

Zadanie nr 3 - Splot, filtracja i korelacja sygnałów

Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów

Aneta Wiśniewska, 204029 Hanna Paluszkiewicz, 203962

14.05.2018

1 Cel zadania

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się w praktyce z procesami splotu, filtracji i korelacji sygnałów.

2 Wstęp teoretyczny

2.1 Teoria

Splot to jedno z najważniejszych działań podczas filtracji sygnałów dyskretnych. Jest operacją przetwarzania dwóch sygnałów, w wyniku której otrzymujemy pojedynczy sygnał dyskretny. W ogólnym przypadku splot jest zdefiniowany wzorem: W praktyce stosuje się sygna-

$$(h * x)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

ły o skończonych ilościach próbek rozmieszczonych równomiernie w dowolnych miejscach osi czasu. Zwykle przyjmuje się konwencję indeksacyjną, gdzie oba sygnały zaczynają się na osi czasu od próbki zero. Poza granicami przedziału oba sygnały są zerowe.

Wzór dla tej konwencji przyjmuje postać:

$$(h * x)(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

Filtracja sygnałów - należy do podstawowych operacji CPS. W ramach filtracji widmo sygnału ulega modyfikacji. Zostały odfiltrowane składowe części sygnału o częstotliwościach należących do pasma zaporowego. Reszta widma leżąca w paśmie przepustowym, nie uległa zmianie lub podlega niewielkiemu tłumieniu.

Filtry ze względu na umiejscowienie pasma przepustowego i zaporowego dzielimy na:

Filtry dolnoprzepustowe - ich pasma przepustowe są określone przedziałem częstotliwości od 0 do f_0 (f_0 - częstotliwość odcięcia filtru)

Filtry górnoprzepustowe - ich pasma przepustowe są określone przedziałem częstotliwości od f_0 do $f_p/2$ (f_p - częstotliwość próbkowania sygnału)

Filtry pasmowe - ich pasma przepustowe są określone przedziałem częstotliwości od f_d do f_g ($f_d, f_g > 0$, $f_d < f_g$ i $f_d, f_g < f_p/2$)

W zadaniu są stosowane filtry SOI - o skończonej odpowiedzi impulsowej. Zaletą tych filtrów jest łatwość implementacji (w oparciu o splot) i projektowania postaci filtru.

Przy obliczaniu próbki sygnału wyjściowego ($y(n)$) jest brane pod uwagę M przeszłych próbek sygnału wejściowego ($x(n)$). Wartości $y(n)$ obliczamy jako sumy ważone $x(n)$ z uwzględnieniem współczynników filtru $h(n)$.

Opisuje to wzór:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2}{K} & \text{dla } n=0, \\ \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{K}\right)}{\pi n} & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Gdzie:

M - rząd filtru

$h(k)$ - odpowiedź impulsowa

Jeżeli ciąg próbek sygnału wejściowego będzie ciągiem wartości zerowych, filtr SOI będzie generował na wyjściu skończony ciąg niezerowych wartości.

Powyższy wzór jest stosowany dla filtru dolnoprzepustowego. Na jego podstawie można obliczyć także działanie innych filtrów. W tym celu stosuje się wzory:

dla filtru środkowoprzepustowego:

$$s(n) = 2\sin(\pi n/2)$$

dla filtru górnoprzepustowego:

$$s(n) = (-1)^n$$

Do projektowania filtrów SOI została zastosowana metoda okna.

W praktyce często stosuje się okna:

Hamminga

$$w(n)=0.53836-0.46164 \cdot \cos \left(\frac{2\pi n}{M} \right)$$

Hanninga

$$w(n)=0.5-0.5 \cdot \cos \left(\frac{2\pi n}{M} \right),$$

Blackmana

$$w(n)=0.42-0.5 \cdot \cos \left(\frac{2\pi n}{M} \right) +0.08 \cdot \cos \left(\frac{4\pi n}{M} \right).$$

Korelacja - jest ważną częścią przetwarzania sygnałów. Jest stosowana, gdy trzeba porównać sygnał z innym, zwłaszcza z przesuniętą na osi czasu swoją kopią. Polega na przetwarzaniu dwóch sygnałów dyskretnych, w czego wyniku otrzymujemy pojedynczy sygnał dyskretny. Korelacja w ogólnym przypadku jest opisywana wzorem:

$$R_{hx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(k-n)$$

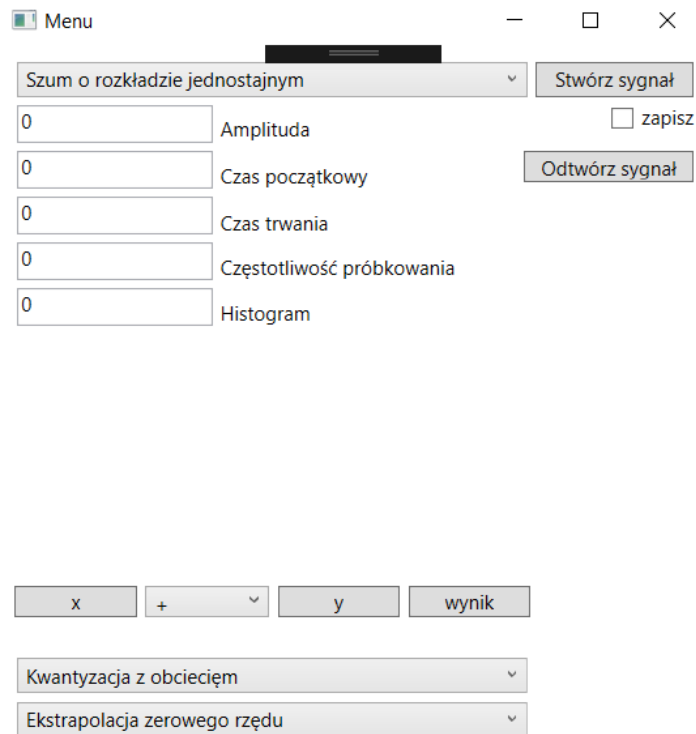
Podobnie jak w operacji splotu w praktyce stosuje się sygnały o skończonych ilościach próbek rozmieszczonych równomiernie w dowolnych miejscach osi czasu i zakres zmienności próbek dla każdego n zakresy sumowań zmieniają się zgodnie z umiejscowieniem na osi czasu i liczbami próbek każdego z dyskretnych sygnałów wejściowych h oraz x . Zwykle przyjmuje się konwencję indeksacyjną, gdzie oba sygnały zaczynają się na osi czasu od próbki zero. Poza granicami przedziału oba sygnały są zerowe.

Wzór dla tej konwencji przyjmuje postać:

$$R_{hx} = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

2.2 Instrukcja obsługi aplikacji

Aplikacja do generacji szumów zawiera interfejs graficzny, który służy do obsługi przez użytkownika. Wygląd został przedstawiony na poniższym rysunku.



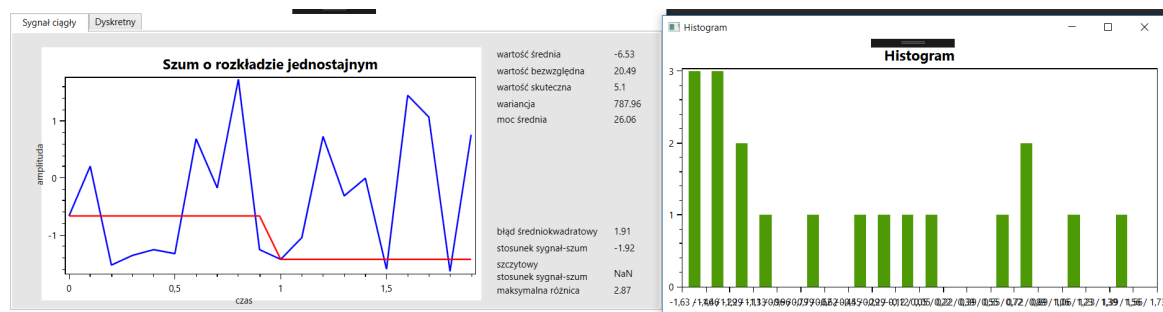
Rysunek 1: Widok główny aplikacji

Na górze okienka znajduje się wysuwana lista możliwych do generacji sygnałów. Obok znajduje się checkbox, po zaznaczeniu którego sygnał zostanie zapisany do pliku. Niżej jest przycisk do generacji sygnałów oraz lista parametrów wykresu. Tutaj wpisuje się dane wpływające na sygnał. Pola umożliwiają ustawienie charakterystycznych parametrów sygnału. Na ich podstawie program wylicza wartości amplitudy sygnału w określonym czasie oraz wyświetla graficzną reprezentację sygnału w postaci wykresu funkcji amplitudy od czasu i histogramu.

Na dole okienka znajdują się przyciski: do odtwarzania sygnału z pliku, oraz do operacji na dwóch sygnałach. Po kliknięciu w x i y wybieramy odpowiednio pierwszy i drugi składnik działania. Między nimi można wybrać jedno z czterech działań. Po wciśnięciu przycisku "wynik" program liczy wynik działania i wyświetla jego graficzną reprezentację.

2.2.1 Generowanie sygnału

Aby wygenerować sygnał użytkownik musi kliknąć w generuj sygnał. Po wygenerowaniu sygnału pojawiają się dwa dodatkowe okienka aplikacji.



Rysunek 2: Okna po generacji sygnału

Jedno wyświetla histogram sygnału

Drugie przedstawia wykres funkcji amplitudy od czasu oraz obliczone wartości: wartość średnią, wartość średnią bezwzględną, wartość skuteczną, wariancję oraz moc średnią.

2.2.2 Odczyt sygnału z pliku

Oprócz generacji i zapisu do pliku, program umożliwia odczyt z pliku sygnału będącego wynikiem dyskretyzacji (bez kwantyzacji) wygenerowanego sygnału ciągłego oraz sygnału będącego wynikiem operacji na dwóch sygnałach dyskretnych.

Tak jak w przypadku generacji, sygnał jest reprezentowany graficznie w postaci histogramu i wykresu funkcji.

2.3 Opis implementacji

Aplikacja została napisana w wysokopoziomowym języku programowania - C#. Do rysowania wykresów została wykorzystana zewnętrzna biblioteka OxyPlot. Program został napisany przy pomocy metodyki obiektowej i stosuje metody numeryczne.

3 Eksperymenty i wyniki

Poniżej znajdują się wszystkie przeprowadzone eksperymenty - możliwe do uzyskania w aplikacji sygnały i wyniki.

3.1 Eksperyment nr 1

Eksperyment nr 1 - Splot

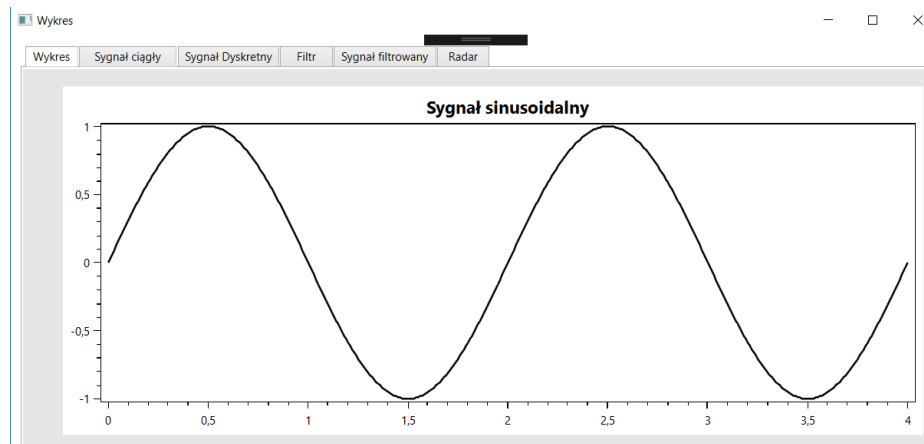
3.1.1 Założenia

Operacja splotu jest przeprowadzana dla dwóch dowolnych sygnałów dyskretnych o wczemiej podanych (niekoniecznie jednakowych) ilościach próbek. W tym celu jest wykorzystany wzór 2.1.

3.1.2 Przebieg

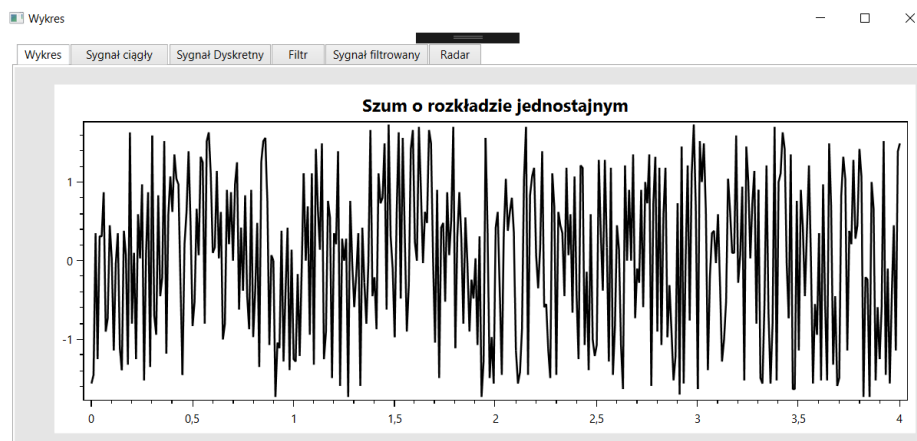
Do generacji sygnłu zostały podane parametry:

Sygnal 1: [Amplituda (A):] 1
[Czas trwania (t1):] 5 s
[Częstotliwość próbkowania (d):] 10 Hz
[Okres podstawowy :] 2 s



Rysunek 3: Wykres sygnału sinusoidalnego

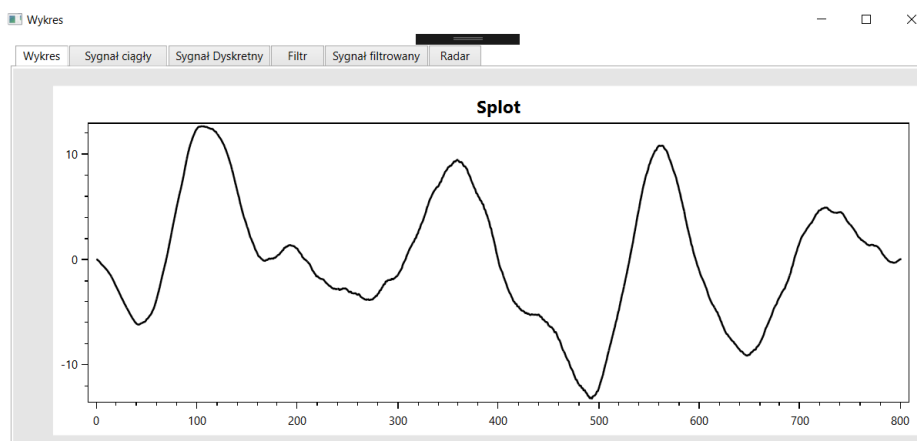
Sygnal 2: [Amplituda (A):] 1
[Czas trwania (t1):] 5 s
[Częstotliwość próbkowania (d):] 10 Hz



Rysunek 4: Wykres szumu gausowskiego

3.1.3 Rezultat

Rezultat przedstawia zamieszczony poniżej zrzut ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 40.



Rysunek 5: Wykres splotu sygnałów 1 i 2

3.2 Eksperyment nr 2

10 20 Eksperyment nr 2 - Filtracja z filtrem dolnoprzepustowym

3.2.1 Założenia

Filtr dolnoprzepustowy opisuje wzór, na podstawie odwrotnego przekształcenia Fouriera:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2}{K} & \text{dla } n=0, \\ \frac{\sin\left(\frac{z\pi n}{K}\right)}{\pi n} & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

gdzie:

n - liczba całkowita,

częstotliwość odcięcia filtru - $f_0 = f_p/K$

Zakładamy, że filtr jest idealny - w pasmie przepustowym nie zmienia się widmo sygnału wejściowego - transmitancja jest równa 1. W pasmie zaporowym składowe częstotliwościowe zostaną kompletnie wytłumione (transmitancja równa 0).

Ze względu na nieskończoną liczbę współczynników $h(n)$ nie stosuje się tego wzoru w praktyce.

Wzór na odpowiedź impulsową filtru o M współczynników z przesunięciem (w celu uzyskania nieujemnych indeksów):

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2}{K} & \text{dla } n=(M-1)/2, \\ \frac{\sin\left(\frac{z\pi(n-(M-1)/2)}{K}\right)}{\pi(n-(M-1)/2)} & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

gdzie:

$n = 0, 1, \dots, M-1$

częstotliwość odcięcia filtru - $f_0 = f_p/K$

3.2.2 Przebieg

Do generacji sygnału prostokątnego zostały podane parametry:

Amplituda (A): 1

Czas trwania (t_1): 100 s

Częstotliwość próbkowania (d): 1 Hz

Okres podstawowy : 100 s

Współczynnik wypełnienia: 0,5

Wykres sygnału przedstawia poniższy obrazek:

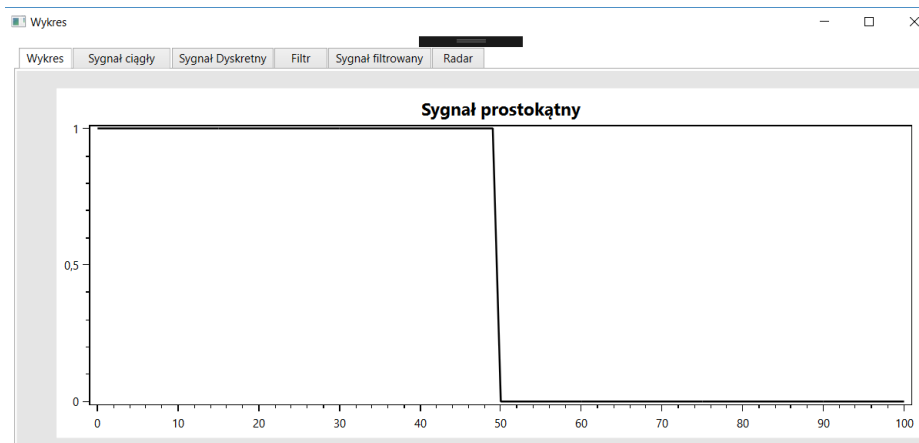
Parametry filtracji:

K: 10

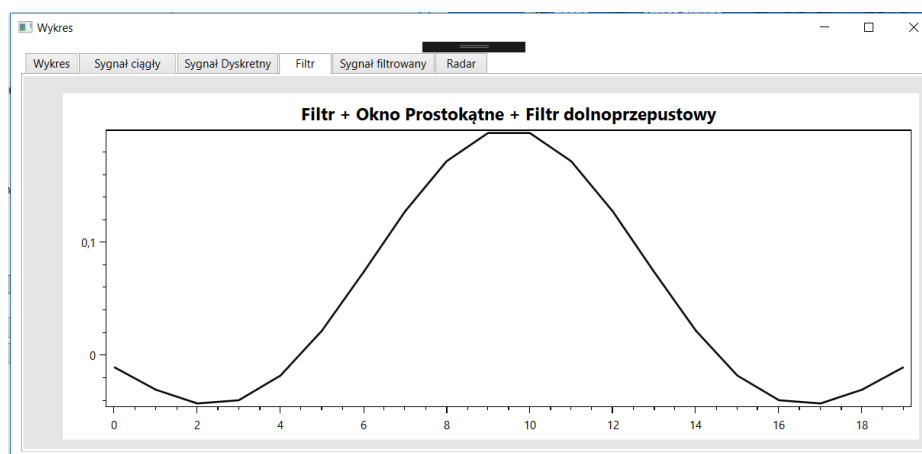
M: 20

3.2.3 Rezultat

Rezultaty przedstawiają zamieszczone poniżej zrzuty ekranu z programu.

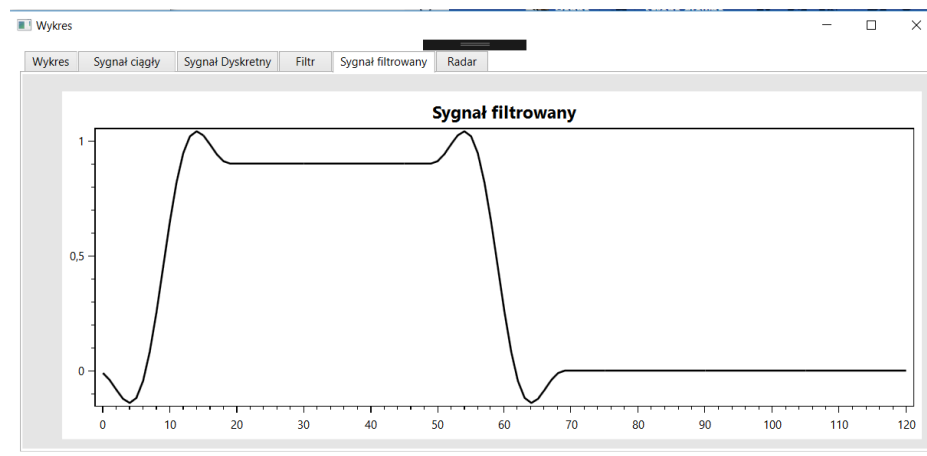


Okno prostokątne



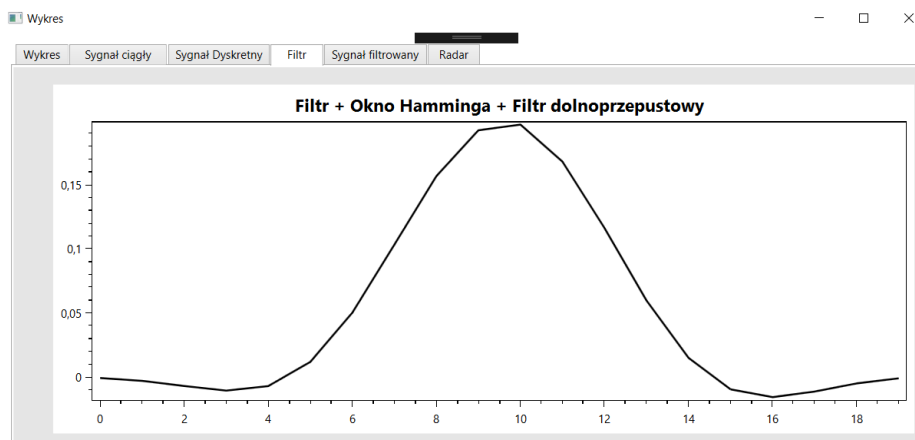
Rysunek 6: Filtracja dolnoprzepustowa z oknem prostokątnym

Rys. ?? przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



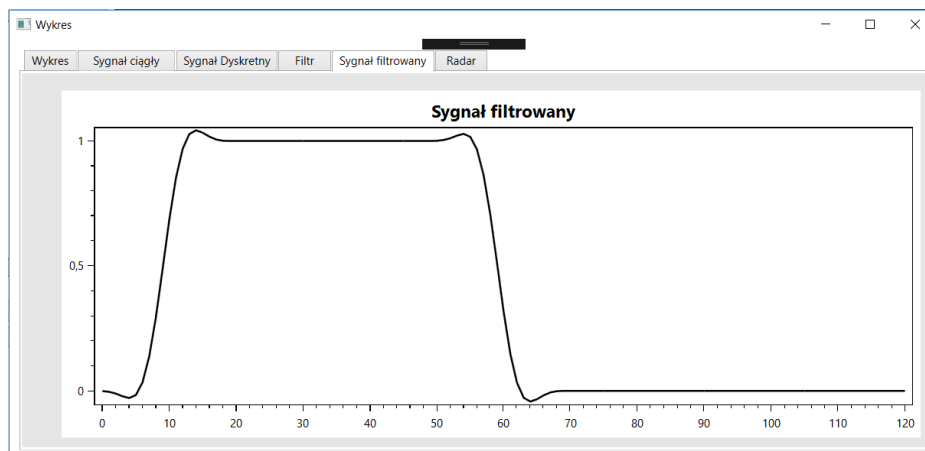
Rysunek 7: Sygnał filtracja dolnoprzepustowej z oknem prostokątnym

Okno Hamminga



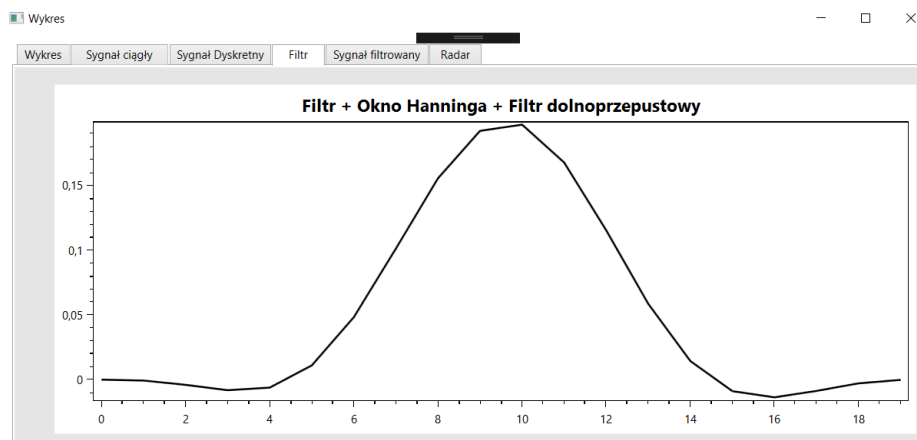
Rysunek 8: Filtracja dolnoprzepustowa z oknem Hamminga

Rys. ?? przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



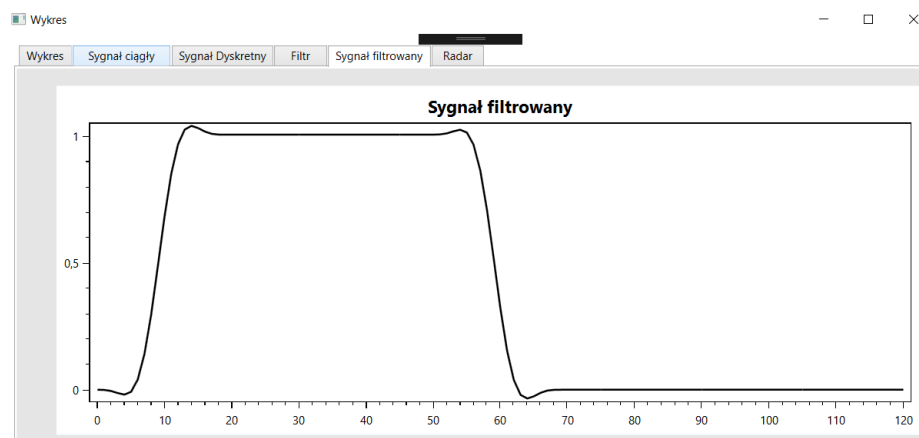
Rysunek 9: Sygnał filtracja dolnoprzepustowej z oknem Hamminga

Okno Hanninga



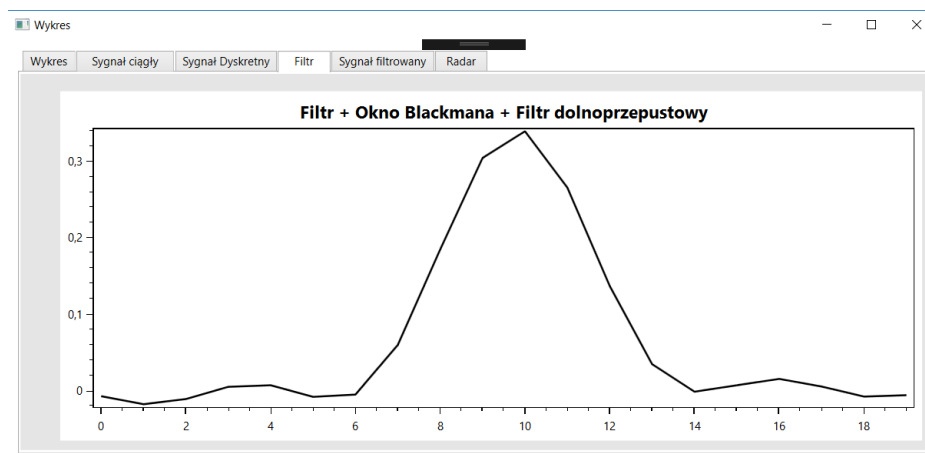
Rysunek 10: Filtracja dolnoprzepustowa z oknem Hanninga

Rys. ?? przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



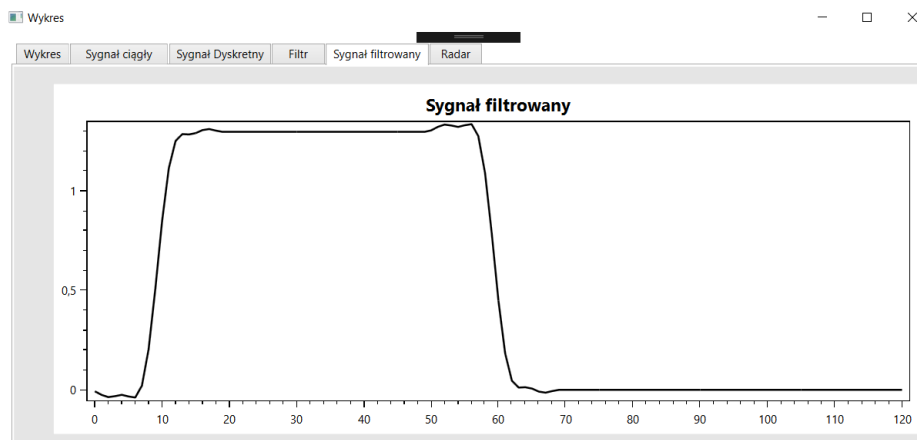
Rysunek 11: Sygnał filtracji dolnoprzepustowej z oknem Hanninga

Okno Blackmana



Rysunek 12: Filtracja dolnoprzepustowa z oknem Blackmana

Rys. ?? przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



Rysunek 13: Sygnał filtracji dolnoprzepustowej z oknem Blackmana

3.3 Eksperyment nr 3

Eksperyment nr 3 - Filtracja z filtrem środkowoprzepustowym

3.3.1 Założenia

Z wykorzystaniem twierdzenia o modulacji przekształcamy odpowiedź impulsową filtru dolnoprzepustowego do odpowiedzi filtru środkowoprzepustowego: współczynniki $h(n)$ są mnożone przez sygnał sinusoidalny o częstotliwości $f = f_p/4$

Wtedy $f_d = f_p/4 - f_0$ i $f_g = f_p/4 + f_0$.

3.3.2 Przebieg

Do generacji sygnału prostokątnego zostały podane parametry:

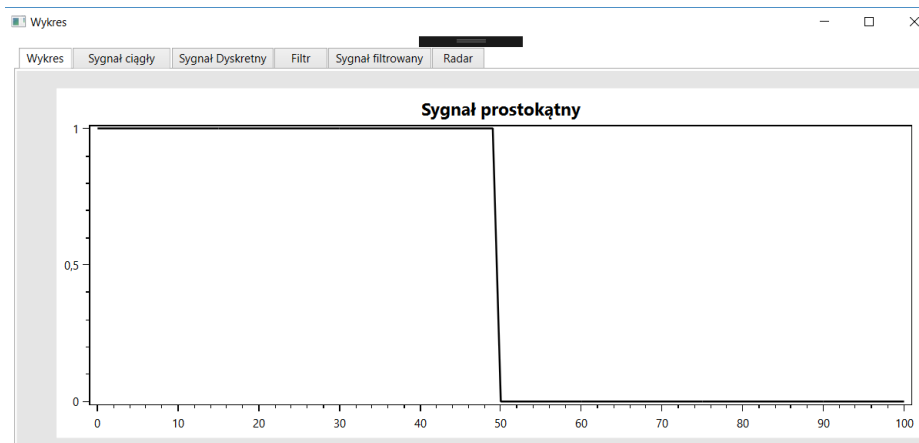
Amplituda (A): 1

Czas trwania (t_1): 100 s

Częstotliwość próbkowania (d): 1 Hz

Okres podstawowy : 100 s

Współczynnik wypełnienia: 0,5



Wykres sygnału przedstawia poniższy obrazek:
Parametry filtracji:

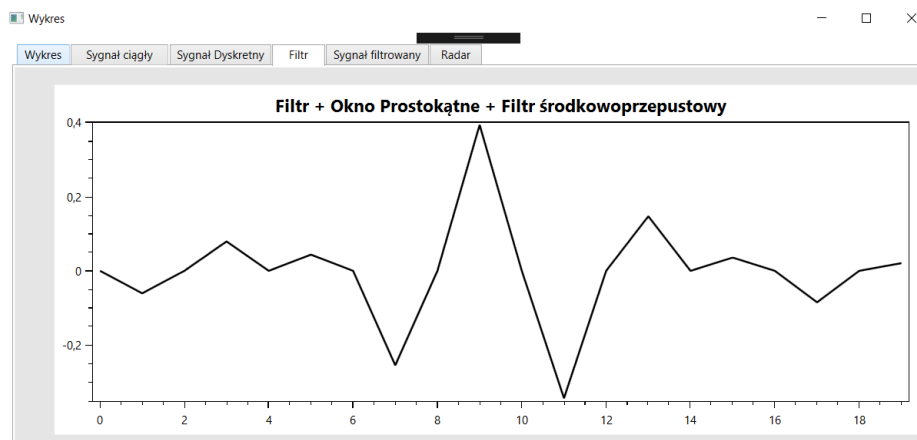
K: 10

M: 20 s

3.3.3 Rezultat

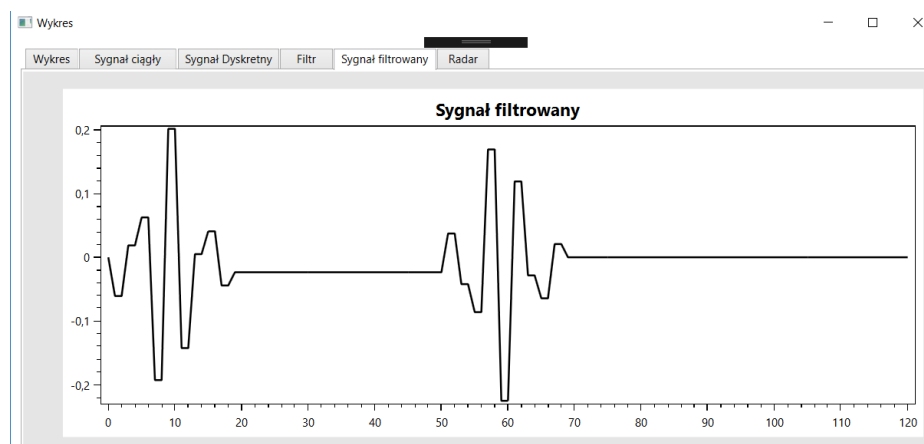
Rezultaty przedstawiają zamieszczone poniżej zrzuty ekranu z programu.

Okno prostokątne



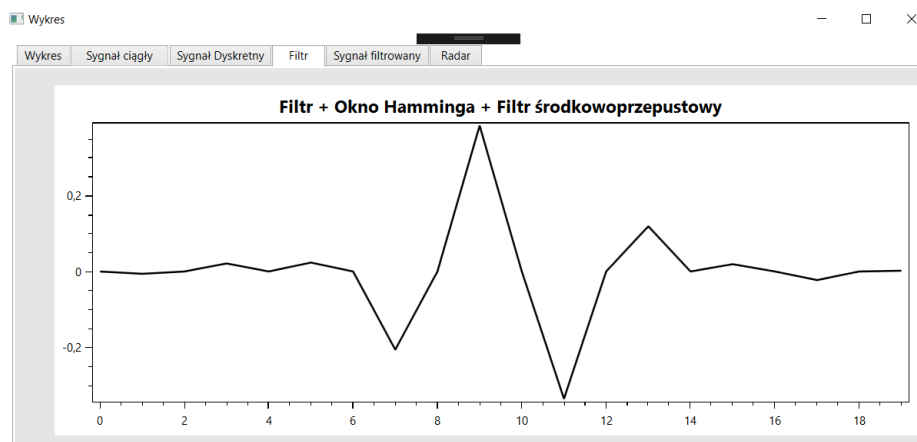
Rysunek 14: Filtracja środkowoprzepustowa z oknem prostokątnym

Rys. ?? przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



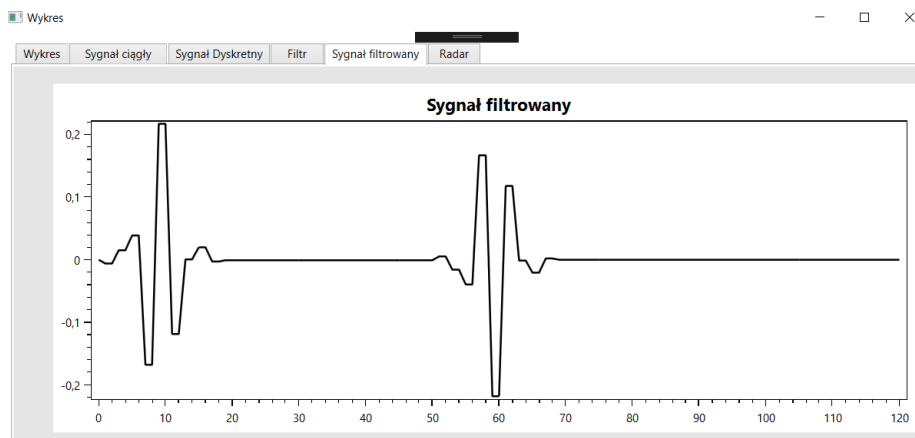
Rysunek 15: Sygnał filtracji środkowoprzepustowej z oknem prostokątnym

Okno Hamminga



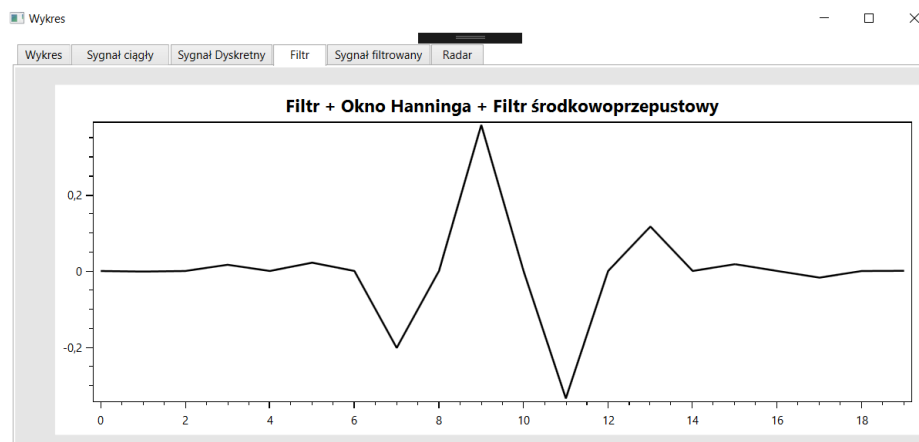
Rysunek 16: Filtracja środkowoprzepustowa z oknem Hamminga

Rys. ?? przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



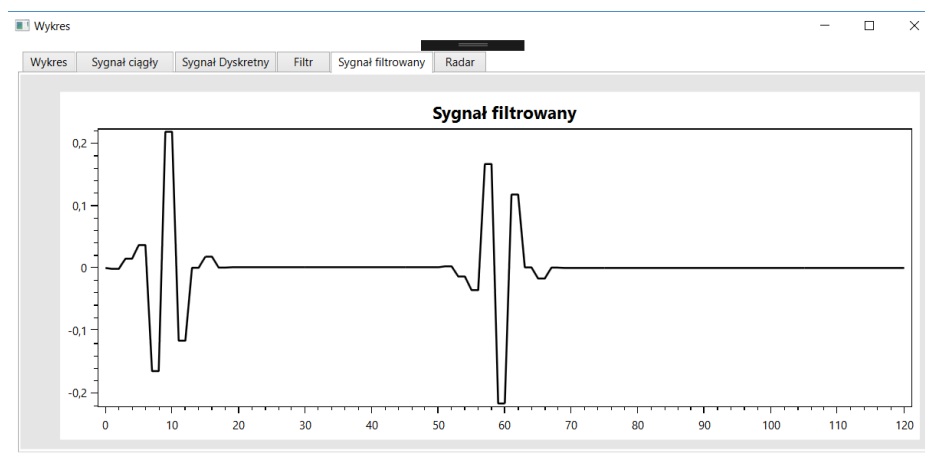
Rysunek 17: Sygnał filtracji środkowoprzepustowej z oknem Hamminga

Okno Hanninga



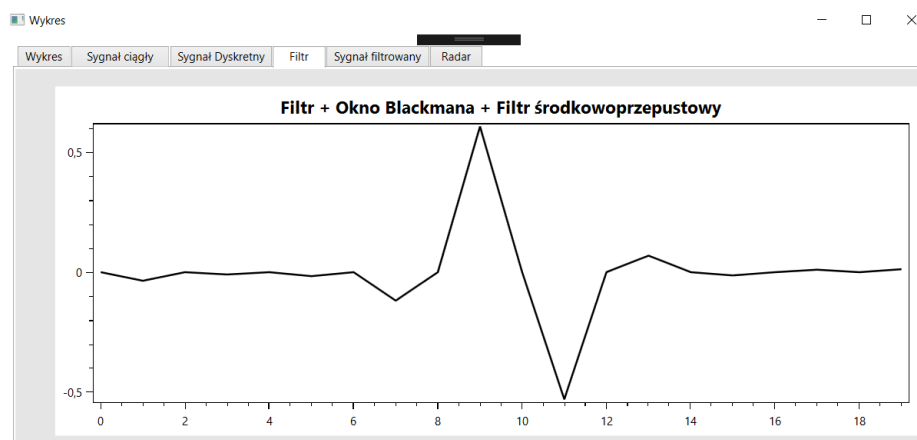
Rysunek 18: Filtracja środkowoprzepustowa z oknem prostokątnym

Rys. ?? przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



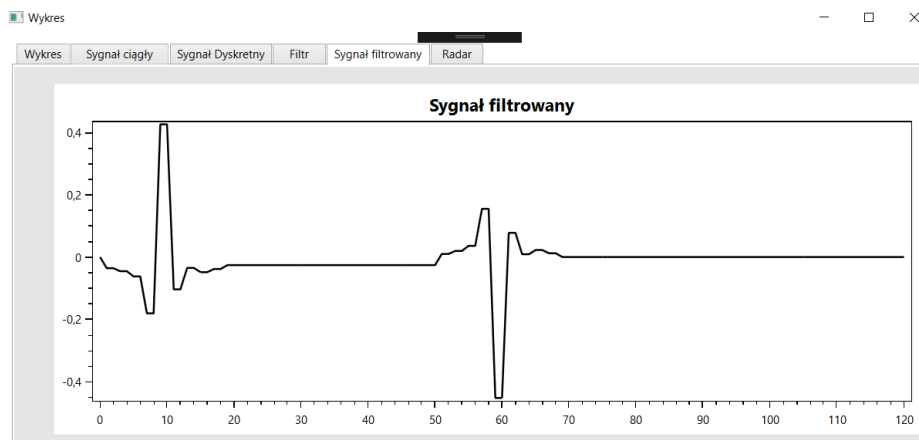
Rysunek 19: Sygnał filtracji srodkowoprzepustowej z oknem Hamminga

Okno Blackmana



Rysunek 20: Filtracja środkowoprzepustowa z oknem prostokątnym

Rys. ?? przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



Rysunek 21: Sygnał filtracji srodkowoprzepustowej z oknem Hamminga

3.4 Eksperyment nr 4

Eksperyment nr 4 - Filtracja z filtrem górnoprzepustowym

3.4.1 Założenia

Z wykorzystaniem twierdzenia o modulacji przekształcamy odpowiedź impulsową filtra dolnoprzepustowego do odpowiedzi filtra górnoprzepustowego: współczynniki $h(n)$ są mnożone przez sygnał sinusoidalny o częstotliwości $f = f_p/2$. Wtedy $f_0 = f_p/2 - f_0$ (f_0 - nowa częstotliwość odcięcia).

3.4.2 Przebieg

Do generacji sygnału prostokątnego zostały podane parametry:

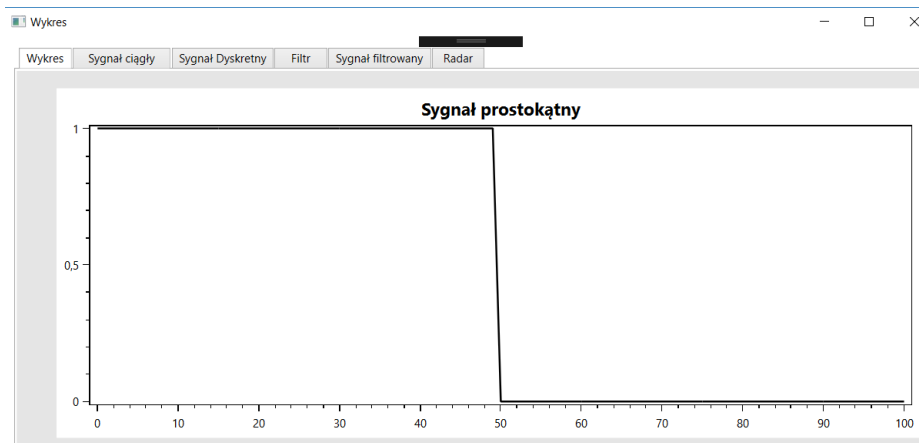
Amplituda (A): 1

Czas trwania (t_1): 100 s

Częstotliwość próbkowania (d): 1 Hz

Okres podstawowy : 100 s

Współczynnik wypełnienia: 0,5



Wykres sygnału przedstawia poniższy obrazek:
Parametry filtracji:

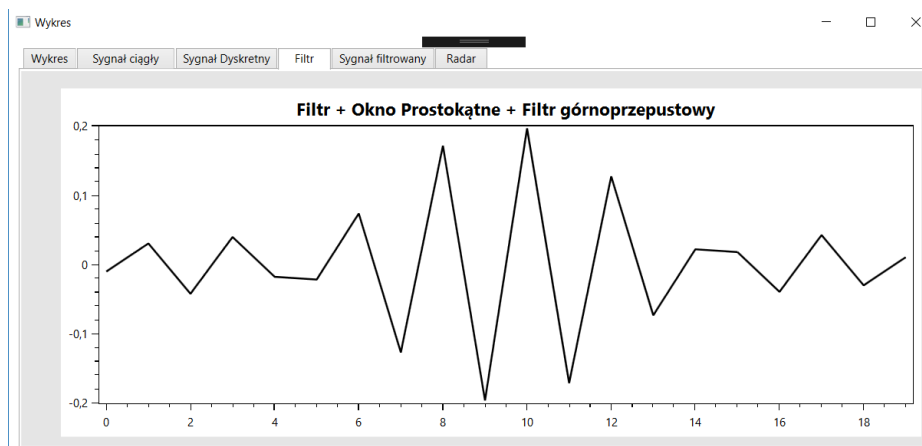
K: 10

M: 20 s

3.4.3 Rezultat

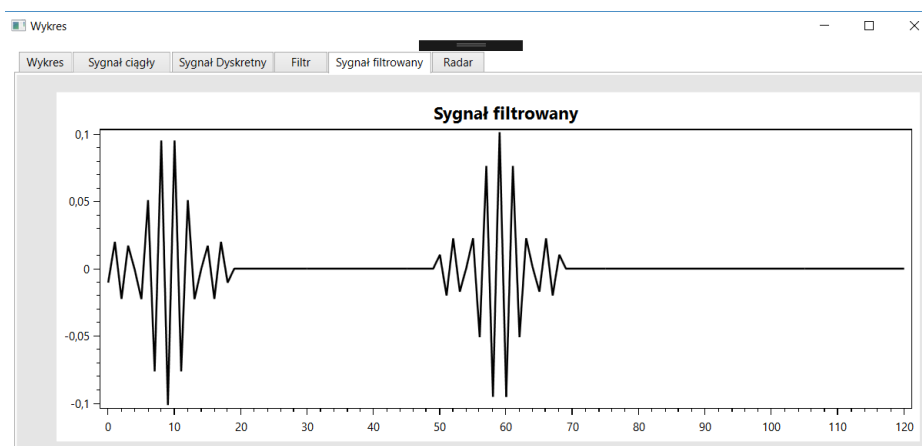
Rezultaty przedstawiają zamieszczone poniżej zrzuty ekranu z programu.

Okno prostokątne



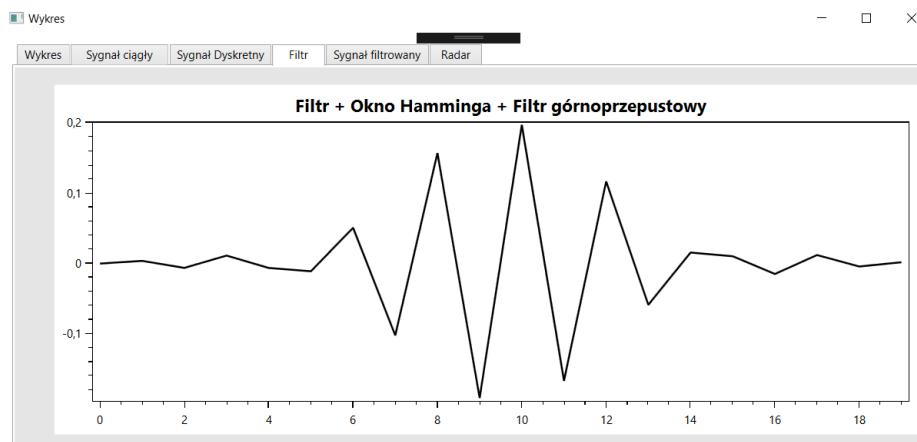
Rysunek 22: Filtracja górnoprzepustowa z oknem prostokątnym

Rys. ?? przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



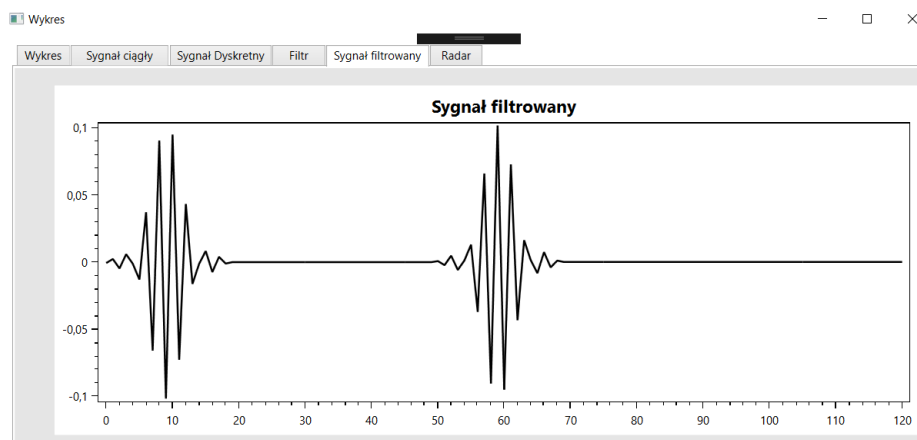
Rysunek 23: Sygnał filtracji górnoprzepustowej z oknem prostokątnym

Okno Hamminga



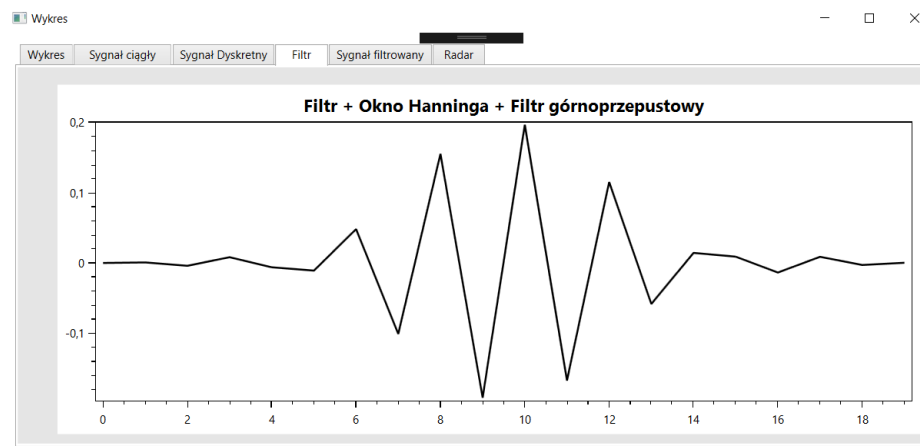
Rysunek 24: Filtracja górnoprzepustowa z oknem Hamminga

Rys. ?? przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



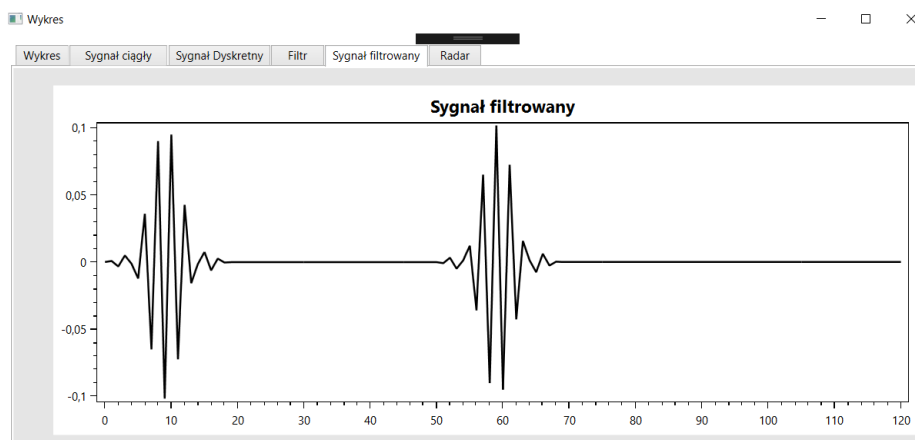
Rysunek 25: Sygnał filtracji górnoprzepustowej z oknem Hamminga

Okno Hanninga



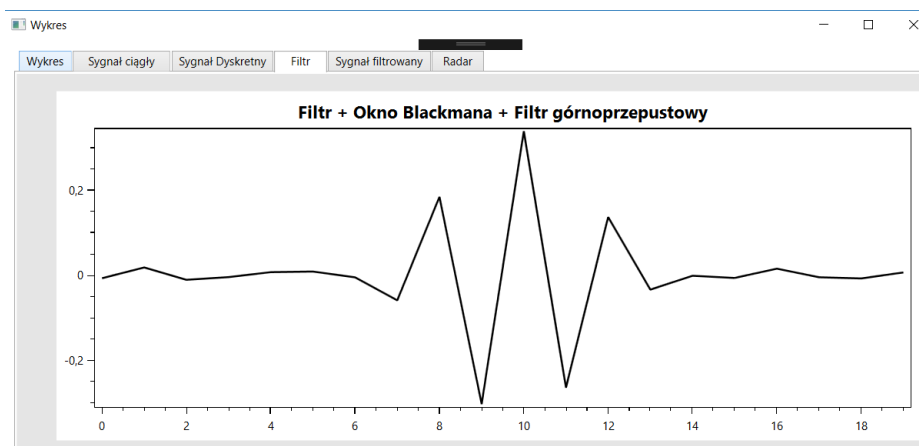
Rysunek 26: Filtracja górnoprzepustowa z oknem Hanninga

Rys. ?? przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



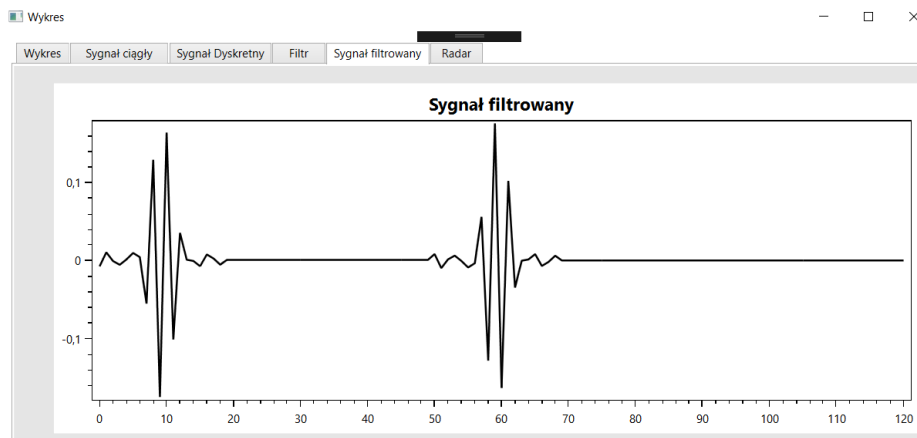
Rysunek 27: Sygnał filtracji górnoprzepustowej z oknem Hanninga

Okno Blackmana



Rysunek 28: Filtracja górnoprzepustowa z oknem Blackmana

Rys. ?? przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami.



Rysunek 29: Sygnał filtracji górnoprzepustowa z oknem Blackmana

3.5 Eksperyment nr 5

Eksperyment nr 5 - Korelacja

3.5.1 Założenia

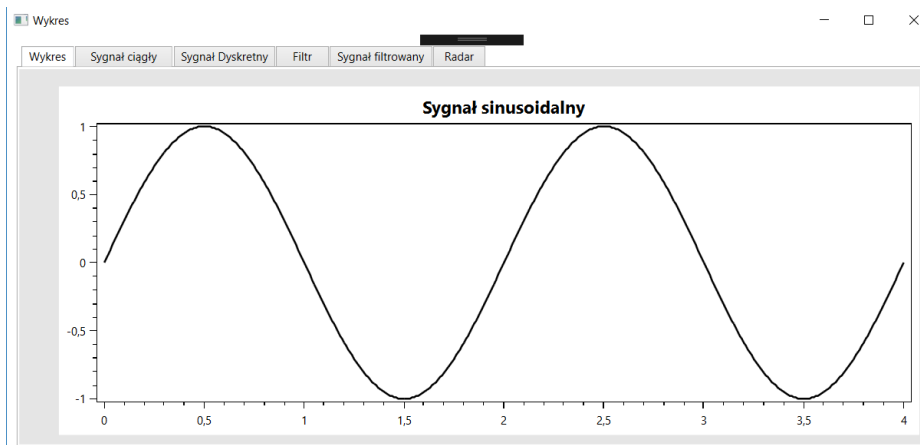
Operacja splotu jest przeprowadzana dla dwóch dowolnych sygnałów dyskretnych o wcześniej podanych (niekoniecznie jednakowych) ilościach próbek. W tym celu jest wykorzystany wzór 2.1.

3.5.2 Przebieg

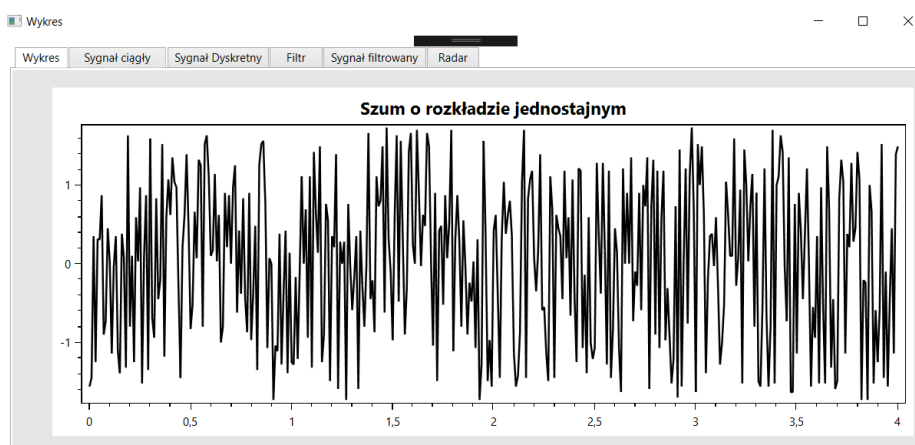
Do generacji sygnału zostały podane parametry:

Sygnał 1: [Amplituda (A):] 1
 [Czas trwania (t1):] 5 s
 [Częstotliwość próbkowania (d):] 10 Hz
 [Okres podstawowy :] 2 s

Sygnał 2: [Amplituda (A):] 1
 [Czas trwania (t1):] 5 s
 [Częstotliwość próbkowania (d):] 10 Hz



Rysunek 30: Wykres sygnału sinusoidalnego

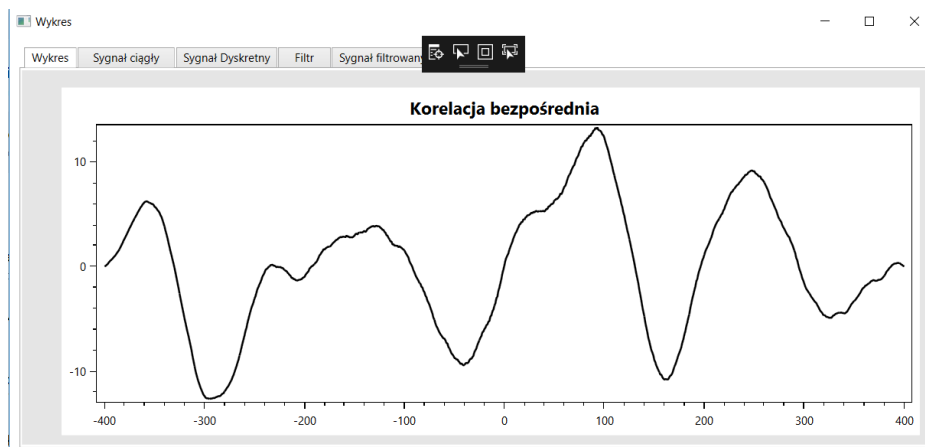


Rysunek 31: Wykres szumu gausowskiego

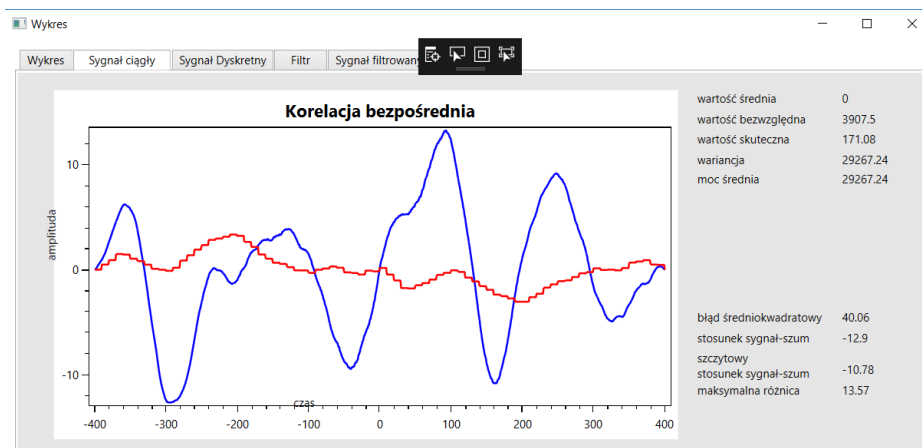
3.5.3 Rezultat

Korelacja bezpośrednia:

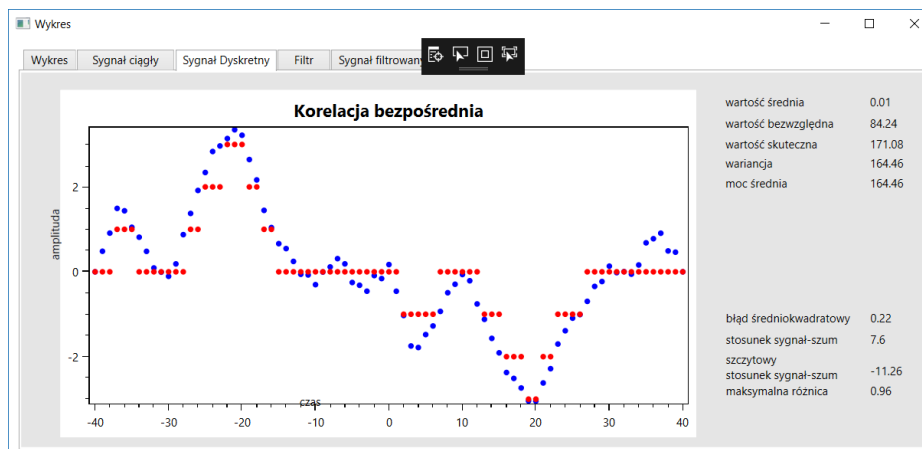
Rezultat przedstawia zamieszczony poniżej zrzut ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 40.



Rysunek 32: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągłego: kwantyzacja z obcięciem, interpolacja pierwszego rzędu



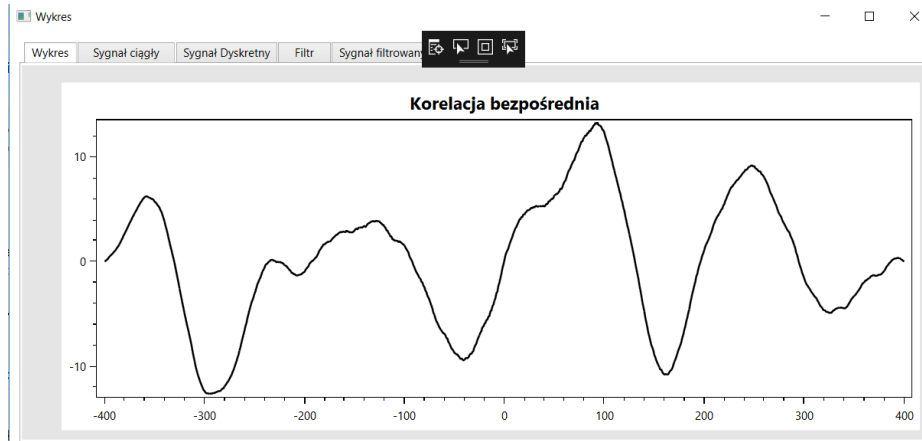
Rysunek 33: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągłego: kwantyzacja z obcięciem, interpolacja pierwszego rzędu



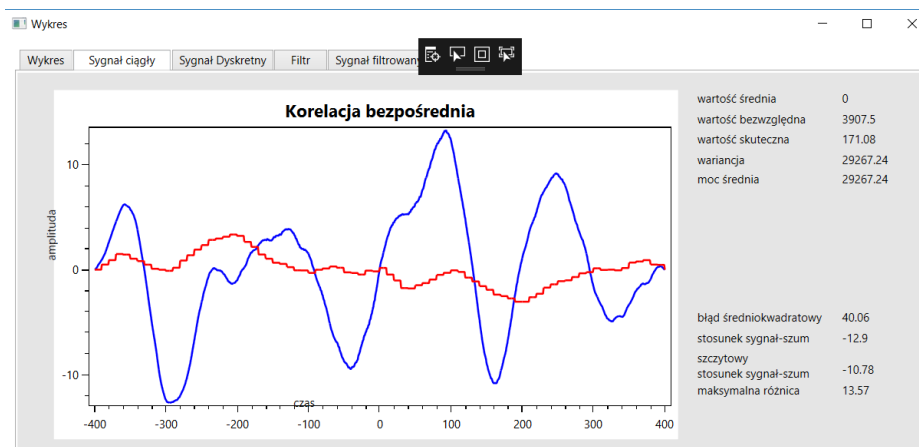
Rysunek 34: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągły: kwantyzacja z obcięciem, interpolacja pierwszego rzędu

Korelacja z wykorzystaniem splotu:

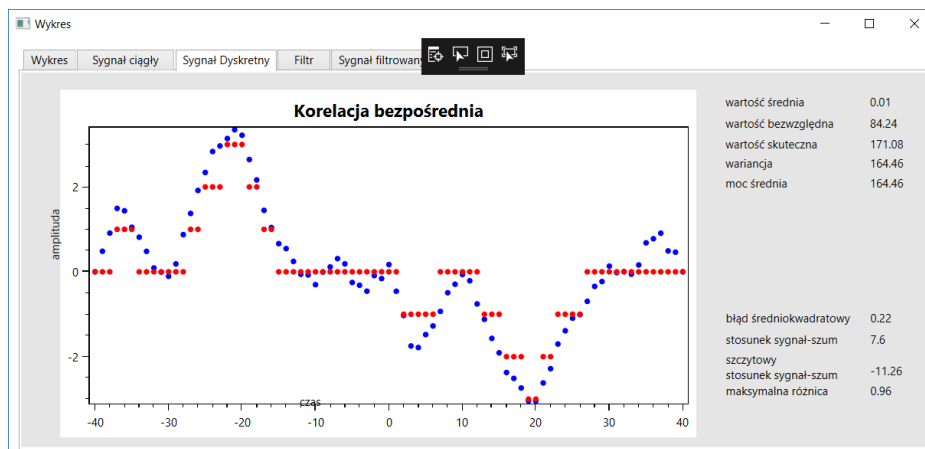
Rezultat przedstawia zamieszczony poniżej zrzut ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 40.



Rysunek 35: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągły: kwantyzacja z obcięciem, interpolacja pierwszego rzędu



Rysunek 36: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągły: kwantyzacja z obcięciem, interpolacja pierwszego rzędu



Rysunek 37: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągły: kwantyzacja z obcięciem, interpolacja pierwszego rzędu

3.6 Eksperyment nr 6

Eksperyment nr 6 - Radar

3.6.1 Założenia

Operacja splotu jest przeprowadzana dla dwóch dowolnych sygnałów dyskretnych o wczynie podanych (niekoniecznie jednakowych) ilościach próbek. W tym celu jest wykorzystany wzór 2.1.

3.6.2 Przebieg

Do generacji sygnału prostokątnego zostały podane parametry:

Amplituda (A): 1

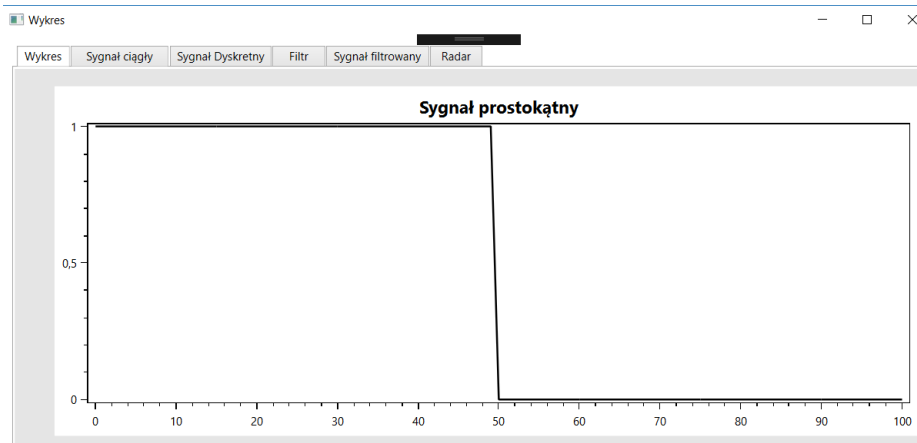
Czas trwania (t_1): 100 s

Częstotliwość próbkowania (d): 1 Hz

Okres podstawowy : 100 s

Współczynnik wypełnienia: 0,5

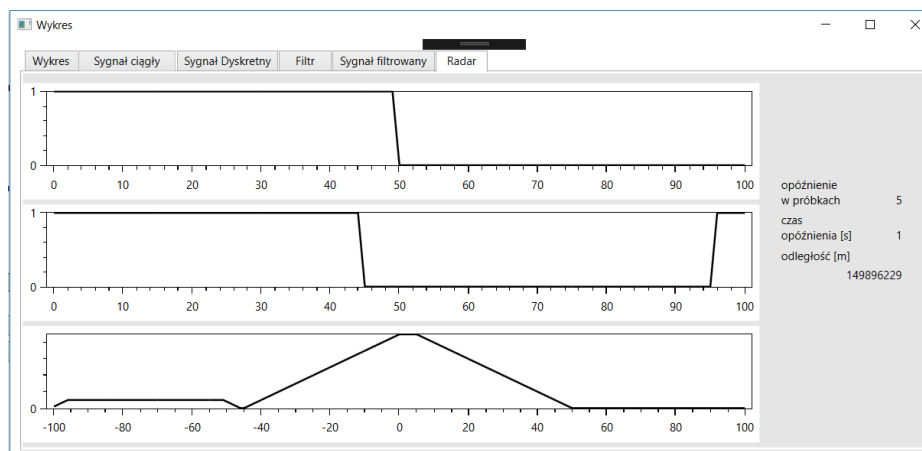
Wykres sygnału przedstawia poniższy obrazek:



3.6.3 Rezultat

Opóźnienie = 5:

Rezultat przedstawia zamieszczony poniżej zrzut ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 40.



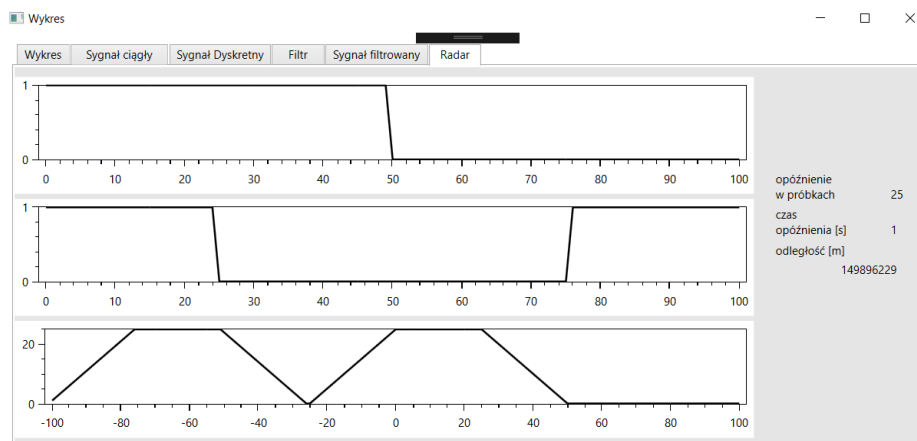
Rysunek 38: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągły: kwantyzacja z obcięciem, interpolacja pierwszego rzędu

Opóźnienie = 25:

Rezultat przedstawia zamieszczony poniżej zrzut ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 40.

Opóźnienie = 50:

Rezultat przedstawia zamieszczony poniżej zrzut ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 40.



Rysunek 39: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągły: kwantyzacja z obcięciem, interpolacja pierwszego rzędu



Rysunek 40: Wykres sygnału sinusoidalnego ciągły: kwantyzacja z obcięciem, interpolacja pierwszego rzędu

4 Wnioski

Przeprowadzone eksperymenty dowodzą, że Interpolacja pierwszego rzędu jest bardziej dokładna niż ekstrapolacja rzędu zerowego. Dzieje się tak ponieważ między próbkami sygnał się zmienia zatem interpolowanie między kolejnymi próbkami daje lepsze odwzorowanie, niż przepisywanie tej samej wartości do czasu napotkania następnej próbki. Aby uzyskać wyniki ekstrapolacji zbliżone do wyników ekstrapolacji należy przyjąć bardzo dużą częstotliwość próbkowania. Są znaczące różnice w błędach odtworzenia sygnałów przez interpolację i ekstrapolację. Interpolacja jest dużo bardziej dokładna - błąd średniokwadratowy o ok 0,2, stosunek sygnał-szum i szczytowy stosunek

sygnał-szum różnią się nawet o 10 jednostek. Co ciekawe maksymalna różnica między sygnałem analogowym, a odtwarzanym sygnałem jest minimalnie większa dla interpolacji. W przypadku kwantyzacji dużo lepiej sprawdza się kwantyzacja z zaokrągleniem. W przypadku kwantyzacji z obcięciem jeżeli próbkowaniem nie trafimy w szczyt amplitudy to maksymalna jej wartość po kwantowaniu będzie mniejsza niż ta w oryginale. Przy kwantyzacji z zaokrągleniem unikamy takiej sytuacji. Podczas próbkowania trzeba bardzo uważać przy podawaniu częstotliwości. Jeśli podamy ją zbyt małą sygnał nie zostanie odtworzony, a czasem wręcz możemy uzyskać inny sygnał.

Literatura

- [1] FTIMS Politechnika Łódzka. *Przetwarzanie sygnałów, pojęcia podstawowe* Plik, Wikamp.
- [2] FTIMS Politechnika Łódzka. *Zadanie 2 Generacja sygnału i szumu*, Wikamp.