1. Комплексные числа. Определение и операции над ними. Алгебраическая форма комплексного числа.

А) **Комплексным числом** z называется выражение вида z = x+iy, где x, y – действительные числа, а i – это мнимая единица, где i2 = -1.

Б) **Операции** над комплексными числами: **сложение**(КА), **вычитание**, **произведение**(КАД), **деление**

Возведение в степень и извлечение из корня – частные случаи произведения и деления.



**Частное** находится с помощью умножения **числителя и знаменателя**(!=0) на **сопряженное** знаменателя

В) Запись комплексного числа z в виде **z=x+iy**, x, y принадлежат R, называется **алгебраической формой** комплексного числа, где X – действительная часть и указывается как Re Z; Y – мнимая часть, указывается как Im Z

Два комплексных числа отличающихся только знаками мнимой части называются **сопряженными**.

1. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Формулы Муавра.

А) Запись комплексного числа z в виде **z=r(cosu+i\*sinu)** называется **тригонометрической формой** комплексного числа, где **r**-**модуль**, **u**(фи)-**угол**. Получение угла: tgu = y/x. Получение модуля: r=sqrt(x2+y2)

Б) Используя **формулу Эйлера**(eiu=cosu+i\*sinu), мы можем получить **показательную форму** комплексного числа **z=r\*eiu**.

В) Если перемножить комплексные числа в тригонометрической форме, то мы получим 

Следовательно, мы можем обобщить для перемножения одинаковых комплексных чисел

Это и есть **формула Муавра**

1. Арифметический вектор. Линейные операции над арифметическими векторами. Определение линейной зависимости и независимости векторов.

А) Арифметическим вектором называется совокупность упорядоченных чисел.

Б) Линейные операции(КАД) над арифметическими векторами: **сложение векторов**, **вычитание векторов**, а также **умножение** их **на число**.

В) **Система векторов** а1, …, аn называется **линейно-зависимой**, если существуют числа л1, …, лn, не все равные нулю и такие, что л1а1+л2а2+…+лnаn**=0**; Следовательно, когда комбинация тривиальна(т.е. все лi=0) и равна нулю, то она называется **линейно-независимой.**

**Линейной комбинацией** векторов а1, … , an с коэф. Л(лямбда) называется вектор b вида:

b=л1а1+л2а2+…+лnan : вектор b разлагается по векторам a1, …, an

1. Матрицы. Основные операции над матрицами.

А) **Матрицей** называется **прямоугольная таблица** чисел, содержащая m строк одинаковой длины.

Б) Над матрицей можно провести такие операции как: **проверка на равенство** матриц, **сложение**(КА), **умножение** их **на число**(АД), **перемножение** матриц(эл. Ij новой матрицы – складываются элементы iной строки первого перемноженные с элементами jной второго).

Операции между матрицами производится с помощью элементов одинаковых индексов.

1. Определитель квадратной матрицы. Свойства определителя.

А) **Определителем** квадратной матрицы n-порядка называется **число**, равное алгебраической сумме n! членов, каждый из которых является произведением n элементов, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца с определенными знаками.

Б) Свойства определителя:

1. Определитель **не меняет знак** при смене **строки с столбцом** местами.
2. Определитель равен сумме элементов одного ряда на их алгебраическое дополнение.
3. При перестановке двух **строк** определитель меняет знак **на противоположный**.
4. Определитель с двумя пропорциональными параллельными **рядами** равен **нулю**.
5. Если все **элементы** одного **ряда** умножить на число, то и **весь** определитель умножится на это число.
6. Определитель, у которого элементы одного ряда представляют сумму двух слагаемых, **равен** сумме двух определителей, в одной из которой элементы первых слагаемых, а во второй – вторых.
7. Определитель **не изменится**, если к элементам одного ряда **прибавить** элементы другого, параллельного ему, ряда умноженные на общий множитель k.
8. Сумма произведений алгебраических дополнений одного ряда **на числа** q1, q2, q3, равна определителю, полученной из данной, заменой **элементов** этого ряда на числа q1, q2, q3.
9. **Сумма** произведений элементов **одной** строки на алгебраические дополнения **другой** строки равно **0**.
10. Теорема о вычислении определителя. Теорема аннулирования.

А) Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов одного ряда на их алгебраические дополнения.

Б) **Сумма** произведений элементов **одной** строки на алгебраические дополнения **другой** строки равно **0**.

1. Обратная матрица. Единственность существования. Различные способы вычисления.

А) Матрица A-1 называется **обратной** по отношению к квадратной матрице А, если A\*A-1=E

Для того, чтобы у матрицы **существовала** обратная матрица, необходимо и достаточно, чтобы она была **невырожденная**.

Б) Если у некоторой матрицы существует **обратная** матрица, то **она** только **одна**.

В) Способы вычисления:

1 Вариант:

1) Вычислить определитель (если detA=0, матрица вырожденная => нет обратной матрицы)

2) Составить матрицу из алгебраических дополнений элементов матрицы

3) Транспонировать полученную матрицу, получив **присоединенную** A+

4) Получить обратную матрицу: А-1= A+/detA

2 Вариант:

1) **Составить** расширенную матрицу, где с одной стороны сама матрица, с другой единичная.

2) При помощи элементарных преобразований довести до вида, где с одной стороны получится единичная матрица.

3) Получить обратную матрицу **из второй** части расширенной матрицы.

**Невырожденная** матрица – квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля.

1. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Метод Гаусса. Способы нахождения ранга.

А) Наибольший порядок не равного нулю **минора** матрицы А называется **рангом матрицы** А

Б) К элементарным преобразованиям матриц относятся

1) **Перемена мест** двух параллельных рядов

2) **Умножения** ряда **на** произвольное **число**, отличное от нуля

3) **Прибавление** к ряду, параллельного ряда, умноженного на k

При выполнении этих операций мы получим эквивалентные матрицы (A ~ B)

В) **Метод Гаусса** заключается в том, чтобы с помощью элементарных преобразований привести систему уравнений к **ступенчатому** виду. Затем, после того как мы получили значение последнего элемента, производим **обратный ход** метода Гаусса и узнаем значения оставшихся неизвестных.

Г) Способы нахождения ранга:

Метод **окаймляющих** миноров

1) Находим не равные нулю миноры второго порядка. (Если не нашли -> rA = 1)

2) Составляем окаймляющие миноры, которые содержат ненулевые миноры второго порядка (если они равны нулю, то rA = 2)

n) Составляем до тех пор, пока не найдем максимальный порядок не равного нулю минора

Способ **элементарных** преобразований: составляем **эквивалентные** матрицы, пытаясь получить единичную матрицу.

Мы можем: **умножать** на числа, **прибавлять**, **менять** ряды, **удалять** нулевые/пропорцион. ряды

**Минором** матрицы А называется определитель, полученный **удалением** из матрицы пересечения строки и столбца элемента

1. Теорема о базисном миноре.

Базисные строки/столбцы **линейно-независимы**. Любая строка/столбец матрицы А является линейной комбинацией базисных строк/столбцов.

**Док-ство**: **пусть** базисные строки линейно-зависимы, тогда одна из строк является линейной **комбинацией** остальных. Возникает **противоречие**, т.к. тогда определитель будет равен **нулю**.

Следовательно, Базисные строки/столбцы линейно-независимы. При разложении определителя матрицы r+1 порядка, a1A1+a2A2+…+a(r+1)A(r+1) = 0 мы с уверенностью можем сказать, что мы можем построить линейную комбинацию, т.к. Алгебраическое дополнение базисного минора не будет равен нулю.

1. Системы линейных уравнений. Решение невырожденных систем. Теорема Крамера.

А) Система **линейных** уравнений – это объединение из **n** линейных уравнений, каждое из которых содержит **k** переменных. Также ее легко можно представить в **матричной** форме **A\*X=B**.

Б) Если определитель системы != 0, то система является **невырожденной**, тогда можно найти решение, с построив форму A\*X=B и умножив обе части на **A-1**.

В) Если определитель матрицы != 0, то системы линейных уравнений имеют **единственное** решение, которое можно получить по формуле xi=detAi/detA

1. Теорема Кронекера-Капелли о существовании решений системы линейных уравнений.

Для того, чтобы **система** линейных уравнений была **совместна**(имела решение), **необходимо и достаточно** чтобы **ранг** расширенной матрицы Аr был **равен** рангу матрицы А

1. Структура общего решения системы однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений.

А) **Однородным** СЛАУ называют ту, где свободные члены равны нулю. **A\*X=0**



Для того, чтобы система однородных уравнений имела **ненулевые** решения, необходимо и достаточно, чтобы **ранг** r на основной матрице был **меньше** кол-ства **неизвестных** системы.

Тогда мы можем построить **фундаментальную систему решений**.

Б) Если мы имеем **rang < n**-неизвестных, тогда строки от **r+1** до **m** могут выражаться через комбинации базисных строк => они нулевые, отбросим их.



Тогда X1,X2,…,Xr назовем базисными, а Xr+1,…,Xn – свободными неизвестными, которые мы можем задавать. Зададим n-r наборов, где Xr+1,…,Xn поочередно равны единице. Выведем их:



Это и есть **фундаментальная система решений**.

Для проверки на фундаментальность остается проверить на линейную независимость – она линейно-независима, т.к. рассматривая от r+1 до m строк, узнаем, что ранг ее n-r

1. Структура общего решения системы неоднородных уравнений.

1) Если, допустим, **Y** является решением **неоднородной** системы, а **Х** – решением **однородной** системы, то **Z = Y+X** – решение неоднородной системы линейных уравнений.

**Докажем**: AY=B и AX=0, найдем AY+AX=A(Y+X)=B+0=A\*Z, то **A\*Z=B.** Тогда Z=Y+X является решением неоднородной системы.

2) Если Y и Z решения **неоднородной** системы, то **X=Y-Z** является решением **однородной** системы.

3) Любое решение Z неоднородной системы можно представить в виде Z=Y+X, где X-решение однородной системы.

4) Пусть X1,X2,…,Xn-r – фундаментальная система решений однородной системы, а Y – **частное** решение неоднородной системы, тогда все множество решений неоднородной системы можно представить в виде: **Z=Y+c1X1+…+cnXn**

1. Геометрический вектор. Линейные операции над геометрическими векторами.

А) Геометрический вектор – это направленный отрезок. (a, MP-M(начало)P(конец вектора))

Б) Над геометрическими векторами возможны такие линейные операции как: **сложение**(п. параллелограмма), **разность**(п. треугольника), **умножение** на число л(растягивается в **л** раз).

1. Линейная независимость векторов. Базис. Прямоугольная система координат.

А) Векторы a1, a2, …, an называются **линейно-зависимыми**, если существуют числа c1, c2,…,cn из которых **хотя бы** одно **не равно** нулю и вся линейная комбинация векторов равна нулю.

Если **можно** один вектор представить **через** комбинацию других векторов.

Следовательно векторы будут называться **линейно-независимыми**, если числа c1=c2=…=cn

Если ни один из этих векторов **нельзя** представить в виде линейной комбинации остальных.

Б) Совокупность любых двух линейно-независимых векторов на одной **плоскости** можно назвать **базисом этой плоскость**.

Совокупность любых трех линейно-независимых векторов в одном **пространстве** называется **базисом в пространстве**.

В) Постоим **прямоугольную систему координат.** Из всех возможных базисов в пространстве выберем такой, чтобы все векторы, **входящие** в этот базис, были попарно ортогональны. Далее каждый вектор **разделим** на ее длину, получив их орты. Такой базис будет называться **ортонормированным**.

Три некомпланарных вектора приложенных к одной точке будут называться **тройкой** векторов**.**

Тройка будет называться **правой**, если вектора a,b,c при наблюдении будут располагаться против часовой стрелки.

Возьмем **правую тройку** базисных векторов a,b,c объединив их в точке О и построим оси Ох, Oy, Oz, направления которых совпадают с базисными векторами. Получим **прямоугольную систему координат Оxyz**.Орты принято обозначать как i, j, k.

1. Скалярное произведение векторов. Определение. Свойства.

**Скалярное произведение** двух ненулевых векторов **а** и **b** называется **число**, равное произведению **длин** этих векторов **на** **косинус** угла между ними: **a\*b=|a|\*|b|\*cos(alpha)**

Свойства:

А) Скалярное произведение можно определить через проекцию: **a\*b=|a|\*прab = |b|\*прba**

Б) К(угол)А(л **умножается только на одно**)Д(\* и +)

1. Векторное произведение векторов. Определение. Свойства.

**Векторным произведением** векторов **а** и **b** называется **вектор**, который удовлетворяет 3 критериям

1) |c|=|a||b|sin(a,b) – **длина** вектора **равна** численно **площади** параллелограмма построенного на этих векторах**.**

2) Вектор с **перпендикулярен плоскости**, в которой лежат векторы a и b.

3) **Тройка** a, b, c – **правая.**

Свойства: К(**меняет знак на отрицательный**)А(**смешанное произведение** на л)Д(**x** и **+**)

1. Смешанное произведение векторов. Определение. Свойства.

**Смешанным произведением** векторов а, b, c называется скалярное произведение вектора а на векторное произведение вектора b на c, т.е. **a\*(b x c)**

Свойства:

А) Смешанное произведение не меняется при **циклической перестановке.**

Б) При перестановке **двух соседних** векторов меняется знак на **противоположный**

В) Мы можем **менять местами** знаки **векторного** умножения на **скалярное** умножение. (из Коммутативн.)

Г) Смешанное уравнение можно представить в виде **определителя матрицы**, где в строках матрицы будут координаты одного, второго и третьего векторов.

1. Прямая на плоскости. Способы задания. Критерии взаимного расположения. Формула расстояния от точки до прямой.

А) Прямую на плоскости можно задать по **каноническому или параметрическому уравнению** через точку и направляющий вектор или через две точки, а также построить в **векторной** форме **Ax+By+C=0**.

Б) Мы можем найти угол между двумя прямыми **cos(alpha)=n1\*n2/|n1||n2|**

Прямые параллельны если A1/A2=B1/B2

Прямые перпендикулярны, если a\*b=0

В) Формула расстояния от точки до прямой: **p=|Ax0+By0+C|/sqrt(A2+B2)**

1. Плоскость в пространстве. Способы задания. Критерии взаимного расположения. Формула расстояния от точки до плоскости.

А) Плоскость в пространстве можно задать через **три точки(**компланарны, применяем смешанное произведение и создаем определитель матрицы**)**, через **данную точку** перпендикулярноданному **вектору n(A, B, C).** Мы можем представить плоскость в виде **уравнения плоскости в векторной форме** (r-r0)\*n=0, а выражая через координаты получим **A(x-x0)+B(y-y0)+C(z-z0)=0**

Б) Рассматривая **взаимное расположение** плоскостей мы можем найти **угол** между ними:

**Cos(фи)=A1A1+B1B2+C1C2/sqrt(A12+…)\*sqrt(…)**

Плоскости могут быть **параллельны,** если A1/A2=B1/B2=C1/C2

Плоскости **перпендикулярны**, если n1\*n2=0

В) Формула расстояния от точки до прямой: **d = |Ax0+By0+Cz0+D|/sqrt(A2+…)**

1. Прямая в пространстве. Взаимное расположение. Критерий скрещиваемости.

А) Прямую в пространстве можно представить в **векторном уравнении прямой** (r=r0+лS, через (.) и напр. Вектор(S), где r0-радиус вектор (.)), в **параметрическом и каноническом уравнениях** через точку и напр. Вектор, также можно представить уравнение прямой **через 2 точки**, тогда каноническое уравнение будет иметь вид x-x0/x1-x0=y-y0/y1-y0

Б) **Углом между прямой и плоскостью** называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость

Для ее получения высчитаем по формуле sin(фи)=|n\*S|/|n||S|

Прямая параллельная плоскости, если **Скалярное произведение n\*S=0**.

Прямая перпендикулярна плоскости, если **коэффициенты** A/m=B/n=C/p

В) Если прямая **а** принадлежит плоскости альфа, а прямая **b** пересекает плоскость альфа в некоторой точке, не принадлежащей **а**, то прямые **а** и **b** скрещивающиеся.

1. Эллипс. Определение. Вывод канонического уравнения.

Эллипсом называется **множество всех точек** плоскости, **сумма** расстояний которых **до фокусов постоянная**(равная 2а)

Получим **|r1|+|r2|=2a**, взяв точку на эллипсе M(x,y) => sqrt((x+c)2+y2) + sqrt((x-c)2+y2) = 2a



1. Гипербола. Определение. Вывод канонического уравнения.

Гиперболой называется **множество всех точек** плоскости, **модуль разности** расстояний от которых до фокусов **постоянная**(равная 2а)

**||r1|-|r2||=2a**, взяв точку на гиперболе М(х, у) sqrt((x+c)2+y2) - sqrt((x-c)2+y2) = 2a; 

1. Парабола. Определение. Вывод канонического уравнения.

Параболой называется **множество точек** на плоскости, **равноудаленных от данной прямой**(директрисы параболы) и от данной точки(фокуса(p/2;0)).

Т.к. расстояние от директрисы до точки и от фокуса до точки одинаково, то **|NM|=|FM|,** откуда следует **y2=2px**

1. Общие свойства кривых второго порядка (задачи «о приложениях», оптические свойства и др.)

А) Кривой второго порядка на плоскости называется линия, которая в декартовой системе координат задается формулой: **Ax2+Bxy+Cy2+Dx+Ey+F=0**. У каждой кривой второго порядка мы можем получить эксцентриситет E=c/a

Б) y2 куб **приложить** на отрезок а; **y2=ax – парабола**

y2 куб **избыток** на отрезок а; **y2=(a+x)x – гипербола**

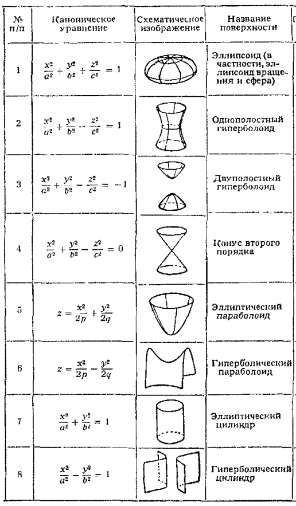
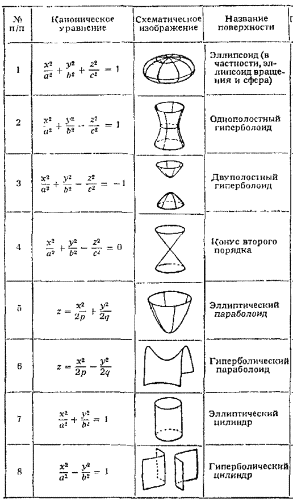
y2 куб **недостаток** на отрезок а; **y2=(a-x)x – эллипс**

В) Оптические свойства (у эллипса **от фокуса к фокусу** отражается, у гиперболы выпущенная из одного **фокуса** мнимая прямая попадает на другой фокус, **парабола** все линии отраженные от параболы будут **параллельны**)

1. Поверхности второго порядка. Уравнения. Основные характеристики. Метод сечений.

А) Поверхности второго порядка задаются уравнением:

**Ax2+By2+Cz2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+J=0**

Б) При отсечении параллельно оси абсцисс, получим эллипс, перпендикулярно – гиперболу, параллельно одной из прямых конуса - парабола