Задача: Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду

Дано уравнение поверхности 2-го порядка:

$$2x^2 - 6xy + 2y^2 + z^2 - 25 = 0 \tag{1}$$

План:

1. С помощью теории квадратичных форм приведите к каноническому виду данное уравнение.

2. Изобразите график уравнения в исходной системе координат. Какую поверхность оно задаёт? Укажите на графике оси исходной и приведённой систем координат.

Решение

Шаг 1: Формулировка матрицы квадратичной формы

Матрица квадратичной формы уравнения второго порядка строится на основе коэффициентов при квадратичных членах и смешанных произведениях переменных.

Наша уравнение имеет вид:

$$2x^2 - 6xy + 2y^2 + z^2 - 25 = 0 \tag{2}$$

Мы можем переписать его в виде:

$$2x^2 - 2 * 3xy + 2y^2 + z^2 - 25 = 0 \tag{3}$$

Теперь, если мы сравним это с общим видом уравнения второго порядка:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{4}$$

мы видим, что:

$$\begin{aligned}
&A = 2 \quad (\text{коэффициент при } x^2),\\
&B = 2 \quad (\text{коэффициент при } y^2),\\
&C = 1 \quad (\text{коэффициент при } z^2),\\
&D = -3 \quad (\text{половина коэффициента при } xy),\\
&E = 0 \quad (\text{половина коэффициента при } xz),\\
&F = 0 \quad (\text{половина коэффициента при } yz).
\end{aligned}$$

Таким образом, матрица квадратичной формы будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Обратите внимание, что матрица симметрична, так как коэффициенты при смешанных произведениях переменных одинаковы.

Шаг 2: Нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы

Собственные значения матрицы A находятся как корни характеристического уравнения:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{6}$$

где I - единичная матрица, λ - собственное значение, которое мы ищем, и det обозначает определитель матрицы.

Матрица $A - \lambda I$ будет выглядеть так:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \tag{7}$$

Теперь мы вычисляем определитель этой матрицы и приравниваем его к нулю, чтобы найти корни уравнения, которые будут являться собственными значениями:

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda) - 0) - (-3)(-3(1-\lambda) - 0) + 0 = 0 \tag{8}$$

Решая это уравнение, мы получаем собственные значения:

$$\lambda_1 = 5,$$
$$\lambda_2 = -1,$$
$$\lambda_3 = 1.$$

Это означает, что у нас есть три собственных значения: 5, -1 и 1.

Собственные векторы находятся как решения системы уравнений, полученной из условия равенства нулю вектора, полученного умножением матрицы A на вектор v и умножением собственного значения на этот же вектор:

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{9}$$

где v - собственный вектор, который мы ищем.

Решая эти системы уравнений, мы получаем собственные векторы:

$$v_1 = (-1, 1, 0),$$
$$v_2 = (1, 1, 0),$$
$$v_3 = (0, 0, 1).$$

Аналогично, для $\lambda_2 = -1$ и $\lambda_3 = 1$, мы получаем системы уравнений и решаем их, чтобы получить соответствующие собственные векторы:

Для $\lambda_2 = -1$, у нас есть система уравнений:

$$\begin{aligned}(2-(-1))x - 3y + 0 &= 0,\\ -3x + (2-(-1))y + 0 &= 0,\\ 0x + 0y + (1-(-1))z &= 0.\end{aligned}$$

Решая эту систему, мы получаем собственный вектор $v_2 = (1, 1, 0)$.

Наконец, для $\lambda_3 = 1$, у нас есть система уравнений:

$$\begin{aligned}(2-1)x - 3y + 0 &= 0,\\ -3x + (2-1)y + 0 &= 0,\\ 0x + 0y + (1-1)z &= 0.\end{aligned}$$

Решая эту систему, мы получаем собственный вектор $v_3 = (0, 0, 1)$.

Таким образом, мы получили три собственных вектора: $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, и $v_3 = (0, 0, 1)$.

Шаг 3: Приведение уравнения к каноническому виду

Теперь, когда у нас есть собственные значения и собственные векторы, мы можем привести уравнение к каноническому виду. Для этого мы выполним замену переменных, используя собственные векторы в качестве новых осей координат. Это приведет к тому, что в новых координатах уравнение будет иметь вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = 25 \tag{10}$$

где x', y' и z' - координаты в новой системе.

Таким образом, уравнение в каноническом виде будет выглядеть следующим образом:

$$5x'^2 - y'^2 + z'^2 = 25 \tag{11}$$

Это уравнение описывает эллипсоид в новой системе координат.

Шаг 4: Визуализация уравнения

Для создания графика в исходной системе координат:

$$2x^2 - 6xy + 2y^2 + z^2 - 25 = 0 \tag{12}$$

зададим диапазон значений для x,y, z от -10 до 10. Полученный график представлен на следующем изображении:

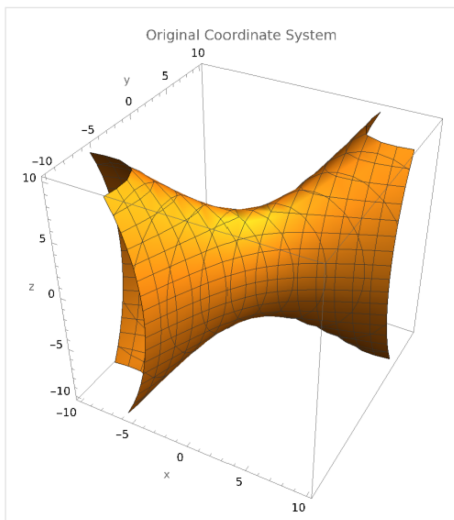

Рис. 1: График уравнения в исходной системе координат

Для создания графика в приведенной системе координат, уравнение в каноническом виду:

$$5x'^2 - y'^2 + z'^2 = 25 \tag{13}$$

и также зададим диапазон значений для x', y', z' от -10 до 10, приведенной системе координат уравнение описывает эллипсоид, что соответствует его каноническому виду.

Полученный график представлен на следующем изображении:

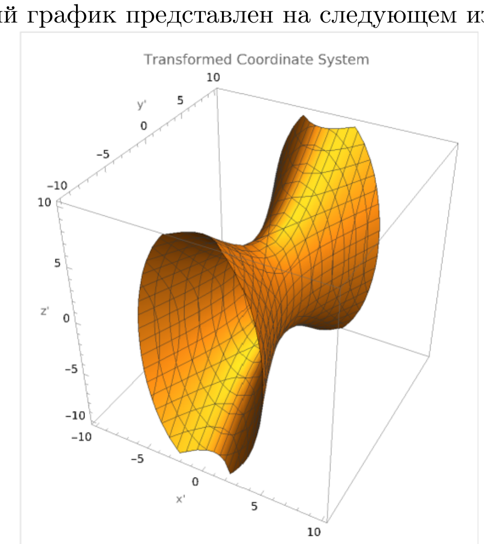

Рис. 2: График уравнения в приведенной системе координат