle < 0)$$

Entonces sean $x, z \in E$ arbitrarios tales que $\langle x, z\rangle < 0$ y $t > 0$ también arbitrario, entonces la desigualdad anterior también se cumple para $u = x$ y $v = \frac{z}{t}$, pues $\langle u, v\rangle = \langle x, \frac{z}{t}\rangle = \frac{\langle x, z\rangle}{t} < 0$

De este modo:

$$\varphi(x) + \varphi^*\left(\frac{z}{t}\right) + ln\langle x, -\frac{z}{t}\rangle \geq -1$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(x) + \varphi^*\left(\frac{z}{t}\right) + ln\left(\frac{\langle x, -z\rangle}{t}\right) \geq -1$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(x) + \varphi^*\left(\frac{z}{t}\right) + ln\langle x, -z\rangle + ln\left(\frac{1}{t}\right) \geq -1$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(x) + \varphi^*\left(\frac{z}{t}\right) + ln\langle x, -z\rangle - ln\,(t) \geq -1$$

$\Rightarrow$

$$\varphi^*\left(\frac{z}{t}\right) \geq -1 - ln\langle x, -z\rangle + ln\,(t) - \varphi(x)$$

Multiplicando por $(-1)$ llegamos a que:

$$\boxed{-\varphi^*\left(\frac{z}{t}\right) \leq 1 + ln\langle x, -z\rangle - ln\,(t) + \varphi(x)}$$

Y como esto esto se demostró para un $z \in E$ arbitrario tal que $\langle x, z\rangle < 0$, entonces:

$$\boxed{-\varphi^*\left(\frac{z}{t}\right) \leq 1 + ln\langle x, -z\rangle - ln\,(t) + \varphi(x) \quad (\forall z \in E : \langle x, z\rangle < 0) \quad (6)}$$

Ahora nuevamente como tenemos que $\varphi \in \Gamma_0(E)$ entonces $\varphi = \varphi^{**}$.

Considerando esto y además de que estamos evaluando el caso en que $t > 0$ es fijo y arbitrario, entonces:

$$\varphi(tx) = \varphi^{**}(tx) = (\varphi^*)^*(tx) = \sup_{u\in E:\langle u,tx\rangle<0} [\langle u, tx\rangle - \varphi^*(u)] = \sup_{u\in E:\langle u,x\rangle<0} [\langle u, tx\rangle - \varphi^*(u)]$$

$$= \sup_{\frac{z}{t}\in E:\langle \frac{z}{t},x\rangle<0} \left[\langle \frac{z}{t}, tx\rangle - \varphi^*\left(\frac{z}{t}\right)\right] = \sup_{\frac{z}{t}\in E:\frac{\langle z,x\rangle}{t}<0} \left[\langle \frac{z}{t}, tx\rangle - \varphi^*\left(\frac{z}{t}\right)\right] = \sup_{\frac{z}{t}\in E:\langle z,x\rangle<0} \left[\langle \frac{z}{t}, tx\rangle - \varphi^*\left(\frac{z}{t}\right)\right]$$

$$= \sup_{z\in E:\langle z,x\rangle<0} \left[\langle \frac{z}{t}, tx\rangle - \varphi^*\left(\frac{z}{t}\right)\right] = \sup_{z\in E:\langle z,x\rangle<0} \left[\langle z, x\rangle - \varphi^*\left(\frac{z}{t}\right)\right]$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\varphi(tx) = \sup_{z\in E:\langle z,x\rangle<0} \left[\langle z, x\rangle - \varphi^*\left(\frac{z}{t}\right)\right] \quad (7)}$$

Así reemplazando (6) en (7) llegamos a que:

$$\varphi(tx) = \sup_{z\in E:\langle z,x\rangle<0}\left[\langle z,x\rangle - \varphi^*\left(\frac{z}{t}\right)\right] \leq \sup_{z\in E:\langle z,x\rangle<0}\left[\langle z,x\rangle + 1 + ln\langle x,-z\rangle - ln\,(t) + \varphi(x)\right]$$

$$= \sup_{z\in E:\langle z,x\rangle<0}\left[\langle z,x\rangle + 1 + ln\langle x,-z\rangle\right] - ln\,(t) + \varphi(x)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\varphi(tx) \leq \sup_{z\in E:\langle z,x\rangle<0}\left[\langle z,x\rangle + 1 + ln\langle x,-z\rangle\right] - ln\,(t) + \varphi(x) \quad (8)}$$

Ahora considerando la desigualdad (5) que demostramos para $(i)$ y usándola en (8) llegamos a que:

$$\varphi(tx) \leq \sup_{z\in E:\langle z,x\rangle<0}\left[\langle z,x\rangle + 1 + ln\langle x,-z\rangle\right] - ln\,(t) + \varphi(x) \leq -ln\,(t) + \varphi(x)$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(tx) \leq \varphi(x) - ln\,(t)$$

Y como se demostró para un $x \in E$ arbitrario y para un $t > 0$ arbitrario, entonces:

$$\boxed{\varphi(tx) \leq \varphi(x) - ln\,(t) \quad (\forall x \in E)(\forall t > 0)}$$

que es justamente lo que estabamos buscando demostrar en $(ii)$.

Ahora usando $(i)$ y $(ii)$ tenemos que se demostró $\Leftarrow$

Y como se demostró $\Rightarrow$ y $\Leftarrow$ entonces se demostró $\Leftrightarrow$ y así se demostró todo el inciso $b$).

---

c) En primer lugar notemos que:

$$\left(\frac{1}{\nu}\cdot\varphi\right)^*(z) = \sup_{x\in E}\left[x\cdot z - \left(\frac{1}{\nu}\cdot\varphi\right)(x)\right] = \sup_{x\in E}\left[x\cdot z - \frac{\varphi(x)}{\nu}\right] = \sup_{x\in E}\left[\left(\frac{x}{\nu}\right)\cdot(\nu\cdot z) - \frac{\varphi(x)}{\nu}\right]$$

$$= \sup_{x\in E}\left[\frac{x\cdot(\nu\cdot z)}{\nu} - \frac{\varphi(x)}{\nu}\right] = \sup_{x\in E}\left(\frac{1}{\nu}\left[x\cdot(\nu\cdot z) - \varphi(x)\right]\right) = \frac{1}{\nu}\cdot\sup_{x\in E}\left[x\cdot(\nu\cdot z) - \varphi(x)\right]$$

$$= \frac{1}{\nu}\cdot\varphi^*(\nu z)$$

De este modo, se demostró que:

$$\boxed{\left(\frac{1}{\nu}\cdot\varphi\right)^*(z) = \frac{1}{\nu}\cdot\varphi^*(\nu z) \quad (1)}$$

Que es justamente la identidad que nos pedían demostrar.

Ahora, sea $\varphi \in \Gamma_0(E)$ y $\nu > 0$ tal que:

$$\boxed{\varphi(x) + \varphi^*(z) + \nu \cdot ln\langle x, -z\rangle \geq \nu \cdot ln(\nu) - \nu \quad (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0) \ \ (2)}$$

Multiplicando por $\frac{1}{\nu}$ a ambos lados de la desigualdad y notando que $\frac{1}{\nu}$ es un número positivo pues $\nu > 0$, entonces se sigue manteniendo el $\Leftrightarrow$ y se tiene que:

$$\varphi(x) + \varphi^*(z) + \nu \cdot ln\langle x, -z\rangle \geq \nu \cdot ln(\nu) - \nu \ \ (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\nu} \cdot \varphi(x) + \frac{1}{\nu} \cdot \varphi^*(z) + \frac{1}{\nu} \cdot (\nu \cdot ln\langle x, -z\rangle) \geq \frac{1}{\nu}\left[\nu \cdot ln(\nu)\right] - \frac{1}{\nu} \cdot \nu \ \ (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\varphi}{\nu}(x) + \frac{\varphi^*}{\nu}(z) + ln\langle x, -z\rangle \geq ln(\nu) - 1 \ \ (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\varphi}{\nu}(x) + \frac{\varphi^*}{\nu}(z) + ln\langle x, -z\rangle - ln(\nu) \geq -1 \ \ (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\varphi}{\nu}(x) + \frac{\varphi^*}{\nu}(z) + ln\left(\frac{1}{\nu}\langle x, -z\rangle\right) \geq -1 \ \ (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\varphi}{\nu}(x) + \frac{\varphi^*}{\nu}(z) + ln\left(\langle x, -\frac{z}{\nu}\rangle\right) \geq -1 \ \ (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{\varphi}{\nu}\right)(x) + \frac{\varphi^*}{\nu}(z) + ln\left(\langle x, -\frac{z}{\nu}\rangle\right) \geq -1 \ \ (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{\varphi}{\nu}\right)(x) + \frac{1}{\nu} \cdot \varphi^*(z) + ln\left(\langle x, -\frac{z}{\nu}\rangle\right) \geq -1 \ \ (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0)$$

Notemos que por (1) tenemos que:

$$\left(\frac{1}{\nu} \cdot \varphi\right)^*(u) = \frac{1}{\nu} \cdot \varphi^*(\nu u) \ \forall u \in E$$

Si tomamos $u = \frac{z}{\nu}$ entonces:

$$\left(\frac{1}{\nu} \cdot \varphi\right)^*\left(\frac{z}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu} \cdot \varphi^*\left(\nu \cdot \frac{z}{\nu}\right)$$

Así se obtiene que:

$$\left(\frac{1}{\nu}\cdot\varphi\right)^*\left(\frac{z}{\nu}\right)=\frac{1}{\nu}\cdot\varphi^*(z)$$

Así de este modo, utilizando este resultado se tiene que:

$$\left(\frac{\varphi}{\nu}\right)(x)+\frac{1}{\nu}\cdot\varphi^*(z)+ln\left(\langle x,-\frac{z}{\nu}\rangle\right)\geq -1\ \ (\forall x,z\in E:\langle x,z\rangle<0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{\varphi}{\nu}\right)(x)+\left(\frac{1}{\nu}\cdot\varphi\right)^*\left(\frac{z}{\nu}\right)+ln\left(\langle x,-\frac{z}{\nu}\rangle\right)\geq -1\ \ (\forall x,z\in E:\langle x,z\rangle<0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\left(\frac{1}{\nu}\cdot\varphi\right)(x)+\left(\frac{1}{\nu}\cdot\varphi\right)^*\left(\frac{z}{\nu}\right)+ln\left(\langle x,-\frac{z}{\nu}\rangle\right)\geq -1\ \ (\forall x,z\in E:\langle x,z\rangle<0)\ \ (3)}$$

Ahora definimos $f\equiv\frac{1}{v}\cdot\varphi$. Sabemos que $f$ pertenece a $\Gamma_0(E)$ pues $\varphi\in\Gamma_0(E)$ y $\nu>0$.

De este modo reemplazando en (3) tenemos que:

$$f(x)+f^*\left(\frac{z}{\nu}\right)+ln\left(\langle x,-\frac{z}{\nu}\rangle\right)\geq -1\ \ (\forall x,z\in E:\langle x,z\rangle<0)$$

Definimos $a=\frac{z}{\nu}$. Como $z$ puede tomar cualquier valor en $E$ tal que $\langle x,z\rangle<0$, entonces $a$ también puede tomar cualquier valor en $E$ tal que $\langle x,a\rangle<0$. De este modo, tenemos que:

$$f(x)+f^*(a)+ln\left(\langle x,-a\rangle\right)\geq -1\ \ (\forall x,a\in E:\langle x,a\rangle<0)$$

Y por b) tenemos que esto pasa si y solo si $f$ es logarítmicamente homogénea de parámetro $v=1$.

Y por definición de función logarítmicamente homogénea tenemos que $f$ es logarítmicamente homogénea de parámetro 1 si y solo si:

$$f(tx)=f(x)-ln(t)\ \ (\forall x\in E)(\forall t>0)$$

Pero como habíamos definido que $f\equiv\frac{1}{v}\cdot\varphi$ entonces:

$$\left(\frac{1}{v}\cdot\varphi\right)(tx)=\left(\frac{1}{v}\cdot\varphi\right)(x)-ln(t)\ \ (\forall x\in E)(\forall t>0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\varphi(tx)}{v}=\frac{\varphi(x)}{v}-ln(t)\ \ (\forall x\in E)(\forall t>0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\varphi(tx)=\varphi(x)-\nu\cdot ln(t)\ \ (\forall x\in E)(\forall t>0)$$

Y por definición de función logarítmicamente homogénea tenemos que esto se cumple si y solo si $\varphi$ es logaritmicamente homogenea de parametro $\nu > 0$.

De esta forma, tenemos que:

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi(x) + \varphi^*(z) + \nu \cdot ln\langle x, -z\rangle \geq \nu \cdot ln(\nu) - \nu \quad (\forall x, z \in E : \langle x, z\rangle < 0) \\ \\ \Leftrightarrow \\ \\ \varphi \text{ es logaritmicamente homogenea de parametro } \nu \end{array}}$$

Que es justamente lo que nos pedían demostrar.

## Pregunta 3

a) Para resolver esta sección, lo primero que haremos será demostrar:

(i) $max\{0, a+b\} \leq max\{0, a\} + max\{0, b\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

(ii) Sea $p \geq 0$, entonces $max\{0, p \cdot a\} = p \cdot max\{0, a\} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(iii) $|max\{0, a\} - max\{0, b\}| \leq |b - a| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

Partiremos demostrando (i).

Analizaremos la situación por casos:

Caso 1: $a \geq 0, b \geq 0:$

Como $a \geq 0 \Rightarrow max\{0, a\} = a$. También como $b \geq 0 \Rightarrow max\{0, b\} = b$.

Ahora como $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces $a + b \geq 0$. De este modo $max\{0, a+b\} = a+b$.

De esta forma:

$$max\{0, a+b\} = a+b \leq a+b = max\{0, a\} + max\{0, b\}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{max\{0, a+b\} \leq max\{0, a\} + max\{0, b\} \quad \forall a \geq 0, b \geq 0}$$

Caso 2: $a < 0, b < 0:$

Como $a < 0 \Rightarrow max\{0, a\} = 0$. También como $b < 0 \Rightarrow max\{0, b\} = 0$.

Ahora como $a < 0$ y $b < 0$, entonces $a + b < 0$. De este modo $max\{0, a+b\} = 0$.

De esta forma:

$$max\{0, a+b\} = 0 \leq 0 + 0 = max\{0, a\} + max\{0, b\}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{max\{0, a+b\} \leq max\{0, a\} + max\{0, b\} \quad \forall a < 0, b < 0}$$

Caso 3: $a \geq 0, b < 0$ :

Como $a \geq 0 \ \Rightarrow max\{0, a\} = a$. También como $b < 0 \ \Rightarrow max\{0, b\} = 0$.

Ahora como $a \geq 0$ y $b < 0$, entonces $a + b \leq a$.

De esta forma:

$$max\{0, a+b\} \leq max\{a, a\} = a = a + 0 = max\{0, a\} + max\{0, b\}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{max\{0, a+b\} \leq max\{0, a\} + max\{0, b\} \ \ \forall a \geq 0, b < 0}$$

Caso 4: $a < 0, b \geq 0$ :

Como $a < 0 \ \Rightarrow max\{0, a\} = 0$. También como $b \geq 0 \ \Rightarrow max\{0, b\} = b$.

Ahora como $a < 0$ y $b \geq 0$, entonces $a + b \leq b$.

De esta forma:

$$max\{0, a+b\} \leq max\{b, b\} = b = 0 + b = max\{0, a\} + max\{0, b\}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{max\{0, a+b\} \leq max\{0, a\} + max\{0, b\} \ \ \forall a < 0, b \geq 0}$$

Como demostramos la desigualdad para los casos 1, 2, 3 y 4, entonces:

$$\boxed{max\{0, a+b\} \leq max\{0, a\} + max\{0, b\} \ \ \forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \ \ (1)}$$

Ahora lo que demostraremos es que sea $p \geq 0$, entonces $max\{0, p \cdot a\} = p \cdot max\{0, a\}$

Esto lo analizaremos por casos:

Caso 1: $a \geq 0$ :

Esto implica en primer lugar que $max\{0, a\} = a$. Además como $p \geq 0$, entonces $p \cdot a \geq 0$ lo que implica que $max\{0, p \cdot a\} = p \cdot a$.

De esta forma:

$$max\{0, p \cdot a\} = p \cdot a = p \cdot max\{0, a\}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{max\{0, p \cdot a\} = p \cdot max\{0, a\} \ \ \forall a \geq 0}$$

Caso 2: $a < 0:$

Esto implica en primer lugar que $max\{0, a\} = 0$. Además como $p \geq 0$, entonces $p \cdot a \leq 0$ lo que implica que $max\{0, p \cdot a\} = 0$.

De esta forma:

$$max\{0, p \cdot a\} = 0 = p \cdot 0 = p \cdot max\{0, a\}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{max\{0, p \cdot a\} = p \cdot max\{0, a\} \ \ \forall a < 0}$$

Como se demostró la igualdad para el caso 1 y 2 entonces:

$$\boxed{\text{Sea } p \geq 0\text{, entonces: } max\{0, p \cdot a\} = p \cdot max\{0, a\} \ \ \forall a \in \mathbb{R} \ \ (2)}$$

Ahora demostraremos $|max\{0, a\} - max\{0, b\}| \leq |b - a| \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$ y lo haremos por casos:

Caso 1: $a \geq 0, b \geq 0:$

Como $a \geq 0 \ \Rightarrow max\{0, a\} = a$. También como $b \geq 0 \ \Rightarrow max\{0, b\} = b$.

De esta forma:

$$|max\{0, a\} - max\{0, b\}| = |a - b| \leq |b - a|$$

$\Rightarrow$

$$|max\{0, a\} - max\{0, b\}| \leq |b - a|$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{|max\{0, a\} - max\{0, b\}| \leq |b - a| \ \ \forall a \geq 0, b \geq 0}$$

Caso 2: $a < 0, b < 0:$

Como $a < 0 \ \Rightarrow max\{0, a\} = 0$. También como $b < 0 \ \Rightarrow max\{0, b\} = 0$.

También notemos que por definición de valor absoluto tenemos que $0 \leq |b - a|$

De esta forma:

$$|max\{0, a\} - max\{0, b\}| = |0 - 0| = |0| = 0 \leq |b - a|$$

$\Rightarrow$

$$|max\{0, a\} - max\{0, b\}| \leq |b - a|$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{|max\{0,a\} - max\{0,b\}| \leq |b-a| \ \ \forall a < 0, b < 0}$$

Caso 3: $a \geq 0, b < 0:$

Como $a \geq 0 \ \Rightarrow max\{0,a\} = a$. También como $b < 0 \ \Rightarrow max\{0,b\} = 0$.

Ahora como $b < 0$ entonces $-b > 0$ y eso sumado a que $a \geq 0$ entonces $a - b > 0$, por lo tanto: $|b-a| = a - b$

También como $b < 0$ entonces $-b > 0$ y eso sumado a que $a \geq 0$ entonces $a - b \geq a$, por lo tanto: $|b-a| = a - b \geq a \ \ \Rightarrow \ \ |b-a| \geq a$. Y como $a \geq 0$, entonces $|a| = a$, de esta forma $|b-a| \geq a = |a| \ \Rightarrow \ |b-a| \geq |a|$

De esta forma:

$$|max\{0,a\} - max\{0,b\}| = |a-0| = |a| \leq |b-a|$$

$\Rightarrow$

$$|max\{0,a\} - max\{0,b\}| \leq |b-a|$$

$$\boxed{|max\{0,a\} - max\{0,b\}| \leq |b-a| \ \ \forall a \geq 0, b < 0}$$

Caso 4: $a < 0, b \geq 0:$

Como $a < 0 \ \Rightarrow max\{0,a\} = 0$. También como $b \geq 0 \ \Rightarrow max\{0,b\} = b$.

Ahora como $a < 0$ entonces $-a > 0$ y eso sumado a que $b \geq 0$ entonces $b - a > 0$, por lo tanto: $|b-a| = b - a$

También como $a < 0$ entonces $-a > 0$ y eso sumado a que $b \geq 0$ entonces $b - a \geq b$, por lo tanto: $|b-a| = b - a \geq b \ \ \Rightarrow \ \ |b-a| \geq b$. Y como $b \geq 0$, entonces $|b| = b$, de esta forma $|b-a| \geq b = |b| \ \Rightarrow \ |b-a| \geq |b|$

De esta forma:

$$|max\{0,a\} - max\{0,b\}| = |0-b| = |b| \leq |b-a|$$

$\Rightarrow$

$$|max\{0,a\} - max\{0,b\}| \leq |b-a|$$

$$\boxed{|max\{0,a\} - max\{0,b\}| \leq |b-a| \ \ \forall a < 0, b \geq 0}$$

Como se demostraron los casos 1,2,3 y 4, entonces se demostró que:

$$\boxed{|max\{0,a\} - max\{0,b\}| \leq |b-a| \ \ \forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \ \ (3)}$$

Ahora definiremos las siguientes funciones:

$$f_i(x) = max\{0, 1 - y_i \cdot \langle w_i, x\rangle\} \ \ \forall i \in \{1,2,...,n\}$$

$$G(x) = \frac{\|x\|_2^2}{2} = \frac{x^T x}{2}$$

Así podemos notar que:

$$\boxed{F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) + \alpha \cdot G(x) \quad \text{con } \alpha \geq 0}$$

Es fácil ver que:

$$\nabla G(x) = x \ \Rightarrow \ \nabla^2 G(x) = I$$

De este modo, se observa que $G(x)$ es dos veces diferenciable y el hessiano de $G(x)$ es definido positivo, por ende $\boxed{G(x) \text{ es convexa } \ (5)}$

Ahora analizaremos la función $f_i$ para un $i$ arbitrario.

Sean $x, z \in E$ arbitrarios y $t \in [0,1]$ arbitrario también. Notemos que:

$$f_i(tx + [1-t]y) = max\{0, 1 - y_i \cdot \langle w_i, tx + [1-t]y\rangle\} = max\{0, t + [1-t] - y_i \cdot \langle w_i tx + [1-t]y\rangle\}$$

$$= max\{0, t+[1-t]-y_i\cdot(\langle w_i, tx\rangle + \langle w_i, [1-t]y\rangle)\} = max\{0, t+[1-t]-y_i\cdot(t\cdot\langle w_i, x\rangle + [1-t]\cdot\langle w_i, y\rangle)\} =$$

$$= max\{0, t+[1-t]-t\cdot y_i\cdot\langle w_i, x\rangle - [1-t]\cdot y_i\cdot\langle w_i, y\rangle\} = max\{0, t - t\cdot y_i\cdot\langle w_i, x\rangle + [1-t] - [1-t]\cdot y_i\cdot\langle w_i, y\rangle\}$$

$$= max\{0, t\cdot(1 - y_i\cdot\langle w_i, x\rangle) + [1-t]\cdot(1 - y_i\cdot\langle w_i, y\rangle)\}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{f_i(tx + [1-t]y) = max\{0, t\cdot(1 - y_i\cdot\langle w_i, x\rangle) + [1-t]\cdot(1 - y_i\cdot\langle w_i, y\rangle)\} \ \ (6)}$$

Usando (1) tenemos que:

$$max\{0, t\cdot(1-y_i\cdot\langle w_i, x\rangle) + [1-t]\cdot(1-y_i\cdot\langle w_i, y\rangle)\} \leq max\{0, t\cdot(1-y_i\cdot\langle w_i, x\rangle)\} + max\{0, [1-t]\cdot(1-y_i\cdot\langle w_i, y\rangle)\}$$

Ahora usando esto y (6) llegamos a que:

$$\boxed{f_i(tx + [1-t]y) \leq max\{0, t \cdot (1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle)\} + max\{0, [1-t] \cdot (1 - y_i \cdot \langle w_i, y \rangle)\} \ \ (7)}$$

Ahora notemos que como $t \in [0,1]$, entonces $t \geq 0$ y $[1-t] \geq 0$.

Usando esto y (2) tenemos las siguientes dos igualdades:

$$max\{0, t \cdot (1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle)\} = t \cdot max\{0, 1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle\} = t \cdot f_i(x)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{max\{0, t \cdot (1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle)\} = t \cdot f_i(x) \ \ (8)}$$

$$max\{0, [1-t] \cdot (1 - y_i \cdot \langle w_i, y \rangle)\} = [1-t] \cdot max\{0, 1 - y_i \cdot \langle w_i, y \rangle\} = [1-t] \cdot f_i(y)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{max\{0, [1-t] \cdot (1 - y_i \cdot \langle w_i, y \rangle)\} = [1-t] \cdot f_i(y) \ \ (9)}$$

Usando (7), (8) y (9) tenemos que:

$$f_i(tx+[1-t]y) \leq max\{0, t \cdot (1-y_i \cdot \langle w_i, x \rangle)\} + max\{0, [1-t] \cdot (1-y_i \cdot \langle w_i, y \rangle)\} = t \cdot f_i(x) + [1-t] \cdot f_i(y)$$

$\Rightarrow$

$$f_i(tx + [1-t]z) \leq t \cdot f_i(x) + [1-t] \cdot f_i(z)$$

Y como se tomaron $x, z \in E$ arbitrarios y $\lambda \in [0,1]$ arbitrarios, entonces:

$$f_i(tx + [1-t]z) \leq t \cdot f_i(x) + [1-t] \cdot f_i(z) \ (\forall x, z \in E)(\forall t \in [0,1])$$

Entonces decimos que $f_i$ es convexa. Y como se tomo $i \in \{1, ..., n\}$ arbitrario, entonces:

$$\boxed{f_i \text{ es convexa} \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \ \ (10)}$$

Ahora, consideremos $x, z \in E$ arbitrarios y $t \in [0,1]$ arbitrario.

Como por (5) tenemos que $G(x)$ es convexa, entonces:

$$G(tx + [1-t]z) \leq t \cdot G(x) + [1-t] \cdot G(z)$$

Ahora como $\alpha \geq 0$, entonces:

$$\alpha \cdot G(tx + [1-t]z) \leq \alpha \cdot t \cdot G(x) + \alpha \cdot [1-t] \cdot G(z)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\alpha \cdot G(tx+[1-t]z) \leq t \cdot [\alpha \cdot G(x)] + [1-t] \cdot [\alpha \cdot G(z)] \quad (11)}$$

Por (10) tenemos que $f_i$ es convexa para todo $i \in \{1, ..., n\}$, entonces:

$$f_i(tx+[1-t]z) \leq t \cdot f_i(x) + [1-t] \cdot f_i(z) \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(tx+[1-t]z) \leq \sum_{i=1}^{n} (t \cdot f_i(x) + [1-t] \cdot f_i(z)) = \sum_{i=1}^{n} (t \cdot f_i(x)) + \sum_{i=1}^{n} ([1-t] \cdot f_i(z))$$
$$= t \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i(x) + [1-t] \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i(z)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f_i(tx+[1-t]z) \leq t \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i(x) + [1-t] \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i(z) \quad (12)}$$

Ahora sumando (11) y (12) llegamos a que:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(tx+[1-t]z)\right] + \alpha \cdot G(tx+[1-t]z) \leq t \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right] + [1-t] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\right] + t \cdot [\alpha \cdot G(x)] + [1-t] \cdot [\alpha \cdot G(z)]$$
$$= t \cdot \left(\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right] + \alpha \cdot G(x)\right) + [1-t] \cdot \left(\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\right] + \alpha \cdot G(z)\right)$$

$\Rightarrow$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(tx+[1-t]z)\right] + \alpha \cdot G(tx+[1-t]z) \leq t \cdot \left(\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right] + \alpha \cdot G(x)\right) + [1-t] \cdot \left(\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\right] + \alpha \cdot G(z)\right) \quad (13)$$

Pero como habíamos dicho que:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) + \alpha G(x)$$

Entonces, usando esto y por (13) tenemos que:

$$F(tx+[1-t]z) \leq t \cdot F(x) + [1-t] \cdot F(z)$$

Y como se habían considerando $x, z \in E$ arbitrarios y $t \in [0,1]$ arbitrario, entonces:

$$\boxed{F(tx + [1-t]z) \leq t \cdot F(x) + [1-t] \cdot F(z) \quad (\forall x, z \in E)(\forall t \in [0,1]) \quad (14)}$$

Lo cual significa que:

$$\boxed{F \text{ es convexa} \quad (15)}$$

Ahora lo que haremos será demostrar que $F$ es Lipschitz y debemos encontrar su constante asociada.

Lo primero que haremos será recordar que:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) + \alpha \cdot G(x) \quad \text{con } \alpha \geq 0$$

con:

$$f_i(x) = max\{0, 1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle\} \;\; \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

$$G(x) = \frac{\|x\|_2^2}{2} = \frac{x^T x}{2}$$

Analizaremos la función $f_i$ para un $i \in \{1, ..., n\}$ arbitrario.

Sean $x, z \in E$ arbitrarios, entonces:

$$\boxed{|f_i(x) - f_i(z)| = |max\{0, 1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle\} - max\{0, 1 - y_i \cdot \langle w_i, z \rangle\}| \quad (16)}$$

Por (3) tenemos que:

$$|max\{0, 1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle\} - max\{0, 1 - y_i \cdot \langle w_i, z \rangle\}| \leq |[1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle] - [1 - y_i \cdot \langle w_i, z \rangle]|$$

$$= |1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle - 1 + y_i \cdot \langle w_i, z \rangle| = |y_i \cdot \langle w_i, z \rangle - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle| = |y_i \cdot [\langle w_i, z \rangle - \langle w_i, x \rangle]|$$

$$= |y_i| \cdot |\langle w_i, z \rangle - \langle w_i, x \rangle| = |\langle w_i, z \rangle - \langle w_i, x \rangle| = |\langle w_i, z - x \rangle|$$

De esta forma:

$$|max\{0, 1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle\} - max\{0, 1 - y_i \cdot \langle w_i, z \rangle\}| \leq |\langle w_i, z - x \rangle|$$

Y reemplazando esto en (16) llegamos a que:

$$\boxed{|f_i(x) - f_i(z)| \leq |\langle w_i, z - x \rangle| \quad (17)}$$

Ahora por Cauchy - Schwarz se tiene que:

$$|\langle w_i, z-x\rangle| \leq \|w_i\|_2\|z-x\|_2$$

De este modo, reemplazando en (17) tenemos que:

$$\boxed{|f_i(x)-f_i(z)| \leq \|w_i\|_2\|z-x\|_2}$$

Como esto se mostró para $x, z \in E$ arbitrarios, entonces:

$$\boxed{|f_i(x)-f_i(z)| \leq \|w_i\|_2\|z-x\|_2 \;\; \forall x, z \in E}$$

De esta forma decimos que $f_i$ es Lipschitz con constante $L_i$ dada por $L_i = \|w_i\|_2$.

Y como el $i \in \{1, ..., n\}$ era arbitrario, entonces:

$$\boxed{(\forall i \in \{1, ..., n\}) \;\; |f_i(x)-f_i(z)| \leq L_i\|x-z\|_2 \; \forall x, z \in E \text{ con } L_i = \|w_i\|_2 \;\; (18)}$$

Por otro lado, notemos que sean $x, z \in E$ arbitrarios, entonces:

$$|G(x)-G(y)| = |\frac{\|x\|_2^2}{2} - \frac{\|z\|_2^2}{2}| = \frac{1}{2} \cdot ||\|x\|_2^2 - \|z\|_2^2| = \frac{1}{2} \cdot |[\|x\|_2 - \|z\|_2][\|x\|_2 + \|z\|_2]|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |[\|x\|_2 - \|z\|_2]| \cdot |[\|x\|_2 + \|z\|_2]|$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{|G(x)-G(y)| \leq \frac{1}{2} \cdot |[\|x\|_2 - \|z\|_2]| \cdot |[\|x\|_2 + \|z\|_2]| \;\; (19)}$$

Notemos que tanto $\|x\|_2 \geq 0$ como $\|z\|_2 \geq 0$, por lo tanto $\|x\|_2 + \|z\|_2 \geq 0$.

De este modo $||\|x\|_2 + \|z\|_2| = \|x\|_2 + \|z\|_2$.

Pero como tanto $x$ como $z$ estan en $B_2(0, R)$ entonces $\|x\|_2 \leq R$ y $\|z\|_2 \leq R$

De esta forma:

$$|[\|x\|_2 + \|z\|_2]| = \|x\|_2 + \|z\|_2 \leq R + R = 2R$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{|[\|x\|_2 + \|z\|_2]| \leq 2R \;\; (20)}$$

Así tenemos que usando (19) y (20) se llega a que:

$$|G(x) - G(z)| \leq \frac{1}{2} \cdot |[\|x\|_2 - \|z\|_2]| \cdot |[\|x\|_2 + \|z\|_2]| \leq \frac{1}{2} \cdot |[\|x\|_2 - \|z\|_2]| \cdot 2 \cdot R = R \cdot |[\|x\|_2 - \|z\|_2]|$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{|G(x) - G(z)| \leq R \cdot |\|x\|_2 - \|z\|_2| \quad (21)}$$

Ahora notemos que por desigualdad triangular se tiene que:

$$\|x\|_2 = \|x - z + z\|_2 = \|(x - z) + z\|_2 \leq \|x - z\|_2 + \|z\|_2$$

$\Rightarrow$

$$\|x\|_2 \leq \|x - z\|_2 + \|z\|_2$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\|x\|_2 - \|z\|_2 \leq \|x - z\|_2 \quad (22)}$$

Homologamente podemos decir que:

$$\|z\|_2 = \|z - x + x\|_2 = \|(z - x) + x\|_2 \leq \|z - x\|_2 + \|x\|_2$$

$\Rightarrow$

$$\|z\|_2 \leq \|z - x\|_2 + \|x\|_2$$

$\Rightarrow$

$$\|z\|_2 - \|x\|_2 \leq \|z - x\|_2$$

$\Rightarrow$

$$\|x\|_2 - \|z\|_2 \geq -\|z - x\|_2 = -\|x - z\|_2$$

$\Rightarrow$

$$\|x\|_2 - \|z\|_2 \geq -\|x - z\|_2$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\|x\|_2 - \|z\|_2 \geq -\|x - z\|_2 \quad (23)}$$

Usando (22) y (23) llegamos a que:

$$-\|x-z\|_2 \leq \|x\|_2 - \|z\|_2 \leq \|x-z\|_2$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{|\|x\|_2 - \|z\|_2| \leq \|x-z\|_2 \ \ (24)}$$

Reemplazando (24) en (21) llegamos a que:

$$|G(x)-G(z)| \leq R \cdot |\|x\|_2 - \|z\|_2| \leq R \cdot \|x-z\|_2$$

$\Rightarrow$

$$|G(x)-G(z)| \leq R \cdot \|x-z\|_2$$

Como esto se demostró para un $x, z \in E$ arbitrarios, entonces:

$$\boxed{|G(x)-G(z)| \leq R \cdot \|x-z\|_2 \ \ \forall x, z \in E \ \ (25)}$$

Ahora, recordando que:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) + \alpha \cdot G(x) \quad \text{con } \alpha \geq 0$$

Y usando (25) y (18) tenemos que sean $x, z \in E$ arbitrarios, entonces:

$$|F(x)-F(z)| = |\sum_{i=1}^{n} f_i(x)+\alpha\cdot G(x)-\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(z) + \alpha \cdot G(z)\right]| = |\sum_{i=1}^{n} f_i(x)+\alpha\cdot G(x)-\sum_{i=1}^{n} f_i(z)-\alpha\cdot G(z)|$$

$$= |\sum_{i=1}^{n} f_i(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(z) + \alpha \cdot G(x) - \alpha \cdot G(z)| \leq |\sum_{i=1}^{n} f_i(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(z)| + |\alpha \cdot G(x) - \alpha \cdot G(z)|$$

$$= |\sum_{i=1}^{n}[f_i(x) - f_i(z)]| + |\alpha \cdot [G(x) - G(z)]| = |\sum_{i=1}^{n}[f_i(x) - f_i(z)]| + |\alpha| \cdot |G(x) - G(z)|$$

$$= |\sum_{i=1}^{n}[f_i(x) - f_i(z)]| + \alpha \cdot |G(x) - G(z)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(z)| + \alpha \cdot |G(x) - G(z)|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} L_i \cdot \|x-z\|_2 + \alpha \cdot |G(x) - G(z)| \leq \sum_{i=1}^{n} L_i \cdot \|x-z\|_2 + \alpha \cdot R \cdot \|x-z\|_2$$

$$= \|x-z\|_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right) + \alpha \cdot R \cdot \|x-z\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right) \cdot \|x-z\|_2 + \alpha \cdot R \cdot \|x-z\|_2$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right) + \alpha \cdot R\right] \cdot \|x-z\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} L_i + \alpha \cdot R\right] \cdot \|x-z\|_2$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} \|w_i\|_2 + \alpha \cdot R\right] \cdot \|x-z\|_2$$

$\Rightarrow$

$$|F(x) - F(z)| \leq \left[\sum_{i=1}^{n} \|w_i\|_2 + \alpha \cdot R\right] \cdot \|x-z\|_2$$

Ahora definimos:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \|w_i\|_2 + \alpha \cdot R$$

De esta forma:

$$|F(x) - F(z)| \leq L \cdot \|x-z\|_2$$

Ahora notemos que como tomamos $x, z \in E$ arbitrarios, entonces:

$$\boxed{|F(x) - F(z)| \leq L \cdot \|x-z\|_2 \quad (\forall x, z \in E) \quad \text{con } L = \left(\sum_{i=1}^{n} \|w_i\|_2 + \alpha \cdot R\right) \quad (26)}$$

Así se demostró que:

$$\boxed{F \text{ es Lipschitz con constante } L = \left(\sum_{i=1}^{n} \|w_i\|_2 + \alpha \cdot R\right) \quad (27)}$$

Así, usando (15) y (27) llegamos a que:

$$\boxed{F \text{ es convexa y Lipschitz con constante } L = \left(\sum_{i=1}^{n} \|w_i\|_2 + \lambda \cdot R\right) \text{ sobre la bola } B_2(0, R)}$$

Que es justamente lo que queríamos demostrar para esta pregunta.

---

b)

Lo primero que haremos será demostrar que:

Sean las funciones $g_i : E \to \mathbb{R} \quad \forall i\{1,...,n\}$ tales que $g_i \in \Gamma_0(E)$ $\forall i\{1,...,n\}$, entonces:

$$\text{Si } x \in \bigcap_{i=1}^{n} int(dom(g_i)) \;\Rightarrow\; \partial\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \partial g_i(x)$$

Esto lo probaremos por inducción.

<u>Caso $n = 1$ :</u> Es trivial, pues sea $x \in \left[\bigcap_{i=1}^{n} int(dom(g_i)) = \bigcap_{i=1}^{1} int(dom(g_i)) = int(dom(g_1))\right]$, entonces:

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right) = \partial\left(\sum_{i=1}^{1} g_i(x)\right) = \partial\left(g_1(x)\right) = \partial g_1(x) = \sum_{i=1}^{1} \partial g_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial g_i(x)$$

Por lo tanto, para $n = 1$ se cumple que:

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \partial g_i(x)$$

<u>$n = 2$ :</u> Esto es lo que demostramos en la pregunta 1 en el inciso $c$).

<u>Hipótesis inductiva:</u> Asumimos que se cumple para un $n$ arbitrario.

Es decir, que sea un $x \in \bigcap_{i=1}^{n} int(dom(g_i))$ entonces:

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{n} g_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial g_i(x)$$

<u>Tesis inductiva:</u> Demostraremos que se cumple para el caso $n+1$ considerando que el caso $n$ se cumple.

Primero que todo, consideremos un $x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} int(dom(g_i))$ y $g_1, g_2, ..., g_n, g_{n+1} \in \Gamma_0(E)$.

Notemos que:

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} int(dom(g_i)) = \left[\bigcap_{i=1}^{n} int(dom(g_i))\right] \cap int(dom(g_{n+1}))$$

Por lo tanto, si $x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} int(dom(g_i)) \;\Rightarrow\; \boxed{\left[x \in \bigcap_{i=1}^{n} int(dom(g_i))\right] \wedge [x \in int(dom(g_{n+1}))] \quad (1)}$

Ahora lo que haremos será definir las funciones:

$$h_1(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \quad h_2(x) = g_{n+1}(x)$$

Como sabemos:

$$dom(h_1) = dom\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right) = \bigcap_{i=1}^{n} dom(g_i(x))$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{dom(h_1) = \bigcap_{i=1}^{n} dom(g_i(x)) \quad (2)}$$

Y trivialmente se puede observar que:

$$\boxed{dom(h_2) = dom(g_{n+1}) \quad (3)}$$

Ahora es claro que:

$$int(dom(g_i)) \subseteq dom(g_i) \; \forall i \in \{1, ..., n\}$$

$\Rightarrow$

$$\bigcap_{i=1}^{n} int(dom(g_i)) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} dom(g_i) = dom(h_1)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{n} int(dom(g_i)) \subseteq dom(h_1) \quad (4)}$$

Además notemos que $int(dom(g_i))$ es un conjunto abierto para todo $i \in \{1, ..., n\}$ y como sabemos que intersección finita de abiertos es abierto, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} int(dom(g_i))$ también es un abierto.

Ahora como sabemos que el interior de $dom(h_1)$ se puede expresar como la unión de todos los subconjuntos de $dom(h_1)$ que son abiertos y sumado a que el abierto $\bigcap_{i=1}^{n} int(dom(g_i))$ es subconjunto de $dom(h_1)$, entonces:

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{n} int(dom(g_i)) \subseteq int(dom(h_1)) \quad (5)}$$

Ahora como por (2) tenemos que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} int(dom(g_i))$ entonces por (5) se tiene que:

$$\boxed{x \in int(dom(h_1)) \quad (6)}$$

Además como por (3) tenemos que $dom(h_2) = dom(g_{n+1})$, entonces:

$$\boxed{int(dom(h_2)) = int(dom(g_{n+1})) \quad (7)}$$

Ahora como por (2) tenemos que $x \in int(dom(g_{n+1}))$ y esto sumado a (7) se tiene que:

$$\boxed{x \in int(dom(h_2)) \quad (8)}$$

Como sabemos que $h_2 = g_{n+1}$ y de inicio teníamos que $g_{n+1} \in \Gamma_0(E)$, entonces:

$$\boxed{h_2 \in \Gamma_0(E) \quad (9)}$$

Ahora como $g_1, ..., g_n \in \Gamma_0(E)$ entonces $\sum_{i=1}^{n} g_n \in \Gamma_0(E)$ y como $h_1 = \sum_{i=1} g_n$, entonces:

$$\boxed{h_1 \in \Gamma_0(E) \quad (10)}$$

De esta forma utilizando (6), (8), (9) y (10) tenemos que sea un $x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} int(dom(g_i))$ y sean $g_1, g_2, ..., g_n, g_{n+1} \in \Gamma_0(E)$, entonces si definimos:

$$h_1 = \sum_{i=1}^{n} g_i \text{ y } h_2 = g_{n+1}$$

entonces $x \in int(dom(h_1))$ y $x \in int(dom(h_2)$ lo cual implica que $x \in int(dom(h_1)) \cap int(dom(h_2))$.

Además tenemos que tanto $h_1 \in \Gamma_0(E)$ como $h_2 \in \Gamma_0(E)$.

De esta forma utilizando el resultado de la pregunta 1, inciso $c$) tenemos que:

$$\boxed{\partial h_1(x) + \partial h_2(x) = \partial(h_1 + h_2)(x) \quad (11)}$$

Ahora como $h_1 = \sum_{i=1}^{n} g_i$ y $h_2 = g_{n+1}$ entonces reemplazando en (11) se tiene que:

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{n} g_i\right)(x) + \partial g_{n+1}(x) = \partial\left(\sum_{i=1}^{n} g_i + g_{n+1}\right)(x)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} g_i\right)(x) + \partial g_{n+1}(x) = \partial\left(\sum_{i=1}^{n+1} g_i\right)(x) \quad (12)}$$

Ahora por hipótesis de inducción:

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{n} g_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial g_i(x)$$

Así reemplazando esto en (12) llegamos a que:

$$\sum_{i=1}^{n} \partial g_i(x) + \partial g_{n+1}(x) = \partial\left(\sum_{i=1}^{n+1} g_i\right)(x)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \partial g_i(x) = \partial\left(\sum_{i=1}^{n+1} g_i\right)(x)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n+1} \partial g_i(x) = \partial\left(\sum_{i=1}^{n+1} g_i\right)(x) \quad (13)}$$

Así se demostró para el caso $n+1$ bajo el supuesto de que se cumplia para el caso $n$.

De esta manera por inducción se demostró que:

Sean las funciones $g_i : E \to \mathbb{R}$ tales que $g_i \in \Gamma_0(E)\ \forall i\{1, ..., n\}$, entonces:

$$\text{Si } x \in \bigcap_{i=1}^{n} int(dom(g_i)) \text{ entonces } \partial\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \partial g_i(x)$$

Ahora utilizaremos este resultado para responder esta pregunta.

Lo que haremos será decir que:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)$$

con:

$$f_i(x) = max\{0, 1 - y_i \cdot \langle w_i, x\rangle\} \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

$$f_{n+1}(x) = \alpha \cdot \left(\frac{x^T x}{2}\right)$$

Recordemos que en la parte $a$) habíamos demostrado que $\forall i \in \{1, ..., n\}$ $f_i(x)$ es Lipschitz, por ende $f_i$ es continua, por lo tanto es semicontinua inferior. Además habiamos demostrado que $f_i(x)$ era convexa. Finalmente es fácil ver que $f_i(x)$ es propia pues para todo $x \in E$ la función $f_i(x)$ solo toma valores reales. De este modo:

$$\boxed{[f_i \text{ es convexa, semi continua inferior y propia} \ \Rightarrow\ f_i \in \Gamma_0(E)]\ \forall i \in \{1, ..., n\} \quad (14)}$$

Ahora, en la inciso anterior [Pregunta 3 a)] habíamos demostrado que $G(x) = \frac{\|x\|_2^2}{2}$ era convexa, por ende como $\alpha \geq 0$, entonces $\alpha \cdot \frac{\|x\|_2^2}{2}$ es convexa y como $f_{n+1}(x) = \alpha \cdot \frac{\|x\|_2^2}{2}$, entonces $f_{n+1}(x)$ es convexa.

Por otro lado es facil ver que $f_{n+1}(x)$ es continua en todo punto, por ende es semicontinua inferior. Y finalmente $f_{n+1}(x)$ solo toma valores en los reales, por ende es propia. De esta modo:

$$\boxed{f_{n+1} \in \Gamma_0(E) \quad (15)}$$

Así, uniendo (14) y (15) tenemos que:

$$\boxed{f_i \in \Gamma_0(E) \quad (\forall i \in \{1, ..., n+1\}) \quad (16)}$$

Ahora también es claro que el dominio de todas las funciones $f_1, f_2, ..., f_n, f_{n+1}$ es todo $E$, así tenemos que todo punto $x \in E$ pertenece a $\bigcap_{i=1}^{n+1} int(dom(g_i))$. De esta forma, utilizando esto junto a (16) y a la propiedad demostrada entonces tenemos que:

$$\forall x \in E \quad \partial \left( \sum_{i=1}^{n+1} f_i \right)(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \partial f_i(x)$$

Y como teniamos que $F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)$ entonces:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \partial F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \partial f_i(x) \quad (17)}$$

Ahora pasaremos a calcular los subdiferenciales.

Notemos que $f_{n+1}(x) = \alpha \cdot \frac{x^T x}{2}$ es diferenciable en todo punto, por ende:

$$\boxed{\partial f_{n+1}(x) = \{\alpha \cdot x\} \quad (18)}$$

Ahora nos centraremos en calcular $\partial f_i(x)$ para un $i$ arbitrario en $\{1, ..., n\}$.

Recordemos que:

$$f_i(x) = max\{0, 1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle\}$$

Ahora calcularemos este subdiferencial usando el teorema visto en clases para calcularlos.

Analizaremos por casos.

<u>Caso 1:</u> $x$ es tal que: $1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle < 0$

Para este caso tenemos que $\partial f_i(x) = \{0\}$

<u>Caso 2:</u> $x$ es tal que: $1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle > 0$

Para este caso tenemos que $\partial f_i(x) = \{-y_i \cdot w_i\}$

<u>Caso 3:</u> $x$ es tal que: $1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle = 0$

Sea $u_1^i(x) = 0$ y $u_2^i(x) = 1 - y_i \cdot \langle w_i, x \rangle$ entonces tenemos que $u_1^i$ es una función constante mientras que $u_2^i$ es una función lineal, por ende ambas pertenecen a $\Gamma_0(E)$. Y además al igual que en el caso anterior el dominio de $u_1^i$ y de $u_2^i$ es todo $E$ por lo tanto todo punto $x$ en $E$ pertenece al interior de $E$.

Por otro lado, notemos que para este $x$ que estamos analizando se da que:

$u_2^i(x) = 0 = u_1^i(x) \;\Rightarrow\; u_1^i(x) = u_2^i(x)$

Ahora notemos que $\nabla u_2^i(x) = 0$ y $\nabla u_1^i(x) = -y_i \cdot w_i$, de esta forma por teorema de clases:

$$\partial f_i(x) = \partial(max\{u_1^i, u_2^i\})(x) = conv\left(\{0, -y_i \cdot w_i\}\right) = \{k_i \cdot [-y_i \cdot w_i] + (1 - k_i) \cdot 0 : k_i \in [0,1]\}$$

$$= \{-k_i \cdot y_i \cdot w_i : k_i \in [0,1]\}$$

Así tenemos que $\forall i \in \{1, ..., n\}$:

$$\boxed{\partial f_i(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } 1 < y_i \cdot \langle w_i, x \rangle \\ \{-y_i \cdot w_i\} & \text{si } 1 > y_i \cdot \langle w_i, x \rangle \\ & \\ \{-k_i \cdot y_i \cdot w_i : k_i \in [0,1]\} & \text{si } 1 = y_i \cdot \langle w_i, x \rangle \end{cases}}$$

De esta forma, llegamos a que:

$$\partial F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \partial f_i(x)$$

con:

$$\partial f_{n+1}(x) = \{\alpha \cdot x\}$$

Y $\partial f_i(x)$ definido como:

$$\partial f_i(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } 1 < y_i \cdot \langle w_i, x\rangle \\ \{-y_i \cdot w_i\} & \text{si } 1 > y_i \cdot \langle w_i, x\rangle \\ \\ \{-k_i \cdot y_i \cdot w_i : k_i \in [0,1]\} & \text{si } 1 = y_i \cdot \langle w_i, x\rangle \end{cases}$$

Así de esa forma calculamos $\partial F(x)\ \forall x \in E$, que era justamente lo que nos pedían.

Por otro lado, tenemos que la condición de optimalidad es:

$x^* \in argmin\{F(x) : x \in E\} \Leftrightarrow 0 \in \partial F(x)$ donde $\partial F(x)$ es la expresión que acabamos de calcular.

Ahora, respondiendo a la pregunta de si $F$ es suave, la respuesta es no, pues para que la función sea suave su gradiente debe ser Lipschitz (esto es completamente homologo a decir que $F$ debe ser $\mu-$suave, pues si $F$ es $\mu-$suave entonces su gradiente es Lipschitz de constante $\mu$), pues usando la definición de $\partial F(x)$ tenemos que sea $x$ tal que $1 < \text{mín}_{i\in\{1,\ldots,n\}}[y_i \cdot \langle w_i, x\rangle]$, entonces:

$$\partial F(x) = \{0\}$$

Por ende el único $g_x \in \partial F(x)$ que podemos elegir es $g_x^1 = 0$

Y tomemos un $z$ tal que $1 = \text{mín}_{i\in\{1,\ldots,n\}}[y_i \cdot \langle w_i, z\rangle]$ de este modo, tenemos que:

$$\partial F(z) = \{-k_i \cdot y_i \cdot w_i : k_i \in [0,1]\}$$

Así podemos tomar un $g_z \in \partial F(z)$ para el caso $k_i = \frac{1}{2}$ que vendría siendo $-\frac{1}{2} \cdot y_i \cdot w_i$. Así tenemos que:

$$\|g_z - g_x\|_2 = \|-\frac{1}{2} \cdot y_i \cdot w_i\|_2 = \frac{\|w_i\|_2}{2}$$

Entonces para que la función sea suave al menos para estos dos puntos debe existir un $\mu > 0$ tal que:

$$\|g_z - g_x\|_2 = \frac{\|w_i\|_2}{2} \leq \mu \cdot \|z - x\|_2$$

Pero esto me implica que:

$$\frac{\|w_i\|_2}{2 \cdot \mu} \leq \|z - x\|_2$$

Pero es claro que podemos elegir $z$ y $x$ tan cercanos como podamos, de este modo, podemos elegirlos tales que:

$$\|z - x\|_2 \leq \frac{\|w_i\|_2}{4 \cdot \mu} < \frac{\|w_i\|_2}{2 \cdot \mu}$$

Y así se llega a una contradicción, y se concluye que $F$ no puede ser $\mu$ suave.

---

c) El método que nosotros utilizaremos para resolver esta problema, es el método del gradiente, pero que en vez de usar gradientes, utilizaremos subgradientes. Y además como no sabemos que paso sería el ideal, utilizaremos backtracking. De este modo tenemos que el algoritmo que utilizaremos será:

1. Sea $x^0 \in E$.
2. Sea $N \in \mathbb{N}$ el número de iteraciones que queremos realizar.
3. $\eta = 1$
4. for $n = 0, ..., N-1$:
    i. Obtenemos un subgradiente $g$ de $F(x)$ utilizando el resultado de la pregunta 3.b)
    ii. Hacemos $x^{n+1} = x^n - \eta \cdot g$
    iii. Si $F(x^{n+1}) \leq F(x^n) + \langle g, x^{n+1} - x^n \rangle + \frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \|x^{n+1} - x^n\|_2^2 \rangle$ consideramos como valida la iteración y seguimos.
    iv. Si $F(x^{n+1}) > F(x^n) + \langle g, x^{n+1} - x^n \rangle + \frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \|x^{n+1} - x^n\|_2^2 \rangle$ no consideramos como valida la iteración y hacemos $\eta = \frac{\eta}{2}$.

Todos los resultados que ahora presentaremos están en el documento de Jupyter que se adjunto junto con la tarea.

Ahora notemos el método que nos propusieron nos da que la función objetivo evaluada en el $x^*$ optimo es igual a:

$$\boxed{F(x^*) = 30{,}139424714873634}$$

Y notemos que sea $x''$ el optimo obtenido con nuestro método del subgradiente, notemos que la función objetivo evaluada en este punto es:

$$\boxed{F(x'') = 28{,}898100317112004}$$

Por otro lado, notemos que % de accuracy del método que nos propusieron es de:

$$\boxed{0{,}94 = 94\,\%}$$

Y el método que nosotros desarrollamos nos presenta un % de accuracy de:

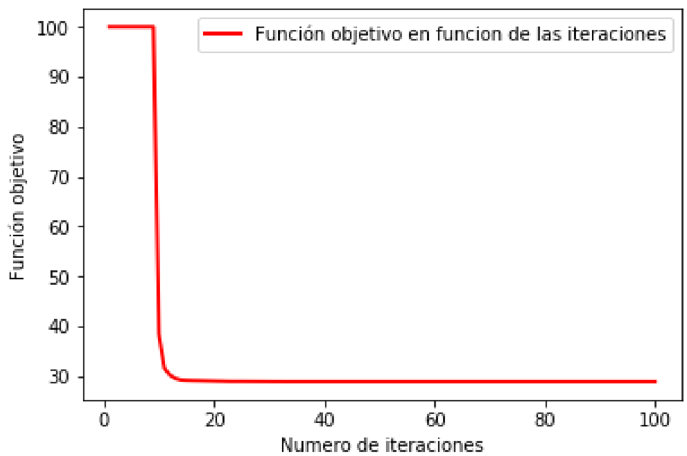
$$\boxed{0{,}88 = 88\,\%}$$

De este modo, tenemos que el método que nosotros propusimos es peor que el que nos propusieron porque justamente lo que nosotros estamos buscando es clasificar de manera correcta a los puntos y ese es el problema principal en el cual obtuvimos un porcentaje de acurracy menor que el del metodo propuesto (88 % vs 94 %). Ahora, para poder obtener una solución de este problema a través de métodos númericos y algoritmos es que se propuso la función $F$. Sin embargo, esta función $F$ tiene 2 cosas a considerar. La primera es que la función $F$ depende de $\alpha$ y en segundo lugar no nos asegura que a menor valor de la función objetivo $F$, mayor porcentaje de accuracy. Y de hecho esto es justamente lo que nos paso, es decir que la función objetivo de nuestro método $F(x'') = 28{,}898100317112004 < 30{,}139424714873634 = F(x^*) \;\Rightarrow\; F(x'') < F(x^*)$ y sin embargo el porcentaje de accuracy de nuestro método 88 % es menor que el del método propuesto 94 %.

Y los comentarios que podemos hacer respecto a este método es que podemos ir variando el $\alpha$ para ir obteniendo un mejor resultado, es decir un mejor porcentaje de accuracy porque ese es nuestro problema principal. Y también se puede concluir que a pesar de que el minimizar $F$ es una buena forma para obtener un $x$ tal que resuelva el problema con un alto porcentaje de accuracy, nada nos asegura que a menor valor de la función objetivo, mayor porcentaje de accuracy.

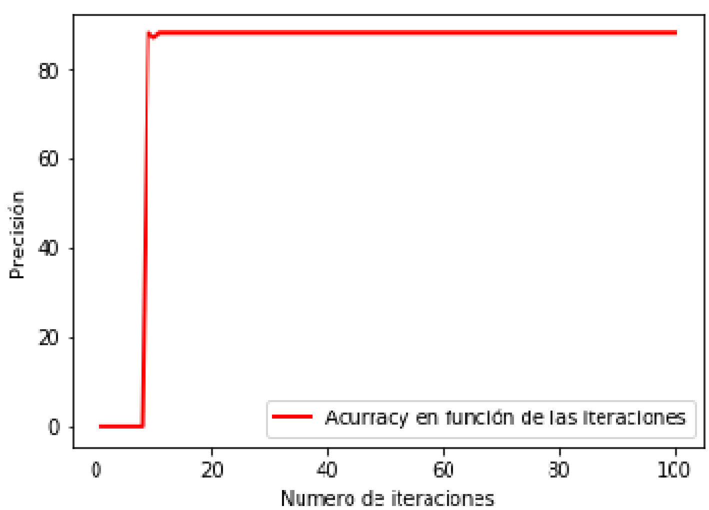
Además de eso aprovecharemos de mostrar dos gráficos de nuestro método del subgradiente con backtracking. El primer gráfico mostrará como varía la función objetivo en función de las iteraciones y el segundo gráfico mostrará como variara nuestro porcentaje de accuracy en función de las iteraciones.

**Función objetivo en función de las iteraciones:**




<u>Comentarios:</u> Como se puede observar la función objetivo converge rápidamente y lo hace en aproximadamente 18 iteraciones.

**Porcentaje de accuracy en función de las iteraciones:**




<u>Comentarios:</u> Al igual que en el caso anterior, se puede observar que se converge al porcentaje de accuracy en aproximadamente 18 iteraciones.