**13. Hajm tushunchasi. Parallelepipedning hajmi**

Tekislikda shakllar uchun yuz tushunchasi kiritilgani kabi, fazoviy geometrik jismlar uchun hajm tushunchasi kiritiladi. Geometrik jismni chekli sondagi uchburchakli piramidalarga ajratish mumkin bo'lsa, u sodda geometrik jism deyiladi. Sodda geometrik jismning hajmi u egallab turgan fazoning sonli qiymatini aniqlaydi.

Dastavval hajm aksiomalarini keltiramiz:

har bir o'lchanayotgan sodda geometrik jismning hajmi nomanfiy miqdordir;

agar jismni umumiy nuqtalarga ega bo‘lmagan sodda jismlarga ajratish mumkin bo‘lsa, jismning hajmi uni tashkil etuvchi sodda jismlar hajmlari yig'indisiga teng;

teng jismlar teng hajmlarga ega;

qirrasi uzunlik birligiga teng bo‘lgan kubning hajmi birga teng.

Ko'pyoqlilarning hajmini o'lchash berilgan birlik kubdan shu jism ichiga nechtasini joylash mumkinligini bildiradi. Agar kubning qirrasi 1 sm ga teng bo‘lsa, u holda uning hajmi , agar kubning qirrasi 1 m ga teng bo‘lsa, uning hajmi bo‘ladi.

1-teorema. To'g'ri burchakli parallelepipedning hajmi uning uchta o'lchami: uzunligi , eni va balandligi ko'paytmasiga teng:

Isbot. Faraz qilaylik, lar butun sonlar bo'lsin. qirralarning har birini birlik kesmalarning butun soniga bo‘lib chiqamiz (13.1- rasm). So‘ngra bo‘linish nuqtalaridan parallelepipedning yoqlariga parallel tekisliklar o‘tkazamiz. Natijada parallelepiped birlik kublarga bo‘linadi (ya’ni chiziqli o‘lchamlari 1 ga teng bo‘lgan kublar). Unda parallelepipedning asosidagi birinchi qatorda bunday kublarning soni ta bo'ladi. Modomiki, parallelepipedning balandligi ga teng ekan, bunday qatorlar soni ta bo‘ladi. Shunday qilib, parallelepipedning hajmi bo‘ladi.

![](data:application/octet-stream;base64,)

13.1-rasm

To'g'ri burchakli parallelepipedning o'lchamlari kasr sonlar orqali ifodalangan bo'lsin. Bu kasrlarni umumiy maxrajga keltiramiz, u holda ular ko‘rinishda yoziladi. Endi o‘lchamlar butun sonlar bilan ifodalanishi uchun eski o'lchov birligining qismiga teng bo'lgan yangi o'lchov birligi kiritamiz. Buning natijasida hajm birligi ham o'zgarib, eski hajm birligining qismiga teng bo'ladi. Natijada hajm uchun yoki ifodani hosil qilamiz.

![](data:application/octet-stream;base64,)

13.2-rasm

To'g'ri burchakli parallelepipedning o'lchamlari irratsional sonlar bilan ifodalangan bo‘lsin (13.2-rasm). Irratsional son cheksiz o'nli kasr bo'lishi mumkin. Bu kasrlarning ta o'nli raqamli taqribiy qiymatlarini, avval kami bilan ko'rinishda, so'ngra ko'pi bilan ko'rinishda olamiz. Bu kesmalarni parallelepipedning qirralarida nuqtadan boshlab joylashtiramiz: va . Bunda munosabatlar bajariladi. So'ngra biz ikkita qo‘shimcha parallelepiped yasaymiz. Ulardan birining qirralari , ikkinchisiniki esa bo‘ladi. Bunda ularning birinchisi berilgan parallelepipedning ichida yotadi, ikkinchisi esa berilgan parallelepipedni o'z ichida saqlaydi.

Yangi hosil qilingan to'g'ri burchakli parallelepipedlarning o'lchamlari ratsional sonlar bilan ifodalanganligidan, ularning va hajmlari, mos ravishda, va bo'ladi hamda munosabat o'rinli. Berilgan to'g'ri burchakli parallelepipedning hajmi uchun tengsizlik bajariladi. Endi biz ni cheksiz orttirib boramiz. Buning natijasida hajm ortib boradi, hajm esa kamayib boradi. Algebradan ma'lumki, ular umumiy limitga ega bo'ladi va bu limit irratsional sonlarning ko'paytmasiga teng, ya'ni .

To'g'ri burchakli parallelepipedning yon qirrasi balandligiga teng bo'lgani uchun, uning hajmi asosining yuzi bilan balandligining ko'paytmasiga teng:

2-teorema. Og'ma parallelepipedning hajmi shunday to'g'ri parallelepipedning hajmiga tengki, uning asosi og'ma parallelepipedning perpendikular kesimidan iborat, balandligi esa og`ma parallelepipedning yon qirrasiga tengdir.

1sbot. Berilgan og'ma parallelepipedning uchidan qirrasiga perpendikular tekislik o'tkazamiz (13.3-rasm). Kesimda og'ma parallelepipedning perpendikular kesimidan iborat to'rtburchak hosil bo‘ladi. Og'ma parallelepipedning qirralarini davom ettirib, ANME asosli togri parallelepipedni hosil qilamiz. qirra to'g'ri parallelepipedning balandligi vazifasini bajaradi.

![](data:application/octet-stream;base64,)

13.3-rasm

Bundan og'ma parallelepipedning hajmi bo'ladi. 3-teorema. Ixtiyoriy parallelepipedning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasiga teng.

Isbot. Bizga perpendikular kesim o'tkazilgan og'ma parallelepiped (13.4-chizma) berilgan bo‘lsin. Bu parallelepiped asosi MNPQ to‘rtburchakdan, balandligi esa qirraga teng bo‘lgan to‘g‘ri parallelepipedga tengdoshdir. Uning hajmi uchun yuqorida isbotlanganiga ko'ra,

ifodaga ega bo‘lamiz. Agar kesma to'rtburchakning balandligi bo'lsa, bo‘ladi. Modomiki, va parallelepiped perpendikular kesim tekisligida yotar ekan, parallelepipedning balandligidan iborat bo‘ladi. Endi bo‘lganligidan, parallelepipedning hajmi yoki bo‘ladi.

![](data:application/octet-stream;base64,)

13.4- rasm

1-masala. To'g'ri parallelepipedning asosi tomonlari 3 va 4 ga hamda ular orasidagi burchak ga teng bo'lgan parallelogrammdan iborat. Agar parallelepipedning katta diagonali uzunligi ga teng bo'lsa, uning hajmini toping.

Yechish. parallelogrammda va bo'lsa, uning diagonalini kosinuslar teoremasidan topamiz:

to'g'ri burchakli uchburchakdan .

To'g'ri parallelepipedning hajmini formuladan topamiz: va .

![](data:application/octet-stream;base64,)

13.5-rasm

Mustaqil ishlash uchun masalalar