**11. Parallelepiped. To‘g‘ri parallelepiped. Piramida. Piramida va uning kesimlari.**

**Parallelepiped. To'g'ri parallelepiped**

1-ta'rif. Asosi parallelogramm bo'lgan prizmaga parallelepiped deyiladi (11.14-rasm).

Agar prizmaning yon qirrasi asos tekisligiga perpendikular bo'lsa, bunday parallelepipedga to'g'ri parallelepiped (11.14-b rasm), aks holda og'ma parallelepiped (11.14-c rasm) deyiladi. Agar to'g'ri parallelepipedning asosi to'g'ri to'rtburchak bo'lsa, bunday parallelepipedga to'g'ri burchakli parallelepiped deyiladi. To'g'ri burchakli parallelepipedning barcha qirralari orasidagi burchak ga teng.

|  |
| --- |
|  |
| *11.14-rasm* |

Parallelepipedning 12 ta qirrasi, 8 ta uchi, 4 ta yon yog va 6 ta yog'i bo'ladi. Agar parallelepiped to'g'ri bo'lsa, u holda uning yon qirralari o'rtasidan asoslarga parallel bo'lgan bitta simmetriya tekisligi o'tadi.

|  |
| --- |
|  |
| *11.15-rasm* |

Odatda, parallelepipedning asosdagi qirralari bilan, yon qirrasi esa bilan belgilanadi.

To'g'ri parallelepipedning asosi parallelogramm bo'lgani uchun diagonallari uzunliklari har xil bo'ladi (11.15-a rasm).

Bu yerda va parallelepipedning diagonallari, va parallelogrammning diagonallari.

To’g’ri parallelepipedning diagonallari va qirralari orasidagi bog'lanish quyidagicha bo'ladi:

To'g'ri burchakli parallelepipedning asosi to'g'ri to'rtburchak bo'lgani uchun diagonallar uzunliklari o'zaro teng bo'ladi (11.15- rasm).

Parallelepipedning qarama-qarshi qirralari orqali tekislik o"tkazish natijasida diagonal kesim hosil bo'ladi. Og'ma parallelepipedda diagonal kesimlar turli parallelogrammlardir. To'g'ri parallelepipedda ham asos diagonallari turlicha bo'lgani uchun parallelepiped diagonal kesimlari turli to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'ladi. Faqatgina to'g'ri burchakli parallelepipedlarda diagonal kesimlar bir xil to'g'ri to'rtburchaklardan iborat bo'ladi (11.16-rasm).

|  |
| --- |
|  |
| *11.16-rasm* |

'ri va to'g'ri burchakli parallelepipedlarning yon yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat bo'ladi. Og'ma parallelepipedning yon yoqlari esa parallelogrammlardan iborat bo'ladi

To'g'ri burchakli parallelepipedning yon sirti quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

Parallelepipedning to"la sirtini yon sirt va asoslar sirtlari tashkil etadi.

Xususiy holda to'g'ri parallelepipedning to'la sirti quyidagicha bo'ladi:

Xususiy holda, to'g'ri burchakli parallelepipedning to'la sirti quyidagicha bo'ladi:

bu yerda - parallelepiped asosining yuzi, - parallelepiped yon sirti, parallelepipedning to'la sirti, -parallelepiped asosining o'tkir burchagi.

2-ta'rif. Barcha qirralari o'zaro teng bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipedga deyiladi (11.17-a rasm).

Kubning 12 ta qirrasi, 8 ta uchi, 4 ta yon yog'i va 6 ta yog'i bor. Kub 9 ta simmetriya tekisligiga ega.

|  |
| --- |
|  |
| *11.17-rasm* |

Qirrasi a ga teng bo'lgan kubning diagonali quyidagicha topiladi:

Kubning diagonali va kubning ixtiyoriy yog'i diagonali orasidagi burchak quyidagicha bo'ladi (11.17-b rasm):

Kubning barcha yoqlari o'zaro teng bo'lgan kvadratlardan iborat. Kubning to 'la sirti uning 6 ta yog'i yuzlarining yig' indisiga teng:

.

1-masala. parallelepipedda diagonali uchburchakning medianalari kesishish nuqtasidan tib, nuqtadan hisoblaganda kabi nisbatda bo'linishini isbotlang.

Yechish. O nuqta ABCD parallelogrammning markazi bo'lsin. U holda kesma uchburchakning medianasi. va nuqtalar va tekisliklaming umumiy nuqtalari bo'lgani uchun bu tekisliklar chiziq bo'ylab kesishadi. va to'g'ri chiziqlar tekislikda yotadi va qandaydir nuqtada kesishadi. U holda nuqta to'g'ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasi bo'ladi.

|  |
| --- |
|  |
| *11.18-rasm* |

va uchburchaklarning xshashligidan:

nuqta uchburchakning medianasida yotadi va uni nisbatda bo"ladi. Bundan nuqta uchburchakning medianalari kesish nuqtasi.

2-masala. Kub yon yoqlarining kesishmaydigan diagonallari orasidagi burchakni toping.

Yechish. kub berilgan bo'lsin. va to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topamiz (11.19-rasm). bo'Igani uchun kesishmaydigan va to chiziqlar orasidagi burchak va to chiziqlar orasidagi burchakka teng bo'ladi. Bu yerda burchak teng tomonli uchburchakning burchagi bo'lgani uchun ga teng. Demak, va to 'ri chiziqlar orasidagi burchak teng ekan.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| *11.19-rasm* | *11.20-rasm* |

3-masala. to'g'ri parallelepipedning asosil rombdan iborat. va to chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. rombning diagonali parallelepiped diagonalining ortogonal proyeksiyasi bo'ladi (11.20-rasm). Romb diagonallari perpendikular bo'Igani uchun, uch perpendikular haqidagi teoremaga ko'ra, va to 'ri chiziqlar orasidagi burchak teng-

4-massala. kub berilgan. va tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. to'g'ri chiziq teklslikka, to'g'ri chiziq esa tekkslikka perpendikular (11.21-rasm). Demak, va tekisliklar orasidagi burchak va to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng, ya'ni to'g'ri to'rtburchak dlagonallari orasidagi burchakka teng-

Kub qirrasining uzunligi va to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi bo'lsin. Unda . teng yonli uchburchakdan .

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.21-rasm OM kesma CSF uchburchak uchun o'rta chiziq bo'ladi. FDS teng yonli uchburchakda tomonlari va bo'lgani uchun, izlanayotgan burchak kosinusi:

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.30-rasm

3-masala. asosli to'rtburchakli muntazam piramida berilgan. Balandligi asosining markazi bo'lgan nuqtadan o'tadi. AS yon qirrasining o'rtasi orqali asos tekisligiga parallel qilib tekislik o'tkazilgan. SC yon qirraning o'rtasi nuqta va orqali tekisligi o'tkazilgan. Agar berilgan bo‘lsa, va tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchakni toping.

Yechish. tekislik asos

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.31-rasm tekisligiga parallel bo‘lgani uchun, tekislik va CSD tekislik bilan kesishish chizig`i asos tomoni ga parallel, qidirilayotgan burchak asos tekisligi va tekislik orasidagi burchakka teng. tekislik yon qirra bilan nuqtada kesishsin. U holda kesma CSD uchburchakning o'rta chizig'i bo'ladi. nuqta kesma va uchburchak medianasi ning kesishish nuqtasi. qirraning o'rtasi nuqta bo'lsin. MSN tekislik piramidaning balandligidan o'tadi. MK va SO medianalar nuqtada kesishadi va ni nisbatda bo‘ladi. to 'g'ri chiziq tekislikka perpendikular va bu tekislikda yotgan va kesishuvchi to'g'ri chiziqlar ham perpendikular. Demak, qidirilayotgan burchak burchakka teng. deb belgilasak, va bo‘ladi. Pifagor teoremasiga ko‘ra va to'g'ri burchakli uchburchaklar uchun va bo'ladi. U holda va , bundan

5-masala. asosi to'g'ri to'rtburchakdan iborat piramidaning SD yon qirrasi asos tekisligiga perpendikular. BSC va CSD tekislik orasidagi burchak topilsin.

Yachish. BC to'g'ri chiziq CSD tekislikka perpendikular bo'lgani uchun bu tekislikdagi va to'g'ri chiziqlarga ham perpendikular bo'ladi. BSC tekislik CSD tekislikka perpendikular bo‘lgan BC to‘g‘ri chiziq orqali o‘tadi. Bundan bu tekisliklarning perpendikularligi kelib chiqadi.

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.32-rasm

6-masala. muntazam oltiburchakli piramida berilgan. Asosining tomonlari 4 ga teng, yon yog'i asos tekisligi bilan burchak tashkil qiladi. uchidan BSC tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. nuqta piramida asosining markazi bo'lsin. to'g'ri chiziq tekislikka parallel, va nuqtalar bu tekislikdan bir xil uzoqlikda joylashgan. nuqtadan BSC tomonda yotgan SM apofemaga OH perpendikular tushiramiz. U holda kesma tekislikka perpendikular, burchak piramidaning qirrasidagi ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladi. Shartga ko'ra . To'g'ri burchakli uchburchakdan

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.33-rasm

7-masala. muntazam piramidaning va yon qirralari o'zaro perpendikular. Agar piramida asosining tomonlari bo'lsa, piramidaning uchi, va qirralarning o'rtalaridan tekislik o'tkazilgan. uchidan shu tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. yoqning medianasi va o'rta chizig'i kesishish nuqtasi bo'lsin. U holda nuqta ning o'rtasi. qirraning o'rtasi bo'lgani uchun va nuqtalar tekislikdan bir xil uzoqlikda joylashgan. nuqtadan shu tekislikkacha bo‘lgan masofani topish kerak.

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.34-rasm teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakdan , demak, . chiziq tekislikdagi kesishuvchi va to'g'ri chiziqlarga perpendikularligidan tekislikka perpendikularligi kelib chiqadi. to'g'ri burchakli uchburchakning balandligi. va bo‘lgani uchun ga ham perpendikular bo‘ladi. Demak, nuqtadan BNM tekislikkacha masofa DH kesma uzunligiga teng.

Natijada,

8-masala. SABCD to`rtburchakli muntazam piramidaning apofemasi asosining tomoniga teng. Piramida yog'ining apofemasi va CSD tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. va qirralarning o'rtalari, mos ravishda, va bo'lsin. MSN teng yonli uchburchakning balandligini o'tkazamiz. to'g'ri chizig'i CSD tekislikdagi ikkita kesishuvchi va to'g'ri chiziqlarga perpendikularligidan CSD tekislikning o'ziga ham perpendikular bo'ladi. SM ning CSD tekisligidagi proyeksiyasi burchak va tekislik orasidagi burchak. NSM uchburchak teng tomonli bo'lgani uchun bo'ladi.

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.35-rasm

9-masala. SABCDEF oltiburchakli piramidaning yon qirrasi asos tomonidan ikki marta katta. yon qirrasining o'rtasi. to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. deb belgilasak. - piramida asosining markazi, qirraning o'rtasi bo'lsin. uchburchakning o'rta chizig'i, shuning uchun va . Demak, - parallelogramm, shuning uchun va . to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakka teng.

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.36-rasm to'g'ri chiziq tekislikka parallelligidan, nuqta va tekislik orasidagi masofa, nuqta va tekislik orasidagi masofaga teng. nuqtadan ESF uchburchakning medianasiga tushirilgan perpendikularning asosi bo'lsin. U holda tekislikka perpendikular. Demak, qidirilayotgan burchak sinusi nisbatga teng. to'g'ri burchakli uchburchakdan , .

OH kesma shu uchburchakning to'g'ri burchagidan tushirilgan balandligi, . Uchburchak medianasi formulasiga ko'ra:

U holda qidirilgan burchak sinusi . 10-masala. SABCDEF oltiburchakli muntazam piramida asosining tomoni 4 ga, balandligi 6 ga teng. va to 'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

Yechish. qirra qirraga parallel, to'g'ri chiziq tekislikka parallel, shuning uchun va to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa to'g'ri chizigining ixtiyoriy nuqtasidan CSD tekislikkacha bolgan masofaga teng. CSD tekislikka og`ma bo'lgan ning o'rtasi bo'lgani uchun, nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofadan ikki marta katta.

![](data:application/octet-stream;base64,)

**11.37-rasm**

teng yonli uchburchakning balandligi, esa to'g'ri burchakli uchburchakning balandligi bo‘lsin. U holda kesma tekislikka perpendikular bo‘ladi. to'g'ri burchakli uchburchakdan , . Demak, bo‘lgani uchun .

A nuqtadan CSD tekislikkacha masofa yoki va to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa 6 ga teng.

11-masala. to'rtburchakli muntazam piramida. va nuqtalar va qirralarning o'rtalari. Agar asosining tomoni va yon yog'i asos tekisligi bilan burchak tashkil qilsa, va to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

Yechish. va , mos ravishda, va qirralarning o'rtalari bo'lsin. U holda bo‘ladi, va nuqtalar bir tekislikda yotadi. Bu tekislik ASD tekislikka parallel, chunki bu tekisliklardagi va kesishuvchi chiziqlar, mos ravishda, va kesishuvchi to'g'ri chiziqlarga parallel. Kesishmaydigan va to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa shu ikki tekislik orasidagi masofaga teng.

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.38-rasm va nuqtalar, mos ravishda, va qirralarning o'rtalari. Unda bo‘lgani uchun uchburchak teng tomonli. Uchburchakning balandligi ASD tekislikka perpendikular va KLM tekislikka parallel. Bu balandlik KLM tekislikda teng ikkiga bo'linadi, tekisliklar orasidagi masofa EH ning yarmiga teng. .

12-masala. Piramidaning asosi muntazam uchburchakdan iborat, yon yoqlaridan biri asosiga perpendikular, qolgan ikkitasi asosga burchak ostida oggan. Yon qirralar asosga qanday oggan?

Yechish: (ACS) va (ABS) yoqlar asosga bir xil burchak ostida og`gani uchun uchidan tomonga tushirilgan perpendikular ning o'rtasiga tushadi. uchidan tomonga perpendikular o'tkazamiz. perpendikular, og proyeksiya. Uch perpendikularlar haqidagi teoremaga

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.39-rasm ko'ra, , u holda, parametr kiritamiz.

ning ga perpendikularligidan va bo‘ladi.

Javob: . 13-masala. Piramida asosining gipotenuzasi ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat. Har bir yon qirrasi asos tekisligi bilan burchak tashkil qiladi. Piramidaning balandligini toping.

Yechish: Piramidaning har bir yon qirrasi asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil etgani uchun nuqtadan tushirilgan perpendikular, to'g'ri burchakli bo‘lganidan nuqta uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi bo‘ladi.

Demak, ekanligidan, , bundan . Javob: .

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.40-rasm

14-masala. Uchburchakli muntazam piramida asosining tomoni orqali unga qarshi yotgan yon qirraga perpendikular tekislik o'tkazilgan. Agar asosining tomoni , piramidaning balandligi bo'lsa, kesim yuzini toping.

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.41-rasm

Yechish: teng yonli, chunki piramida muntazam: , bundan , u holda:

, bundan . dan: . ning yuzini ikki xil usul bilan topamiz:

Demak, (1) ga ko`ra . Javob: . 15-masala. To‘rtburchakli muntazam piramidaning yon sirti ga, to 'la sirti ga teng. Piramida asosining tomonini va balandligini toping.

![](data:application/octet-stream;base64,)

Yechish: formulaga ko'ra:

deb belgilaymiz. U holda, va (1) ga ko'ra .

Ikkinchi tomondan, . 11.42-rasm

U holda

Javob: 1,8m,4m.

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.22-rasm

5-masala. to'g'ri burchakli parallelepipedning qirralari ga teng. Parallelepipedning uchidan diagonaligacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. DC to'g'ri chiziqning tekislikka perpendikularligidan bo'ladi. va to'g'ri burchakli uchburchaklardan (11.22rasm).:

uchidan diagonalga tushirilgan perpendikularning asosi bo‘lsin. U holda kesma to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzaga tushirilgan balandligi bo‘ladi. .

6-masala. birlik kubning uchidan tekisligigacha masofani toping.

Yechish. kesma tekislikning to'g'ri chizig'i orqali teng ikkiga bo'linadi (11.23-rasm). va nuqtalar tekislikdan bir xil uzoqlikda. A nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa diagonalning 1:3 qismiga teng, ya'ni .

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.23-rasm

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.24-rasm

7-masala. kubda qirra va yoqi orasidagi burchakni toping.

Yechish. bo'lgani uchun qidirilayotgan burchak qirra va yoq orasidagi burchakka teng (11.24-rasm)..

Kubning qirrasi ga teng bo'lsin. diagonal tekislik bilan nuqtada kesishsin. diagonal tekislikka perpendikular, ning tekislikdagi proyeksiyasi, qidirilayotgan burchak bo‘ladi. Bundan tashqari diagonal tekislik bilan kesishish nuqtasida uchidan boshlab hisoblaganda 1:2 kabi nisbatda bo‘linadi. to'g'ri burchakli uchburchakdan

Bundan ekani kelib chiqadi. 8-masala. kubning yog'i birga teng. qirralarining o'rtalaridan o'tkazilgan kesim yuzini toping.

Yechish. va , mos ravishda, berilgan kubning va qirralaring o'rtasi bo'lsin. va nuqtalar, mos ravishda, to'g'ri chiziqning va to'g'ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalari. U holda va tekislikning chizig'i bilan nuqtada kesishadi. Shunga o'xshash nuqta tekislikning qirrasi bilan kesishish nuqtasi. U holda qidirilayotgan kesim KPMQL beshburchakni tashkil qiladi.

![](data:application/octet-stream;base64,)

11.25-rasm yoqning markazi, va kesmalarning kesish nuqtasi bo'lsin. va nuqtalar tekislik va kesim uchun umumiy nuqtalar bo'lib, to'g'ri chiziqda kesishadi. uchburchakning o'rta chizig'i, bundan va . qirra tekislikka perpendikular, ning tekislikdagi proyeksiyasi burchak va kesuvchi tekislik orasidagi chiziqli burchak bo‘ladi. CEM to‘g‘ri burchakli uchburchakdan

KBCDL beshburchak KPMQL kesimning ABC tekislikdagi proyeksiyasi, , proyeksiyaning yuzi haqidagi teoremaga asosan .

**Mustaqil ishlash uchun masalalar**