Articulation Points

Andrés Valencia Oliveros[1,2]

Facultad de Ingeniería, Diseño e Innovación
Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano
Bogotá, Colombia

Resumen

...

Keywords: articulation point, cut vertex

1. Introducción

...

2. Teoría de grafos

En matemáticas y en ciencias de la computación, la teoría de grafos estudia las propiedades de los grafos. Un grafo $G(V, E)$ es una colección de puntos, llamados vértices o nodos $V = \{v_1, v_2, \dots\}$, y segmentos de línea que conectan esos puntos, llamados aristas o arcos (en inglés *edges*) $E = \{e_1, e_2, \dots\}$; cada arista e tiene dos *puntos finales*, que son vértices. Se escribe $u \overset{e}{-} v$, y significa que la arista e incide sobre los vértices u y v; en este caso se puede decir que e conecta los vértices u y v, o que los vértices u y v son adyacentes [1].

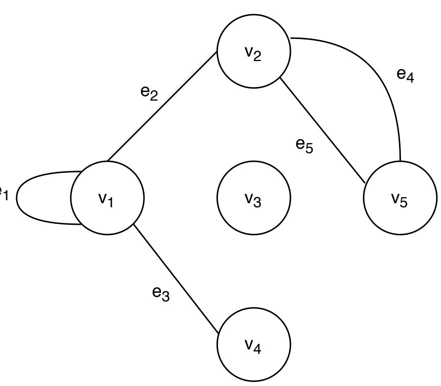


Figura 1. Ejemplo de un grafo. [1]

[1] GitHub: anvalenciao

[2] Email: anvalenciao@poligran.edu.co

2.1. *Grafo conexo*

Un grafo G es conexo, si por cada dos vértices u y v, hay un camino (finito) que comienza en u y termina en v [1]. Para verificar si un grafo G es conexo, se puede aplicar un algoritmo determinista habitual, búsqueda en anchura en inglés *Breadth First Search* (BFS) o búsqueda en profundidad en inglés *Depth First Search* (DFS).

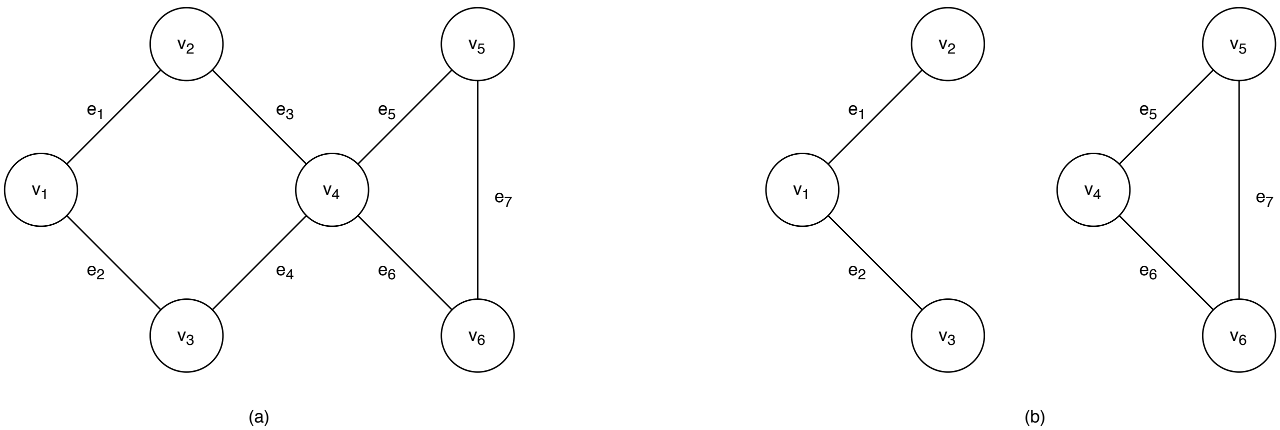


Figura 2. Tipos de grafos. (a) Conexo. (b) Disconexo.

2.2. *Grafo dirigido o digrafo*

Un digrafo o grafo dirigido $G(V, E)$ se define de manera similar a un grafo, excepto que el par de *puntos finales* (u, v) de cada arista ahora está ordenado. Se escribe $u \xrightarrow{e} v$, dónde u es el vértice inicial de e; y v es el vértice final de e. Se dice que la arista e está dirigida de u a v [1].

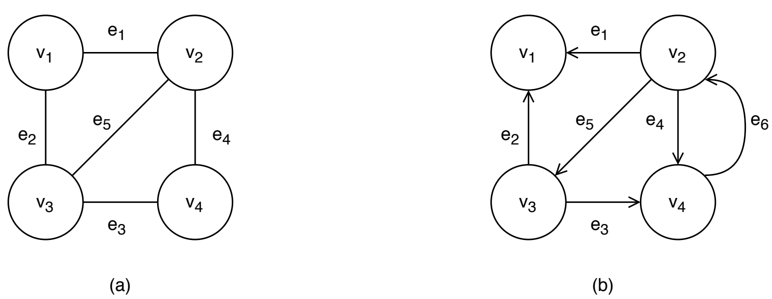


Figura 3. Tipos de grafos. (a) No dirigido. (b) Dirigido o digrafo.

3. Puntos de articulación

Un vértice v es un punto de articulación (o vértice de corte), si al eliminar el vértice v del grafo aumenta el número de componentes conectados. Es decir, genera algunos vértices inalcanzables para otros, se desconecta el grafo [2].

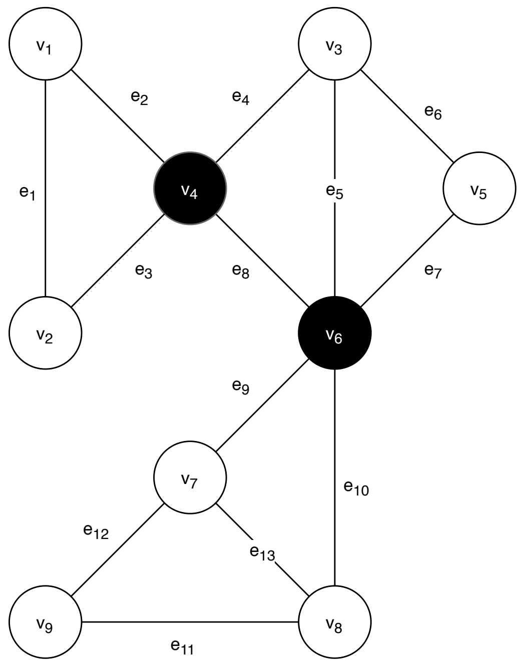


Figura 4. Ejemplo de grafo con dos puntos de articulación v_4 y v_6.

3.1. Algoritmo de Tarjan

El algoritmo de Tarjan se basa en una búsqueda en profundidad DFS, la complejidad del tiempo de ejecución para este algoritmo es lineal, la misma del DFS, $O(V + E)$. La complejidad espacial es igual al número total de vértices $O(V)$ [3].

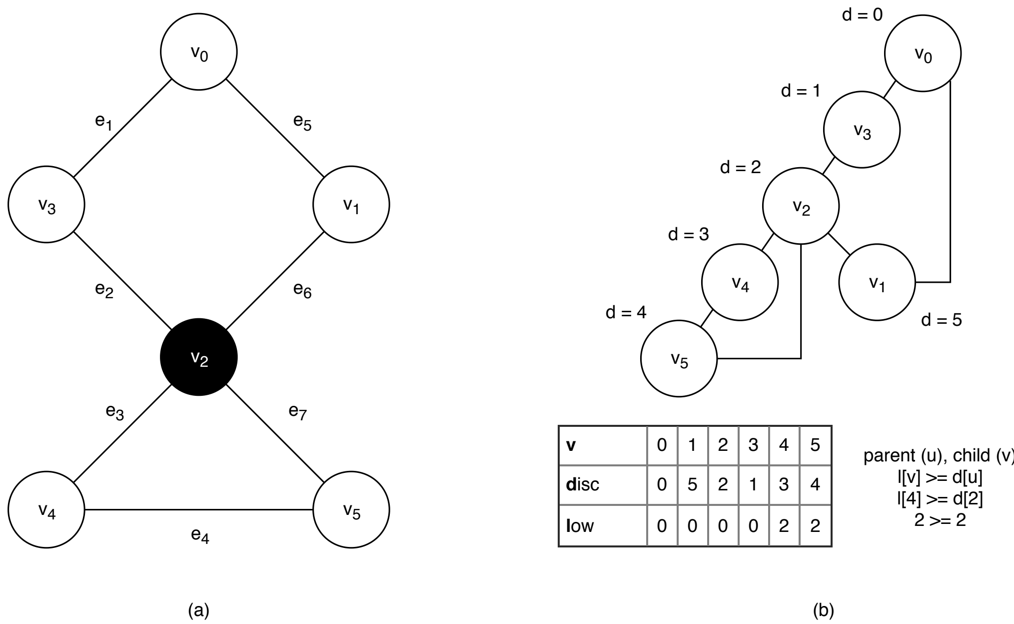
3.1.1. Pseudocódigo

```
function GetArticulationPoints(i, d)
    visited[i] ← true
    disc[i] ← d
    low[i] ← d
    childCount ← 0
    isArticulation ← false
    for all ni in adj[i] do
        if not visited[ni] then
            parent[ni] ← i
            GetArticulationPoints(ni, d + 1)
            childCount ← childCount + 1
            if low[ni] ≥ disc[i] then
                isArticulation ← true
            end if
            low[i] ← Min(low[i], low[ni])
        else if ni ≠ parent[i] then
            low[i] ← Min(low[i], disc[ni])
        end if
    end for
    if (parent[i] ≠ null and isArticulation) or (parent[i] = null and childCount > 1) then
        return Output i as articulation point
    end if
end function
```

3.1.2. Implementación

En el grafo que se muestra en la Figura 5, se observa la representación del mismo en un árbol DFS, donde un vértice u es padre de otro vértice v y u es un punto de articulación si satisface una de las siguientes dos condiciones:

1. u es la raíz del árbol DFS y tiene al menos dos hijos independientes (no están conectados entre sí).
2. Si u no es la raíz comprueba si $low[v]$ es mayor o igual a $disc[u]$.



v	0	1	2	3	4	5
disc	0	5	2	1	3	4
low	0	0	0	0	2	2

Figura 5. Punto de articulación. (a) Grafo con punto de articulación en el vértice v_2. (b) Árbol DFS del grafo y *Back Edge.*

El siguiente código en JavaScript, es la implementación del algoritmo de Tarjan. No sé recomienda ejecutarlo en ambientes de producción, se desarrollo en este lenguaje por su facilidad de ejecutar.

Algoritmo 1: Código en JavaScript

```
/**
 * Test: Ubuntu 19.04 / node v10.15.2
 * Command: node /{path}/Tarjan.js
 * Based on: https://www.geeksforgeeks.org/articulation-points-or-cut-vertices-in-a-graph/
 */
class Graph {
  constructor() {
    this.graph = new Object();
    this.time = 0; // Valor actual del tiempo de descubrimiento.
  }

  addEdge(u, v) {
    if (this.graph[u] === undefined) {
      this.graph[u] = new Array();
    }

    if (this.graph[v] === undefined) {
      this.graph[v] = new Array();
    }

    this.graph[u].push(v);
    this.graph[v].push(u);
  }

  DFS(u = 0, visited = [], ap = [], parent = [], low = [], disc = []) {
    let childCount = 0;
    visited[u] = true;
```

```javascript

    disc[u] = this.time;
    low[u] = this.time;
    this.time += 1;

    for (const v of this.graph[u]) {
      if (visited[v] == false) {
        parent[v] = u;
        childCount += 1;

        this.DFS(v, visited, ap, parent, low, disc);

        low[u] = Math.min(low[u], low[v]);
        if (parent[u] == -1 && childCount > 1) {
          ap[u] = true;
        }

        if (parent[u] != -1 && low[v] >= disc[u]) {
          ap[u] = true;
        }

      } else if (v != parent[u]) {
        low[u] = Math.min(low[u], disc[v]);
      }
    }
  }

  ArticulationPoint() {
    let V =  Object.keys(this.graph).length; // Numero de vertices.
    let visited = new Array(V), // Denota si se visita o no un vertice durante el DFS.
        disc =  new Array(V), // Almacenan el tiempo de descubrimiento de cada vertice.
        low =  new Array(V), // Almacena, para cada vertice, el tiempo descubierto del vertice mas antiguo.
        parent =  new Array(V), // Almacena el padre de cada vertice en el arbol DFS.
        ap = new Array(V); // Almacena los puntos de articulacion.

    for (let i = 0; i < V; i++)
    {
        parent[i] = -1;
        visited[i] = false;
        ap[i] = false;
    }

    for (let i = 0; i < V; i++) {
      if (visited[i] == false) {
        this.DFS(i, visited, ap, parent, low, disc);
      }
    }

    for (let i = 0; i < V; i++) {
      if (ap[i] == true) {
        // Imprime los puntos de articulacion.
        console.log(i);
      }
    }

  }
}

// { 0: [ 1, 3 ], 1: [ 0, 2 ], 2: [ 1, 3, 4, 5 ], 3: [ 0, 2 ], 4: [ 2 ], 5: [ 2 ] }
g = new Graph();
g.addEdge(0, 1);
g.addEdge(0, 3);
g.addEdge(1, 2);
g.addEdge(3, 2);
g.addEdge(2, 4);
g.addEdge(2, 5);
g.ArticulationPoint();
```

4. Puentes

Una arista se llama puente si al eliminarla del grafo (manteniendo los vértices) aumenta el número de componentes conectados [2].

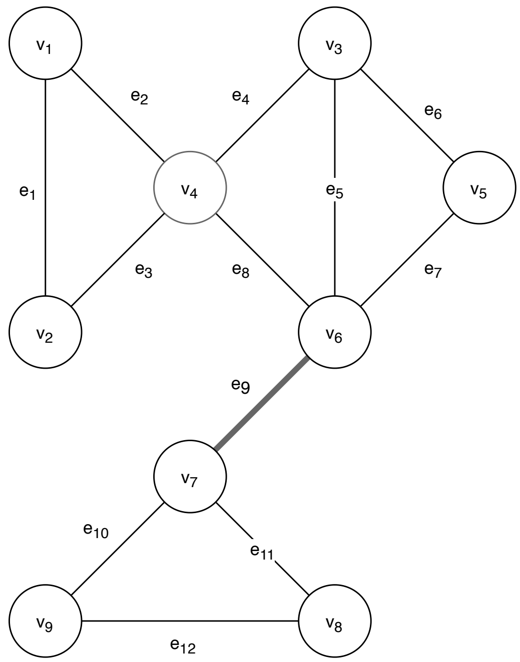


Figura 6. Ejemplo de grafo con una arista puente e_9.

Glosario de términos

adyacentes Si una arista conecta dos vértices, se dice que son adyacentes. 1

algoritmo determinista Su comportamiento se puede predecir completamente a partir de la entrada, el algoritmo realiza los mismos cálculos y ofrece los mismos resultados[4]. 2

BFS *Breadth First Search*. 2

DFS *Depth First Search*. 2, 3

puntos finales Dos vértices conectados por una arista. 1, 2

Referencias

[1] S. Even, *Graph algorithms.* Cambridge University Press, 2011.

[2] V. Jaimini, "Articulation Points and Bridges Tutorials & Notes — Algorithms — HackerEarth," 2017.

[3] "Biconnected component."

[4] P. E. Black, "deterministic algorithm," 2009.