**10.Fazoda vektorlar. Vektorlar ustida amallar. Komplanar vektorlar**

Planimetriya kursida tekislikda vektorlar haqidagi tushunchalar bilan tanishgan edik. Fazoda ham vektorlar ustida amallar, ikki vektorning skalar ko'paytmasi xuddi tekislikdagidek bo'ladi. Endi vektorlar haqida bilimlarimizni kengaytiramiz.

|  |
| --- |
|  |
| *10.2-rasm* |

1-ta'rif. Sanoq boshini aniqlovchi nuqtasi

va birlik vektori berilgan to'g'ri chiziqqa deyiladi. birlik vektor va nuqta o'qni bir qiymatli aniqlaydi.

A nuqtadan o'qqa tushirilgan perpendikularning asosiga nuqtaning Io 'qdagi proyeksiyasi deyiladi (10.2-rasm).

ixtiyoriy vektor bo'lsin. va bilan mos ravishda vektor boshi va oxirining o'qdagi proyeksiyalarini belgilaymiz.

vektorga vektorning o'qdagi tashkil etuvchisi deyiladi.

2-ta'rif. vektorning o'qdagi proyeksiyasi deb songa aytiladi va bilan belgilanadi. Bu son tashkil etuvchi va o'q bir tomonga yo'nalgan bo'lsa, musbat ishora bilan, aks holda manfiy ishora bilan olinadi va quyidagicha yoziladi (10.2rasm):

|  |
| --- |
|  |
| *10.3-rasm* |

3-ta'rif. vektor bilan uning o'qdagi tashkil etuvchisi vektor orasidagi burchakka vektor bilan orasidagi burchak (ikki va vektor orasidagi burchak) deyiladi.

Ravshanki, (10.3-rasm).

Vektorning o'qdagi proyeksiyasining asosiy xossalarini keltiramiz.

1-xossa. .

1-natija.Vektorning o'qdagi proyeksiyasi:

1. vektor bilan o'tkir burchak tashkil qilsa, musbat bo'ladi;
2. vektor bilan o'tmas burchak tashkil qilsa, manfiy bo'ladi;
3. vektor bilan to'g'ri burchak tashkil qilsa, nolga teng bo'ladi.

2-natija. Teng vektorlarning bitta o'qdagi proyeksiyalari teng bo'ladi.

2-xossa. Bir nechta vektor yig'indisining berilgan o'qdagi proyeksiyasi vektorlarning shu o'qdagi proyeksiyalari yig'indisiga teng, masalan,

3-xossa. Vektor songa ko'paytirilsa, uning o'qdagi proyeksiyasi ham shu songa ko'payadi, ya'ni

3-natija. Vektorlar chiziqli kombinatsiyasining o'qdagi proyeksiyasi bu vektorlar o'qdagi proyeksiyalarining mos chiziqli kombinatsiyasiga teng, masalan,

Uch o'lchovli fazoda vektorlar berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy sonlarni olamiz va vektorlardan

vektorni tuzamiz. Bunda vektorga vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi sonlarga bu chiziqli kombinatsiyaning koeffitsiyentlari deyiladi.

4-ta'rif. Agar vektorlar uchun kamida bittasi nolga teng bo'lmagan shunday sonlar topilsa va bu sonlar uchun

tenglik bajarilsa, vektorlar sistemasiga chiziqli bog`liq vektorlar deyiladi.

5-ta'rif. Agar (10.1) tenglik faqat bo'lganda o'rinli bo'lsa, vektorlar sistemasiga chiziqli erkli vektorlar deyiladi.

6-ta'rif. Istalgan uchta chiziqli erkli vektorlarga fazodagi bazis vektorlar deyiladi.

1-teorema. Uch o'lchovli fazodagi istalgan vektorni bazis vektorlar bo'yicha yagona ko'rinishda yoyish mumkin, ya'ni

Isbot. Bunda sonlar vektorning bazisdagi affin koordinatalari bo'ladi, ya'ni .

Fazodagi bazis sifatida o'zaro perpendikular bo'lgan birlik vektorlarni olaylik. Bunday bazis ortonormallashgan bazis deyiladi. Bunda vektorlar bazis ortlari deb ataladi.

Fazoda ixtiyoriy vektorni olib, uning boshini koordinatalar boshiga keltiramiz, ya'ni vektorni hosil qilamiz (10.4-rasm).

|  |
| --- |
|  |
| *10.4-rasm* |

vektorning koordinata oq'laridagi proyeksiyalarini topamiz. Buning uchun vektorning oxiridan koordinata tekisliklariga

10.4-rasm parallel tekisliklar o'tkazamiz va ularning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda orqali belgilaymiz. Bu tekisliklar koordinata tekisliklari bilan birgalikda diagonallaridan biri vektor bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipedni hosil qiladi.

Bunda

Bir nechta vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra

Yoki ni hisobga olsak,

Shuningdek,

vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini mos ravishda va orqali belgilaymiz, ya'ni .

U holda (10.3) va (10.4) tengliklardan quyidagiga ega bo'lamiz:

(10.5) tenglik vektorning bazis bo'yicha yoyilmasi deb yuritiladi. sonlarga vektorning dekart koordinatalari (yoki oddiygina koordinatalarí) deyiladi va kabi yoziladi.

vektor koordinatalari bo'yicha uning uzunligini aniqlaymiz.

To'g'ri burchakli parallelepipedning diagonali haqidagi teoremaga asosan (10.4-rasm):

Bundan

ya'ni vektorning uzunligi uning koordinatalari kvadratlarining yig'indisining kvadrat ildiziga teng ekan.

Koordinatalar bilan berilgan va vektorlarning yig'indisini topamiz.

Vektorning o'qdagi proyeksiyasi xossalariga ko'ra:

bo'ladi.

Vektorni songa ko'paytirish uchun uning koordinatalarini shu songa ko'paytiramiz.

bo'ladi. Bundan . Natijada, ekanligi kelib chiqadi. Bu ikki vektorning kollineyarlik sharti bo'ladi.

Agar ikki vektor teng bo'lsa, ularning mos koordinatalari ham teng bo'ladi.

Shunday qilib:

1. vektorlar qo'shilganida (ayrilganida) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayriladi);
2. vektor songa ko'paytirilganida uning barcha koordinatalari shu songa ko'payadi;
3. teng vektorlarning mos koordinatalari teng bo'ladi va aksincha.

Koordinatalar boshiga qo'yilgan va oxiri nuqta bo'lgan vektorga nuqtaning radius vektori deyiladi. nuqta radius vektorining koordinatalari bo'ladi.

|  |
| --- |
|  |
| *10.5-rasm* |

Boshi nuqtada va oxiri

10.5-rasm nuqtada bo'lgan vektorni qaraymiz. va nuqtalarning radius vektorlari, mos ravishda, va bo'ladi.

10.5-rasmga ko'ra . Bundan (10.7) tenglikka asosan

yoki

Shunday qilib, vektorning koordinatalari uning oxiri va boshining mos koordinatalari ayirmasiga teng.

(10.10) tenglikdan vektorning modulini topamiz:

vektorning uzunligi va nuqtalar orasidagi masofani aniqlaydi. Shu sababli (10.11) tenglikka ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi deyiladi.

1-misol. Parallelogrammning uchta ketma-ket uchi berilgan: , diagonal uzunligini toping.

Yechish. Parallelogramm uchning koordinatalarini parallelogramm uchun ekanidan aniqlaymiz. va vektorlarni (10.10) formula ko'rinishida yozamiz:

U holda tenglikdan , ya'ni bo'lishi kelib chiqadi.

vektorning koordinatalarini topamiz:

U holda

va nuqtalarni tutashtiruvchi kesma berilgan bo'lsin. kesmani berilgan nisbatda bo'luvchi, ya'ni tenglikni ta'minlaydigan nuqtani topish masalasini yechamiz.

Masalaning shartiga ko'ra va vektorlar kollinear, ya'ni .

U holda

inobatga olinsa,

Bu tengliklardan larni topamiz:

(10.12) formulaga kesmani berilgan nisbatda bo 'lish formulasi deyiladi.

(10.12) tengliklardan da kesma o'rtasining koordinatalarini topish formulalari kelib chiqadi:

2-masala. Uchta nuqta berilgan: .

Agar: 1) va vektorlar teng; 2) va vektorlarning yig'indisi nolga teng ekani ma'lum bo'lsa, nuqtani toping.

Yechish. va vektorlarning koordinatasini topaylik:

1. bo'lgani uchun va vektorlarning koordinatalari teng bo'ladi. Bundan ,

Shunday qilib, izlanayotgan nuqtaning koordinatalari: bo'ladi.

2) bo'lgani uchun . , bundan , bundan , , bundan .

Bulardan ekanligi kelib chiqadi.

3-masala. va ning qanday qiymatlarida berilgan vektorlar kollinear bo'ladi:

1. ;
2. ;
3. ?

Yechish. Kollinearlik shartidan mos proporsiyalarni tuzamiz. Bulardan foydalanib, va ni topamiz.

1. shart bajariladi, dan , dan ;
2. dan dan ;
3. dan dan ;

4-masala. ning qanday qiymatlarida berilgan vektorlar perpendikular bo'ladi.

1. ;
2. ;
3. ;
4. ?

Yechish. Perpendikularlik sharti quyidagi tenglamani beradi:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;

5-masala. Uchta nuqta berilgan: .

o'qida shunday nuqtani topingki, bunda vektorlar perpendikular bo'lsin.

Yechish. va vektorlarning koordinatalarini topaylik.

Perpendikularlik shartidan:

Shuning uchun . So'ralgan nuqtaning koordinatasi bo'ladi.

6-masala. Birlik uzunlikdagi vektorlar juft-jufti bilan li burchak tashkil etadi.

1. va ;
2. va vektorlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Barcha vektorlarning juft-jufti bilan skalar ko'paytmasi , ga teng va .

1. , bundan.
2. (chunki )

7-masala. Uchta nuqta berilgan: uchburchakning burchagining kosinusini toping.

Yechish. burchak va vektorlar orasidagi burchakka teng. va vektorlarni topamiz.

Bundan ,

8-masala. uchburchakning uchidan uchburchak tekisligiga perpendikular chiqarilgan. Agar burchak ga, burchak esa ga teng bo'lsa, va vektorlar orasidagi burchakning kosinusini toping.

Yechish. Masalaning berilishida keltirilgan. nuqtadan tomonga perpendikular tushiramiz va tomonni ga teng deb olamiz. U holda uchburchakdan tomonni topib, va dan tomonni topamiz:

Bundan ko'rinadiki, bo'lgani uchun

Javob: .

7-ta'rif. Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotgan uchta va undan ortiq vektorlarga komplanar vektorlar deyiladi. Agar bu vektorlarning boshlang'ich nuqtalarini birlashtirilsa, bu vektorlar bir tekislikda yotadi.

2-teorema. Fazoda uchta vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun bu vektorlar komplanar bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Uchta vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsa, ularning komplanarligini isbotlaymiz. Chiziqli bog'lanishning ta'rifiga asosan, kamida noldan farqli sonlar uchun

tenglik o'rinli bo'ladi. Aniqlik uchun noldan farqli bo'lsin, unda avvalgi tenglikdan

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikda belgilashlarni kiritib tenglikni hosil qilamiz. Agar vektorlarning boshi bitta umumiy nuqtaga

joylashtirilgan bo'lsa, oxirgi tenglikdan vektor vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonaliga tengligi kelib chiqadi. Bu esa ular bitta tekislikda yotadi deganidir, demak, ular komplanar vektorlardir.

Endi vektorlar komplanar bo'lsin. Ularning chiziqli bog'liqligini isbotlaymiz.

Berilgan uchta vektor orasida kollinear vektorlar bo'lgan holni chiqarib tashlaymiz. Vektorning kollinearlik xossasiga asosan, ushbu vektorlar jufti chiziqli bog'liq bo'lar edi va berilgan uchta vektorning ham chiziqliligi kelib chiqar edi. Shuning uchun vektorlar orasida hech bir jufti kollinear bo'lmagan holni ko'rib chiqamiz. Vektorlarni bitta tekislikka ko'chirib, ularning boshlarini nuqtaga joylashtiramiz.

|  |
| --- |
|  |
| *10.6-rasm* |

Keyin vektorning uchi orqali va vektorlarga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz, vektor yotgan to'g'ri chiziqning vektorga parallel to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasini deb belgilaymiz va vektor yotgan to'g'ri chiziqning vektorga parallel to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasini deb belgilaymiz. Vektorlarni qo'shishning parallelogramm qoidasiga ko'ra vektor va vektorlar yig'indisiga teng, ya'ni

tenglik o'rinlidir.

vektor noldan farqli vektorga kollinear, demak, shunday haqiqiy son topiladiki tenglik o'rinli bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, tenglik ham o'rinli. Bu tenglikdan tenglik kelib chiqadi. Oxirgi tenglikni ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu tenglikdagi va -1 sonlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lganligi sababli, oxirgi tenglik vektorlarning chiziqli bog'liqligini ifodalaydi.

1-natija. Agar vektorlar komplanar bo'lmasa, ular chiziqli erkli bo'ladi.

2-natija. Ixtiyorly uchta komplanar bo'Imagan vektorlar orasida Ikkita kollinear vektorlar bo'la olmaydi. Shuningdek, ular orasida nol vektor ham bo'lmaydi.

**Vektorning skalar ko'paytmasi**

1-ta'rif. Ikkl va vektorning skalar ko'paytmasi deb bu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasiga teng songa aytiladi va u (yoki yoki ( )) kabi belgilanadi, ya'ni

bu yerda va vektorlar orasidagi burchak (bunda vektorlarning boshi bir nuqtaga qo'yiladi).

Skalar ko'paytma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Ko 'paytuvchilarning o 'rin almashtirish xossasi:

Isbot. .

2-xossa. Skalar ko 'paytuvchiga nisbatan guruhlash xossasi:

3-xossa. Qo 'shishga nisbatan taqsimot xossasi:

4-xossa. Agar va vektorlar perpendikular bo'lsa, u holda ularning skalar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Shuningdek, teskari tasdiq o'rinli: agar bo'lsa, u holda bo'ladi.

Xususan: .

5-xossa. Vektorning skalar kvadrati uning uzunligi kvadratiga teng, ya'ni . Xususan: .

1-misol. bo'lsin. kotpaytmani toping.

Yechish. Avval 3-xossadan foydalanib qavslarni ochamiz va keyin skalar ko'paytmaning ta'rifi va xossalaridan foydalanib, topamiz:

Ikkita va vektor berilgan bo'lsin. U holda bu vektorlarni birlik vektorlar orqali ifodalab, skalar ko'paytmaning xossalarini va vektorlarning skalar ko'paytmalarini hisobga olib, topamiz:

Demak,

ya'ni koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

2-misol. bo'lsin. ko'paytmani toping.

Yechish. (10.15) formulaga ko'ra

Endi koordinatalari bilan berilgan va vektorlar orasidagi burchak kosinusini topamiz. (10.14) va (10.15) formulalarga ko'ra:

yoki

bo'lsin. U holda bo'lgani uchun (10.17) tenglikdan

kelib chiqadi.

vektor bilan burchak tashkil etuvchi kuch ta'sirida moddiy nuqta nuqtadan nuqtaga to'g'ri chiziq bo'ylab ko'chayotgan bo'lsin (10.7-rasm).

|  |
| --- |
|  |
| *10.7-rasm* |

Fizika kursidan ma'lumki, kuchning ko'chishdagi bajargan ishi

formula bilan aniqlanadi.

Demak, moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakatida o'zgarmas kuchning bajargan ishi kuch vektori va ko'chish vektorining skalar ko'paytmasiga teng. Bu esa skalar ko 'paytmaning mexanik ma'nosini anglatadi.

3-misol Moddiy nuqta nuqtadan nuqtaga kuch ta'sirida to'g'ri chiziq bo'ylab ko'chgan. Quyidagilarni toping:

1. kuchning bajargan ishini;
2. kuchning ko'chish yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchagini.

Yechish. Avval moddiy nuqta ko'chish vektorini, uning va kuchning uzunligini topamiz:

U holda:

1. (ish b.) ;
2. .

**Vektorlarning vektor ko'paytmasi**

Agar uchta vektordan qaysi biri birinchi, qaysi biri ikkinchi va qaysi biri uchinchi o'rinda joylashganligi ko'rsatilgan bo'lsa, bu vektorlarga tartiblangan uchlik deyiladi. Bu holda vektorlar joylashish tartibida yoziladi.

1-ta'rif. Komplanar bo'lmagan vektorlar tartiblangan uchligining uchinchi vektori uchidan qaralganda birinchi vektordan ikkinchi vektorga qisqa burilish soat mili yo'nalishiga teskari bo'lsa, bunday uchlikka ng uchlik, agar soat mili yo'nalishida bo'lsa, chap uchlik deyiladi (10.8-rasm).

2-ta'rif. vektorni vektorga vektor ko'paytmasi deb quyidagi shartlar bilan aniqlanadigan vektorga aytiladi.

1. vektor va vektorlarga perpendikular, ya'ni va ;

|  |
| --- |
|  |
| *10.8-rasm* |

1. vektorning uzunligi son jihatidan tomonlari va vektorlardan iborat bo'lgan parallelogrammning yuziga teng, ya'ni , bu yerda ;
2. vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi.
3. ko'paytmasi yoki kabi belgilanadi (10.9-rasm).

|  |
| --- |
|  |
| *10.9-rasm* |

Vektor ko'paytma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Ko'paytuvchilarning o'rinlari almashtirilsa, vektor ko'paytma ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartiradi, ya'ni

Isbot. Vektor ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra va vektorlar bir xil uzunlikka ega (parallelogrammning yuzi o'zgarmaydi), kollinear, ammo qaramaqarshi yo'nalgan, chunki vektorlar ham vektorlar ham o'ng uchlik tashkil qiladi. Demak, .

2-xossa. .

3-хоssa. .

4-xossa. Agar va vektorlar kollinear bo'lsa, u holda ularning vektor ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Shuningdek, teskari tasdiq o'rinli: agar bo'lsa, u holda va vektorlar kollinear bo'ladi.

1-misol. vektorlarning vektor ko'paytmalarini toping.

Yechish. Bunda vektor ko'paytmaning ta'rifidan quyidagi tengliklar bevosita kelib chiqadi:

Haqiqatan ham, masalan, tenglik o'rinli, chunki:

1. ;
2. ;
3. vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi.

Shuningdek, 1-xossaga ko'ra

Vektor ko'paytmaning 4-xossasiga ko'ra: .

Ikkita va vektor berilgan bo'lsin.

U holda, vektorlarning vektor ko'paytmalari formulalaridan foydalansak,

ya'ni

bo'ladi. Oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

Bu formula koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning vektor ko'paytmasi bo'ladi.

2-misol. bo'lsin. ko'paytmani toping.

Yechish. ko'paytmani (10.19) formula bilan topamiz:

Demak,

va vektorlar kollinear bo'lsa, vektor ko'paytmaning 4-xossasiga ko'ra yoki

bo'ladi.

Bundan

yoki

ya'ni kollinear vektorlarning koordinatalari proporsional bo'ladi va aksincha, proporsional koordinatalarga ega vektorlar kollinear bo'ladi.

3-misol. ning qanday qiymatlarida va

vektorlar kollinear bo'ladi?

Yechish. Ikki vektorning kollinearlik shartiga ko'ra

Bundan .