Задание 1: Ряд Тейлора

а) Некоторую функцию разложили в ряд Маклорена и, придав аргументу x определённое значение, получили данный числовой ряд. Найдите его сумму.
Исходный ряд: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$
С ним можно провести следующие преобразования, введя аргумент x:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$
Рассмотрим получившийся ряд. Его первые члены равны: $x; -\frac{x^2}{2}; \frac{x^3}{3}; ...$

Заметим, что данный ряд близок к стандартному разложению для $ln(1+x) = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, x \in (-1;1]$, первые члены которого равны тем же значениям.
Следовательно, мы можем приравнять его к ряду $ln(1+x) : \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = ln(1+x)$

x=1 входит в ОДЗ, значит, можно вычислить сумму ряда для x=1:
$\sum = ln(1+1) = ln(2)$. Ряд сходится.

б) Найдите первообразную данной функции в виде ряда, используя стандартные разложения степенных рядов, а также свойства их сложения и умножения.
Исходная функция: $f(x) = (1+x^2) * arctg(x) = arctg(x) + x^2 * arctg(x)$
Вычислим значение интеграла от этой функции:
$\int_0^x arctg(t) + t^2 * arctg(t) dt = \int_0^x arctg(t) dt + \int_0^x t^2 * arctg(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{2n-1} + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+3}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2n(2n-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+4}}{2(2n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{(-1)^n t^{2n+3}}{2n+1} + \frac{(-1)^n x^{2n+4}}{2(2n+1)(n+2)})$

в) Найдите первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях. Изобразите на графике. $y' = xy + ln(x+y); y(1) = 0; k = 5$

Разложение в степенной ряд: $f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$

$y^{(2)} = (xy + ln(x+y))\prime = x^{'}y + xy^{'} + \frac{1}{x+y}(x^{'} + y^{'})$
$y^{(3)} = (x^{'} + xy^{'} + \frac{x'y'}{x+y})' = x''y + x'y' + x'y' + xy'' + \frac{(x''+y'')(x+y)-(x'+y')(x'+y')}{(x+y)^2} = x'' + 2x'y' + xy'' + \frac{(x''+y'')(x+y)-(x'+y')(x'+y')}{(x+y)^2} = 1$

$y^{(4)} = x'''y + x''y' + 2x''y' + 2xy'' + x'y'' + xy''' + \frac{((x'''+y''')(x+y)+(x''y'')(x'+y')-2(x'+y')(x''+y''))(x+y)^2-(2(x'+y')(x+y)((x''+y'')(x+y)-(x'+y')^2))}{(x+y)^4} = 2+1+1 = 4$

Итоговый степенной ряд получается следующим:
$0 + 0 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{6} = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{6}$

Изображение на графике: