**12. Sfera va shar. Shar va tekislikning o'zaro joylashuvi. Ikki sfera kesishmasi. Sfera sirti. Shar bo'laklari va ularning sirtlari**

1-ta'rif. Fazoda berilgan nuqtadan teng masofada joylashgan nuqtalarning geometrik o'rniga sfera deyiladi (12.21-rasm). Bunda berilgan nuqta sferaning markazi, berilgan masofa - uning radiusi deyiladi.

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.21-rasm

Agar - sferaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, sfera ta'rifiga ko'ra, bo'ladi.

2-ta'rif. Fazoning sfera bilan chegaralangan qismi shar deyiladi. Agar - sharning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, ta'rifga ko'ra, bo'ladi. Shunday qilib, agar sfera va shar umumiy markazga ega bo‘lsa, har doim bo‘ladi. Shu sababli sfera sharning chegarasidan iborat va u sharning sirti deb ham ataladi. Sharning shartni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalari uning ichki nuqtalari deyiladi.

Sfera markazi bo'lgan nuqtani uning nuqtasi bilan tutashtiruvchi kesma sfera va sharning radiusi deyiladi. Sferaning markazidan o'tuvchi va uning ikki nuqtasini birlashtiruvchi kesma sfera va sharning diametri deyiladi. Agar diametri bo‘lsa, ta’rifga ko‘ra bo‘ladi.

Fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi va radiusli sfera berilgan bo‘lsin. Sfera markazining koordinatalarini kabi belgilaymiz. Agar sferaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, ta'rifga ko'ra bo'ladi. ning koordinatalarini deb belgilasak, ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan

yoki

ko'rinishdagi sferaning kanonik tenglamasini hosil qilamiz. Agar sferaning markazi koordinatalar sistemasi boshi bilan ustma-ust tushsa, sfera tenglamasi

ko‘rinishni oladi. Shuni alohida e'tirof etish lozimki, ta'rifga muvofiq, markazi nuqtada bo'lgan shar nuqtalarining koordinatalari har doim

tengsizlikni qanoatlantiradi, bu shar formulasidir. Hususiy holda, markazi koordinatalar boshida bo‘lgan shar tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

Endi sfera va sharning xossalariga to 'xtalamiz. 1-teorema. Sharning tekislik bilan har qanday kesimi doiradan iborat, doiraning markazi sharning markazidan kesuvchi tekislikka o'tkazilgan perpendikularning asosidir.

Isbot. Sharning markazidan kesim tekisligiga perpendikular o'tkazamiz (12.22-rasm). nuqta sferaning kesuvchi tekislikda yotgan ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. To'g'ri burchakli dan, Pifagor teoremasiga asosan,

kelib chiqadi.

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.22-rasm

Agar - sharning tekislikda yotgan nuqtasi, - sharning radiusi bo'lsa,

bo‘ladi va nuqta markazi nuqtada, radiusi bo‘lgan doiraga tegishli bo‘ladi. Aksincha, bu doiraning ixtiyoriy nuqtasi sharga tegishli bo‘ladi. Bu esa tekislik va shar markazi nuqtada bo'lgan doira bo'yicha kesishishini ko'rsatadi.

1-natija. Markazdan bir xil uzoqlikda joylashgan kesimlar teng bo'ladi. Teng kesimlar markazdan bir xil uzoqlikda joylashadi.

2-natija. Ikkita o 'zaro teng bo 'Imagan kesimlardan shar markaziga yaqin joylashgani katta bo 'ladi va aksincha.

3-natija. Kesim tekisligiga perpendikular diametr kesimning markazidan 'tadi va aksincha.

3-ta'rif. Shar markazidan o'tgan tekislik diametral tekislik deyiladi, sharning diametral tekislik bilan kesimi katta doira, sferaning diametral kesimi katta aylana deyiladi.

4-natija. Kesimlar ichida eng kattasi diametral kesimdir. 4-ta'rif. Shar bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo 'lgan tekislik sharga urinma tekislik deyiladi.

2-teorema. Sharga urinma tekislikning urinish nuqtasiga o'tkazilgan radius urinma tekislikka perpendikulardir.

![](data:application/octet-stream;base64,)

Isbot. Isbotlash teskarisini faraz qilish usuli bilan amalga oshiriladi. Markazi nuqtada bo'lgan shar va tekislik nuqtada kesishsin (12.23- rasm). kesma tekislikka og`ma bo'lsin, deb faraz qilamiz.

U holda tekislikka perpendikular bo‘lgan kesma mavjud bo‘lishi kerak hamda va bo‘ladi. Demak, nuqta shar va tekislikning umumiy nuqtasidan iborat. Shunday qilib, nuqta shar va tekislikning yagona umumiy nuqtasi emasligini ko‘ramiz. Bunday bo‘lsa, tekislik urinma tekislik bo'lmaydi, bu esa teoremaning shartiga ziddir. Olingan qarama-qarshilik farazimizning noto 'g'ri ekanligini va bo'lishini tasdiqlaydi.

5-ta'rif. Shar bilan faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq sharga urinma deyiladi.

Sharga urinma - urinish nuqtasiga o'tkazilgan radiusga perpendikulardir. 3-teorema. Ikkita sferaning kesishish chizig`i aylanadir. Isbot. va sferalarning markazi, ularning kesishish nuqtasi bo'lsin. A nuqta orqali to'g'ri chiziqqa perpendikular tekislikni o'tkazamiz. tekislikning to'g'ri chiziq bilan kesishgan nuqtani bilan belgilaymiz. 2-teoremaga asosan tekislik ikkala sferani nuqtadan o'tuvchi markazli aylana bo‘yicha kesib o‘tadi. Shunday qilib, aylana sferalarning kesishmasiga tegishli ekan (12.24-rasm).

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.24-rasm

Endi sferalar aylananing kesishish nuqtalaridan boshqa nuqtalarga ega emasligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, sferalarning kesishish nuqtasi aylanada yotmasin. nuqta va to'g'ri chiziq orqali tekislik o'tkazamiz. Bu tekislik sferalarni markazlari va bo‘lgan aylanalar bo‘yicha kesib o‘tadi. Bu aylanalar aylanaga tegishli bo‘lgan ikki nuqtada va yana nuqtada kesishadi. Ammo ikkita aylana ikkitadan ortiq kesishish nuqtasiga ega bo‘lmaydi. Biz ziddiyatga uchradik. Shunday qilib, sferalarimizning kesishmasi aylana ekan.

1-masala. Radiusi bo'lgan ikkita teng shar shunday joylashganki, birining markazi ikkinchisining sirtida yotadi. Bu sharlar sirtlarining kesishgan chizig`i uzunligini toping.

Yechish. Sharlarning markazlaridan kesim

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.25-rasm o'tkazamiz. Bu kesim shar sirtlari aylana bo'ylab kesishadi (12.25-rasm). Kesimdagi aylanani radiusi tomonlari ga teng bo'lgan teng tomonli uchburchakning balandligiga teng. Demak, izlanayotgan chiziqning radiusi ga va uzunligi ga teng.

6-ta'rif. Sharning tekislik bilan kesilgan qismi shar segmenti deyiladi. Shar segmentining sirti sferik segment va shar segmentining asosi deb ataladigan doiradan tashkil topadi. Kesuvchi tekislik sharni ikkita shar segmentiga bo'ladi. Tekislikning shar sirti bilan kesishish aylanasi segmentning asosi,

kesim tekisligiga perpendikular radiusning kesmasi uning balandligi deyiladi (12.26-rasm). Umuman, shar tekislik bilan kesilganda unda ikkita segment hosil bo‘ladi.

7-ta'rif. Shar sirtining ikkita parallel kesuvchi tekislik orasida joylashgan qismi shar kamari deyiladi (12.27-rasm).

Bunda va kesishish aylanalari shar kamarining asoslari, parallel tekisliklar orasidagi masofa esa shar kamarining balandligi deyiladi.

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.26-rasm

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.27-rasm

8-ta'rif. Sharning ikkita parallel tekislik bilan kesilgan va ular orasida joylashgan qismi shar qatlami deyiladi.

9-ta'rif. OAC doiraviy sektorni OC radius atrofida aylantirganda hosil bo‘lgan geometrik jism shar sektori deyiladi (12.28-rasm).

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.28-rasm

Shar sektorining balandligi deb, mos shar segmentining balandligiga aytiladi, ya'ni, - shar segmentining balandligidir.

Sfera va uning qismlari sirtining yuzini topish uchun avvalo quyidagi teoremani isbotlaymiz.

4-teorema. Konus, kesik konus va silindrlardan har birining yon sirti — mos ravishda ularning balandligini va yasovchining o'rtasidan o'q bilan kesishguncha o'tkazilgan perpendikularning uzunligi ko'paytmasiga tengdir.

Isbot. Konus to'g'ri burchakli ning katet atrofida aylanishidan hosil bo'lgan bo'lsin (12.29-rasm). Agar va bo'lsa, konusning yon sirti

Bizda ikkita o'xshash to'g'ri burchakli uchburchaklar va bor, chunki ularda va - umumiy. Ular tomonlarining proporsionalligidan,

bo‘ladi. U holda ko‘rinishga keladi.

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.29-rasm

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.30-rasm

Kesik konus trapetsiyaning tomon atrofida aylanishidan hosil bo‘lsin (12.30- rasm). Trapetsiyaning EF o‘rta chizig‘ini o‘tkazamiz, u holda kesik konusning yon sirti

Endi to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Natijada, yana ikkita o'xshash to'g'ri burchakli va larni hosil qilamiz, ularda o'zaro perpendikular tomonli burchaklar sifatida . Uchburchaklar tomonlarining proporsionalligidan,

U holda, kesik konus yon sirti uchun formula talab qilingan

ko‘rinishni oladi. Silindr qaralganda, teoremada so'z borgan aylana uning asosi aylanasidan iborat bo‘ladi. Demak, bu holda ham teorema o‘rinli. Sfera yarimaylananing diametr atrofida aylanishidan hosil bo'lsin. Bu yarimaylanaga tomonlari o'zaro teng, ya'ni muntazam ichki siniq chiziq chizamiz. Sfera sirtining yuzi sifatida, yarimaylanaga ichki chizilgan muntazam siniq chiziq tomonlarini cheksiz ikkilantirganda, uning yarimaylananing diametri atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt yuzi intiladigan limit qabul qilinadi.

5-teorema. Sfera sirtining yuzi katta doira aylanasi uzunligining diametrga ko'paytmasiga teng.

Isbot. - berilgan yarimaylanaga ichki chizilgan muntazam siniq chiziq bo‘lsin (12.31-rasm). Yarimaylananing markazidan siniq chiziqning tomonlariga perpendikularlar tushiramiz. Ular o'zaro teng bo'ladi, chunki siniq chiziq muntazam ko'pburchakning qismidan iborat. Perpendikularning uzunligini deb belgilaymiz va siniq chiziqning uchlaridan diametrga perpendikularlar tushiramiz.

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.31-rasm

Bu siniq chiziqning aylanishidan hosil bo'lgan sirt tomonlarning aylanishidan hosil bo‘lgan qismlardan tashkil topadi. Bu qismlar konusning, kesik konusning yoki silindrning yon sirtlaridan iborat. Siniq chiziq tomonlari sonini orttirsak, a perpendikularning uzunligi aylananing radiusiga intiladi. Shuning uchun

bo‘ladi. Lekin perimetr ga intiladi va shu sababli teoremada talab qilingan

munosabat o'rinli. 8-natija. Segment sirtining yuzi uning balandligi bilan katta doira aylanasi uzunligi ko 'paytmasiga teng:

9-natija. Shar kamari sirtining yuzi uning balandligi bilan katta doira aylanasi uzunligi ko 'paytmasiga teng:

10-natija. Sharlar sirtlari yuzlarining nisbati ular radiuslari kvadratlarining nisbati kabidir.

Shar va shar sigmenti sirti formulasini boshqacha usulda ham ko'ramiz. Aylana tenglamasi formulasidan ni oshkor etsak, - yuqorigi yarimaylana hamda - quyi yarimaylana hosil bo‘ladi (12.32-rasm). Shulardan birini, aytaylik yuqorigi yarimaylanani olib, uni o‘qi atrofida bir aylantirsak, sfera hosil bo‘ladi. Yuqorigi yarimaylanani kesmada integrallasak, sfera sirti kelib chiqadi. Buning uchun eng avvalo funksiya hosilasini aniqlaymiz. Hosila bo'ladi.

Bundan topamiz. Shunda ushbu

kelib chiqadi.

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.32-rasm

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.33- rasm Xuddi shunday sfera sirtini hisoblaymiz. Yuqorigi yarimaylanani kesmada integrallasak, sfera segmentining sirti yuzi kelib chiqadi. Integrallash orqali so'ralgan yuzani aniqlaymiz (12.33-rasm). Shunda ushbu

kelib chiqadi. 1-masala. Tekislik radiusi 20 sm bo'lgan sharga urinadi. A nuqta bu tekislikda yotadi va sharning markazidan 25 sm masofada joylashgan. A nuqtadan urinish nuqtasigacha bo'lgan masofani toping.

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.34-rasm

Yechish. B nuqta tekislik va sharning urinish nuqtasi bo'lsin (12.34-rasm. kesmani nuqtada shar bilan kesishguncha davom ettiramiz. Hamda kesishuvchi va to'g'ri chiziqlar orqali tekislik o'tkazamiz. Kesimda urinmasi va kesuvchisi bo'lgan aylana hosil bo'ladi. U holda

bo'ladi. Shartga ko'ra, bo'lganligidan, va .

2-masala. Sharning radiusi 6 sm bo'lib, uni kesuvchi tekislik shar markazidan sm masofada o'tadi. Kesimning yuzi ga qanday ravishda bog'liqligini aniqlang.

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.35-rasm

Yechish. Shartga ko'ra tekislik sharni kesib o'tadi, shu sababli tengsizlik bajariladi. nuqta kesim doirasining markazi va bu doira va sharning urinish nuqtalaridan biri bo'lsin (12.35-rasm). Sharning radiusini o'tkazamiz. U holda to'g'ri burchakli bo'ladi va Pifagor teoremasiga ko'ra, kesim doirasi radiusini topamiz:

Endi sharning tekislik bilan kesishishi natijasida hosil bo'lgan doiraning yuzi uchun

formulani hosil qilamiz. 4-masala. Sharning radiusi , shar sektori o'q kesimining yoyi bo'lsa, shar sektori to'la sirtining yuzini hisoblang.

![](data:application/octet-stream;base64,)

12.36-rasm

Yechish. Shar sektori to'la sirtining yuzi konus yon sirtining yuzi bilan shar segmenti sirtining yuzi yig'indisi kabi topiladi (12.36-rasm). Sharning markazidan shar segmenti asosiga perpendikular shar radiusini o'tkazamiz. radius segmentning asosi bilan nuqtada kesishsin. MOB teng yonli bo'lganligidan, . U holda

va segmentning sirti . konusning yon sirti . U holda shar sektorining to'la sirti

**Mustaqil ishlash uchun masalalar**