TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Chương III: Hệ phương trình đại số tuyến tính

Phương pháp Gauss

Nhóm 8

Ngày 16 tháng 4 năm 2021

Advisor: TS. Hà Thị Ngọc Yến

Nhóm sinh viên thực hiện:

Họ và tên	MSSV
Trần Đại Dương	20195863
Lê Thị Kiều Trang	20195930
Nguyễn Văn Thanh Tùng	20195940
An Việt Trung	20195936
Nguyễn Văn Vũ	20195942

Giáo viên hướng dẫn: TS. Hà Thị Ngọc Yến

Nội dung chính

1. Hệ phương trình tuyến tính

- Xét $\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x + 2y + 3z & = 2 \\ x + y + 2z & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z & = 1 \\ y + 2z & = 1 \\ z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

  $\Rightarrow$ Có một nghiệm duy nhất.

- Xét $\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x + 2y + 3z & = 2 \\ y + 2z & = 1 \end{cases}$?

2. Biểu diễn ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\longrightarrow \underset{m \times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{m \times 1}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

3. Mở rộng bài toán

Giải $Ax_i = b_i$ với $i = \overline{1, p}$; $i \in \mathbb{N}$

$\longrightarrow$ Biểu diễn dạng ma trận:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \\ \; A \; \\ \\ \end{pmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{n \times p} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{m \times p}$$

1. Ý tưởng chung

Gồm 2 quá trình thuận và nghịch:

- Quá trình thuận: Đưa ma trận bổ sung $[AB]_{m\times(n+p)}$ về dạng ma trận bậc thang
- Quá trình nghịch: Từ ma trận bậc thang, thế ngược để tìm ra nghiệm

2. Các phép toán trên hàng

- Hoán vị hai hàng
- Nhân hàng với một số khác 0
- Cộng một hàng thêm lượng bằng bội số của hàng khác

3. Phần tử trụ

Là phần tử khác 0 đầu tiên trong hàng từ trái sang phải

Ví dụ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ hàng 1,2,3 có phần tử trụ lần lượt là 1,5,8 hàng 4 không có phần tử trụ.

- Số lượng phần tử trụ $\leq \min\{$hàng, cột$\}$.
- Dựa vào phần tử trụ để khử biến trên mỗi hàng.

4. Thuật toán

- Quá trình thuận (Khử):
  - Chọn phần tử trụ: Ta tìm phần tử trụ thứ k bằng cách đổi chỗ các hàng với nhau nhằm đưa phần tử có giá trị lớn nhất trong cột đến vị trị phần tử trụ. Việc này giúp chúng tính toán chính xác và ổn định hơn trong quá trình chạy thuật toán.
  - Với mỗi hàng i dưới phần tử trụ, ta tính hệ số F sao cho khi hàng thứ i trừ đi F lần hàng chứa phần tử trụ thì phần tử thứ k trong hàng i sẽ bằng 0
  - Lặp lại các bước trên, ta sẽ thu được ma trận bậc thang
- Quá trình nghịch (Thế):
  - Dựa vào số lượng phần tử trụ có được sau QTT, ta biết được hệ có nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm.

1. Số nghiệm của phương trình

- Có nghiệm duy nhất
- Vô nghiệm
- Vô số nghiệm

- Nghiệm của $AX = B$ phụ thuộc vào kích cỡ của ma trận A, số phần tử trụ của ma trận A và ma trận B.

2. Các trường hợp cụ thể

Đặt p: Số lượng phần tử trụ
m: Số hàng của A
n: Số cột của A

- $p = m = n$
  Phương trình có nghiệm duy nhất
  Ví dụ

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

Nghiệm của phương trình $AX = B$

Các trường hợp cụ thể

- Đặt $X_{3\times 2} = \begin{pmatrix} -x_1^T- \\ -x_2^T- \\ -x_3^T- \end{pmatrix}$, thế ngược lại ta có:

$$\begin{cases} x_3^T = -\frac{1}{3} \cdot b_3^T = -\frac{1}{3} \cdot (4, -2) = -\frac{4}{3} \\ x_2^T = b_2^T - 2 \cdot x_3^T = (-2, 2)^T - 2\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)^T = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T \\ x_1^T = b_1^T = (2, 0)^T \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- $p = m < n$
  Vô số nghiệm

$$[A|B] = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 3 & 2 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 9 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 3 & 2 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 3 & 2 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- $X_{4\times 2} = \begin{pmatrix} -x_1^T- \\ -x_2^T- \\ -x_3^T- \\ -x_4^T- \end{pmatrix}$; Đặt $x_3^T = (t, s)$ với $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ là biến tự do

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3^T = (t, s) \\ x_4^T = 2b_3^T = (0, 2) \\ x_2^T = -\frac{1}{2} \cdot (b_2^T + 5x_4^T + 2x_3^T) = (-t, -s-3)^T \\ x_1^T = b_1^T - tx_4^T - 2x_3^T - 3x_2^T = (t, s-9)^T \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} t & s-9 \\ -t & -s-3 \\ t & s \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*) Nhận xét: Số nghiệm tự do $= n - p$.

- $p = n < m$
  Có 1 nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm

a) Có 1 nghiệm duy nhất

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Ma trận } X_{3\times 2} = \begin{pmatrix} -x_1^T- \\ -x_2^T- \\ -x_3^T- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nghiệm của phương trình $AX = B$

Các trường hợp cụ thể

- $p = n < m$
  Có 1 nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm

b) Vô nghiệm

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Vô nghiệm

- $p < m, p < n$
  Vô nghiệm hoặc vô số nghiệm

a) Vô nghiệm

$$[A|B] = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -8 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 9 & 5 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} \color{red}{1} & 3 & 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \color{red}{2} & -1 & 4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{5} & 3 & 16 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 14 \end{array}\right)$$

- $p < m, p < n$
  Vô nghiệm hoặc vô số nghiệm

b) Vô số nghiệm

$$[A|B] = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 8 & 7 & 4 & 15 & 6 & 9 \\ 7 & 5 & 2 & 12 & 3 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & -9 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

*) Nhận xét: Số nghiệm tự do $= n - p$

Thanks for watching

Nhóm 8