

Zadanie nr 3 - Splot, filtracja i korelacja sygnałów

Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów

Aneta Wiśniewska, 204029 Hanna Paluszkiewicz, 203962

14.05.2018

1 Cel zadania

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się w praktyce z procesami splotu, filtracji i korelacji sygnałów.

2 Wstęp teoretyczny

2.1 Teoria

Splot to jedno z najważniejszych działań podczas filtracji sygnałów dyskretnych. Jest operacją przetwarzania dwóch sygnałów, w wyniku której otrzymujemy pojedynczy sygnał dyskretny. W ogólnym przypadku splot jest zdefiniowany wzorem: W praktyce stosuje się sygna-

Menu

Szum o rozkładzie jednostajnym

Stwórz sygnał

0 Amplituda

0 Czas początkowy

0 Czas trwania

0 Częstotliwość próbkowania

0 Histogram

zapisz

Odtwórz sygnał

x + y wynik

Kwantyzacja z obcięciem

Ekstrapolacja zerowego rzędu

ły o skończonych ilościach próbek rozmieszczonych równomiernie w dowolnych miejscach osi czasu. Zwykle przyjmuje się konwencję indeksacyjną, gdzie oba sygnały zaczynają się na osi czasu od próbki zero. Poza granicami przedziału oba sygnały są zerowe.

Wzór dla tej konwencji przyjmuje postać:

Filtracja sygnałów - należy do podstawowych operacji CPS. W ramach filtracji widmo sygnału ulega modyfikacji. Zostały odfiltrowane składowe

Menu

Szum o rozkładzie jednostajnym

Stwórz sygnał

0

Amplituda

☐ zapisz

0

Czas początkowy

Odtwórz sygnał

0

Czas trwania

0

Częstotliwość próbkowania

0

Histogram

x

+

y

wynik

Kwantyzacja z obcięciem

Ekstrapolacja zerowego rzędu

części sygnału o częstotliwościach należących do pasma zaporowego. Reszta widma leżąca w paśmie przepustowym, nie uległa zmianie lub podlega niewielkiemu tłumieniu.

Filtry ze względu na umiejscowienie pasma przepustowego i zaporowego dzielimy na:

Filtry dolnoprzepustowe - ich pasma przepustowe są określone przedziałem częstotliwości od 0 do f_0 (f_0 - częstotliwość odcięcia filtru)

Filtry górnoprzepustowe - ich pasma przepustowe są określone przedziałem częstotliwości od f_0 do $f_p/2$ (f_p - częstotliwość próbkowania sygnału)

Filtry pasmowe - ich pasma przepustowe są określone przedziałem częstotliwości od f_d do f_g ($f_d, f_g > 0$, $f_d < f_g$ i $f_d, f_g < f_p/2$)

W zadaniu są stosowane filtry SOI - o skończonej odpowiedzi impulsowej. Zaletą tych filtrów jest łatwość implementacji (w oparciu o splot) i projektowania postaci filtru.

Przy obliczaniu próbki sygnału wyjściowego ($y(n)$) jest brane pod uwagę M przeszłych próbek sygnału wejściowego ($x(n)$). Wartości $y(n)$ obliczamy jako sumy ważone $x(n)$ z uwzględnieniem współ-

czynników filtru $h(n)$.
Opisuje to wzór:

Gdzie:

M - rząd filtru

$h(k)$ - odpowiedź impulsowa

Jeżeli ciąg próbek sygnału wejściowego będzie ciągiem wartości zerowych, filtr SOI będzie generował na wyjściu skończony ciąg niezerowych wartości.

Do projektowania filtrów SOI została zastosowana metoda okna.

W praktyce często stosuje się okna:

Hamminga

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_1)\right)$$

Hanninga

Blackmana

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_1)\right)$$

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_1)\right)$$

Korelacja - jest ważną częścią przetwarzania sygnałów. Jest stosowana, gdy trzeba porównać sygnał z innym, zwłaszcza z przesuniętą na osi czasu swoją kopią. Polega na przetwarzaniu dwóch sygnałów dyskretnych, w czego wyniku otrzymujemy pojedynczy sygnał dyskretny. Korelacja w ogólnym przypadku jest opisywana wzorem:

The screenshot shows a software interface for signal processing. At the top, there is a 'Menu' button and window control icons. Below this is a dropdown menu set to 'Szum o rozkładzie jednostajnym' (Uniformly distributed noise) and a 'Stwórz sygnał' (Create signal) button. A 'zapisz' (save) checkbox is also present. Below these are five input fields, each with a label and a '0' value: 'Amplituda' (Amplitude), 'Czas początkowy' (Initial time), 'Czas trwania' (Duration), 'Częstotliwość próbkowania' (Sampling frequency), and 'Histogram'. An 'Odtwórz sygnał' (Recreate signal) button is located to the right of the first three input fields. At the bottom, there are buttons for 'x', '+', 'y', and 'wynik' (result). Below these are two more dropdown menus: 'Kwantyzacja z obcięciem' (Quantization with clipping) and 'Ekstrapolacja zerowego rzędu' (Zeroth-order extrapolation).

Rysunek 1: Widok główny aplikacji

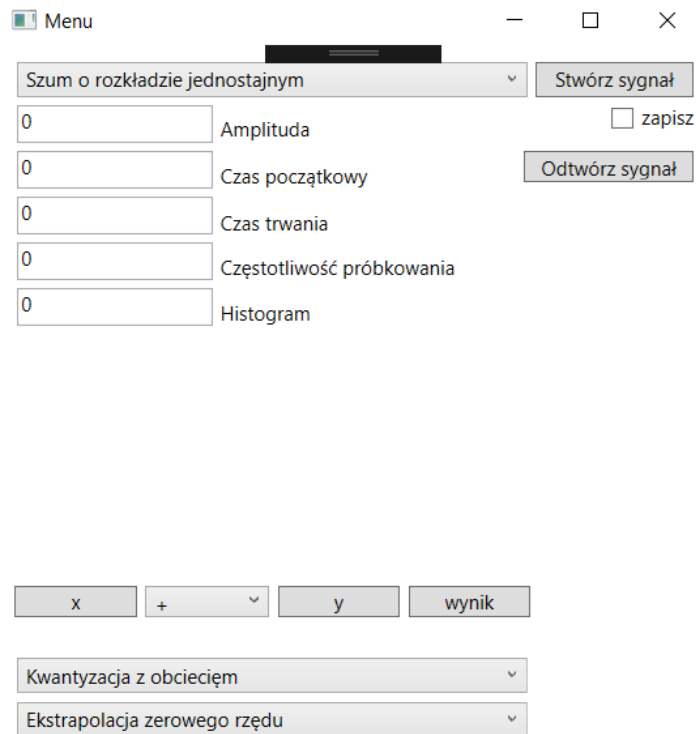
Podobnie jak w operacji splotu w praktyce stosuje się sygnały o skończonych ilościach próbek rozmieszczonych równomiernie w dowolnych miejscach osi czasu i zakres zmienności próbek dla każdego z zakresy sumowań zmieniają się zgodnie z umiejscowieniem na osi czasu i liczbami próbek każdego z dyskretnych sygnałów wejściowych h oraz x . Zwykle przyjmuje się konwencję indeksacyjną, gdzie oba sygnały zaczynają się na osi czasu od próbki zero. Poza grani-

camii przedziału oba sygnały są zerowe.
Wzór dla tej konwencji przyjmuje postać:

Opisanym wzorem:

2.2 Instrukcja obsługi aplikacji

Aplikacja do generacji szumów zawiera interfejs graficzny, który służy do obsługi przez użytkownika. Wygląd został przedstawiony na poniższym rysunku.



Rysunek 2: Widok główny aplikacji

Na górze okienka znajduje się wysuwana lista możliwych do generacji sygnałów. Obok znajduje się checkbox, po zaznaczeniu którego sygnał zostanie zapisany do pliku. Niżej jest przycisk do generacji sygnałów oraz lista parametrów wykresu. Tutaj wpisuje się dane wpływające na sygnał. Pola umożliwiają ustawienie charakterystycznych parametrów sygnału. Na ich podstawie program wylicza wartości amplitudy sygnału w określonym czasie oraz wyświetla graficzną reprezentację sygnału w postaci wykresu funkcji amplitudy od czasu i histogramu.

Na dole okienka znajdują się przyciski: do odtwarzania sygnału z pliku, oraz do operacji na dwóch sygnałach. Po kliknięciu w x i y wybieramy odpowiednio pierwszy i drugi składnik działania. Między nimi można wybrać jedno z czterech działań. Po wciśnięciu przycisku "wynik" program liczy wynik działania i wyświetla jego graficzną reprezentację.

2.2.1 Generowanie sygnału

Aby wygenerować sygnał użytkownik musi kliknąć w generuj sygnał. Po wygenerowaniu sygnału pojawiają się dwa dodatkowe okienka aplikacji.

2.2.2 Odczyt sygnału z pliku

Oprócz generacji i zapisu do pliku, program umożliwia odczyt z pliku sygnału będącego wynikiem dyskretyzacji (bez kwantyzacji) wygenerowanego sygnału ciągłego oraz sygnału będącego wynikiem operacji na dwóch sygnałach dyskretnych.

Tak jak w przypadku generacji, sygnał jest reprezentowany graficznie w postaci histogramu i wykresu funkcji.

2.3 Opis metod

Opisy wszystkich metod zastosowanych do implementacji sygnałów, zostały zapisane w poszczególnych eksperymentach.

Próbkowanie pozwala na zmianę analogowego sygnału wejściowego w sygnał dyskretny: reprezentowany jako ciąg próbek rozmieszczonych równomiernie

$$x(n) = f(nT_s)$$

w czasie w odstępach T_s . Twierdzenie o próbkowaniu określa możliwość odтворzenia oryginalnego sygnału analogowego przy założeniu, że częstotliwość próbkowania jest przynajmniej dwukrotnie wyższa niż najwyższa częstotli-

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

wość jakiegokolwiek składowej sygnału.

2.4 Opis implementacji

Aplikacja została napisana w wysokopoziomym języku programowania - C#. Do rysowania wykresów została wykorzystana zewnętrzna biblioteka OxyPlot. Program został napisany przy pomocy metodyki obiektowej i stosuje metody numeryczne.

3 Eksperymenty i wyniki

Poniżej znajdują się wszystkie przeprowadzone eksperymenty - możliwe do uzyskania w aplikacji sygnały i wyniki.

3.1 Eksperyment nr 1

Eksperyment nr 1 - Splot

3.1.1 Założenia

Operacja splotu jest przeprowadzana dla dwóch dowolnych sygnałów dyskretnych o wczemiej podanych (niekoniecznie jednakowych) ilościach próbek. W tym celu jest wykorzystany wzór 2.1.

3.1.2 Przebieg

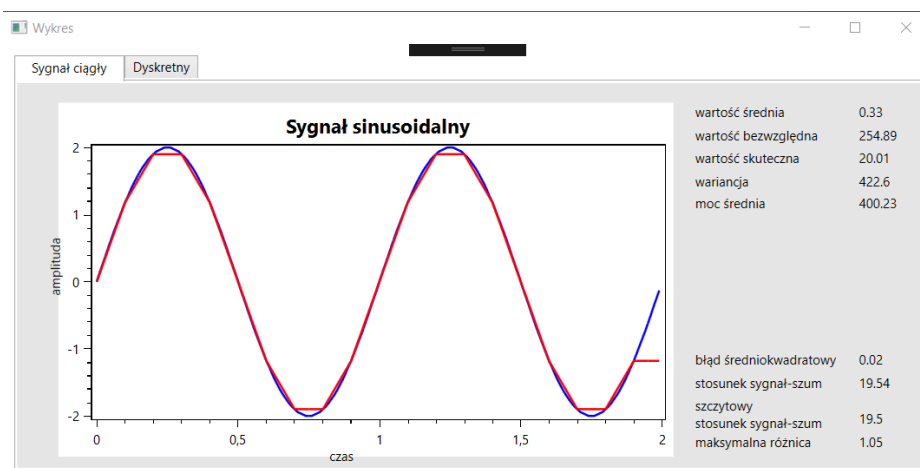
Do generacji sygnalu zostały podane parametry:

Sygnał 1: [Amplituda (A):] 2
 [Czas trwania (t1):] 2 s
 [Częstotliwość próbkowania (d):] 10 Hz
 [Okres podstawowy :] 1 s

Sygnał 2: [Amplituda (A):] 2
 [Czas trwania (t1):] 2 s
 [Częstotliwość próbkowania (d):] 10 Hz
 [Okres podstawowy :] 1 s

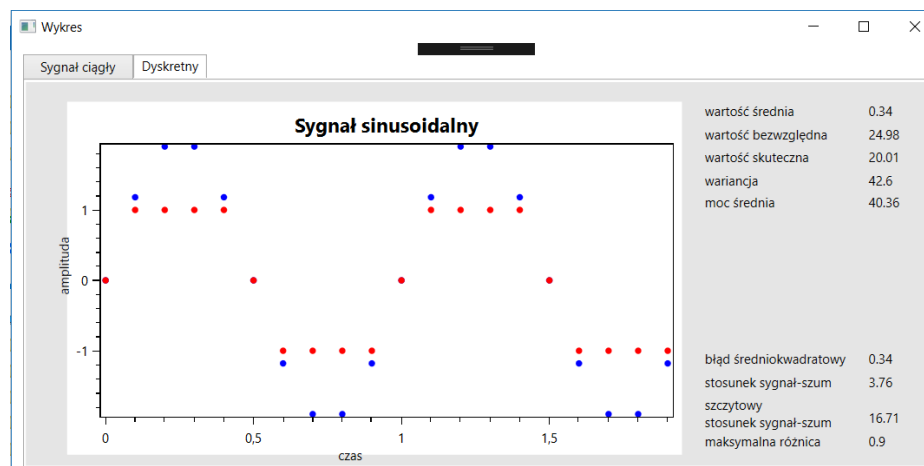
3.1.3 Rezultat

Rezultaty przedstawiają zamieszczone poniżej zrzuty ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 5.



Rysunek 5: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągłego: kwantyzacja z obciążeniem, interpolacja pierwszego rzędu

Rys. 6 przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



Rysunek 6: Wykres sygnału sinusoidalnego dyskretnego: kwantyzacja z obciążeniem, interpolacja pierwszego rzędu

3.2 Eksperyment nr 2

Eksperyment nr 2 - Filtracja z filtrem dolnoprzepustowym

3.2.1 Założenia

Filtr dolnoprzepustowy opisuje wzór, na podstawie odwrotnego przekształcenia Fouriera:

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_1)\right)$$

Parametry: A, T, t₁, d.

gdzie:

n - liczba całkowita,

częstotliwość odcięcia filtru - f₀ = f_p/K

Zakładamy, że filtr jest idealny - w pasmie przepustowym nie zmienia się widmo sygnału wejściowego - transmitancja jest równa 1. W pasmie zaporowym składowe częstotliwościowe zostaną kompletnie wytłumione (transmitancja równa 0).

Ze względu na nieskończoną liczbę współczynników h(n) nie stosuje się tego wzoru w praktyce.

Wzór na odpowiedź impulsową filtru o M współczynników z przesunięciem (w celu uzyskania nieujemnych indeksów):

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_1)\right)$$

gdzie:

n = 0, 1, ..., M-1

częstotliwość odcięcia filtru - f₀ = f_p/K

3.2.2 Przebieg

Do generacji sygnału zostały podane parametry:

Amplituda (A): 2

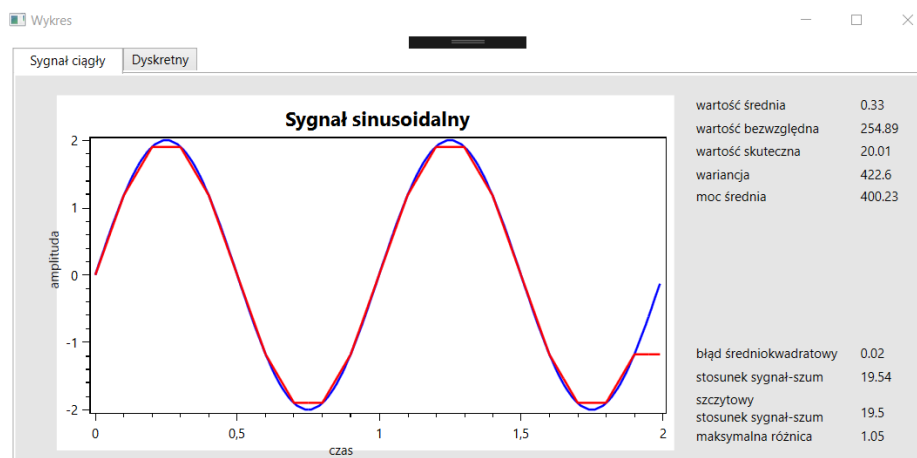
Czas trwania (t₁): 2 s

Częstotliwość próbkowania (d): 10 Hz

Okres podstawowy : 1 s

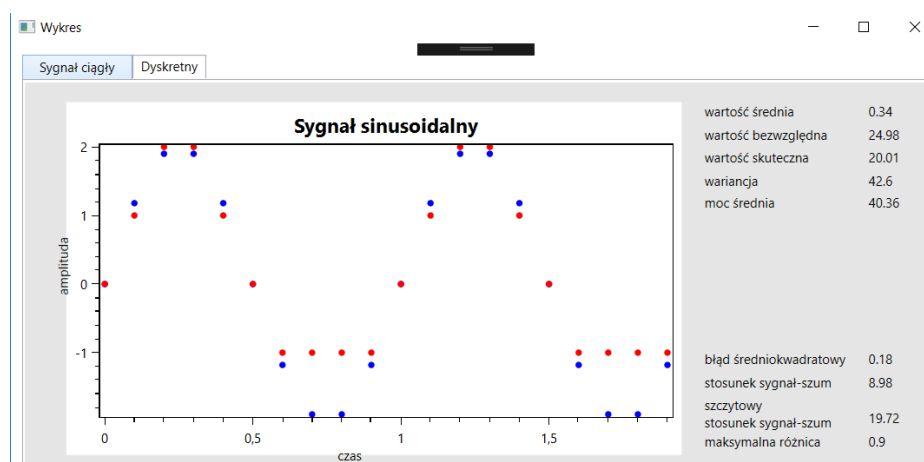
3.2.3 Rezultat

Rezultaty przedstawiają zamieszczone poniżej zrzuty ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 14.



Rysunek 7: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągłego: kwantyzacja z zaokrągleniem, interpolacja pierwszego rzędu

Rys. 6 przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



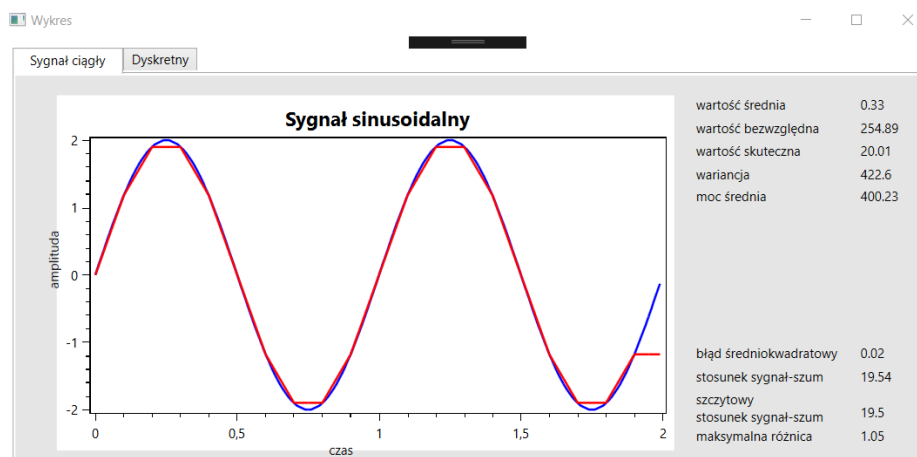
Rysunek 8: Wykres sygnału sinusoidalnego dyskretnego: kwantyzacja z zaokrągleniem, interpolacja pierwszego rzędu

3.3 Eksperyment nr 3

Eksperyment nr 3 - Filtracja z filtrem środkowoprzepustowym

3.3.1 Założenia

Z wykorzystaniem twierdzenia o modulacji przekształcamy odpowiedź impulsową filtra dolnoprzepustowego do odpowiedzi filtra środkowoprzepustowego: współczynniki $h(n)$ są mnożone przez sygnał sinusoidalny o częstotliwości $f = f_p/4$



Rysunek 9: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągłego: kwantyzacja z zaokrągleniem, interpolacja pierwszego rzędu

Wtedy $f_d = f_p/4 - f_0$ i $f_g = f_p/4 + f_0$.

3.3.2 Przebieg

Do generacji sygnału zostały podane parametry:

Amplituda (A): 2

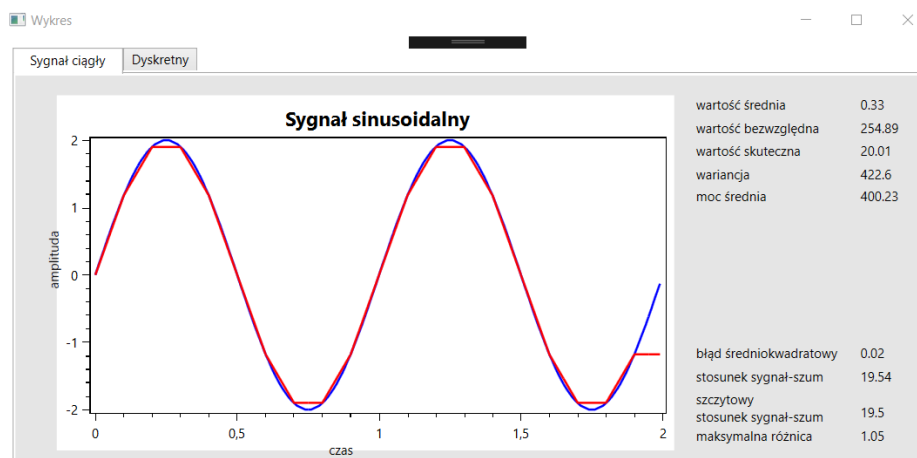
Czas trwania (t_1): 2 s

Częstotliwość próbkowania (d): 10 Hz

Okres podstawowy : 1 s

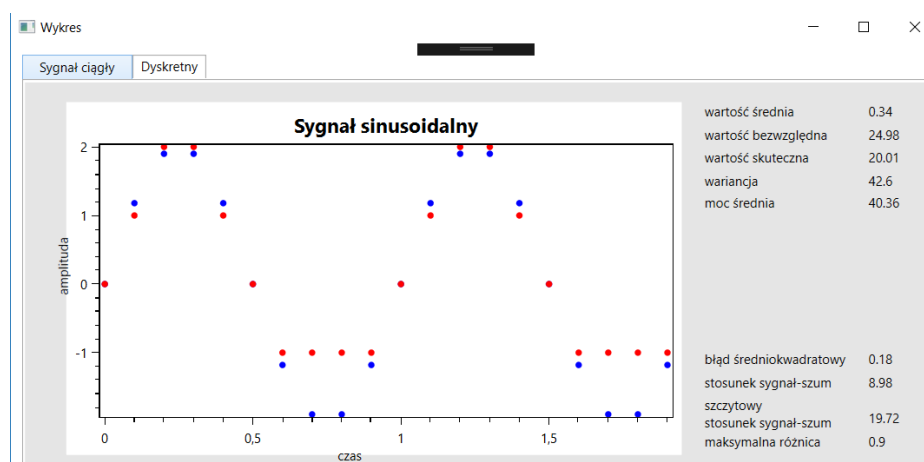
3.3.3 Rezultat

Rezultaty przedstawiają zamieszczone poniżej zrzuty ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 14.



Rysunek 10: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągłego: kwantyzacja z zaokrągleniem, interpolacja pierwszego rzędu

Rys. 6 przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



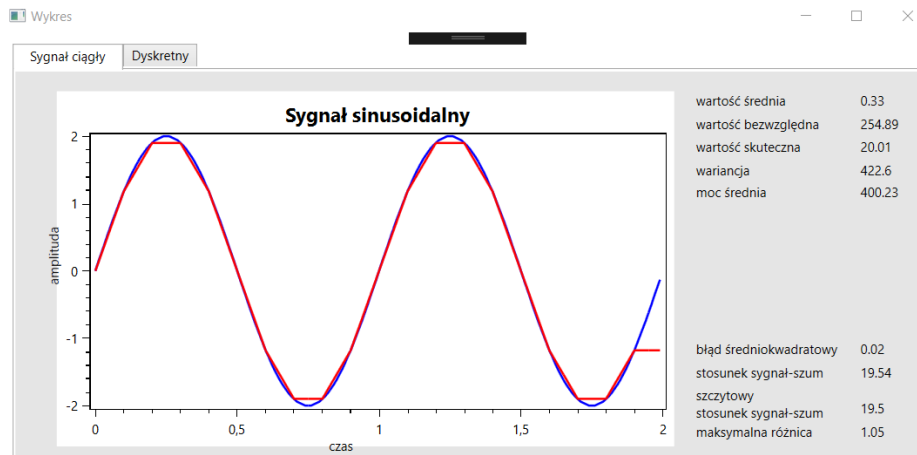
Rysunek 11: Wykres sygnału sinusoidalnego dyskretny: kwantyzacja z zaokrągleniem, interpolacja pierwszego rzędu

3.4 Eksperyment nr 4

Eksperyment nr 4 - Filtracja z filtrem górnoprzepustowym

3.4.1 Założenia

Z wykorzystaniem twierdzenia o modulacji przekształcamy odpowiedź impulsową filtra dolnoprzepustowego do odpowiedzi filtra górnoprzepustowego: współczynniki $h(n)$ są mnożone przez sygnał sinusoidalny o częstotliwości $f = f_p/2$



Rysunek 12: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągłego: kwantyzacja z zaokrągleniem, interpolacja pierwszego rzędu

Wtedy $f_0 = f_p/2 - f_0$ (f_0 - nowa częstotliwość odcięcia).

3.4.2 Przebieg

Do generacji sygnału zostały podane parametry:

Amplituda (A): 2

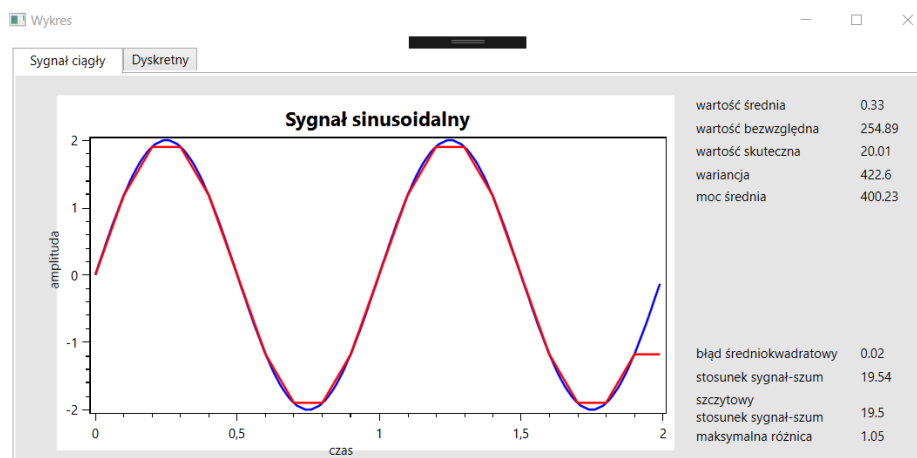
Czas trwania (t_1): 2 s

Częstotliwość próbkowania (d): 10 Hz

Okres podstawowy : 1 s

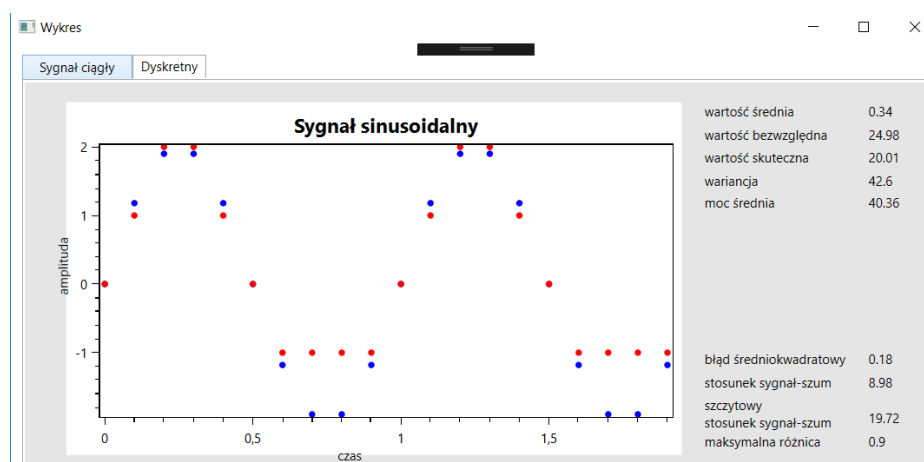
3.4.3 Rezultat

Rezultaty przedstawiają zamieszczone poniżej zrzuty ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 14.



Rysunek 13: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągłego: kwantyzacja z zaokrągleniem, interpolacja pierwszego rzędu

Rys. 6 przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



Rysunek 14: Wykres sygnału sinusoidalnego dyskretnego: kwantyzacja z zaokrągleniem, interpolacja pierwszego rzędu

3.5 Eksperyment nr 3

Eksperyment nr 3 Korelacja

3.5.1 Teoria

Ekstrapolacja zerowego rzędu jest najprostszą metodą rekonstrukcji sygnału. W niej wartość próbki jest pamiętana i definiuje stałą wartość sygnału wyjściowego aż do następnej próbki. Do tej metody potrzeba dużo większej częstotliwości próbkowania niż wynikałoby z "Twierdzenia o próbkowaniu".

3.5.2 Założenia

Ekstrapolacja zerowego rzędu Sygnał opisuje wzór:

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_1)\right)$$

Parametry: A, T, t₁, d.

3.5.3 Przebieg

Do generacji sygnału zostały podane parametry:

Amplituda (A): 2

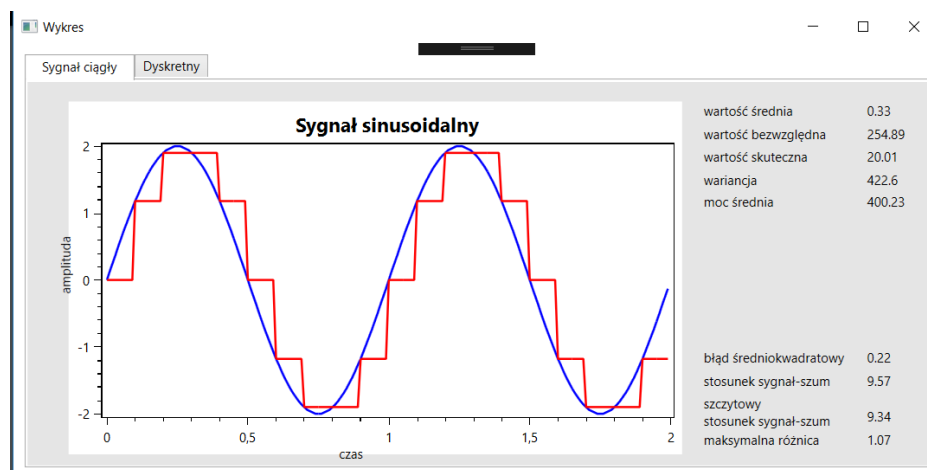
Czas trwania (t₁): 2 s

Częstotliwość próbkowania (d): 10 Hz

Okres podstawowy : 1 s

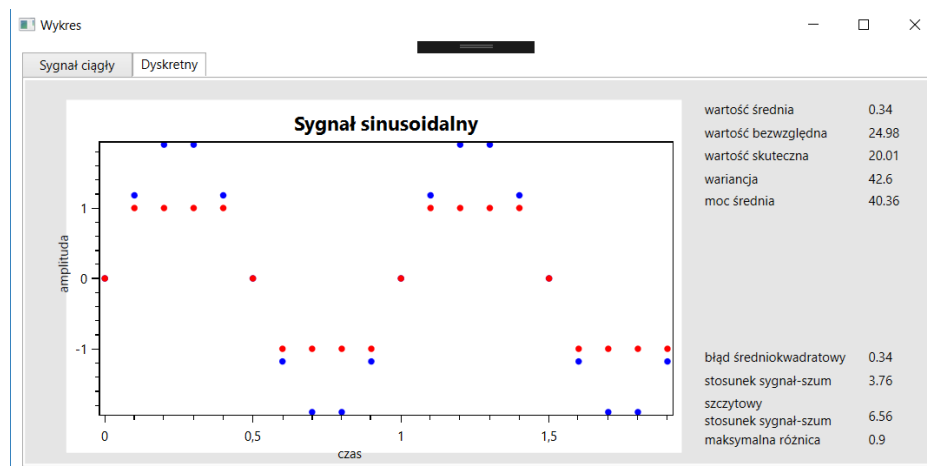
3.5.4 Rezultat

Rezultaty przedstawiają zamieszczone poniżej zrzuty ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 15.



Rysunek 15: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągłego: kwantyzacja z obciążeniem, ekstrapolacja zerowego rzędu

Rys. 16 przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



Rysunek 16: Wykres sygnału sinusoidalnego dyskretnego: kwantyzacja z obciążeniem, ekstrapolacja zerowego rzędu

3.6 Eksperyment nr 4

Eksperyment nr 4 - Korelacja

3.6.1 Założenia

Do eksperymentu generujemy sygnał sinusoidalny o podanych niżej parametrach. Wejściowy sygnał analogowy zostanie zamieniony na sygnał dyskretny. Sygnał opisuje wzór:

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_1)\right)$$

Parametry: A, T, t₁, d.

W tym eksperymencie odtworzenie sygnału odbywa się poprzez interpolację pierwszego rzędu, a dyskretyzacja przez kwantyzację z odcięciem. W tej metodzie wartości sygnału pomiędzy sąsiednimi próbkami są interpolowane za pomocą odcinków prostych.

3.6.2 Przebieg

Do generacji sygnału zostały podane parametry:

Amplituda (A): 2

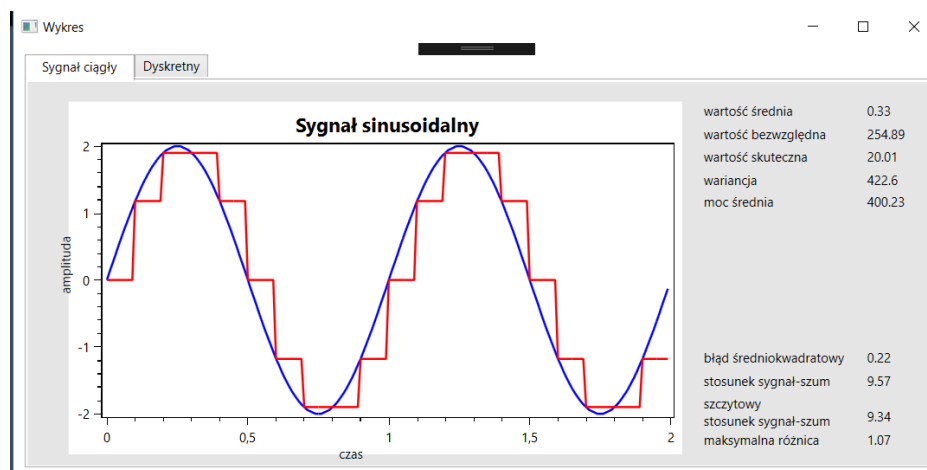
Czas trwania (t₁): 2 s

Częstotliwość próbkowania (d): 10 Hz

Okres podstawowy : 1 s

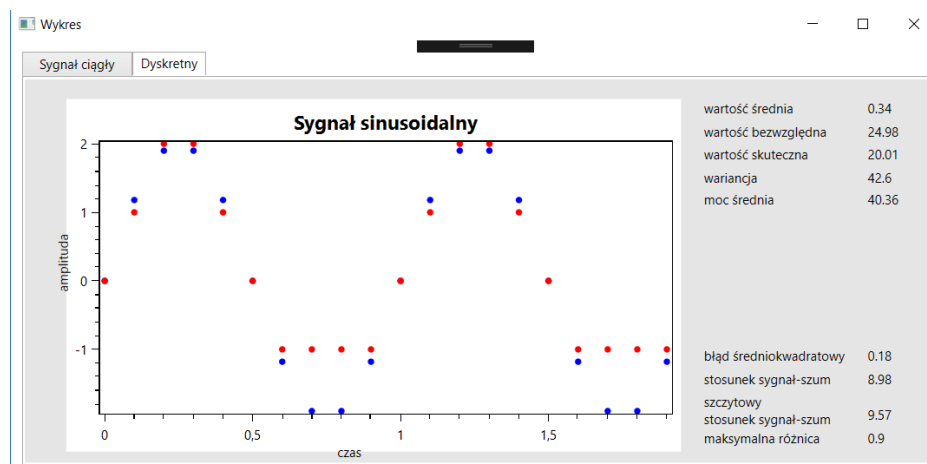
3.6.3 Rezultat

Rezultaty przedstawiają zamieszczone poniżej zrzuty ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 17.



Rysunek 17: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągłego: kwantyzacja z zaokrągleniem, ekstrapolacja zerowego rzędu

Rys. 18 przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



Rysunek 18: Wykres sygnału sinusoidalnego dyskretnego: kwantyzacja z zaokrągleniem, ekstrapolacja zerowego rzędu

4 Wnioski

Przeprowadzone eksperymenty dowodzą, że Interpolacja pierwszego rzędu jest bardziej dokładna niż ekstrapolacja rzędu zerowego. Dzieje się tak ponieważ między próbkami sygnał się zmienia zatem interpolowanie między kolejnymi próbkami daje lepsze odwzorowanie, niż przepisywanie tej samej

wartości do czasu napotkania następnej próbki. Aby uzyskać wyniki ekstrapolacji zbliżone do wyników ekstrapolacji należy przyjąć bardzo dużą częstotliwość próbkowania. Są znaczące różnice w błędach odtworzenia sygnałów przez interpolację i ekstrapolację. Interpolacja jest dużo bardziej dokładna - błąd średniokwadratowy o ok 0,2, stosunek sygnał-szum i szczytowy stosunek sygnał-szum różnią się nawet o 10 jednostek. Co ciekawe maksymalna różnica między sygnałem analogowym, a odtwarzanym sygnałem jest minimalnie większa dla interpolacji. W przypadku kwantyzacji dużo lepiej sprawdza się kwantyzacja z zaokrągleniem. W przypadku kwantyzacji z obcięciem jeżeli próbkowaniem nie trafimy w szczyt amplitudy to maksymalna jej wartość po kwantowaniu będzie mniejsza niż ta w oryginale. Przy kwantyzacji z zaokrągleniem unikamy takiej sytuacji. Podczas próbkowania trzeba bardzo uważać przy podawaniu częstotliwości. Jeśli podamy ją zbyt małą sygnał nie zostanie odtworzony, a czasem wręcz możemy uzyskać inny sygnał.

Literatura

- [1] FTIMS Politechnika Łódzka. *Przetwarzanie sygnałów, pojęcia podstawowe* Plik, Wikamp.
- [2] FTIMS Politechnika Łódzka. *Zadanie 2 Generacja sygnału i szumu*, Wikamp.