



۱. در قسمت‌های ( ) تا ( ) مورد خواسته شده را برای دو تابع از توابع زیر به انتخاب خود پاسخ دهید:

$$\vec{p}(t) = \left(2t, -1, \frac{1}{t}\right), \quad \vec{q}(t) = (1 - \sin t, \cos 3t, 4t^3), \quad \vec{r}(t) = \frac{t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad \vec{s}(t) = \left(\ln t^2, \frac{\cos \sqrt{t^2 + 3}}{\sqrt{t^2 + 3}}\right)$$

$$\vec{r}_1(t) = (te^{t^2}, 2t \tan(1 - t^2), e^{-t}), \quad \vec{r}_2(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}, \frac{2t}{t^2 + 1}\right), \quad \vec{r}_3(t) = t\vec{s}(t)$$

(a) مشتق هر کدام از توابع را به دست آورید.

(b) انتگرال توابع برداری  $p, q, r_1, r_2$  و  $r_3$  را محاسبه کنید.

(c) مقدار انتگرال را برای  $r_1$  و  $r_2$  بر بازه‌ی  $[0, 1]$  را به دست آورید.

۲. طول قوس هر کدام از توابع برداری زیر را در بازه‌های داده شده به دست آورید.

a)  $r(t) = t\mathbf{i} + \frac{2}{3}t\sqrt{t}\mathbf{j} - \sqrt{t}\mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq 4$

b)  $r(t) = (t \sin t + \cos t, t \cos t - \sin t), \quad 2 \leq t \leq 3$

۳. برای هر کدام از منحنیهای داده شده، معادله‌ی خط مماس، صفحه مماس و صفحه‌ی قائم را بیابید.

a)  $z = y^2 + 1, \quad x = y + z, \quad X_0 = (1, -1, 2)$

b)  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1, \quad x - y + z = 1, \quad X_0 = (1, 0, 0)$

c)  $r(t) = -(\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}, \quad X_0 = r(0)$

۴. انحنای منحنیهای داده شده‌ی زیر را محاسبه کنید.

a)  $r(t) = (e^{-t} \sin t, e^{-t} \cos t, \sqrt{2}e^{-t}), \quad X_0 = r(0)$

b)  $r(t) = (\sin 2t, \cos 2t), \quad X_0 = r\left(\frac{\pi}{2}\right)$

۵. به انتخاب خود، در سه مورد، دامنه و برد هریک از توابع داده شده را مشخص کنید.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad g(t) = \sqrt{1 - t^2}, \quad f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad g(x, y) = \cos^{-1}(x + y^2),$$

$$\omega(x, y, z) = \log_2 \frac{x(y + z)}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad u(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

۶. به انتخاب خود، چهار مورد از حدود داده شده را در نقاط خواسته شده بیابید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x + y}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 + 2y - y^2 - 1}{x - y + 1}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - y^2}},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin^{-1}\left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y + y \sin x}{x + y}$$