

Методические указания к выполнению расчётно-графической работы по теме:

«Ряды Тейлора и Фурье»

Описание работы

Расчётно-графические работы выполняются командами студентов (по 3-4 человека) и заключаются в выполнении заданий, оформлении отчета и его защите (порядок см. ниже). Сформированные команды сами выбирают себе номер от 1 до 8 так, чтобы у каждой команды он был уникальный.

Требования

К выполнению заданий – в работе должны быть:

- поставлены требуемые задачи;
- представлены в логической последовательности основные этапы исследования или решения;
- указаны используемые теоретические положения и методы;
- получены точные численные результаты и построены требуемые графические изображения.

К содержанию отчета – отчет выполняется в электронном виде (текстовый документ или презентация; для презентации в MS Power Point используется шаблон Университета ИТМО: ИСУ → полезные ссылки → корпоративная стилистика → презентации (внизу страницы)). должен содержать:

- 1) титульный лист/слайд (название дисциплины, учебный год, название РГР, номер варианта, ФИ исполнителей, номера групп и потоков, ФИ преподавателя, ФИ ментора (если у преподавателя есть ментор), дата, место выполнения);
- 2) условия всех заданий (условие каждого задания – перед его решением);
- 3) основные этапы решения (исследования) каждой задачи, его теоретическое обоснование, численные результаты;
- 4) графики или рисунки, иллюстрирующие решение каждой задачи (выполненные в математическом редакторе Desmos: <https://www.desmos.com/>, Geogebra: <https://www.geogebra.org/> или других);
- 5) выводы;
- 6) оценочный лист
(вклад каждого исполнителя оценивается всей командой по шкале от 0 до 100% баллов).

К оформлению отчета:

- 1) Страницы и слайды следует пронумеровать (на титульной странице/слайде номер не ставится).
- 2) Текст представляется полностью в цифровом виде. Не допускается вставка фото или сканов текста, а также скриншотов электронного текста.
- 3) Все формулы набираются в редакторе формул. Не допускается набор формул текстом (например, $f(x)=3*x^2$), а также вставка фото или сканов формул, однако допускается вставка скриншотов электронных формул (если ни один редактор формул не доступен). Про редакторы формул:
 - a. в MS Office есть встроенный редактор формул;
 - b. в MS Office также есть скачиваемая надстройка MathType для набора формул;
 - c. Google-документы и Open Office имеют встроенные редакторы формул;
 - d. в LaTeX встроен набор формул;
 - e. можно воспользоваться бесплатным сервисом набора формул <https://editor.codecogs.com/> и скачать формулу в виде изображения;
 - f. или воспользоваться математическим пакетом (MathCAD, Wolfram Mathematica и др.) или сайтом Wolfram Alpha и сделать оттуда скриншоты формул.

Защита работ

Порядок защиты РГР определяется преподавателем практики.

Задание 1. Ряд Тейлора

- а) Некоторую функцию разложили в ряд Маклорена и, придав аргументу x определённое значение, получили данный числовой ряд. Найдите его сумму.
- б) Найдите первообразную данной функции в виде ряда, используя стандартные разложения степенных рядов, а также свойства их сложения и умножения.
- в) Найдите первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях. Изобразите на графике.

№	а)	б)	в)
А	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{2n+1}$	$f(x) = \ln(1+3x+2x^2)$	$y' = \frac{1-x^2}{y} + 1, y(0) = 1, k = 5$
Б	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!}$	$f(x) = \frac{x}{2-x^5}$	$y' = x + \arcsin y, y(0) = 0.5, k = 4$
В	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$	$f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$	$y' = xy + \ln(x+y), y(1) = 0, k = 5$
Г	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{n!}$	$f(x) = (x+1) \sin x^2$	$y' = y \cos x + 2 \cos y, y(0) = 0, k = 4$
Д	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}$	$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$y' = xy + e^y, y(0) = 0, k = 4$
Е	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!}$	$f(x) = \frac{x-1}{5+x^3}$	$y'' = e^y \sin y', y(\pi) = 1, y'(\pi) = \frac{\pi}{2}, k = 3$
Ж	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{3^n} (2n-1)}$	$f(x) = \frac{\sin x}{x}$	$y' = \frac{x}{\sqrt{y}} + 2, y(0) = 1, k = 5$
З	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{9^n \cdot (2n)!}$	$f(x) = \cos(4x^2)$	$y' = y + xe^{-y}, y(0) = 0, k = 4$

Задание 2. Ряд Фурье

С помощью разложения в ряд Фурье данной функции в интервале $(-\pi; \pi)$ найдите сумму указанного числового ряда.

№	Функция	Числовой ряд	№	Функция	Числовой ряд
А	$f(x) = \pi^2 - x^2$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$	Б	$f(x) = 1 + x^2$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$
В	$f(x) = 1 + x $	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^2}$	Г	$f(x) = 1 - x $	$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)^2}$
Д	$f(x) = x^2$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$	Е	$f(x) = 1 - x^2$	$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n-2)^2}$
Ж	$f(x) = x $	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$	З	$f(x) = x $	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

План:

- 1) Представьте функцию её рядом Фурье, найдите коэффициенты ряда и запишите полученный тригонометрический ряд. Не забудьте упростить периодические функции от «хороших» аргументов (например, $\cos(\pi n) = (-1)^n$, а $\sin(2\pi n) = 0$).
- 2) Изобразите на графике функцию (на $(-\pi; \pi)$) и её ряд Фурье (везде). Убедитесь в совпадении графика функции суммы ряда Фурье и графика функции на интервале $(-\pi; \pi)$. Не забудьте про значение суммы ряда Фурье в точках разрыва функции и на концах $(-\pi; \pi)$, изобразите их закрашенными или проколотыми.
- 3) Зафиксируйте $x = x_0$ из $(-\pi; \pi)$ так, чтобы ряд Фурье содержал искомую сумму числового ряда. Выразите её из условия равенства функции и её ряда Фурье.

Задание 3. Приближение ряда Фурье конечной суммой

В трёх однотипных опытах радиолюбителей на вход цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) был подан короткий цифровой сигнал формы, изображённой на рисунке.

План:

- 1) Найдите аналитически и изобразите на графике форму аналогового сигнала на выходе ЦАП для каждого опыта, если в первом опыте ЦАП был настроен так, что обрезал все гармоники, кроме нулевой и первой; во втором – после третьей; в третьем – после десятой (i -ой гармоникой считается i -й член ряда Фурье при нумерации с нуля).
- 2) Для каждого опыта постройте графики функции ошибок ЦАП и укажите максимальную ошибку.
- 3) Сравните результаты. Сделайте заключение.

№	Рисунок	№	Рисунок
А		Б	
В		Г	
Д		Е	
Ж		3	