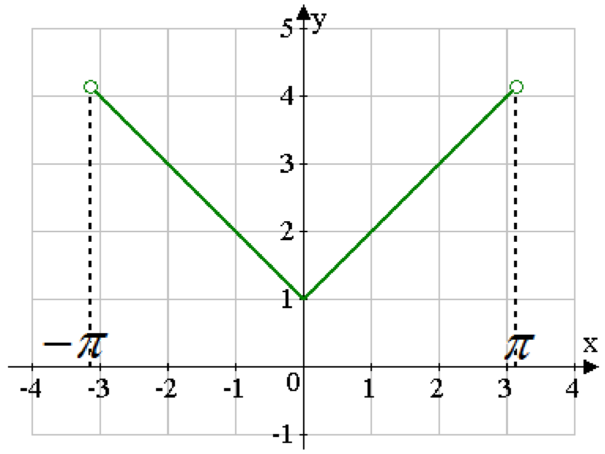
Условие

С помощью разложения в ряд Фурье функции $y = 1 + |x|$ в интервале $(-\pi;\pi)$ найдите сумму числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^2}$.

Решение

График функции:



$f(-x) = |-x| + 1 = |x| + 1 = f(x)$

Так как $f(-x) = f(x)$, то заданная функция чётная. Это значит, что $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (x+1)dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left.\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{2} + \pi\right) = \pi + 2.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (x+1) \cdot \cos nx dx = \begin{bmatrix} u = x+1;\ du = dx. \\ dv = \cos nx;\ v = \frac{1}{n}\sin nx. \end{bmatrix} =$$

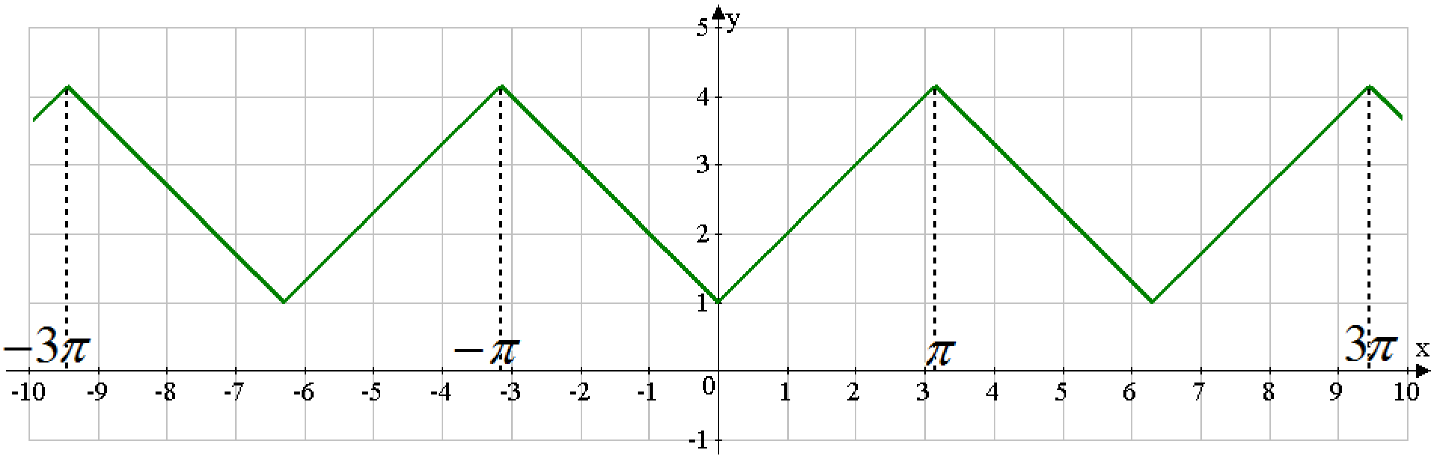
$$= \left.\frac{2 \cdot (x+1)}{\pi n} \sin nx\right|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \cdot \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{\pi n} \cdot \int_0^{\pi} \sin nx dx = \left.\frac{2}{\pi n^2} \cos nx\right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos \pi n - 1) = \frac{2 \cdot \left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2}.$$

$$f(x) = \frac{\pi + 2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot \left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2} \cdot \cos nx \right).$$

Так как при нечётных значениях n имеем $(-1)^n - 1 = -2$, а при чётных значениях n получим $(-1)^n - 1 = 0$, то полученное разложение можно записать так:

$$f(x) = \frac{\pi + 2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot (-2)}{\pi \cdot (2n-1)^2} \cdot \cos((2n-1)x) \right) = \frac{\pi + 2}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

График суммы ряда Фурье:



При $x=0$ получим:

$$f(0)=\frac{\pi+2}{2}-\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)0)}{(2n-1)^2}=\frac{\pi+2}{2}-\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi+2}{2}-\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2(n-2)+3)^2}=$$

$$=\frac{\pi+2}{2}-\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)^2}=\frac{\pi+2}{2}-\frac{4}{\pi}\cdot\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)^2}\right)=\frac{\pi+2}{2}-\left(\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)^2}\right)=$$

$$=\frac{\pi+2}{2}-\frac{4}{\pi}-\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)^2}$$

Так как $f(0)=1$, то получим:

$$\frac{\pi+2}{2}-\frac{4}{\pi}-\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)^2}=1;\ \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)^2}=\frac{\pi+2}{2}-\frac{4}{\pi}-1;\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)^2}=\frac{\pi^2}{8}-1.$$

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)^2}=\frac{\pi^2}{8}-1$