**13. Piramida va kesik piramidaning hajmi**

5-teorema. Piramidaning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasining uchdan biriga teng:

bunda, - piramida asosining yuzi, - balandligi. Bu piramidani shunday asosga va shunday balandlikka ega bo‘lgan prizma bilan to'ldiramiz (13.6-rasm). Bu prizma uchta: berilgan piramida hamda yana ikkita va piramidalardan tashkil topgan. va piramidalarning balandliklari umumiy bo'lib, asoslari va teng uchburchaklardan iborat. Shuning uchun ularning hajmlari ham teng bo‘ladi. Xuddi shunga o'xshash, piramidalarning uchidan tushirilgan balandliklari umumiy bo'lib, asoslari va teng uchburchaklardan iborat. Shuning uchun ularning ham hajmlari teng bo‘ladi.

Demak, har uchala piramidalar hajmlari o'zaro teng ekan. Ularning hajmlari yig'indisi prizma hajmiga teng ekanligini hisobga olsak,

OABC uchburchakli piramidaning hajmi

bo‘ladi.

![](data:application/octet-stream;base64,)

13.6-rasm

6-teorema. Ixtiyoriy piramidaning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasining uchdan biriga teng: .

Isbot. Piramida asosidagi ko'pburchakni uchburchaklarga ajratamiz va 5-teoremadan foydalanib isbotlaymiz.

7-teorema. Agar va - tetraedr ikkita yog'ining yuzlari, bu yoqlar kesishadigan qirraning uzunligi esa bu yoqlar orasidagi ikki yoqli burchak bo‘lsa, tetraedrning hajmi

bo‘ladi. Isbot: tetraedrda hamda va tekisliklar orasidagi burchak bo'lsin. ASB yon yoqning balandligini o'tkazamiz (13.7-rasm). U holda ad va bo'ladi. Piramidaning balandligini o'tkazamiz. U holda to'g'ri burchakli va bo'ladi. Bu uchburchakdan piramidaning balandligini topamiz:

![](data:application/octet-stream;base64,)

13.7-rasm

Piramida asosi ning yuzi bo‘lganligidan, uning hajmi uchun talab qilingan formulani hosil qilamiz. .

8-teorema. Agar tetraedr ikkita qarama-qarshi qirrasining uzunliklari va ga, ular orasidagi masofa ga hamda berilgan qirralar orasidagi burchak ga teng bo‘lsa, uning hajmi

bo‘ladi. Isbot: Faraz qilaylik, berilgan tetraedrda tomonlar ma'lum bo'lsin. Berilgan tetraedrni parallelepipedgacha to'ldiramiz. Buning uchun tetraedrning har bir qirrasidan qarama-qarshi qirraga parallel tekislik o'tkazamiz. Masalan, qirradan qirraga parallel tekislik o'tkazamiz. va ayqash chiziqlar orasidagi burchakni ko'rsatish uchun to'g'ri chiziqni o'ziga parallel ravishda to'g'ri chiziq bilan kesishguncha harakatlantiramiz (ko‘chirib boramiz) (13.8-rasm).

![](data:application/octet-stream;base64,)

13.8-rasm

Tetraedrning va yon yoqlarining yuzlari ga tengdir. Bu parallel tekisliklar orasidagi masofa ga teng bo‘lganligidan, parallelepipedning hajmi

bo‘ladi. Agar parallelepipeddan to‘rtta piramidalarni ajratib olsak, tetraedrni hosil qilamiz. Ikkinchi tomondan, piramidaning hajmi parallelepiped hajmining oltidan bir qismini tashkil qiladi. Shuning uchun tetraedrning hajmi

bo‘ladi, bundan talab qilingan formulani hosil qilamiz. 1-masala. Uchburchakli muntazam piramida asosining tomoni 12 ga teng. va nuqtalar, mos ravishda, va qirralarning o'rtalari, . va chiziqlar orasidagi masofani toping.

Yechish. I usul. O - piramida asosining markasi bo'lsin. U holda

![](data:application/octet-stream;base64,)

13.9-rasm kesmaning o'rtasi. uchburchakning o'rta chizig'i, nuqtaning chiziqdagi proyeksiyasi, to'g'ri to'rtburchak, demak, . to'g'ri chiziq tekislikda yotuvchi to'g'ri chiziqqa parallel, demak, to'g'ri chiziq tekislikka ham parallel bo'lib, ular orasidagi masofa va chiziqlar orasidagi chiziqqa teng. to'g'ri burchakli uchburchakdan ,

OH - shu uchburchakning gipotenuzaga tushirilgan balandligi. OH - DMK tekislikka perpendikular. Qidirilayotgan masofa ga teng.

II usul. O - piramida asosining markazi bo'lsin. U holda

kesmaning o'rtasi bo'lsin. MK - ANB to'g'ri burchakli uchburchakning o'rta chizig'i, shuning uchun , .

![](data:application/octet-stream;base64,)

13.11-rasm

Kosinuslar teoremasiga ko'ra va .

DAMN piramidaning hajmi berilgan piramida hajmidan 4 marta kichik, chunki uchburchak yuzi uchburchak yuzidan 4 marta kichik. U holda . Boshqa tomondan qidirilayogan masofa bo'lsa, piramida hajmi quyidagicha bo'ladi:

Bundan topilishi kerak bo'lgan masofa: . 9-teorema. va - kesik piramidaning asoslarining yuzlari, - uning balandligi bo‘lsa, kesik piramidaning hajmi

bo‘ladi. Isbot. Teoremaning shartiga ko'ra, va . Kesik piramidani uchi nuqtada bo'lgan to'la piramidagacha to'ldiramiz (13.12rasm). To'la piramidaning balandligini orqali belgilaymiz: . Kesik piramidaning hajmini ikkita. va piramidalar va hajmlarining ayirmasi kabi topamiz: .

![](data:application/octet-stream;base64,)

13.12- rasm

Piramidalarning hajmlari, mos ravishda,

bo‘ladi. Piramidada parallel kesimlarning xossasidan,

munosabatni yozamiz, bundan

Endi kesik piramidaning hajmini topamiz:

ifodani hosil qilamiz. 2-masala. Qirrasi bo'lgan tetraedr (barcha qirralari teng bo'lgan uchburchakli piramida)ning balandligini va hajmini aniqlang (11.13-rasm).

Yechish: Tetraedrning barcha yoqlari muntazam uchburchaklar bo‘lib, tetraedr apofemasi muntazam uchburchakning balandligiga teng, ya'ni bo‘ladi. Uchburchak asosiga ichki chizilgan aylana radiusi ga teng. Pifagor teoremasiga asosan, tetraedr balandligi

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.13-rasm

bo‘ladi. Tetraedr hajmi bo‘ladi. Demak, qirrasi bo‘lgan tetraedrning balandligini va hajmi quyidagicha bo‘lar ekan (11.13-rasm):

3-masala. Parallelepipedning bitta uchda tutashuvchi qirralari o'rtalari orqali tekislik bilan kesib olingan piramida hajmi berilgan parallelepiped hajmidan necha marta kichik?

Yechish. Aytaylik, parallelepipedning asosi tomonlari va bo'lgan parallelogramm, yon qirrasi , asosga tushirilgan balandlik esa bo'lsin. Bu parallelepiped asosining yuzi ekanini hisobga olsak, uning hajmi bo‘ladi.

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.14-rasm

Bu parallelepipedning bitta uchda tutashuvchi qirralari o'rtalari orqali tekislik bilan kesishdan hosil qilingan piramida qirralari , balandligi teng bo‘ladi. Piramida asos yuzi bo‘ladi. Piramida hajmi bo‘ladi. Demak, parallelepipedning bitta uchda tutashuvchi qirralari o‘rtalari orqali tekislik bilan kesib olingan piramida hajmi berilgan parallelepiped hajmidan 48 marta kichik bo‘lar ekan (11.14-rasm).