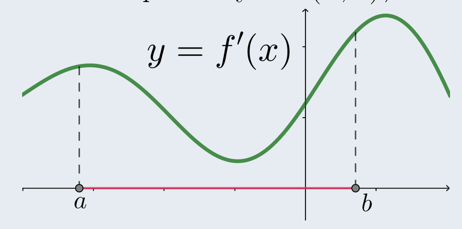
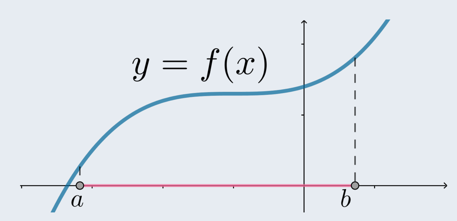
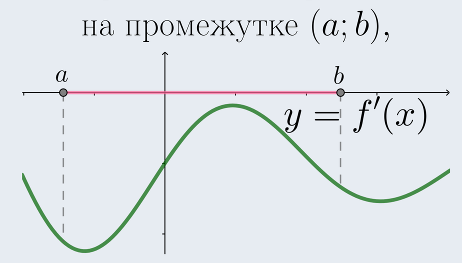
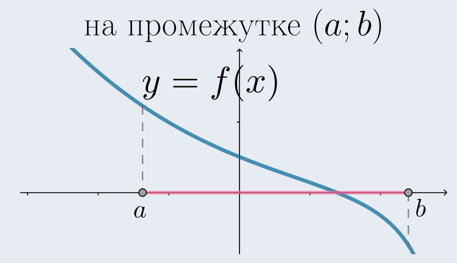
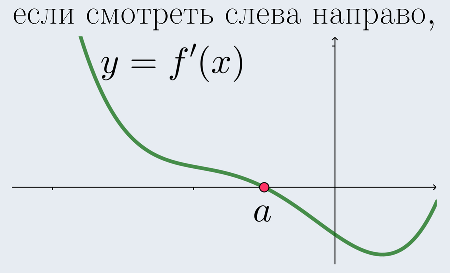
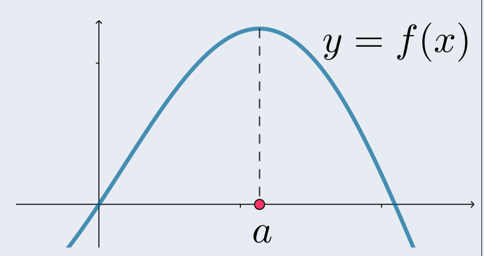
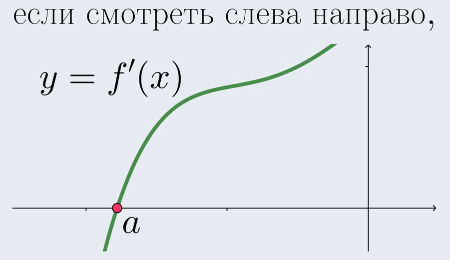
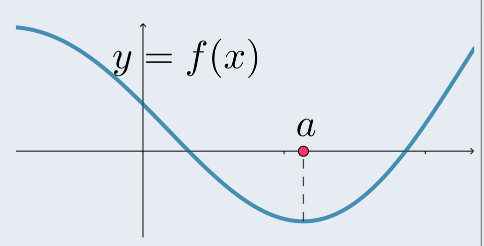
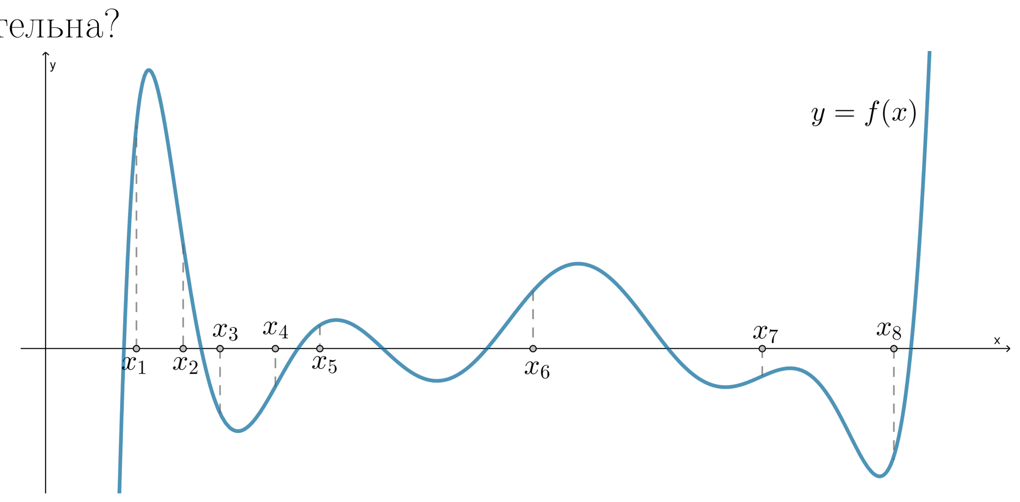
Связь функции и ее производной

Если производная положительна на промежутке $(a;b)$,	то функция возрастает на промежутке $(a;b)$
	
Если производная отрицательна на промежутке $(a;b)$,	то функция убывает на промежутке $(a;b)$
	
Если производная равна нулю в точке $x=a$, причем меняет знак с "плюса" на "минус", если смотреть слева направо,	то точка $x=a$ является точкой максимума функции
	
Если производная равна нулю в точке $x=a$, причем меняет знак с "минуса" на "плюс", если смотреть слева направо,	то точка $x=a$ является точкой минимума функции
	

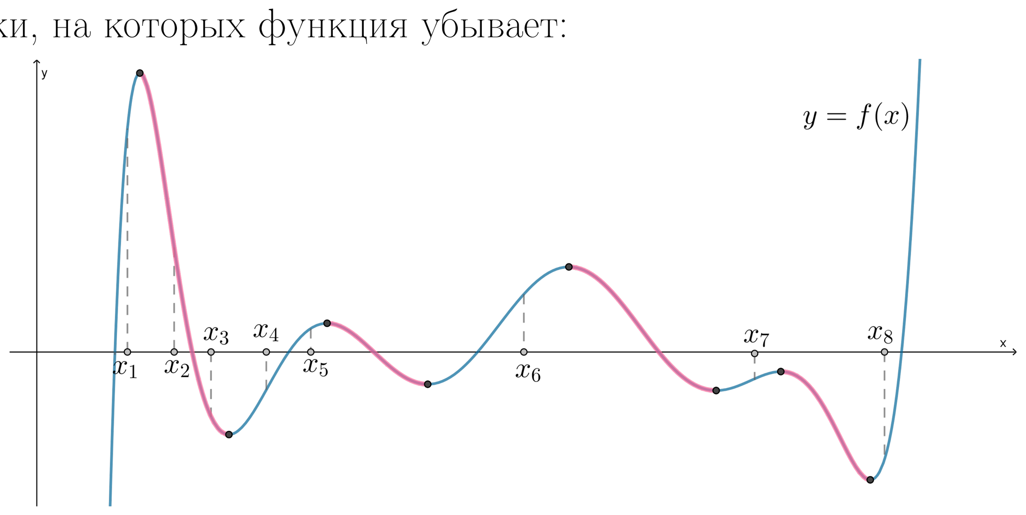
Пример, где встречается

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производной функции $f(x)$ отрицательна?



► Так как на рисунке изображен график самой функции, то из рисунка мы можем извлечь следующую информацию: где функция возрастает, убывает или имеет экстремум.

Нам нужно найти точки, в которых производная отрицательна. Значит, функция убывает. Отметим на рисунке промежутки, на которых функция убывает:

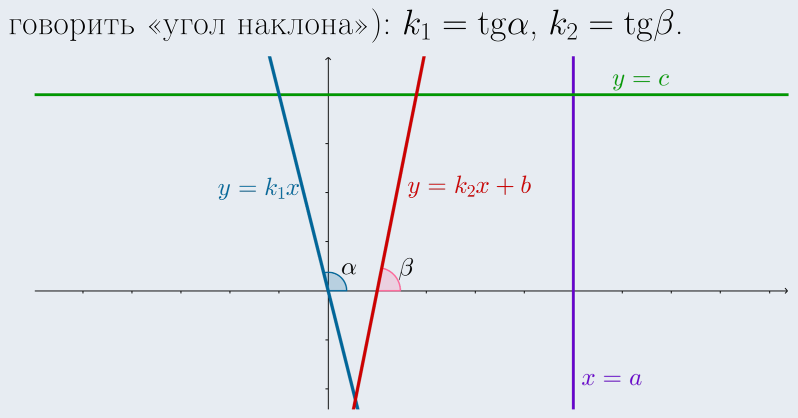


Таким образом, мы видим, что в эти промежутки попадает только две точки. Следовательно, ответ: 2. ■

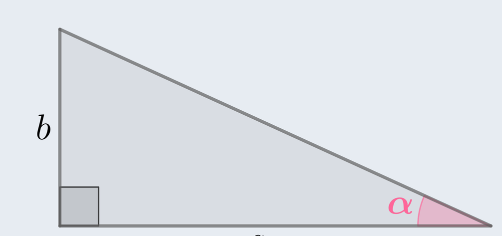
Линейная функция

Для начала вспомним некоторые факты о прямой, так как касательная — это прямая.

- Линейная функция – функция вида $f(x)=kx+b$, где k,b – некоторые числа.
- Графиком линейной функции является прямая.
- Если $b=0$, то прямая проходит через начало координат.
- Графиком $x=a$ является прямая, параллельная оси Oy.
- Графиком $y=c$ является прямая, параллельная оси Ox.
- Для $f(x)=kx+b$ угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox (сокращенно будем говорить «угол наклона»): $k_1=\mathrm{tg}\alpha$, $k_2=\mathrm{tg}\beta$.



Напомним, что тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение противолежащего катета к прилежащему:

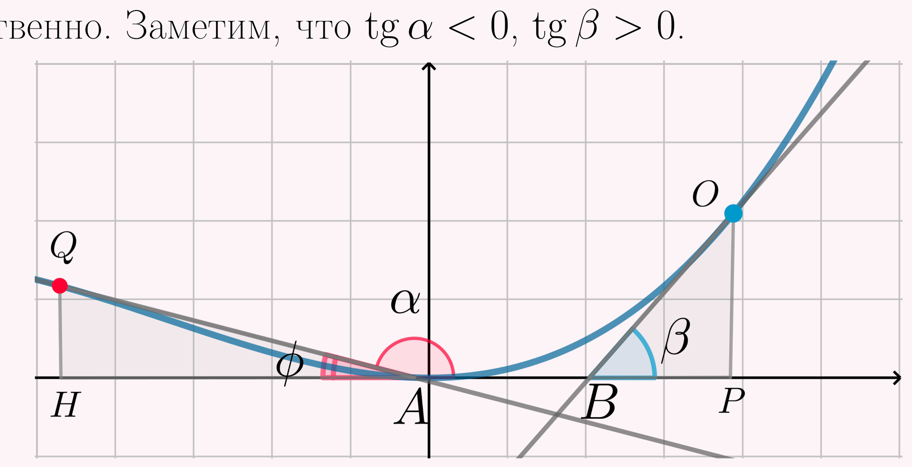


$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{b}{a}$$

- Если две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$: параллельны, то $k_1=k_2$; взаимно перпендикулярны, то $k_1\cdot k_2=-1$.

Угол наклона касательной

На рисунке изображены две касательные к графику с углами наклона $\alpha>90°$ и $\beta<90°$ в точках Q и O соответственно. Заметим, что $\mathrm{tg}\,\alpha<0$, $\mathrm{tg}\,\beta>0$.

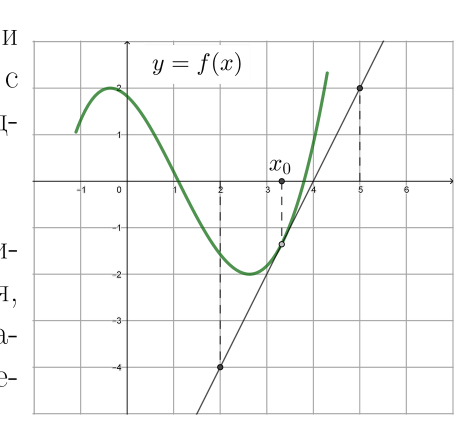


$\mathrm{tg}\,\beta$ не составит труда найти из построенного прямоугольного треугольника $\triangle BOP$. А вот с $\mathrm{tg}\,\alpha$ возникают проблемы. Как их решить?

Так как тангенсы смежных углов противоположны, то искать $\mathrm{tg}\,\alpha$ мы будем через $\mathrm{tg}(180°-\alpha)=\mathrm{tg}\,\phi=|\mathrm{tg}\,\alpha|>0$. Найдем $\mathrm{tg}\,\phi$ из прямоугольного $\triangle AQH$ и тогда $\mathrm{tg}\,\alpha=-\mathrm{tg}\,\phi$.

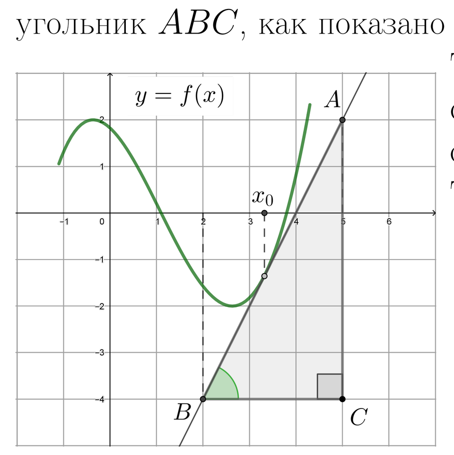
Пример, где встречается

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



► Необходимо найти $f'(x_0)$.

Мы знаем, что если в точке x_0 к графику функции $f(x)$ проведена касательная, то $f'(x_0)$ равно тангенсу угла наклона касательной. Построим прямоугольный треугольник ABC, как показано на рисунке.



Тогда $BC \parallel Ox$ и угол наклона между касательной и положительным направлением оси Ox равен углу ABC.

Тогда по определению тангенса

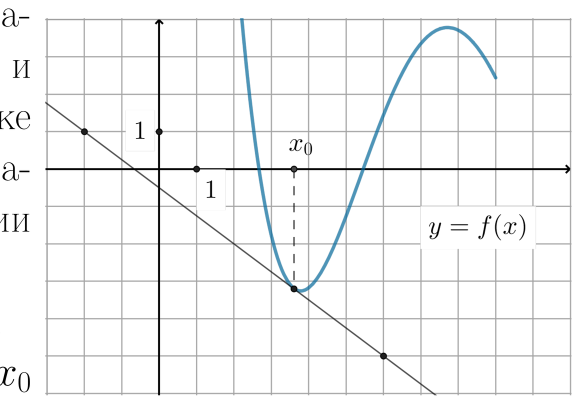
$$\mathrm{tg}\angle ABC=\frac{AC}{BC}=\frac{6}{3}=2$$

$$f'(x_0)=\mathrm{tg}\angle ABC=2$$

■

Пример, где встречается

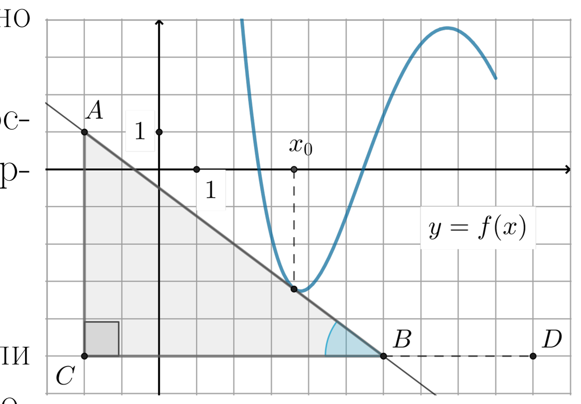
На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



► Необходимо найти $f'(x_0)$.

Мы знаем, что если в точке x_0 к графику функции $f(x)$ проведена касательная, то $f'(x_0)$ равно тангенсу угла наклона касательной. Построим прямоугольный треугольник ABC, как показано на рисунке. Отрезок BC продлим за точку B и отметим на продолжении точку D. Тогда $\angle ABD$ равен углу наклона касательной к положительному направлению оси Ox.

Следовательно, нам нужно найти $\mathrm{tg}\angle ABD$.



Здесь нам понадобится воспользоваться следующей формулой:

$$\mathrm{tg}\,(180°-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$$

Эта формула значит, что если у нас есть два угла, сумма которых равна $180°$, то тангенсы этих углов противоположны.

Таким образом, мы можем найти $\mathrm{tg}\angle ABC$ и тогда $\mathrm{tg}\angle ABD=-\mathrm{tg}\angle ABC$.

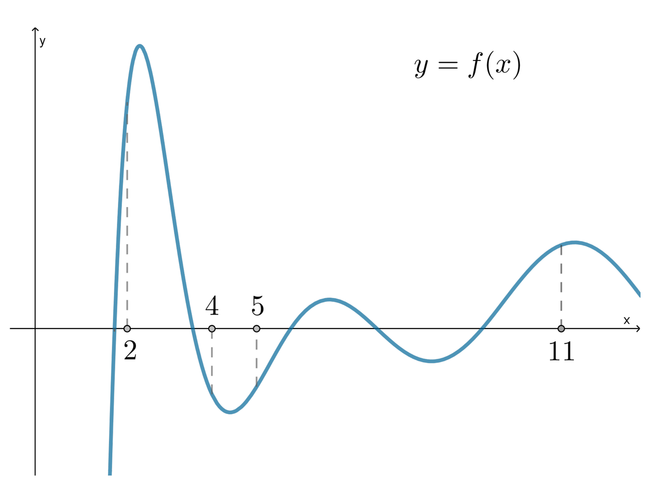
По определению тангенса

$$\mathrm{tg}\angle ABC=\frac{AC}{BC}=\frac{6}{8}=0,75$$

Значит, $f'(x_0)=\mathrm{tg}\angle ABD=-\mathrm{tg}\angle ABC=-0,75$. ■

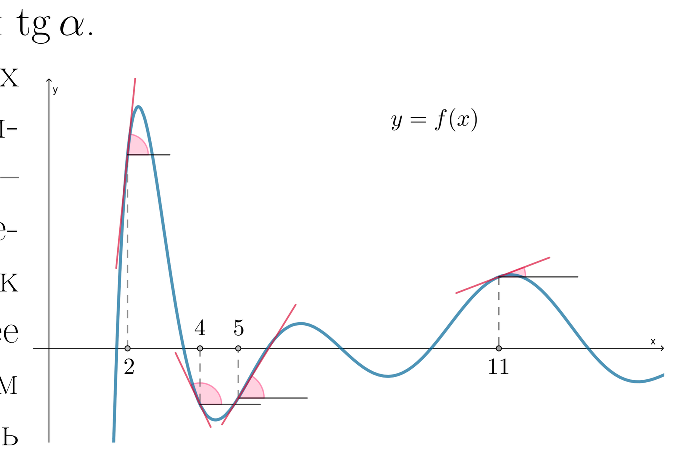
Пример, где встречается

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и отмечены точки 2, 4, 5, 11. В какой из этих точек значение производной наибольшее?



► Так как значение производной функции в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику этой функции в точке x_0, то нарисуем касательные к графику функции, проведенные в точках $x_0=2;4;5;11$, и отметим углы, равные углам наклона этих касательных к положительному направлению оси Ox.

Так как $f'(x_0)=\mathrm{tg}\,\alpha$ и нам нужно найти наибольшее $f'(x_0)$, то найдем наибольший $\mathrm{tg}\,\alpha$.



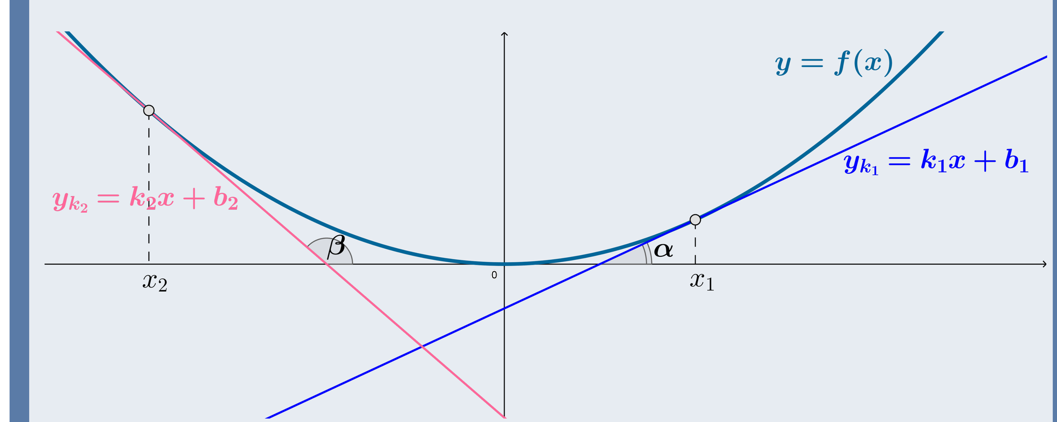
Мы знаем, что у острых углов тангенс положительный, у тупых – отрицательный. Следовательно, так как мы ищем наибольшее значение тангенса, нам нужно исследовать только острые углы. Эрто углы в точках 2, 5 и 11.

Так как для углов от $0°$ до $90°$ верно: чем больше угол, тем больше его тангенс, то наибольший тангенс будет у угла в точке 2.

Для углов от $90°$ до $180°$ также верно, что чем больше угол, тем больше его тангенс. ■

Геометрический смысл производной

- Итак, каков геометрический смысл производной? Если функция в точке x_0 имеет производную, то это значит, что в этой точке можно провести касательную к графику данной функции. Касательная – это некоторая прямая, которая графически выглядит так:



- На чертеже изображены две различные касательные y_{k_1} и y_{k_2}, проведенные к графику функции $f(x)$. Угол наклона первой касательной равен α, угол наклона второй равен β.
- Если нам известно уравнение $y=f(x)$ функции, то, выбрав точку x_0, в которой мы хотим провести касательную к графику этой функции, можно записать уравнение этой касательной:

$$y_k=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

- Если переписать уравнение касательной так, чтобы первое слагаемое было kx, второе слагаемое было b, то есть записать в виде $y_k=f'(x_0)\cdot x+f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$, то видно, что

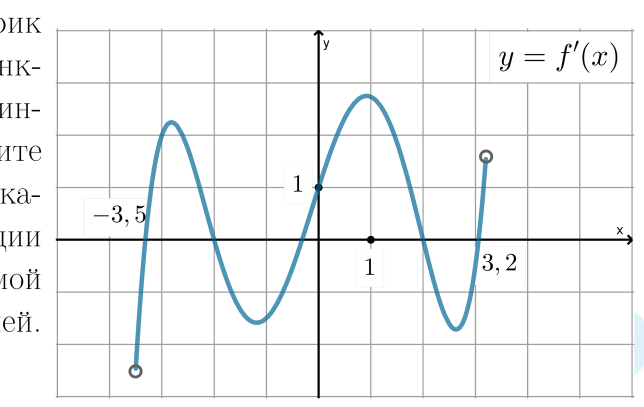
$$\begin{cases} k=f'(x_0)\\ b=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0\end{cases}$$

- Таким образом, мы видим, что, с одной стороны, угловой коэффициент k касательной, как и любой прямой, равен тангенсу угла наклона α, а с другой стороны, если эта прямая касается графика функции $f(x)$ в точке x_0, то угловой коэффициент k также равен числу $f'(x_0)$:

$$k=\mathrm{tg}\,\alpha=f'(x_0)$$

Пример, где встречается

На рисунке изображен график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3,5;3,2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна прямой $y=-x-9$ или совпадает с ней.

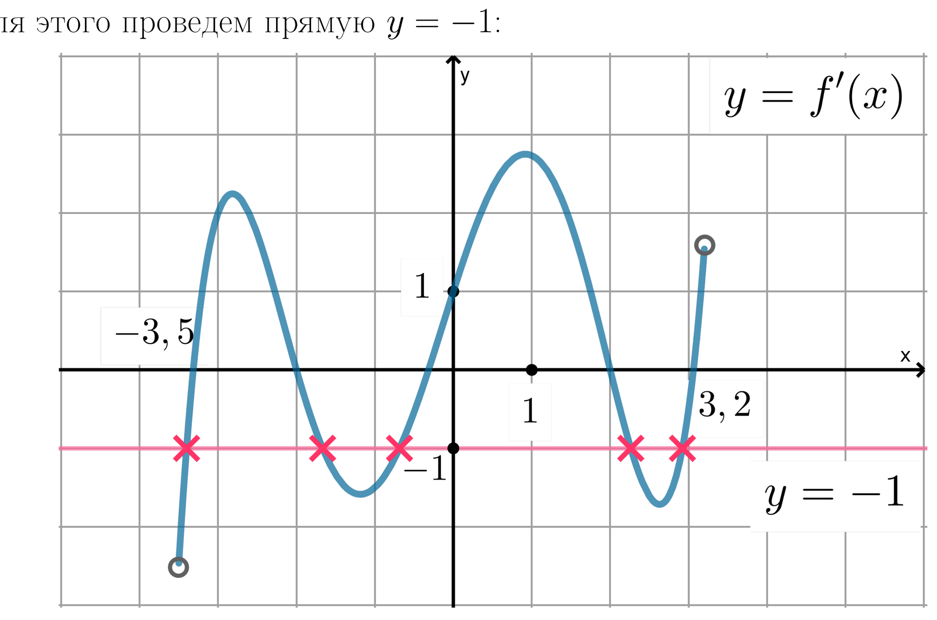


► Пусть x_0 – точка, в которой касательная к графику $y=f(x)$ параллельна $y=-x-9$ или совпадает с ней. Тогда, с одной стороны, уравнение этой касательной выглядит так: $y_k=f'(x_0)x+b$. С другой стороны, так как y_k параллельна или совпадает с $y=-x-9$, то их угловые коэффициенты равны, то есть $f'(x_0)=-1$.

Следовательно, нам нужно найти количество x_0, в которых $f'(x_0)=-1$.

На рисунке как раз изображен график производной, поэтому найдем количество точек на графике, у которых «игрековая» координата равна -1.

Для этого проведем прямую $y=-1$:



Отсюда мы видим, что график имеет пять точек, у которых $y=-1$.

Ответ: 5. ■

8 и 12 задания из ЕГЭ 2024

Производная

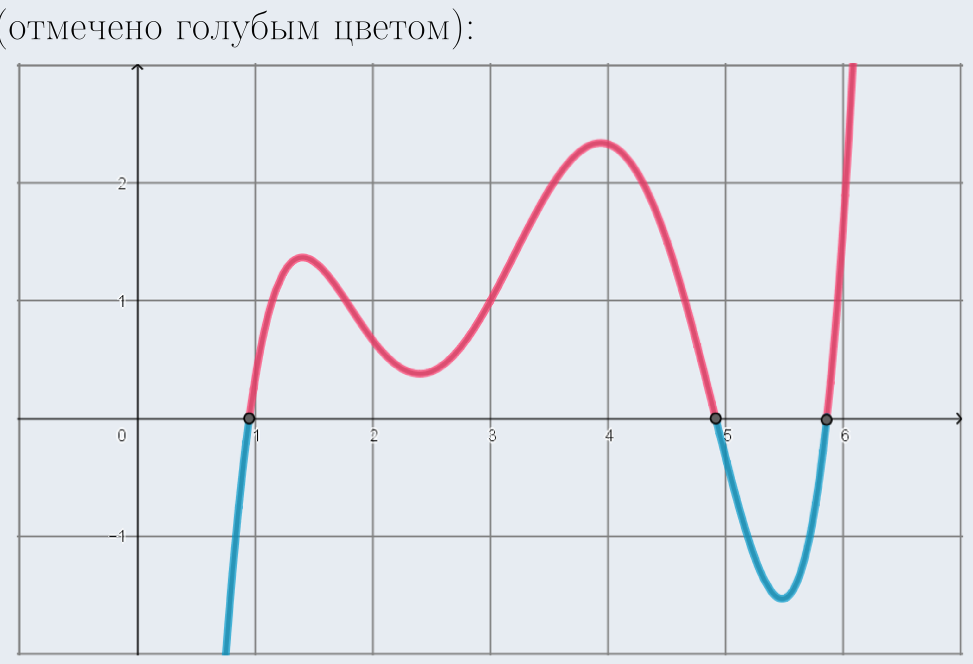
Возрастание и убывание функции

Функция на промежутке (a, b) является возрастающей, если при увеличении x из этого промежутка $f(x)$ также увеличивается.
Функция на промежутке (a, b) является убывающей, если при увеличении x из этого промежутка $f(x)$ наоборот уменьшается.
Рассмотрим график некоторой функции:

Например, на промежутке $(0,8; 1)$ функция возрастает (зеленый кусок графика), а на промежутке $(4; 5)$ функция убывает (синий кусок графика).
Если на некотором промежутке функция только возрастает или только убывает, то говорят, что функция монотонна на этом промежутке.

Положительная/отрицательная часть графика

Часть графика, находящаяся выше оси абсцисс, соответствует положительным значениям функции (отмечено красным цветом); часть графика, находящая ниже оси абсцисс, соответствует отрицательным значениям функции (отмечено голубым цветом):



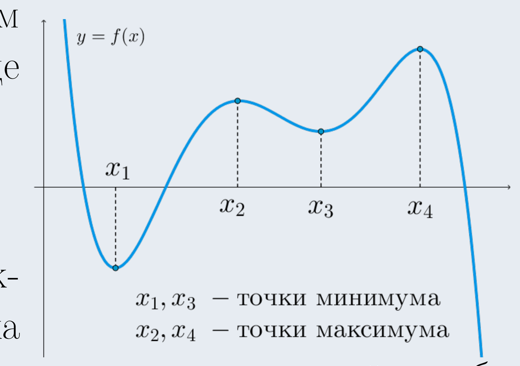
Это значит, что если взять любую точку на красной части графика и она будет иметь координаты $(x; y)$, то координата $y > 0$ (иначе говоря, $f(x) > 0$). Например, при $x = 3$ значение $f(3) = 1 > 0$.
А вот для любой точки на голубой части графика $y < 0$. Например, при $x = 5$ значение $f(5) \approx -0,3 < 0$.
(Координаты не вычисляются приблизительно, сейчас это было сделано лишь для того, чтобы наглядно показать вам, что при $x = 5$ значение функции отрицательное.)

Нули функции

Точки, в которых график функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс, называются нулями функции (то есть это значения переменной x). Также нули функции можно найти, решив уравнение $f(x) = 0$. На предыдущем рисунке нули функции — это черные точки.

Связь функции с ее производной

1) Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна на промежутке $(a; b)$, то функция $f(x)$ на этом промежутке будет возрастать.
2) Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ отрицательна на промежутке $(a; b)$, то функция $f(x)$ на этом промежутке будет убывать.
Для остальных свойств нам понадобится ввести еще несколько определений.



Точкой экстремума функции $f(x)$ называется точка x_0, в которой функция меняется с возрастающей на убывающую или наоборот: с убывающей на возрастающую. Причем точки, в которых функция меняет свой характер монотонности с возрастания на убывание, называются точками максимума (x_{max}), а точки, в которых – с убывания на возрастание, называются точками минимума (x_{min}).
На чертеже выше показано, как на графике функции $f(x)$ выглядят эти точки.

Если в точке максимума функция меняется слева направо с возрастающей на убывающую, то, учитывая свойства 1) и 2), производная, проходя через эту точку, меняется слева направо с положительной на отрицательную. Значит, в точке максимума x_{max} равна нулю.
Аналогично в точке минимума x_{min} производная равна нулю, но меняет свои значения слева направо уже с отрицательных на положительные.
На графике производной $f'(x)$ эти точки выглядят так, как показано на чертеже выше.
Таким образом, получаем еще два свойства:
3) Если производная $f'(x)$ в точке x_0 равна нулю и меняет свой знак с "+" на "−" (то есть график пересекает ось абсцисс «сверху вниз»), если смотреть слева направо, то точка x_0 – точка максимума функции $f(x)$.
4) Если производная $f'(x)$ в точке x_0 равна нулю и меняет свой знак с "−" на "+" (то есть график пересекает ось абсцисс «снизу вверх»), если смотреть слева направо, то точка x_0 – точка минимума функции $f(x)$.
Точки максимума и точки минимума являются точками экстремума функции.

Важные замечания

1. Если при решении задач вам дан график, обязательно обратите внимание на то, график чего вам дан: функции $f(x)$ или ее производной $f'(x)$!
2. При работе с производной мы обращаем внимание только на то, где производная $f'(x)$ положительна, отрицательна или равна нулю.
3. При работе с самой функцией мы обращаем внимание на то, где функция $f(x)$ возрастает, убывает или где она имеет экстремум.
4. Заметьте, что во фразе «производная функции $f(x)$» речь идет о производной.

Производные элементарных функций

	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
1	c	0
2	x^a	$a \cdot x^{a-1}$
3	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
4	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
5	e^x	e^x
6	a^x	$a^x \cdot \ln a$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Основные формулы

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$, $k = \text{const}$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- $(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x)$

Пример, где встречается

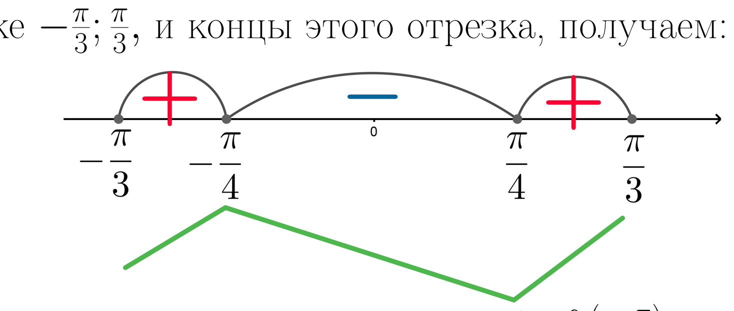
1. Функция $f(x) = \cos(x^2 + 1)$. Если сделать замену $t(x) = x^2 + 1$, то функция примет вид $f(t) = \cos t$.
Найдем $f'(t) = (\cos t)' = -\sin t =$
(переход к переменной x) $= -\sin(x^2 + 1)$
Найдем $t'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$
Значит, $f'(x) = -2x \cdot \sin(x^2 + 1)$
2. Функция $f(x) = x^3 + x^2$. Для этой функции не существует никакой замены, кроме тождественной $(t(x) = x)$. Значит она – не сложная.
Ее производную можно найти обычным способом, так как она элементарная:
$f'(x) = 3x^2 + 2x$
3. Функция $f(x) = \sin x^2 + x$. Для этой функции не существует никакой замены, кроме тождественной $(t(x) = x)$.
Но обычными способами вычислить ее производную не удастся. Заметим, что эта функция представлена в виде суммы двух, причем одна из них сложная $(g(x) = \sin x^2)$, а другая – элементарная $(h(x) = x)$.
Так как мы знаем, что $f' = g' + h'$, то найдем в отдельности производные функций g и h.
Тогда $f'(x) = 2x \cdot \cos x^2 + 1$.

Пример, где встречается

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = -14x + 7\operatorname{tg} x + \frac{7\pi}{2} + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.
► Найдем производную:

$$f'(x) = -14 + \frac{7}{\cos^2 x} = 7 \cdot \frac{1 - 2\cos^2 x}{\cos^2 x} = -7 \cdot \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$$

Нули производной и точки, где она не существует, на указанном отрезке и по одной точке от концов отрезка — это $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{4}$. Следовательно, отмечая на оси те из них, что лежат в отрезке $-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}$, и концы этого отрезка, получаем:



Тогда наименьшее значение равно либо $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, либо $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 11 + \frac{49\pi}{6} - 7\sqrt{3}, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 18$$

Так как $\pi > 3$ и $\sqrt{3} < 2$, то $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) > 11 + \frac{49 \cdot 3}{6} - 7 \cdot 2 = 21,5 > 18 = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Ответ: 18. ■

Пример, где встречается

В некоторых задачах поиск наибольшего/наименьшего значения функции через производную довольно затруднителен или невозможен вручную.
Например, уравнение $f'(x) = 0$ является нестандартным и решить его руками невозможно. Пусть функция $f(t(x))$ – сложная.
Если на $[t(a), t(b)]$ функция $f(t)$ является строго возрастающей (или строго убывающей), то наибольшее значение будет достигаться в такой точке x_o, в которой достигается наибольшее (или наименьшее) значение функции $t(x)$.

- Найти наибольшее значение функции $f(x) = \cos(\pi x^2)$ на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

► Рассмотрим функцию $f(t) = \cos t$. Если x пробегает все значения из отрезка $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, то t пробегает все значения из отрезка $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
Функция $f(t) = \cos t$ при всех $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ является убывающей, следовательно, наибольшее значение будет принимать при наименьшем значении $t = 0$.
Наименьшее значение $t = 0$ принимает при наименьшем значении $x = 0$.
Таким образом, ответ: $f(0) = 1$. ■