МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Расчётно-графическая работа. Математический анализ № 1

по теме «Предел»

Вариант №2

Выполнила группа №2:
Студенты: Темешев Тимур,
Колмаков Дмитрий,
Щербаков Святослав,
Динь-Ань Зыонг, Собитов
Анвархон, Константинов
Никита
Преподаватель:
Селеменчук Антон Сергеевич

Санкт-Петербург, 2022

Задание 1. Метод математической индукции

Пользуясь методом математической индукции, докажите, что при любом $n \in$ N:

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

План:

1) Ознакомьтесь с методом математической индукции. Например, в задачнике:
Кудрявцев Л.Д. и др. «Сборник задач по математическому анализу» Том 1 (2003).
2) Проверьте утверждение для номеров $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ (база индукции).
3) Предположите, что утверждение верно (индукционное предположение).
4) Покажите, что из справедливости индукционного предположения для номера n следует
справедливость этого утверждения для номера $n + 1$ (шаг индукции).
5) Сделайте вывод.

Решение

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

1.Проверьте утверждение для номеров $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ (база индукции).

1) n=1 $(2*1-1)^2 = \frac{1*(4*1^2-1)}{3} \rightarrow 1 = 1$ Утверждение верно!
2) n=2 $(2*1-1)^2 + (2*2-1)^2 = \frac{2(4*2^2-1)}{3} \rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \rightarrow 10 = = 10$ Утверждение верно!
3) n=3 $(2*1-1)^2 + (2*2-1)^2 + (2*3-1)^2 = \frac{3(4*3^2-1)}{3} \rightarrow 1^2 + 3^2 + +5^2 = 35 \rightarrow 1 + 9 + 25 = 35 \rightarrow 35 = 35$ Утверждение верно!

2.Предположим, что утверждение верно для любого произвольного значения n, $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, тогда оно и верно для элемента n+1. Докажем это.

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 = \frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}$$

т.к выражение $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, мы можем совершить замену.

$$\frac{n(4n^2-1)}{3} + (2(n+1)-1)^2 = \frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}$$

$$\frac{4n^3 - n}{3} + (2n + 2 - 1)^2 = \frac{(n + 1)(4(n^2 + 2n + 1) - 1)}{3}$$

$$\frac{4n^3 - n}{3} + 4n^2 + 4n + 1 = \frac{(n + 1)(4n^2 + 8n + 3)}{3}$$

$$\frac{4n^3 - n}{3} + 4n^2 + 4n + 1 = \frac{4n^3 + 8n^2 + 3n + 4n^2 + 8n + 3}{3}$$

$$\frac{4n^3 - n}{3} + 4n^2 + 4n + 1 = \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{3}$$

Умножаем все на 3:

$$4n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3 = 4n^3 + 12n^2 + 11n + 3$$

$$-n + 12n = 11n$$

$$11n = 11n$$

Утверждение верно!

3. Вывод. Математическая индукция лежит в основе одного из самых распространенных методов математических доказательств. С его помощью можно доказать большую часть формул с натуральными числами n.

Задание 2. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности

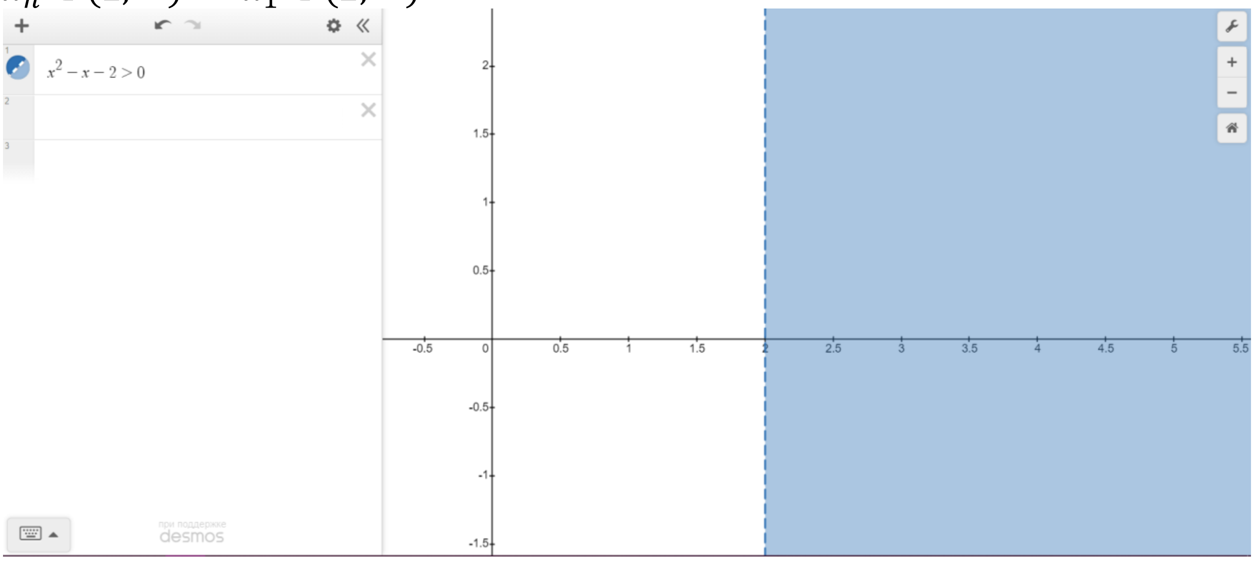
Вещественная последовательность задана рекуррентно: $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ где x ∈ R. Исследуйте её предел при n → ∞ в зависимости от значения x_1.
План:
1) Предположите, что предел существует, и найдите его. Доказательство существования
предела будет проведено в п. 6).
2) Какими могут быть значения x_1? Укажите множество возможных значений x_1. Докажите ваш ответ аналитически.
3) При каком значении x_1 последовательность является стационарной? Докажите это аналитически.
4) Познакомьтесь с теоремой Вейерштрасса об ограниченной монотонной последовательности и запишите её формулировку (например, в учебнике: Зорич В.А. "Математический анализ" Том 1 (2019): глава III, п. 3. "Вопросы существования
предела").
5) Выделите характерные случаи для значений x_1 (с точки зрения монотонности) и проиллюстрируйте их графиками последовательности.
6) Докажите аналитически ограниченность и монотонность последовательности для каждого характерного случая. Сделайте заключение о существовании предела по теореме Вейерштрасса.

Решение

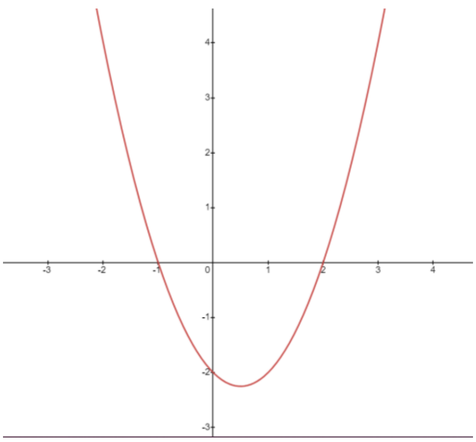
1)Предположим, что предел существует

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \text{ пусть } \lim_{n\to\infty} x_n = A\ ,\ x_n > 0 \to A > 0$$

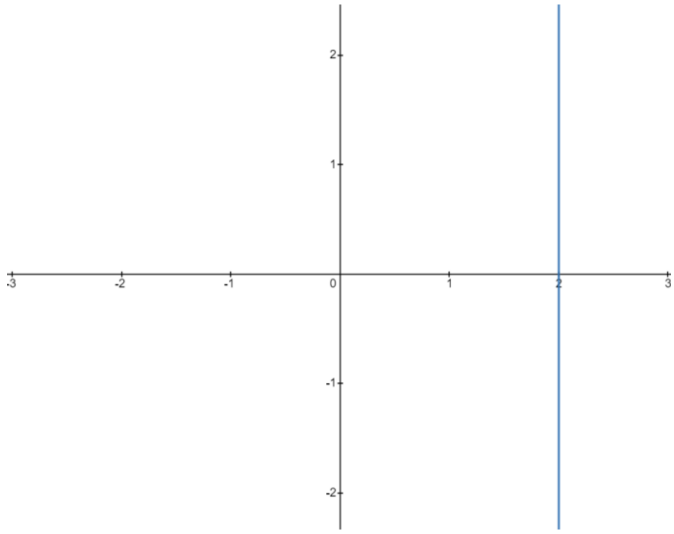
$A = \sqrt{2 + A}$, возведем в степень и посмотрим, какие корни подходят
$A^2 - A - 2 = 0$ Далее решаем квадратное уравнение
D = 3 Дискриминант равен 3, т.е. корни этого уравнения будут 2 и -1
$A_1 = 2 \quad A_2 = -1$
Корень A_2 не подходит, по неравенству $x_n > 0 \to A > 0$
2) Т.к $x_2 = \sqrt{2 + x_1}$, то
$2 + x_1 \geq 0$
$x_1 \geq -2$
$x_1 \in [-2; \infty)$
3)Определить: $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$
Предположим
$x_n = x_{n+1}$
$x_n = \sqrt{2 + x_n}$
$x_n^2 - x_n - 2 = 0$

$D = 3$
Корень $x_n = -1$ не подходит т.к. x_n и т.д. не могут быть отрицательными
$x_n = -1$
Корень $x_n = 2$ подходит
$x_n = 2$
Последовательность стационарная $x_1 = 2\ x_2 = 2\ x_3 = 2 \ldots x_n = 2$
4) –
5)Рассмотрим
$\begin{cases} x_n \geq 0 \\ x_n - x_{n+1} > 0 \end{cases}$
$x_n > \sqrt{2 + x_n}$ убывает и ограничена снизу
$x_n^2 - x_n - 2 > 0$
$(x_n + 1)(x_n - 2) > 0$
$x_n \in (2, \infty) \ \rightarrow x_1 \in (2, \infty)$


Рассмотрим
$\begin{cases} x_n \geq 0 \\ x_n - x_{n+1} < 0 \end{cases}$
$x_n < x_{n+1}$ Возрастает и ограничена сверху
$(x_n + 1)(x_n - 2) < 0$
$x_n \in [0; 2)$ и $x_1 \in [-2{,}2)$



Рассмотрим
$x_n = x_{n+1}$ - последовательность стационарна
$x_n^2 - x_n - 2 = 0$
$D = 3$
Корень $x_n = -1$ не подходит т.к. x_n и т.д. не могут быть отрицательными
$x_n = -1$
Корень $x_n = 2$ подходит
$x_n = 2$



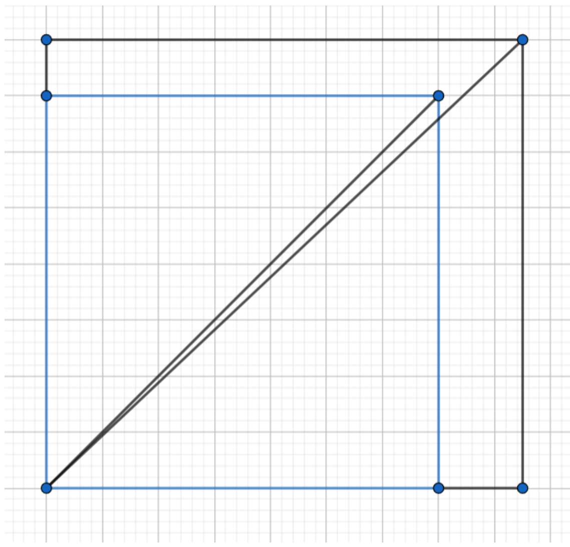
6) По теореме Вейерштрасса
При $x_1 \in [-2;\ 2)$ последовательность возрастает и ограничена сверху → А=2
При $x_1 \in (2;\ \infty)$ последовательность убывает и ограничена снизу → А=2
При $x_1 = 2$ последовательность стационарна.

Задание 3. Сравнение бесконечно малых

Какой порядок будет иметь приращение площади квадрата по отношению к бесконечно малому приращению его диагонали?
План:
1) Сделайте геометрическую иллюстрацию к задаче.
2) Составьте математическую модель: введите обозначения, составьте формулу.
3) Решите задачу аналитически.
4) Запишите ответ и проиллюстрируйте его геометрически.

Решение

1) Сделайте геометрическую иллюстрацию к задаче



2) Составьте математическую модель: введите обозначения, составьте формулу.

Площадь квадрата через диагональ - $S_{\blacksquare} = \frac{1}{2}d^2$, где d-диагональ квадрата

Приращенная площадь квадрата - $S = \frac{1}{2}(d + d_{\Delta})^2$,

Формула диагонали - $d_{\blacksquare} = \sqrt{2}a$, где a – сторона квадрата

3) Решите задачу аналитически.

$$\lim_{d_{\blacksquare}\to 0}\frac{S-S_{\blacksquare}}{d_{\blacksquare}} = \lim_{d_{\blacksquare}\to 0}\frac{\frac{1}{2}(d+d_{\Delta})^2-\frac{1}{2}d^2}{d_{\blacksquare}} = \lim_{d_{\blacksquare}\to 0}\frac{\frac{1}{2}(d^2+2dd_{\blacksquare}+d_{\blacksquare}^2)-\frac{1}{2}d^2}{d_{\blacksquare}} = \lim_{d_{\blacksquare}\to 0}\frac{\frac{1}{2}d^2+dd_{\blacksquare}+\frac{1}{2}d_{\blacksquare}^2-\frac{1}{2}d^2}{d_{\blacksquare}}$$

$$\lim_{d_{\blacksquare}\to 0}\frac{dd_{\blacksquare}+\frac{1}{2}d_{\blacksquare}^2}{d_{\blacksquare}} = \lim_{d_{\blacksquare}\to 0}\frac{d_n(d+\frac{1}{2}d_{\blacksquare})}{d_{\blacksquare}} = \lim_{d_{\blacksquare}\to 0} = (d+\frac{1}{2}d_{\blacksquare}) = d$$

d-константа, не бесконечная и в общем случае не равна нулю
Значит приращение площади квадрата и приращение его диагонали одного порядка малости. Либо можно сказать, что приращение площади бесконечно малое 1-го порядка относительно приращения диагонали.

Задание 4. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности

В круг радиуса r вписан квадрат, в квадрат вписан круг и так n раз. Найдите предел суммы площадей всех кругов и предел суммы площадей всех квадратов при $n \to \infty$.

План:

1) Сделайте геометрическую иллюстрацию к задаче.

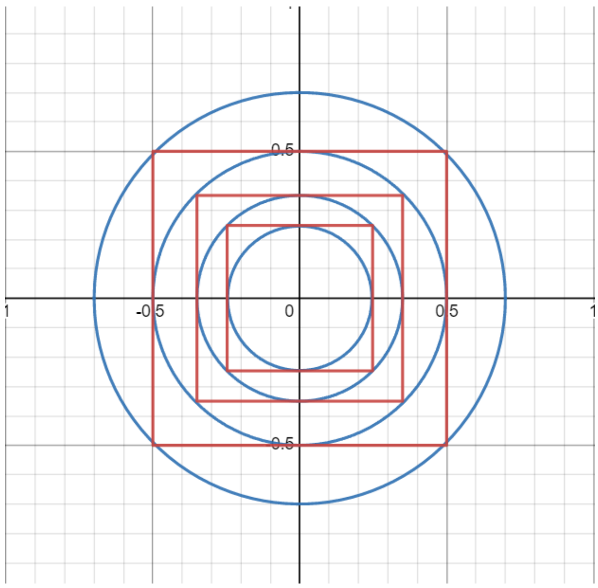
2) Составьте математическую модель: введите обозначения, составьте формулу.

3) Решите задачу аналитически.

4) Запишите ответ и проиллюстрируйте его геометрически.

Решение

1) Сделайте геометрическую иллюстрацию к задаче.



2) Составьте математическую модель: введите обозначения, составьте формулу.

Площадь первого круга равна

$S_{1\text{кр}} = \pi R^2$

Площадь первого квадрата равна при D-диагональ квадрата

D=2R $S_{1\text{кв}} = \frac{D^2}{2} = 2R^2$

Радиус второго круга будет равен $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

Площадь второго круга $S_{2\text{кр}} = \frac{\pi R^2}{2}$

Площадь второго квадрата $S_{2\text{кв}} = R^2$

И так далее

Сумма площадей всех кругов:

$$S_{n\ \text{кругов}} = \pi * R^2 + \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{4} + \frac{\pi R^2}{8} + \ldots + \frac{\pi R^2}{n} = \pi R^2 (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n})$$

Сумма площадей всех квадратов:

$$S_{n\ \text{квадратов}} = 2R^2 + R^2 + \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{8} + \ldots + \frac{R^2}{n} = R^2 (2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Известно, что предел суммы ряда $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n})$ при $n \to \infty$ равен 1, тогда предел общей суммы кругов:

$$\lim_{n\to\infty} S_{\text{кр}} = \pi R^2 (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n}) = \pi R^2 (1 + 1) = 2\pi R^2$$

И для квадратов

$$\lim_{n\to\infty} S_{\text{кв}} = R^2 (2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n}) = R^2 (3 + 1) = 4R^2$$

Задание 5. Исследование сходимости

План:		
1)	Вычислите предел последовательности при $n \to \infty$.	Вычислите предел функции при $x \to \infty$.
2)	Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n.	Постройте график функции в зависимости от x.
3)	Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) последовательности:	Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) функции на бесконечности:
3а)	вспомните определение сходимости (расходимости) последовательности;	вспомните определение сходимости (расходимости) функции на бесконечности;
3б)	выберите три различных положительных числа $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$;	
3в)	для каждого такого числа изобразите на графике ε-окрестность («ε-трубу»)	
3г)	и найдите на графике номер n_0 , после которого все члены последовательности попадают в ε-окрестность, или установите, что такого номера нет.	и найдите на графике δ-окрестность переменных x, в которой все значения функции $f(x)$ попадают в ε-окрестность, или установите, что такой окрестности нет.

2. $a_n = \dfrac{8^{n+2} + (-7)^{n-1}}{5 \cdot 8^n + (-7)^n}$ $\qquad f(x) = \left(\dfrac{1-x^2}{2-7x^2}\right)^{x-13}$

1а) Вычислите предел последовательности
при n → ∞.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+2} + (-7)^{n-1}}{5 * 8^n + (-7)^n} = \frac{64 * 8^n + \frac{(-7)^n}{(-7)}}{5 * 8^n + (-7)^n}$$

$$\frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} \frac{448 * 8^n + (-7)^n}{5 * 8^n + (-7)^n} = \frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} \frac{448 * \frac{8^n}{8^n} + (-\frac{7}{8})^n}{5 * \frac{8^n}{8^n} + (-\frac{7}{8})^n} = \frac{1}{7} * \frac{448 + 0}{5 + 0} = \frac{64}{5}$$

$$\approx 12{,}8$$

1б) Вычислите предел последовательности
при x → ∞.

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1 - x^2}{2 - 7x^2})^{x-13}$$

Вычислим пределы основания и степени отдельно

Предел основания

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^2}{2 - 7x^2} = \frac{x^2(\frac{1}{x^2} - 1)}{x^2(\frac{2}{x^2} - 7)} = \frac{(\frac{1}{x^2} - 1)}{(\frac{2}{x^2} - 7)} = \frac{1}{7}$$

Предел степени

$$\lim_{n\to\infty}(x-13)=\infty$$

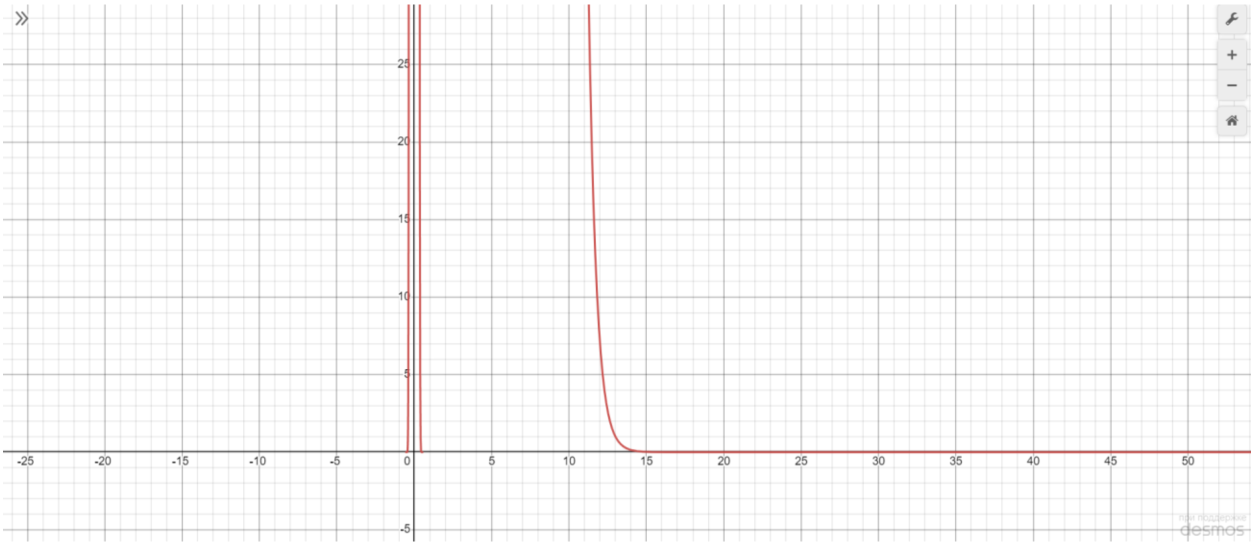
Поскольку выражение $a^{\infty}, 0<a<1$ определено как 0, то предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-x^2}{2-7x^2}\right)^{x-13}=0$$

2а)Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n.

-

2б) Постройте график функции в зависимости от x.



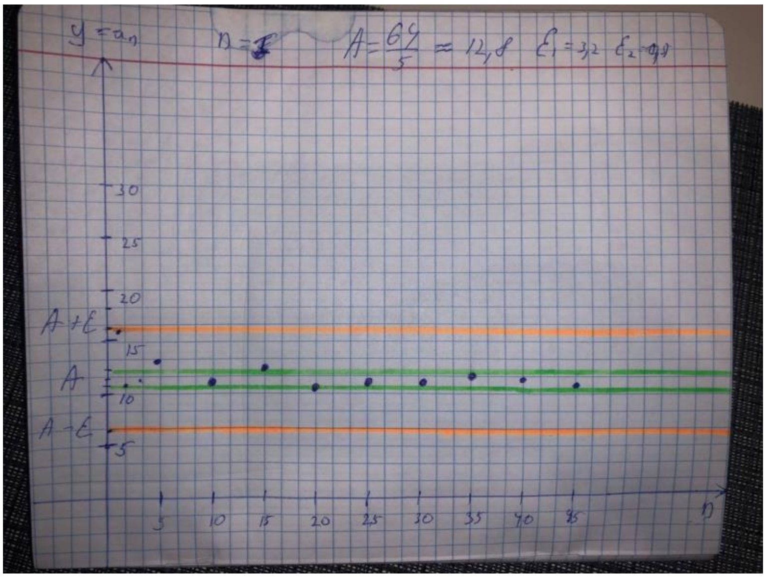
3а) Вспомните определение сходимости(расходимости) последовательности

Сходимость означает существование
конечного предела у числовой последовательности. Соответственно,
расходимость
— отсутствие конечного предела.
∀ε > 0 ∃N(ε) ∈ N : ∀n > N ⇒ $|x_n$−A| < ε

3б) Вспомните определение сходимости(расходимости) функции на бесконечности.

Сходимость означает существование конечного предела у функции.
Соответственно, расходимость — отсутствие конечного предела.
∀ε > 0 ∃x_0 ∈ R : ∀x > x0 ⇒ |f(x) − A| < ε

4а) Выберите три различных положительный числа $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$
Для каждого такого числа изобразите на графике $\varepsilon -$ окрестность
Выберем 3 числа ε1 > ε2 > ε3
ε1 = 0.1
ε2 = 0.02
ε3 = 0.01



4б) Выберите три различных положительный числа $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$
Для каждого такого числа изобразите на графике $\varepsilon -$ окрестность

Выберем 3 числа ε1 > ε2 > ε3
ε1 = 1.5
ε2 = 2.5
ε3 = 5