Методы конечных разностей

22 ноября 2023 г.

1 Постановка задачи

Пусть нам требуется решить уравнение движения (или систему уравнений) вида:

$$\frac{dy}{dt} = F(y) \tag{1}$$

С начальным условием:

$$y(0) = y_0$$

Важно! Мы можем записать функцию $F(y)$ как функцию времени:

$$f(t) := F(y(t))$$

Если у нас система уравнений, то она будет выглядеть так:

$$\frac{dy_1}{dt} = F_1(y_1, y_2, \ldots)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = F_2(y_1, y_2, \ldots)$$

$$\ldots$$

По сути вывод численных методов не зависит от конкретного вида уравнения, поэтому мы будем использовать самый простой вид.

Нам требуется найти $y(t)$ в произвольный момент времени $T > 0$.

2 Методы конечных разностей

Вводим сетку по времени (набор дискретных точек):

$$t_k = k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, K \quad \Delta t = \frac{T}{K}, \qquad K \gg 1$$

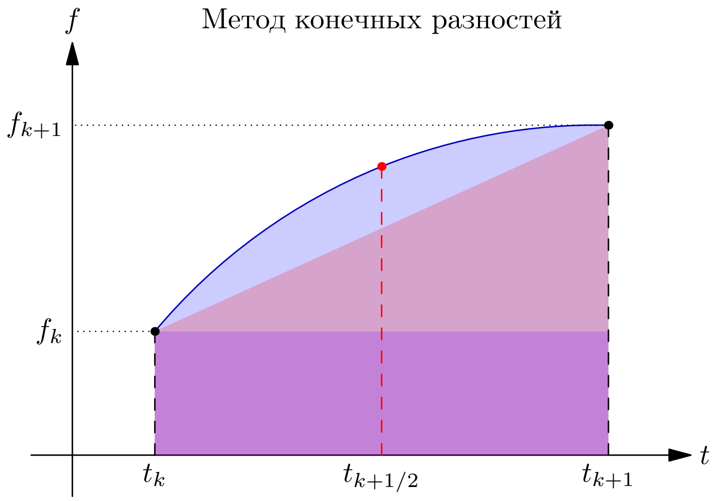

Рис. 1: Схема вывода разных конечно-разностных схем

То есть мы находим конечное множество значений функции:

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_K$$

Вопрос в том, как выразить значение в следующий момент времени из значения в предыдущий момент времени. Начнём с того, что проинтегрируем уравнение (1) от t_k до t_{k+1}:

$$\int_k^{k+1} dt \cdot \frac{dy}{dt} = \int_k^{k+1} dt \cdot F(y)$$

$$y_{k+1} - y_k = \int_k^{k+1} dt \cdot f(t)$$

$$y_{k+1} = y_k + \int_k^{k+1} dt \cdot f(t) \tag{2}$$

Мы получили общее соотношение, позволяющее перейти от точки k к точке $k+1$.
Всё, что нам нужно сделать — это найти какое-то приближение для интеграла в правой части.
Мы знаем значение:

$$f_k = F(y_k)$$

2.1 Схема Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + f_k \Delta t = y_k + F(y_k)\Delta t \tag{3}$$

Это самая простая, но самая неточная схема, потому что ошибка на каждом шаге пропорциональна Δt. Это значит, что метод имеет 1й порядок точности. То есть за K шагов набирается ошибка, примерно пропорциональная T.

2.2 Неявные схемы

Используем точку, которую мы не знаем и получим уравнение (или систему уравнений), которое надо будет решать на каждом шаге.

$$y_{k+1} = y_k + f_k \Delta t + \frac{1}{2}\Delta t \left(f_{k+1} - f_k\right) = y_k + \frac{1}{2}\Delta t \left(f_k + f_{k+1}\right)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}\Delta t \left(F(y_k) + F(y_{k+1})\right) \tag{4}$$

$$y_{k+1} - \frac{1}{2}\Delta t \cdot F(y_{k+1}) = y_k + \frac{1}{2}\Delta t \cdot F(y_k)$$

Чтобы найти y_{k+1}, надо решить уравнение или систему уравнений (4). Этот метод имеет 2й порядок точности, то есть ошибка пропорциональна Δt^2.

2.3 Экстраполяция значения в следующей точке

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + F(y_k)\Delta t$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}\Delta t \left(F(y_k) + F(\tilde{y}_{k+1})\right)$$

Ошибка в данном случае гораздо больше, чем в предыдущем методе, но меньше, чем в схеме Эйлера. И не требуется решать уравнение или систему уравнений на каждом шаге. Это явная схема, состоящая из 2х шагов.

Методы Рунге-Кутты как раз и состоят в экстраполяции значений.

2.4 Схема 4го порядка

В этом методе мы используем ещё более точное приближение для интеграла.

$$y_{k+1} = y_k + \int_k^{k+1} dt \cdot f(t)$$

Формула Симпсона:

$$\int_k^{k+1} dt \cdot f(t) \approx \frac{\Delta t}{6}\left[f_k + 4f_{k+1/2} + f_{k+1}\right] \tag{5}$$

Теперь мы должны экстраполировать значения во второй и 3 точках.

Для улучшения точности метода мы будем использовать разную экстраполяцию для средней точки:

$$\int_k^{k+1} dt \cdot f(t) \approx \frac{\Delta t}{6}\left[f_k + 2\tilde{f}_{k+1/2} + 2f_{k+1/2} + f_{k+1}\right]$$

$$\int_k^{k+1} dt \cdot f(t) \approx \frac{\Delta t}{6}\left[F(y_k) + 2F(\tilde{y}_{k+1/2}) + 2F\left(y_{k+1/2}\right) + F\left(y_{k+1}\right)\right]$$

Введём обозначения для всех этих точек:

$$r_1 = f_k = F(y_k)$$

$$r_2 = \tilde{f}_{k+1/2}$$

$$r_3 = f_{k+1/2}$$

$$r_4 = f_{k+1}$$

Тогда схема Рунге-Кутты 4го порядка выглядит как:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\Delta t}{6}\left[r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4\right] \tag{6}$$

Как экстраполировать эти значения?
Для этого мы воспользуемся формулой Тейлора:

$$y(t_{k+1/2}) \approx y(t_k) + \frac{\Delta t}{2}\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=t_k}$$

Чтобы найти производную, воспользуемся исходным уравнением.

$$\tilde{y}(t_{k+1/2}) \approx y(t_k) + \frac{\Delta t}{2}F(y_k)$$

$$F\left(\tilde{y}_{k+1/2}\right) \approx F\left(y(t_k) + \frac{\Delta t}{2}F(y_k)\right)$$

$$r_2 = F\left(y_k + \frac{\Delta t}{2}r_1\right)$$

Следующее слагаемое мы можем найти, воспользовавшись новым значением производной.

$$y(t_{k+1/2}) \approx y(t_k) + \frac{\Delta t}{2}F(\tilde{y}_{k+1/2})$$

$$r_3 = F\left(y_k + \frac{\Delta t}{2}r_2\right)$$

Наконец, последнее слагаемое мы находим уже из последнего значения производной:

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \Delta t\frac{dy}{dt}\bigg|_{k+1/2}$$

$$r_4 = F\left(y_k + \Delta t \cdot r_3\right)$$

Обобщим результаты:

$$\boxed{\begin{gathered} r_1 = F(y_k) \\ r_2 = F\left(y_k + \frac{\Delta t}{2} r_1\right) \\ r_3 = F\left(y_k + \frac{\Delta t}{2} r_2\right) \\ r_4 = F\left(y_k + \Delta t \cdot r_3\right) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{\Delta t}{6}\left[r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4\right] \end{gathered}}$$

Мы получили полностью рабочий алгоритм нахождения значения в следующей точке.