В.Болтянский

Три точки на одной прямой

В этой статье мы рассмотрим несколько задач,для решение которых оказывается полезным использование векторов. В основном, это задачи, в которых требуется доказать, что некоторые три точки лежат на одной прямой, или из того, что некоторые три точки ложат на одной прямой, или из того, что некоторые три точки лежат на одной прямой, вывести те или инные следствия. Главной для решение таких задач является хорошо известная

Т е о р е м а. Точка С в том и только в том случае принадлежит прямой АВ, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны (т.е. существует такое число) $k \in R, \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$).

Таким образом, чтобы установить принадлежность трех точек A, B и C одной прямой, достаточно убедиться, что существует число k, для которого $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ имеет (при $A \neq B$) простой геометрический смысл: |k| $= \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$, причем k $>$ 0, если точка принадлежит лучу AB, и k<0, если она принадлежит противоположному лучу.

Если,например, - середина отрезка AB(рис.1), то $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; отсюда для любой точки Q

$$\overrightarrow{QC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QB}.$$

Если, далее, В – середина стороны MN треугольника AMN, а $C-$ центр тяжести (точка пересечтение медиан) этого треугольника, то длина отрезка AC составляет $\frac{2}{3}$ длины отрезка AB; (рис.2): $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; поскольку для любой точки Q выполняется равенство

$$\overrightarrow{QB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QN},$$

можно заключить, что

$$\overrightarrow{QC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{QM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{QN}.$$

Наконец, еще одно замечание: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинарны, то из соотношения

$$k\vec{a} + l\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

вытекает, что $k = m$ и $l = n$. В самом деле, это равенства можно переписать в виде

$$(k-m)\vec{a} = (n-l)\vec{b};$$

если теперь $k \neq m$, то $\vec{a} = \frac{n-l}{k-m}\vec{b}$, что противоречит неколлинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Таким образом,$k = m$ и, аналочин, $l = n$.

Вот и вся "теоретическая"предумрость. А теперь рассмотрим подробно четыре примера.

П р и м е р 1. Хорошо известно, что середины оснований трапеции и точка пересечения ее диагналей расположены на одной прямой. Докажем теперь в некотором смысле "обратную"теорему: если точка A перессечения диагналей четырехуголь-