

Методические указания к выполнению расчётно-графической работы по теме

«Производная и дифференциал»

Описание работы

Расчётно-графические работы выполняются командами студентов (по 3-4 человека) и заключаются в выполнении заданий, оформлении отчета и его защите (порядок см. ниже). Сформированные команды сами выбирают себе номер от 1 до 8 так, чтобы у каждой команды он был уникальный.

Требования

К выполнению заданий – в работе должны быть:

- 1) поставлены требуемые задачи;
- 2) представлены в логической последовательности основные этапы исследования или решения;
- 3) указаны используемые теоретические положения и методы;
- 4) получены точные численные результаты и построены требуемые графические изображения.

К содержанию отчета – отчет выполняется в электронном виде (текстовый документ или презентация; для презентации в MS Power Point используется шаблон Университета ИТМО: ИСУ → полезные ссылки → корпоративная стилистика → презентации (внизу страницы)). должен содержать:

- 1) титульный лист/слайд (название дисциплины, учебный год, название РГР, ФИ исполнителей, номера групп, ФИ преподавателя, ФИ ментора (если у преподавателя есть ментор), дата, место выполнения);
- 2) условия всех заданий (условие каждого задания – перед его решением);
- 3) основные этапы решения (исследования) каждой задачи, его теоретическое обоснование, численные результаты;
- 4) графики или рисунки, иллюстрирующие решение каждой задачи (выполненные в математическом редакторе Desmos: <https://www.desmos.com/>, Geogebra: <https://www.geogebra.org/> или других);
- 5) выводы;
- 6) оценочный лист
(вклад каждого исполнителя оценивается всей командой по шкале от 0 до 100% баллов).

К оформлению отчета:

- 1) Страницы и слайды следует пронумеровать (на титульной странице/слайде номер не ставится).
- 2) Текст представляется полностью в цифровом виде. Не допускается вставка фото или сканов текста, а также скриншотов электронного текста.
- 3) Все формулы набираются в редакторе формул. Не допускается набор формул текстом (например, $f(x)=3*x^2$), а также вставка фото или сканов формул, однако допускается вставка скриншотов электронных формул (если ни один редактор формул не доступен). Про редакторы формул:
 - a. в MS Office есть встроенный редактор формул;
 - b. в MS Office также есть скачиваемая надстройка MathType для набора формул;
 - c. Google-документы и Open Office имеют встроенные редакторы формул;
 - d. в LaTeX встроен набор формул;
 - e. можно воспользоваться бесплатным сервисом набора формул <https://editor.codecogs.com/> и скачать формулу в виде изображения;
 - f. или воспользоваться математическим пакетом (MathCAD, Wolfram Mathematica и др.) или сайтом Wolfram Alpha и сделать оттуда скриншоты формул.

Защита работ

Порядок защиты РГР определяется преподавателем практики.

Задание 1. Дифференциал

Дана задача. Проведите исследование:

- 1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.
- 2) Решите задачу аналитически, применяя понятие дифференциала и приближая точное изменение её линейной частью.
- 3) Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Обратите внимание, чтобы график отражал данные физически корректно. Сравните его с аналитическим решением.
- 4) Запишите ответ.

№ команды	Задача
1.	На сколько изменится объём шара, если его радиус изменится на величину ΔR ? С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара, чтобы его объём можно было определить с точностью до одного процента?
2.	Вычислите приближённо площадь кругового кольца с внутренним радиусом R и шириной ΔR .
3.	Толстостенный цилиндр (т.е. фигура образованная двумя концентрическими цилиндрами одинаковой длины) имеет прецизионную длину $L = 15$ см. Внешний радиус $R = 5$ см, а средний внутренний $r = 1$ см, при этом внутренние стенки имеют равномерную конусность, т.е. их угол с секущей плоскостью симметрии составляет $(90 \pm 1)^\circ$. Вычислите абсолютную и относительную погрешности при вычислении объёма фигуры.
4.	<p>Нахождение периода колебания математического маятника при рассмотрении больших отклонений груза от начальной точки становится трудной в вычислительном плане задачей. Для больших отклонений период становится зависимым от угла начального положения маятника относительно нижней точки и во втором порядке может быть выражен как:</p> $T(\theta) = \frac{T_0}{\sqrt{\cos(\theta/2)}},$ <p>где $T_0 = \pi\sqrt{l/g}$ – период малых колебаний математического маятника, $l = 10$ см – длина маятника, $g = 981$ см/с² – ускорение свободного падения, $\theta = (10 \pm 1)^\circ$ – угол начального положения маятника относительно нижней точки.</p> <p>Найдите абсолютную и относительную погрешности при экспериментальном измерении периода маятника с заданными параметрами. Объясните поведение $T(\theta)$ при $\theta \rightarrow \pi$.</p>
5.	<p>Нахождение периода колебания математического маятника при рассмотрении больших отклонений груза от начальной точки становится трудной в вычислительном плане задачей. Для больших отклонений период становится зависимым от угла начального положения маятника относительно нижней точки и во втором порядке может быть выражен как:</p> $T(\theta) = T_0 \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^{-3/8},$

где $T_0 = \pi\sqrt{l/g}$ – период малых колебаний математического маятника, $l = 15$ см – длина маятника, $g = 981$ см/с² – ускорение свободного падения, $\theta = (7 \pm 1)^\circ$ – угол начального положения маятника относительно нижней точки.

Найдите абсолютную и относительную погрешности при экспериментальном измерении периода маятника с заданными параметрами. Объясните поведение $T(\theta)$ при $\theta \rightarrow \pi$.

-
6. Ток I определяется по тангенс-гальванометру по формуле $I = c \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Пусть $d\varphi$ – ошибка, допущенная при отсчёте угла φ . Найдите абсолютную и относительную погрешности при определении I . При каком φ относительная погрешность будет минимальной?
-

7. По данному расстоянию d светящейся точки от оптического центра двояковыпуклого стекла может быть вычислено расстояние f её изображения согласно формуле $1/d + 1/f = 1/F$, где F – постоянная для данного стекла и данного сорта лучей. Как влияет погрешность в измерении d на погрешность в вычислении f ?
-

8. Длина телеграфного провода $s = 2b \left(1 + \frac{2f^2}{3b^2} \right)$, где $2b$ – расстояние между точками подвеса, а f – наибольший прогиб. На сколько увеличится прогиб f , когда провод от нагревания увеличится на ds ?

Задание 2. Наибольшее и наименьшее значения функции

Дана задача. Проведите исследование:

- 1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.
- 2) Решите задачу аналитически, применяя необходимое и достаточное условия экстремума.
- 3) Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Сверьтесь с аналитическим решением.
- 4) Запишите ответ.

№ команды	Задача								
1.	Проектируется канал оросительной системы с прямоугольным сечением, равным 6,5 кв. метров. При каких линейных размерах сечения на облицовку стенок канала пойдет наименьшее количество материала?								
2.	Из куска металла, ограниченного линиями $y = x$, $x = 12$, $y = 0$ требуется выпилить деталь прямоугольной формы с наибольшей площадью.								
3.	Расходы на топливо для топки парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости в 10 км/ч расходы на топливо составляют 30 руб. в час, остальные же расходы (не зависящие от скорости) составляют 480 руб. в час. При какой скорости парохода общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей? Какова будет при этом общая сумма расходов в час?								
4.	<p>По результатам агрономического опыта была установлена квадратичная зависимость между среднесуточной температурой, при которой выращивалась пшеница нового сорта, и ее урожайностью. Результаты опыта представлены в таблице. Найдите оптимальную температуру, которая обеспечит максимальный урожай.</p> <table><tr><td>Температура, °C</td><td>14</td><td>16</td><td>22</td></tr><tr><td>Урожайность, кг/м²</td><td>0,91</td><td>1,06</td><td>0,88</td></tr></table>	Температура, °C	14	16	22	Урожайность, кг/м²	0,91	1,06	0,88
Температура, °C	14	16	22						
Урожайность, кг/м²	0,91	1,06	0,88						
5.	Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершённый сверху полушаром. При каких линейных размерах это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если его объем равен V ?								
6.	<p>Предположим, что эпидемия распространяется среди населения по квадратичному закону. Статистика числа заболевших приведена в таблице. Найдите скорость изменения числа заболевших и в какое время эпидемия пойдет на спад.</p> <table><tr><td>Время, недели</td><td>0</td><td>5</td><td>10</td></tr><tr><td>Число заболевших</td><td>0</td><td>5250</td><td>9000</td></tr></table>	Время, недели	0	5	10	Число заболевших	0	5250	9000
Время, недели	0	5	10						
Число заболевших	0	5250	9000						
7.	Три пункта A , B и C расположены не на одной прямой; $\angle ABC = 60^\circ$. Из точки A выходит автомобиль, одновременно из точки B – поезд. Автомобиль движется по направлению к B со скоростью 80 км/ч, поезд – по направлению к C со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = 200$ км?								
8.	От канала шириной 2 м под прямым углом отходит канал шириной 4 м. Стенки каналов прямолинейные. Найдите наибольшую длину бревна l , которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.								

Задание 3. Исследование функции

Даны функции $f(x)$ и $g(x)$. Проведите поочерёдно их полные исследования:

- 1) Найдите область определения функции.
- 2) Проверьте, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и укажите, как эти свойства влияют на вид графика функции.
- 3) Исследуйте функцию на нулевые значения и найдите промежутки ее знакопостоянства.
- 4) Исследуйте функцию с помощью первой производной: найдите интервалы монотонности и экстремумы функции.
- 5) Исследуйте функцию с помощью второй производной: найдите интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции.
- 6) Проверьте наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.
- 7) Найдите точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найдите значения функции в некоторых дополнительных точках.
- 8) Постройте эскиз графика на основе проделанного исследования (от руки на листе бумаги – скан листа бумаги в хорошем качестве нужно вставить в отчёт). Отметьте на графике все результаты исследования: формулу функции, асимптоты и их уравнения, экстремумы и точки экстремума, перегибы и точки перегиба, точки пересечения графика с координатными осями.

№ команды	$f(x)$	$g(x)$
1.	$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$	$g(x) = 5x \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$
2.	$f(x) = \frac{4x^3}{(1-2x)^2}$	$g(x) = 2x - \sin \frac{x}{2}$
3.	$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$	$g(x) = \sqrt[3]{1-\cos x}$
4.	$f(x) = \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^3$	$g(x) = \ln(\sin x) + \sin x$
5.	$f(x) = \frac{(x^2-5)x}{5-3x^2}$	$g(x) = \sqrt[3]{(x+1)(x-3)^2}$
6.	$f(x) = \frac{2x^3-3x+1}{x^3}$	$g(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$
7.	$f(x) = \frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$	$g(x) = \frac{(x+2)^{2/3}}{x-1}$
8.	$f(x) = \frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}$	$g(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}\cos x}$