Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования национальный исследовательский университет ИТМО

Расчетно графическая работа по теме "Производная и дифференциал"

Студент:
Собитов Анвархон
группа: P3115

Санкт-Петербург,
2022

3. Исследование функции
Вариант 6

Даны функции f(x) и g(x). Проведите поочерёдно их полные исследования:

$f(x) = \frac{2x^3-3x+1}{x^3}; \quad g(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$

Решение:

1) Найдите область определения функции.

$f(x) = \frac{2x^3-3x+1}{x^3};$

$D(f(x)) : x \neq 0 \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

2) Проверьте, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и укажите, как эти свойства влияют на вид графика функции.

Если $f(-x) = f(x)$ чётная
Если $f(-x) = -f(x)$ нечётная

$f(-x) = \frac{2\cdot(-x)^3-3\cdot(-x)+1}{x^3} = \frac{-2x^3+3x+1}{(-x)^3} = \frac{-(2x^3-3x-1)}{-x^3} = \frac{2x^3-3x-1}{x^3}$

$f(-x) \neq f(x)$ **и** $f(-x) \neq -f(x)$ **Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. функция общего вида**

3) Исследуйте функцию на нулевые значения и найдите промежутки ее знакопостоянства.

$f(x) = 0 \qquad \frac{2x^3-3x+1}{x^3} = 0$

$2x^3-3x+1=0$

x=1 $A(1;0)$ с O_x

$A(1;0)(\cdot)\cap$ с O_x

4)Исследуйте функцию с помощью первой производной: найдите интервалы монотонности и экстремумы функции.

$f'(x)=\left(\frac{2x^3-3x+1}{x^3}\right)'=\left(\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)'=(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})=$

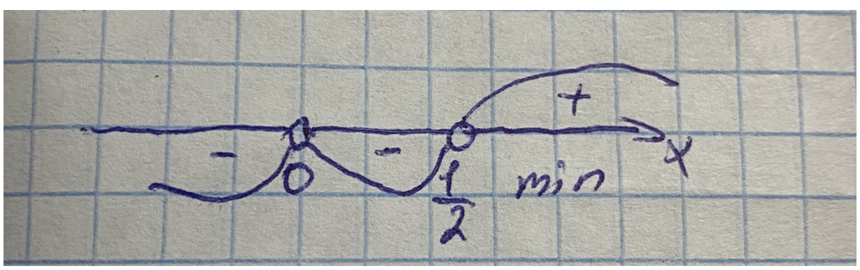
$=\left(2-3x^{-2}+x^{-3}\right)'=6x^{-3}-3x^{-4}=\frac{6}{x^3}-\frac{3}{x^4}$

$f'(x)=0$

$\frac{6}{x^3}-\frac{3}{x^4}=0$

$6x-3=0;$

$x=\frac{1}{2}$



$f'(x)=\frac{6}{x^3}-\frac{3}{x^4}=6-3=3 \quad (+)$

$f(-1)=-6-3=-9$ (-)

$f'(\frac{1}{4})=\frac{6}{(\frac{1}{4})^3}-\frac{3}{(\frac{1}{4})^4}=\frac{6}{\frac{1}{64}}-\frac{3}{\frac{1}{256}}=$

$=64\cdot 6-3\cdot 216=384-648=-264$

$x\in(-\infty;0)\cup(0;\frac{1}{2}) \quad f'(x)<0$ **убывает;**

$x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$ $\quad f'(x) > 0$ **возрастает**

$X_{min} = \frac{1}{2}$

$Y_{min} = f(\frac{1}{2}) = \frac{2 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1}{\frac{1}{8}} = \frac{1-6+4}{4} \cdot 8 = -2$

5)Исследуйте функцию с помощью второй производной: найдите интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции.

$f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^3}$

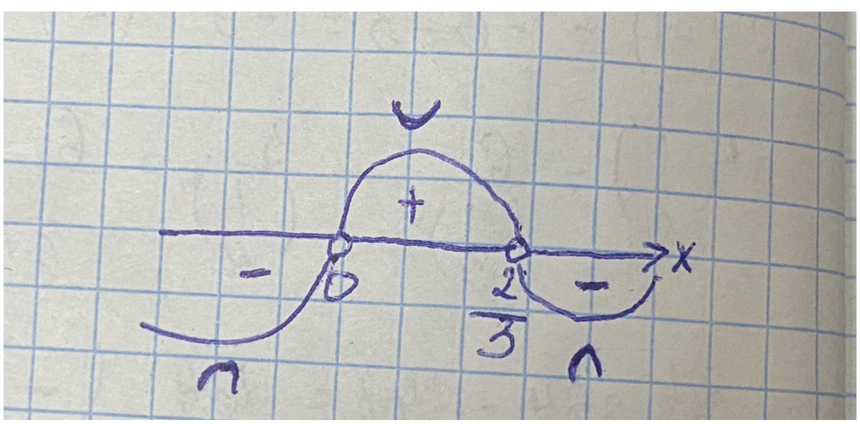
$f'(x) = 6x^{-3} - 3x^{-4}$

$f"(x) = (6x^{-3} - 3x^{-4})' = -18x^{-4} + 12x^{-5} = -\frac{18}{x^4} + \frac{12}{x^5}$

f"(x) = 0

-18x + 12 = 0

$x = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$



$f''(1) = -\frac{18}{1^4} + \frac{12}{1^5} = -18 + 12 = -6$

$f''(\frac{1}{2}) = -\frac{18}{(\frac{1}{2})^4} + \frac{12}{(\frac{1}{2})^5} = \frac{18}{\frac{1}{16}} + \frac{12}{\frac{1}{32}} = -18 \cdot 16 + 12 * 32 = 16(-18 + 12 \cdot 2) = (+)$

$f''(-1) = -\frac{18}{(-1)^4} + \frac{12}{(-1)^5} = -18 - 12 = -30 \quad (-)$

$x \in (-\infty; 0) \quad f''(x) < 0 \cap$

$x \in (0; \frac{2}{3}) \quad f''(x) > \cup$

$x = \frac{2}{3}(\cdot)$ перегиба

6)Проверьте наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.

$f(x) = y = \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^3}$

x $=$ 0 - вер. асипмт.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^3} = \frac{1}{0} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^3} = \lim\limits_{x \to \infty} (2x^2 - 3 + \frac{1}{x}) = \infty$ гориз. асимптот

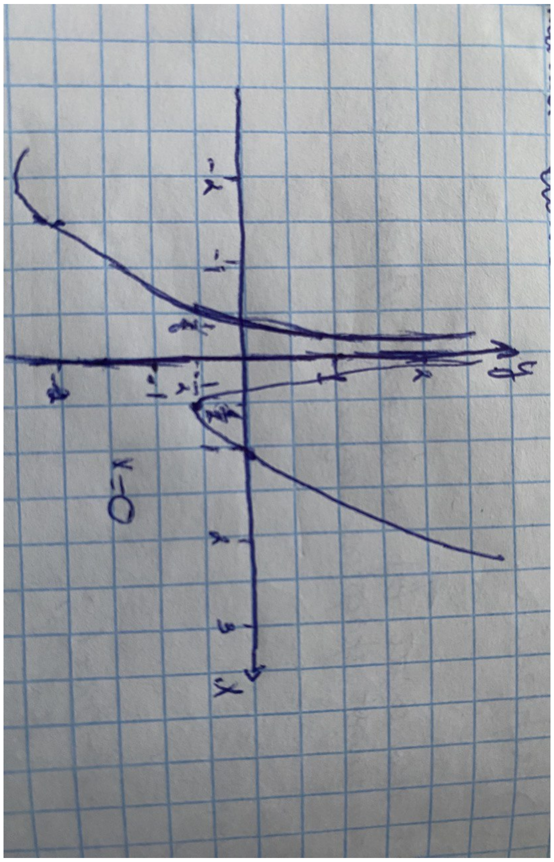
7)Найдите точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найдите значения функции в некоторых дополнительных точках

$y = 0; \quad 2x^3 - 3x + 1 = 0;$

$x = 1$

$A(1; 0)(\cdot) \cap O_x$

8)Найдите точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найдите значения функции в некоторых дополнительных точках.



b)$g(x) = \sqrt[3]{8 - x^3}$

1) Найдите область определения функции g(x) Область определения уравнения:

$D(g(x)) => x \in R$

2) $g(-x) = \sqrt[3]{8 - (-x^3)} = \sqrt[3]{8 + x^3}$ функция общего вида Функция не является ни четной, ни нечетной.

3) $g(x) = (8 - x^3)^{\frac{1}{3}}$

$x = 0 \qquad (8 - 0^3)^{\frac{1}{3}} = 2$

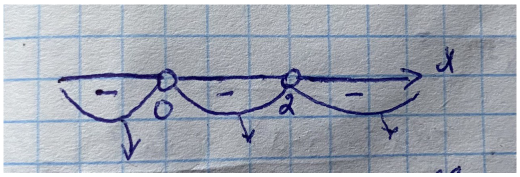
$A(0, 2)$

4) $g'(x) = [(8 - x^3)^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3}(8 - x^3)^{-\frac{2}{3}}(8 - x^3)' =$

$= \frac{1}{3}(8-x^3)^{-\frac{2}{3}}(-3x^2) = -x^2(8-x^3)^{-\frac{2}{3}} = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(8-x^3)^2}}$

$g(x) = 0; \quad -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(8-x^3)^2}} = 0$

$8 - x^3 \neq 0; \quad x^3 \neq 0; \quad x = 2$ (крит$(\cdot)$)



$g'(4) = -\frac{16}{\sqrt[3]{(8-64)^2}} = -\frac{16}{\sqrt[3]{(-56)^2}} < 0 \quad (-)$

$g'(1) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(8-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}} < 0 \quad (-)$

$g'(-1) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(8+1)^2}} < 0 \quad (-)$

$g'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

5) $g(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$

$g'(x) = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(8-x^3)^2}}$

$g''(x) = (-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(8-x^3)^2}})' = (-x^2(8-x^3)^{\frac{2}{3}})' =$

$= -2x(8-x^3)^{-\frac{2}{3}} - x^2(-\frac{2}{3}(8-x^3)^{-5/3}(-3x^2)) =$

$= -2x(8-x^3)^{-\frac{2}{3}} - (2x^2(8-x^3)^{-\frac{5}{3}}) =$

$= -\frac{2x}{\sqrt[3]{(8-x^3)}} - \frac{2x^4}{\sqrt[3]{(8-x^3)^5}} = -\frac{2x}{\sqrt[3]{(8-x^3)}} - \frac{2x^4}{(8-x^3)\sqrt[3]{(8-x^3)^2}} =$

$= \frac{2x(8-x^3)+2x^4}{(8-x^3)\sqrt[3]{(8-x^3)^2}} = \frac{16x-2x^4+2x^4}{(8-x^3)\sqrt[3]{(8-x^3)^2}} = \frac{16x}{(8-x^3)\sqrt[3]{(8-x^3)^2}}$

$g''(x) = 0$

$\frac{16x}{(8-x^3)\sqrt[3]{(8-x^3)^2}} = 0$

$-16x = 0$

$x = 0$ - перегиба

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{8-x^3} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{8-x^3} = +\infty$ функция не имеет вертикальных и горизонтальных асимптот => нет наклонных асимптот

7) $g(0) = \sqrt[3]{8-o^3} = 2\ A(0;2)$

$g(x) = 0$

$\sqrt[3]{(8-x^3)} = 0$

$8 - x^3 = 0$

$x^3 = 2^3$

$x = 2 \quad B(2;0)$

8)