Методические указания к выполнению расчётно-графической работы по теме

«Линейный оператор, спектральный анализ и евклидово пространство»

Описание работы

Расчетно-графические работы выполняются командами студентов (по 3-4 человека) и заключаются в выполнении заданий, оформлении отчета и его защите (порядок см. ниже). Сформированные команды сами выбирают себе номер от 1 до 8 так, чтобы у каждой команды он был уникальный.

Требования

К выполнению заданий – в работе должны быть:

1) поставлены требуемые задачи;
2) представлены в логической последовательности основные этапы исследования или решения;
3) указаны используемые теоретические положения и методы;
4) получены точные численные результаты и построены требуемые графические изображения.

К содержанию отчета – отчет выполняется в электронном виде (текстовый документ или презентация; для презентации в MS Power Point используется шаблон Университета ИТМО: ИСУ → полезные ссылки → корпоративная стилистика → презентации (внизу страницы)). должен содержать:

1) титульный лист/слайд (название дисциплины, учебный год, название РГР, ФИ исполнителей, номера групп, ФИ преподавателя, ФИ ментора (если у преподавателя есть ментор), дата, место выполнения);
2) условия всех заданий (условие каждого задания – перед его решением);
3) основные этапы решения (исследования) каждой задачи, его теоретическое обоснование, численные результаты;
4) графики или рисунки, иллюстрирующие решение каждой задачи (выполненные в математическом редакторе Desmos: https://www.desmos.com/, Geogebra: https://www.geogebra.org/ или других);
5) выводы;
6) оценочный лист
   (вклад каждого исполнителя оценивается всей командой по шкале от 0 до 100% баллов).

К оформлению отчета:

1) Страницы и слайды следует пронумеровать (на титульной странице/слайде номер не ставится).
2) Текст представляется полностью в цифровом виде. Не допускается вставка фото или сканов текста, а также скриншотов электронного текста.
3) Все формулы набираются в редакторе формул. Не допускается набор формул текстом (например, f(x)=3*x^2), а также вставка фото или сканов формул, однако допускается вставка скриншотов электронных формул (если ни один редактор формул не доступен). Про редакторы формул:
   а) в MS Office есть встроенный редактор формул;
   б) в MS Office также есть скачиваемая надстройка MathType для набора формул;
   в) Google-документы и Open Office имеют встроенные редакторы формул;
   г) в LaTeX встроен набор формул;
   д) можно воспользоваться бесплатным сервисом набора формул https://editor.codecogs.com/ и скачать формулу в виде изображения;
   е) или воспользоваться математическим пакетом (MathCAD, Wolfram Mathematica и др.) или сайтом Wolfram Alpha и сделать оттуда скриншоты формул.

Защита работ

Порядок защиты РГР определяется преподавателем практики.

Задание 1. Линейный оператор и спектральный анализ

А) Дано пространство геометрических векторов $\mathbb{R}^3$, его подпространства L_1 и L_2 и линейный оператор $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Проведите исследование:

1) Изобразите на графике подпространства L_1 и L_2 .
2) Методами векторной алгебры составьте формулу для линейного оператора $\mathcal{A}$.
3) Составьте его матрицу в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ пространства $\mathbb{R}^3$.
4) Решите задачу о диагонализации полученной матрицы методом спектрального анализа.
5) На построенном ранее графике изобразите базис, в котором матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид. Объясните его смысл.

Б) Дано множество функций L и отображение $\mathcal{A}$: $L \to L$.

Проведите исследование:

1) Проверьте, что L является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$.
2) Выберите в нём базис.
3) Убедитесь, что отображение $\mathcal{A}$ является линейным (оператором).
4) Найдите размерности ядра и образа оператора $\mathcal{A}$.
5) Решите задачу о диагонализации матрицы линейного оператора $\mathcal{A}$ в выбранном базисе методом спектрального анализа:
   - в случае, если $\mathcal{A}$ имеет скалярный тип, для диагонализации используйте собственный базис.
   - в случае, если $\mathcal{A}$ имеет общий тип, для диагонализации используйте жорданов базис (приведите матрицу в жорданову форму).
6) Выберите произвольно (и нетривиально) функцию $f(t)$ как элемент из L. Найдите её образ умножением на матрицу оператора. Проверьте результат непосредственным вычислением образа. Сравните результаты и трудоёмкость.

№ ком.	п.	Условие
1	А)	$\mathcal{A}$ – оператор проектирования пространства $\mathbb{R}^3$ на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2 , где L_1 определено системой уравнений $x - y + z = 0,\ 2x - 3y + 4z = 0,$ L_2 – уравнением $2x + 3y - 4z = 0.$
	Б)	L – множество функций вида $y = e^t(a_0 + a_1 t + a_2 t^2),$ где $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{D}^2 - 2\mathcal{D} + \mathcal{I}$, где $\mathcal{D}$ – дифференцирование, т.е. $\mathcal{D}\big(y(t)\big) = \frac{dy}{dt}$.
2	А)	$\mathcal{A}$ – оператор отражения пространства $\mathbb{R}^3$ в L_1 параллельно L_2, где L_1 задано уравнением $x = 0$, L_2 – уравнениями $2x = y = -z$.
	Б)	L – множество многочленов $p(x)$ степени не выше 2, $\mathcal{A}\big(p(x)\big) = \int_{-1}^{1} K(x; y)\, p(y)\, dy$, где $K(x; y) = y^2 + 2x(y - 1) + (1 - 3y^2)x^2$.
3	А)	$\mathcal{A}$ – оператор ортогонального отражения пространства $\mathbb{R}^3$ относительно L_1, заданного уравнениями $x = 2y = z$.

	Б)	L – множество функций вида $y = e^{-t}(a\cos t + b\sin t)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = (\mathcal{D} + \mathcal{I})^2$, где $\mathcal{D}$ – дифференцирование, т.е. $\mathcal{D}\big(y(t)\big) = \frac{dy}{dt}$.
4	А)	$\mathcal{A}$ – оператор проектирования пространства $\mathbb{R}^3$ на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2, где L_1 определено уравнением $x = y$, L_2 – системой уравнений $x + y + z = 0$, $2x + y + 4z = 0$.
	Б)	L – множество функций вида $f(x) = a\cos x + b\sin x$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}\big(f(x)\big) = \int_0^{\pi} K(x;y)\, f(y)\, dy$, где $K(x;y) = \sin(x + y)$.
5	А)	$\mathcal{A}$ – оператор отражения пространства $\mathbb{R}^3$ в L_1 параллельно L_2, где L_1 задано уравнением $y = 0$, L_2 – уравнениями $-x = 2y = 3z$.
	Б)	L – множество функций вида $y = e^{t}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)$, где $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{D}^3 - 2\mathcal{D}^2$, где $\mathcal{D}$ – дифференцирование, т.е. $\mathcal{D}\big(y(t)\big) = \frac{dy}{dt}$.
6	А)	$\mathcal{A}$ – оператор проектирования пространства $\mathbb{R}^3$ на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2, где L_1 определено уравнениями $-20x = 15y = 12z$, L_2 – уравнением $2x + 3y - z = 0$.
	Б)	L – множество многочленов $p(x)$ степени не выше 2, $\mathcal{A}\big(p(x)\big) = \int_{-1}^{1} K(x;y)\, p(y)\, dy$, где $K(x;y) = 3x^2y + 5xy^2$.
7	А)	$\mathcal{A}$ – оператор проектирования пространства $\mathbb{R}^3$ на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2, где L_1 определено уравнением $x = 0$, L_2 – уравнениями $2x = 2y = -z$.
	Б)	L – множество функций вида $y = a\cos 2t + b\sin 2t + c\, t\cos 2t + d\, t\sin 2t$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{D}^2 + 4\mathcal{I}$, где $\mathcal{D}$ – дифференцирование, т.е. $\mathcal{D}\big(y(t)\big) = \frac{dy}{dt}$.
8	А)	$\mathcal{A}$ – оператор ортогонального отражения пространства $\mathbb{R}^3$ относительно L_1, заданного как линейная оболочка векторов $\vec{a} = (1; 0; -1)$ и $\vec{b} = (1; 1; -2)$.
	Б)	L – множество функций вида $f(x) = a + b\cos 2x + c\sin 2x$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}\big(f(x)\big) = \int_0^{\pi} K(x;y)\, f(y)\, dy$, где $K(x;y) = \cos^2(x - y)$.

Задание 2. Евклидовы пространства функций

А) Дано пространство многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определенных на отрезке $[-1;1]$.

Проведите исследование:

1) Проверьте, что система векторов $B=\{1,\ t,\ t^2, t^3\}$ является базисом этого пространства. Ортогонализируйте систему (построенный ортогональный базис обозначьте B_H).
2) Выпишите первые четыре (при $n=0{,}1{,}2{,}3$) многочлена Лежандра: $L_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\ \frac{d^n}{dt^n}((t^2-1)^n)$, где $\frac{d^n}{dt^n}\big(y(t)\big)$ – производная n-ого порядка функции $y(t)$.
3) Найдите координаты полученных многочленов $L_n(t)$ в базисе B_H. Сделайте вывод об ортогональности системы векторов $L_n(t)$.
4) Разложите многочлен $P_3(t)$, данный в вашем варианте, по системе векторов $L_n(t)$.

Б) Дано пространство R функций, непрерывных (или имеющих конечный разрыв) на отрезке $[-\pi;\pi]$, со скалярным произведением $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ и длиной вектора $\|f\|\ =\sqrt{(f,f)}$. Тригонометрические многочлены $P_n(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos t+b_1\sin t+\cdots+a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)$, где a_k,b_k – вещественные коэффициенты, образуют подпространство P пространства R .
Требуется найти многочлен $P_n(t)$ в пространстве P, минимально отличающийся от функции $f(t)$ – вектора пространства R .

Указание. Требуется решить задачу о перпендикуляре: расстояние от $f(t)$ до $P_n(t)$ будет наименьшим, если это длина перпендикуляра $h=f(t)-P_n(t)$, опущенного из точки $f(t)$ на подпространство P . В этом случае, $P_n(t)$ будет ортогональной проекцией вектора $f(t)$ на P . Таким образом, требуется найти координаты вектора $P_n(t)$ (коэффициенты многочлена) в заданном базисе P . Если выбран ортонормированный базис, то эти координаты суть проекции вектора $f(t)$ на векторы данного базиса.

Проведите исследование:

1) Проверьте, что система функций $\{1,\cos t\,,\sin t\,,\ldots\cos n\,t,\sin n\,t\}$ является ортогональным базисом подпространства P . Нормируйте систему.
2) Найдите проекции вектора $f(t)$ (см. варианты) на векторы полученного ортонормированного базиса.
(На вектор $\{1\}$ найдите проекцию отдельно, а проекции на векторы вида $\{\cos(nt)\}$ и $\{\sin(nt)\}$ запишите формулами в зависимости от n. Воспользуйтесь свойствами интегралов от четных и нечетных функций на симметричном промежутке.)
3) Запишите минимально отстоящий многочлен $P_n(t)$ с найденными коэффициентами (тригонометрический многочлен Фурье для данной функции).
4) Изобразите графики (например, в Desmos) функции $f(t)$ и многочлена Фурье различных порядков n (можно положить $n=5;10;15$).
5) Сделайте вывод о поведении многочлена при росте его порядка.

№ ком.	А)	Б)
1	$P_3(t)=t^3-2t^2+t+1$	$f(t)=2t$

2	$P_3(t) = 2t^3 - t^2 + t + 2$	$f(t) = -3t$
3	$P_3(t) = t^3 + t^2 + 4t - 3$	$f(t) = t + 1$
4	$P_3(t) = 2t^3 + 3t + 1$	$f(t) = 4t$
5	$P_3(t) = t^3 + t^2 + 1$	$f(t) = -t + 1$
6	$P_3(t) = t^3 - 3t^2 + t$	$f(t) = \operatorname{sign} t$
7	$P_3(t) = t^3 + 2t^2 - 2t + 1$	$f(t) = 0{,}5t$
8	$P_3(t) = -t^3 + t^2 - t + 1$	$f(t) = -\operatorname{sign} t$

Задание 3. Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду

Дано уравнение поверхности 2-го порядка:

№ команды:

1. $2x^2-6xy+2y^2+z^2-25=0$
2. $2x^2+4y^2+2z^2+2xz-12=0$
3. $x^2+4xy+y^2-2z^2-12=0$
4. $2x^2-3y^2+2z^2+2xz-12=0$
5. $x^2+4xz+5y^2+z^2=0$
6. $2x^2+2y^2+2yz+2z^2-1=0$
7. $3x^2-2yz=0$
8. $2x^2-2y^2-2yz-2z^2-12=0$

План:

1) С помощью теории квадратичных форм приведите к каноническому виду данное уравнение.
2) Изобразите график уравнения в исходной системе координат. Какую поверхность оно задаёт? Укажите на графике оси исходной и приведённой систем координат.