

Zadanie nr 3 - Splot, filtracja i korelacja sygnałów

Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów

Aneta Wiśniewska, 204029 Hanna Paluszkiewicz, 203962

14.05.2018

1 Cel zadania

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się w praktyce z procesami splotu, filtracji i korelacji sygnałów.

2 Wstęp teoretyczny

2.1 Teoria

Splot to jedno z najważniejszych działań podczas filtracji sygnałów dyskretnych. Jest operacją przetwarzania dwóch sygnałów, w wyniku której otrzymujemy pojedynczy sygnał dyskretny. W ogólnym przypadku splot jest zdefiniowany wzorem:

W praktyce stosuje się sygnały o skończonych ilościach próbek roz-

$$(h * x)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

mieszczonych równomiernie w dowolnych miejscach osi czasu. Zwykle przyjmuje się konwencję indeksacyjną, gdzie oba sygnały zaczynają się na osi czasu od próbki zero. Poza granicami przedziału oba sygnały są zerowe.

Wzór dla tej konwencji przyjmuje postać:

$$(h * x)(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

Filtracja sygnałów - należy do podstawowych operacji CPS. W ramach filtracji widmo sygnału ulega modyfikacji. Zostały odfiltrowane składowe części sygnału o częstotliwościach należących do pasma zaporowego. Reszta widma leżąca w paśmie przepustowym, nie uległa zmianie lub podlega niewielkiemu tłumieniu.

Filtry ze względu na umiejscowienie pasma przepustowego i zaporowego dzielimy na:

Filtry dolnoprzepustowe - ich pasma przepustowe są określone przedziałem częstotliwości od 0 do f_0 (f_0 - częstotliwość odcięcia filtru)

Filtry górnoprzepustowe - ich pasma przepustowe są określone przedziałem częstotliwości od f_0 do $f_p/2$ (f_p - częstotliwość próbkowania sygnału)

Filtry środkowoprzepustowe - ich pasma przepustowe są określone przedziałem częstotliwości od f_d do $f_p/4$

$f_0 = f_p/K$ gdzie f_0 to częstotliwość odcięcia

f_p to częstotliwość

W zadaniu są stosowane filtry SOI - o skończonej odpowiedzi impulsowej. Zaletą tych filtrów jest łatwość implementacji (w oparciu o splot) i projektowania postaci filtru.

Przy obliczaniu próbki sygnału wyjściowego ($y(n)$) jest brane pod uwagę M przeszłych próbek sygnału wejściowego ($x(n)$). Wartości $y(n)$ obliczamy jako sumy ważone $x(n)$ z uwzględnieniem współczynników filtru $h(n)$.

Opisuje to wzór:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2}{K} & \text{dla } n=0, \\ \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{K}\right)}{\pi n} & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Gdzie:

M - rząd filtru

$h(k)$ - odpowiedź impulsowa

Jeżeli ciąg próbek sygnału wejściowego będzie ciągiem wartości zerowych, filtr SOI będzie generował na wyjściu skończony ciąg niezerowych wartości.

Powyższy wzór jest stosowany dla filtru dolnoprzepustowego. Na jego podstawie można obliczyć także działanie innych filtrów. W tym celu stosuje się wzory:

dla filtru środkowoprzepustowego:

$$s(n) = 2\sin(\pi n/2)$$

dla filtru górnoprzepustowego:

$$s(n) = (-1)^n$$

Do projektowania filtrów SOI została zastosowana metoda okna.

W praktyce często stosuje się okna:

Hamminga

$$w(n)=0.53836-0.46164 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)$$

Hanninga

$$w(n)=0.5-0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right),$$

Blackmana

$$w(n)=0.42-0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)+0.08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right).$$

Korelacja - jest ważną częścią przetwarzania sygnałów. Jest stosowana, gdy trzeba porównać sygnał z innym, zwłaszcza z przesuniętą na osi czasu swoją kopią. Polega na przetwarzaniu dwóch sygnałów dyskretnych, w czego wyniku otrzymujemy pojedynczy sygnał dyskretny. Korelacja w ogólnym przypadku jest opisywana wzorem:

$$R_{hx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(k-n)$$

Podobnie jak w operacji splotu w praktyce stosuje się sygnały o skończonych ilościach próbek rozmieszczonych równomiernie w dowolnych miejscach osi czasu i zakres zmienności próbek dla każdego n zakresy sumowań zmieniają się zgodnie z umiejscowieniem na osi czasu i liczbami próbek każdego z dyskretnych sygnałów wejściowych h oraz x . Zwykle przyjmuje się konwencję indeksacyjną, gdzie oba sygnały zaczynają się na osi czasu od próbki zero. Poza granicami przedziału oba sygnały są zerowe.

Wzór dla tej konwencji przyjmuje postać:

$$R_{hx} = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

2.2 Instrukcja obsługi aplikacji

Aplikacja do generacji szumów zawiera interfejs graficzny, który służy do obsługi przez użytkownika. Wygląd został przedstawiony na poniższym rysunku.

Menu

Sygnał prostokątny

1 Amplituda

0 Czas początkowy

100 Czas trwania

0.1 Częstotliwość próbkowania

0 Histogram

100 Okres podstawowy

0.5 Współczynnik wypełnienia

Stwórz sygnał

☒ zapisz

Odtwórz sygnał

x + y wynik

Kwantyzacja z obcięciem

Ekstrapolacja zerowego rzędu

Filtracja

10 K

100 M

Okno Prostokątne

Filtr dolnoprzepustowy

Radar

20 opóźnienie (w próbkach)

Rysunek 1: Widok główny aplikacji

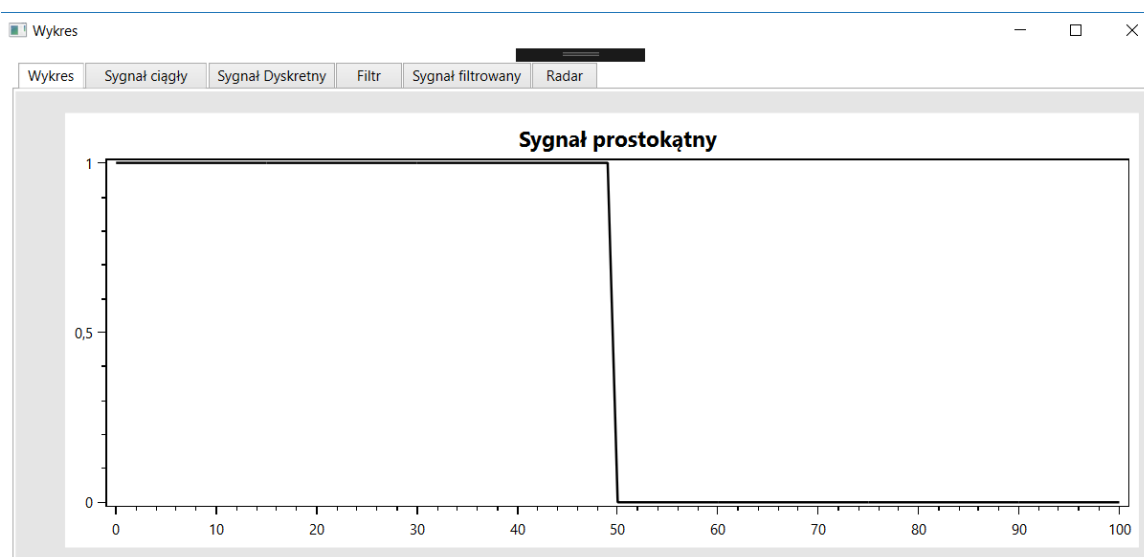
Na górze okienka znajduje się wysuwana lista możliwych do generacji sygnałów. Obok znajduje się checkbox, po zaznaczeniu którego sygnał zostanie zapisany do pliku. Niżej jest przycisk do generacji sygnałów oraz lista parametrów wykresu. Tutaj wpisuje się dane wpływające na sygnał. Pola umożliwiają ustawienie charakterystycznych parametrów sygnału. Na ich podstawie program wylicza wartości amplitudy sygnału w określonym czasie oraz wyświetla graficzną reprezentację sygnału w postaci wykresu funkcji amplitudy od czasu i histogramu.

Na dole okienka znajdują się przyciski do operacji na dwóch sygnałach (dodawanie, odejmowanie itp, a także splot, korelacja). Po kliknięciu w x i y wybieramy odpowiednio pierwszy i drugi składnik działania. Po wciśnięciu przycisku "wynik" program liczy wynik działania i wywiewa jego graficzną reprezentację. Poniżej znajdują się wysuwane listy z opcjami kwantyzacji, ekstrapolacji. Niżej znajdują się okienka służące do wpisywania parametrów filtracji. Pod nimi znajdują się do wyboru warianty okna i filtru. Na samym dole okna jest okienko do wpisywania parametrów radaru.

2.2.1 Generowanie sygnału

Aby wygenerować sygnał użytkownik musi kliknąć w generuj sygnał lub w przypadku innych operacji wynik.

Po wygenerowaniu sygnału pojawiają się dodatkowe okienko aplikacji.



Rysunek 2: Okna po generacji sygnału

W kolejnych zakładkach okienka są inne wykresy.

2.2.2 Odczyt sygnału z pliku

Oprócz generacji i zapisu do pliku, program umożliwia odczyt z pliku sygnału będącego wynikiem dyskretyzacji (bez kwantyzacji) wygenerowanego sygnału ciągłego oraz sygnału będącego wynikiem operacji na dwóch sygnałach dyskretnych.

Tak jak w przypadku generacji, sygnał jest reprezentowany graficznie w postaci histogramu i wykresu funkcji.

2.3 Opis implementacji

Aplikacja została napisana w wysokopoziomowym języku programowania - C#. Do rysowania wykresów została wykorzystana zewnętrzna biblioteka OxyPlot. Program został napisany przy pomocy metodyki obiektowej i stosuje metody numeryczne.

3 Eksperymenty i wyniki

Poniżej znajdują się wszystkie przeprowadzone eksperymenty - możliwe do uzyskania w aplikacji sygnały i wyniki.

3.1 Eksperyment nr 1

Eksperyment nr 1 - Splot

3.1.1 Założenia

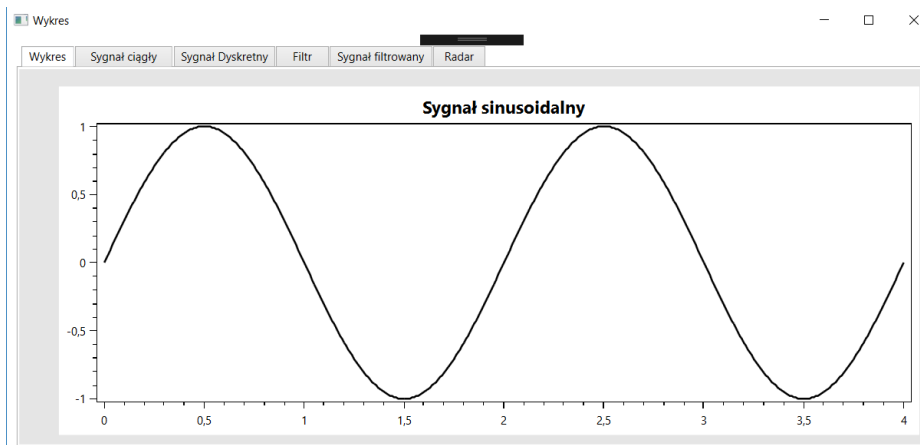
Operacja splotu jest przeprowadzana dla dwóch dowolnych sygnałów dyskretnych o wczesniej podanych (niekoniecznie jednakowych) ilościach próbek. W tym celu jest wykorzystany wzór 2.1.

3.1.2 Przebieg

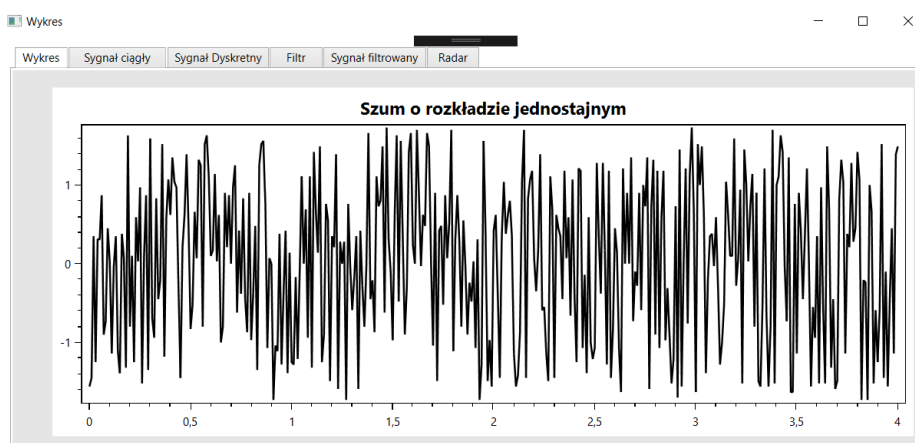
Do generacji sygnalu zostały podane parametry:

Sygnał 1: [Amplituda (A):] 1
 [Czas trwania (t1):] 4 s
 [Częstotliwość próbkowania (d):] 10 Hz
 [Okres podstawowy :] 2 s

Sygnał 2: [Amplituda (A):] 1
 [Czas trwania (t1):] 4 s
 [Częstotliwość próbkowania (d):] 10 Hz



Rysunek 3: Wykres sygnału sinusoidalnego



Rysunek 4: Wykres szumu gausowskiego

3.1.3 Rezultat

Rezultat przedstawia zamieszczony poniżej zrzut ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 5.

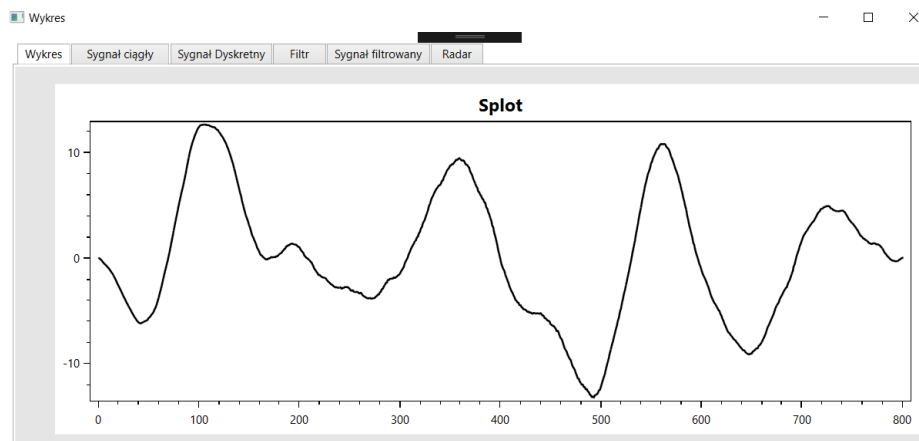
3.2 Eksperyment nr 2

Eksperyment nr 2 - Filtracja z filtrem dolnoprzepustowym

3.2.1 Założenia

Filtr dolnoprzepustowy opisuje wzór, na podstawie odwrotnego przekształcenia Fouriera:

gdzie:



Rysunek 5: Wykres splotu sygnałów 1 i 2

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2}{K} & \text{dla } n=0, \\ \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{K}\right)}{\pi n} & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

n - liczba całkowita,

częstotliwość odcięcia filtru - $f_0 = f_p/K$

Zakładamy, że filtr jest idealny - w pasmie przepustowym nie zmienia się widmo sygnału wejściowego - transmitancja jest równa 1. W pasmie zaporowym składowe częstotliwościowe zostaną kompletnie wytłumione (transmitancja równa 0).

Ze względu na nieskończoną liczbę współczynników $h(n)$ nie stosuje się tego wzoru w praktyce.

Wzór na odpowiedź impulsową filtru o M współczynników z przesunięciem (w celu uzyskania nieujemnych indeksów):

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2}{K} & \text{dla } n=(M-1)/2, \\ \frac{\sin\left(\frac{2\pi(n-(M-1)/2)}{K}\right)}{\pi(n-(M-1)/2)} & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

gdzie:

$n = 0, 1, \dots, M-1$

częstotliwość odcięcia filtru - $f_0 = f_p/K$

3.2.2 Przebieg

Do generacji sygnału prostokątnego zostały podane parametry:

Amplituda (A): 1

Czas trwania (t_1): 100 s

Częstotliwość próbkowania (d): 1 Hz

Okres podstawowy : 100 s

Współczynnik wypełnienia: 0,5

1:

K: 10

M: 20

2: (drugi przykład filtru dolnoprzepustowego i okna prostokątnego)

K: 10

M: 100

3: (trzeci przykład filtru dolnoprzepustowego i okna prostokątnego)

K: 100

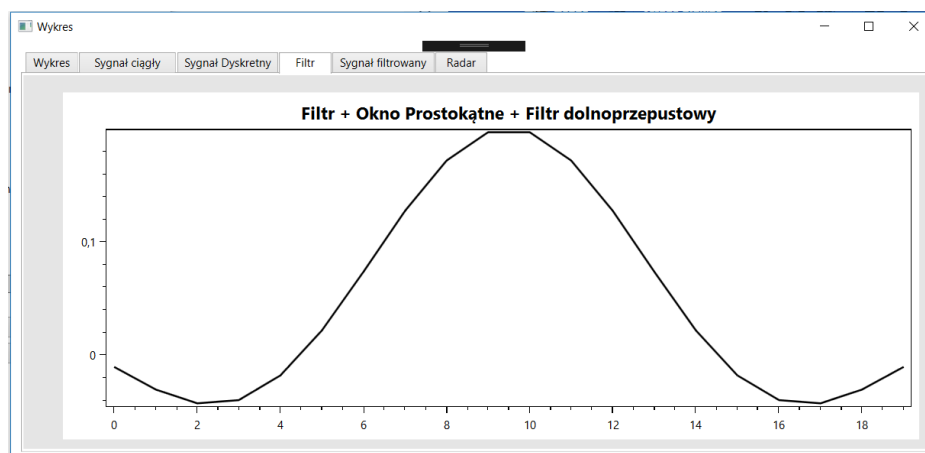
M: 20

3.2.3 Wynik

Wyniki przedstawiają zamieszczone poniżej zrzuty ekranu z programu.

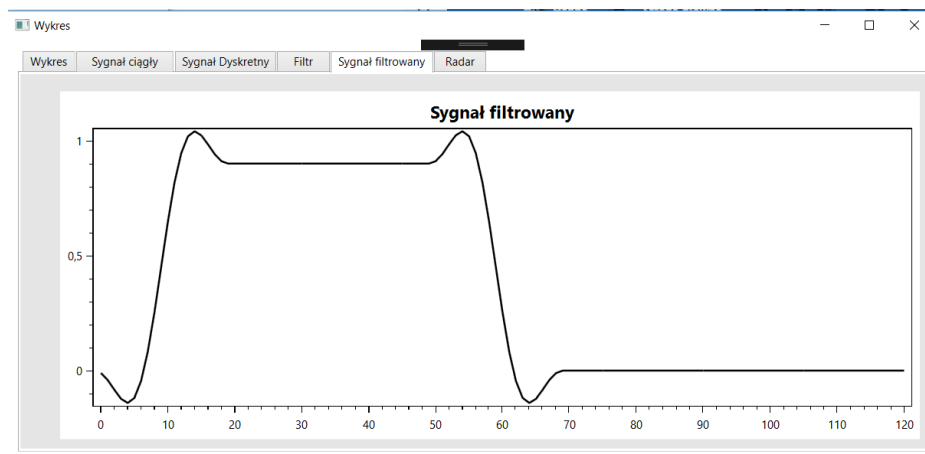
Okno prostokątne

1:

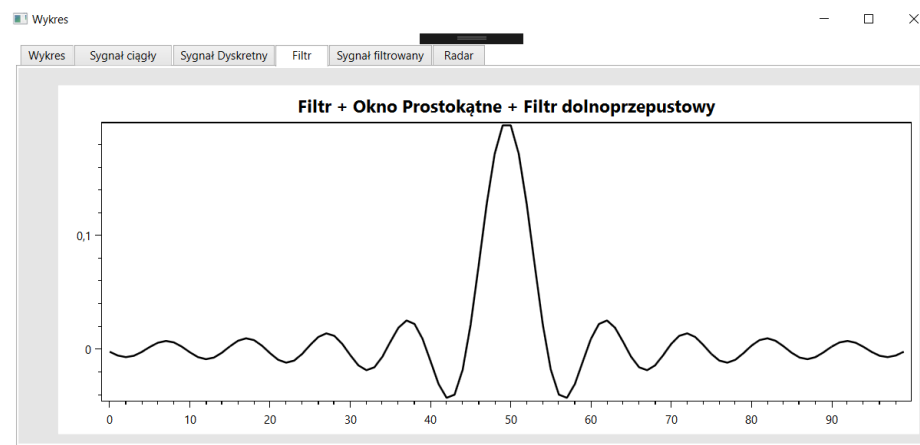


Rysunek 6: Filtracja dolnoprzepustowa z oknem prostokątnym

Rys. ?? przedstawia histogram sygnału z opisanymi powyżej parametrami. 2:

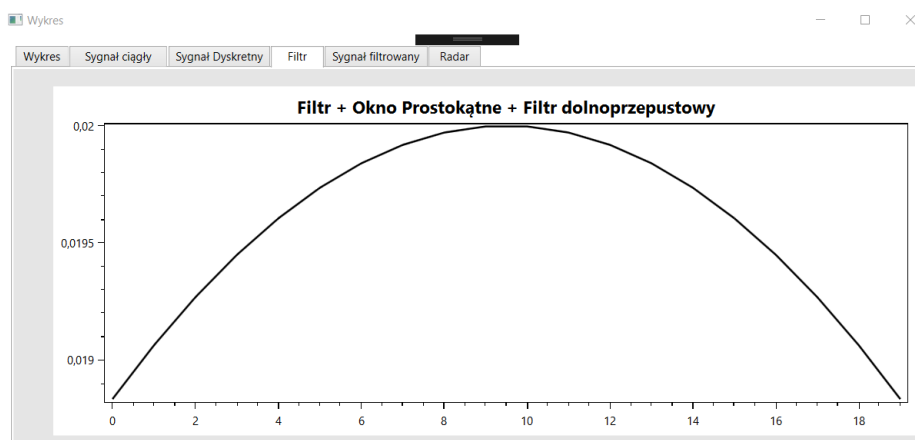


Rysunek 7: Sygnał filtracji dolnoprzepustowej z oknem prostokątnym

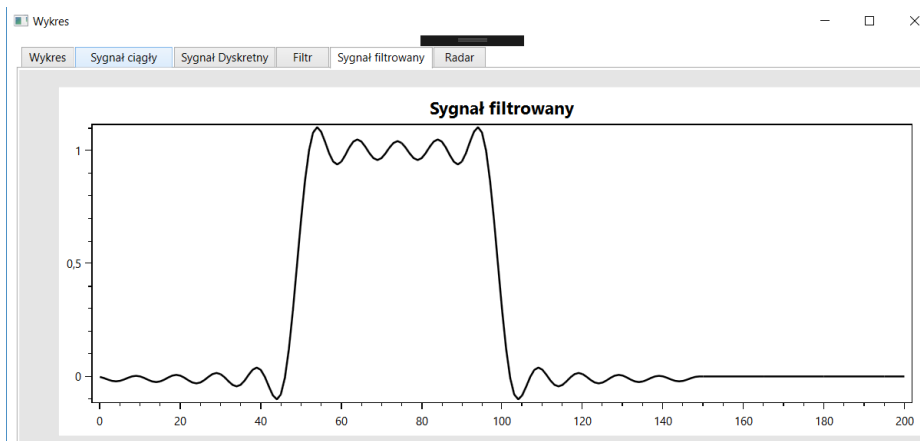


Rysunek 8: Filtracja dolnoprzepustowa z oknem prostokątnym

3:

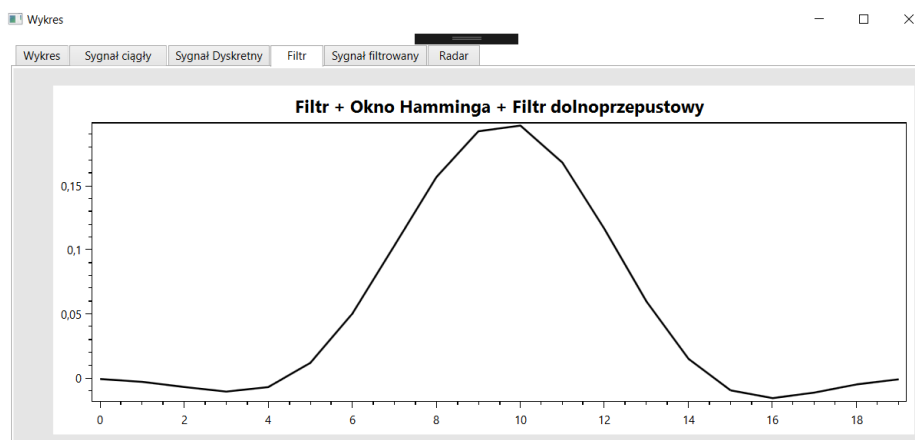


Rysunek 9: Filtracja dolnoprzepustowa z oknem prostokątnym

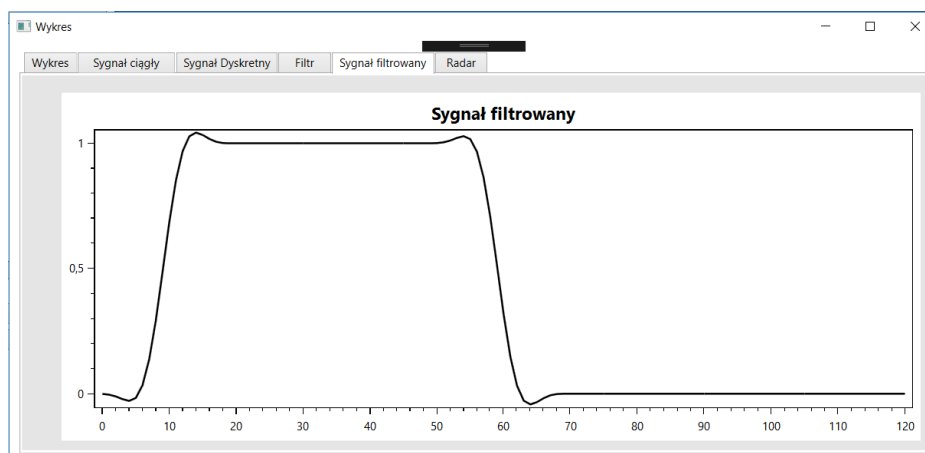


Rysunek 10: Sygnał filtracji dolnoprzepustowej z oknem prostokątnym

Okno Hamminga

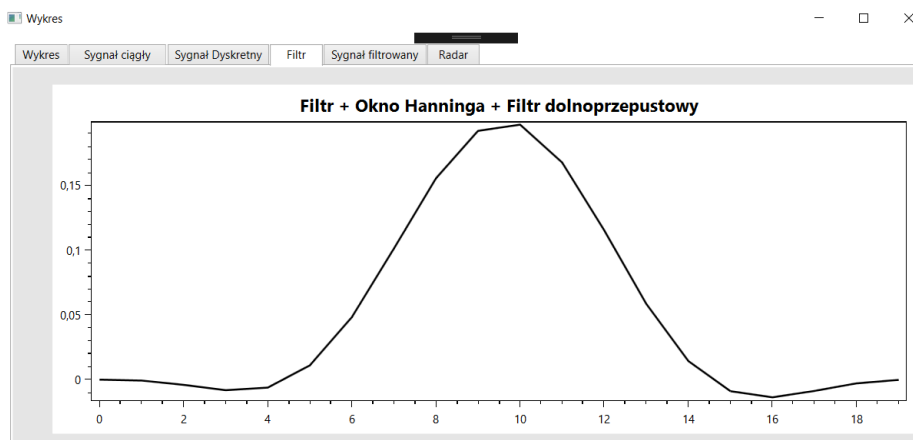


Rysunek 11: Filtracja dolnoprzepustowa z oknem Hamminga

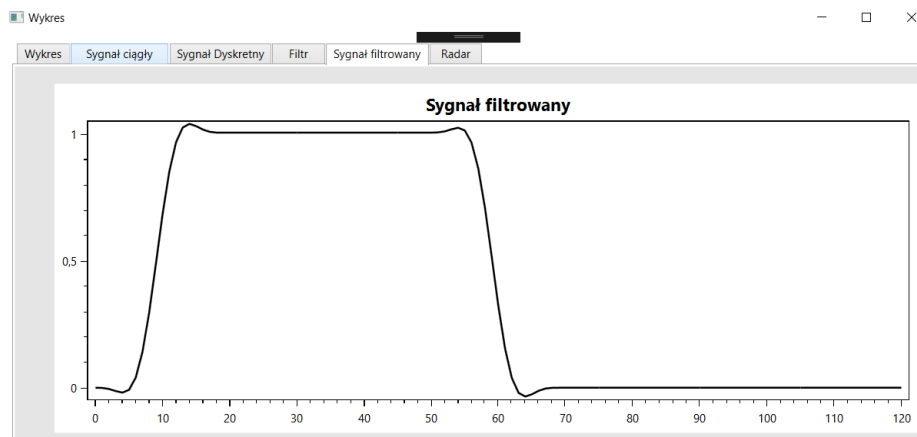


Rysunek 12: Sygnał filtracja dolnoprzepustowej z oknem Hamminga

Okno Hanninga

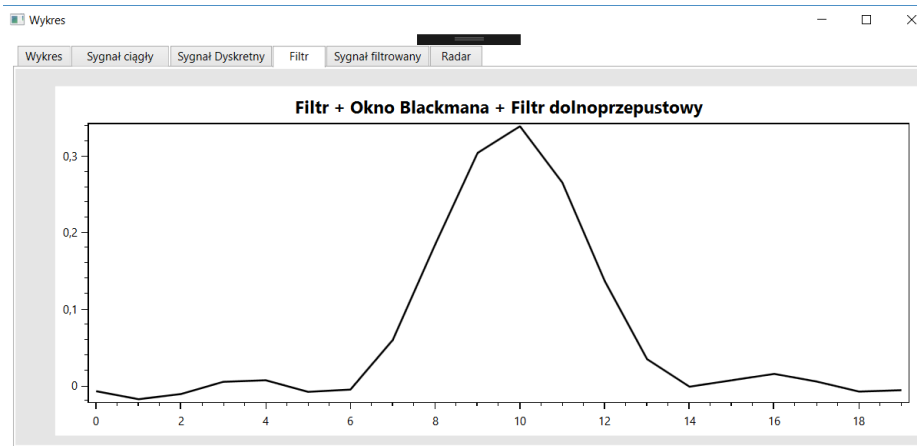


Rysunek 13: Filtracja dolnoprzepustowa z oknem Hanninga

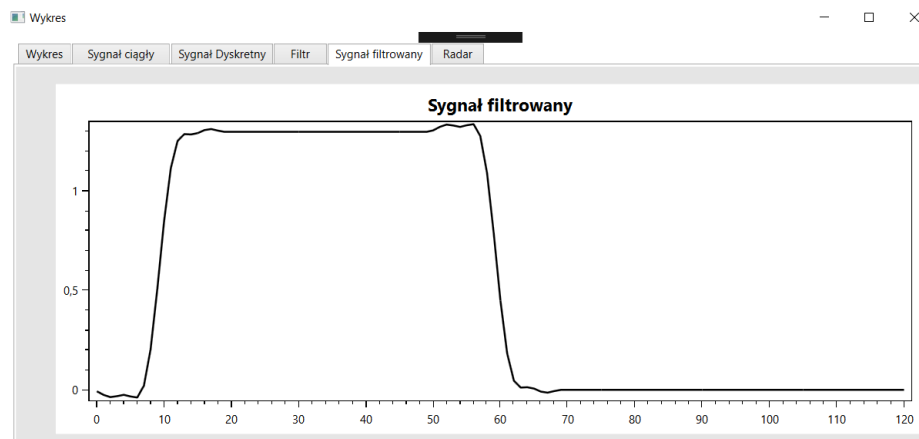


Rysunek 14: Sygnał filtracji dolnoprzepustowej z oknem Hanninga

Okno Blackmana



Rysunek 15: Filtracja dolnoprzepustowa z oknem Blackmana



Rysunek 16: Sygnał filtracji dolnoprzepustowej z oknem Blackmana

3.3 Eksperyment nr 3

Eksperyment nr 3 - Filtracja z filtrem środkowoprzepustowym

3.3.1 Założenia

Z wykorzystaniem twierdzenia o modulacji przekształcamy odpowiedź impulsową filtru dolnoprzepustowego do odpowiedzi filtru środkowoprzepustowego: współczynniki $h(n)$ są mnożone przez sygnał sinusoidalny o częstotliwości $f = f_p/4$

Wtedy $f_d = f_p/4 - f_0$ i $f_g = f_p/4 + f_0$.

3.3.2 Przebieg

Do generacji sygnału prostokątnego zostały podane parametry:

Amplituda (A): 1

Czas trwania (t_1): 100 s

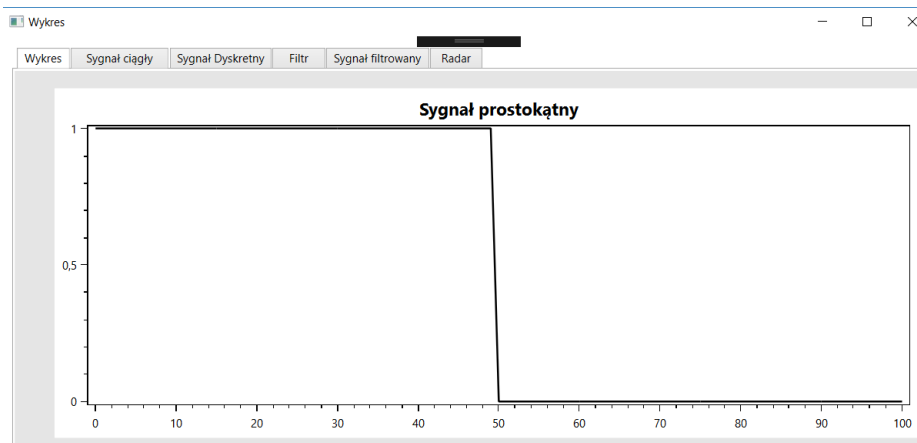
Częstotliwość próbkowania (d): 1 Hz

Okres podstawowy : 100 s

Współczynnik wypełnienia: 0,5

Wykres sygnału przedstawia poniższy obrazek:

Parametry filtracji:



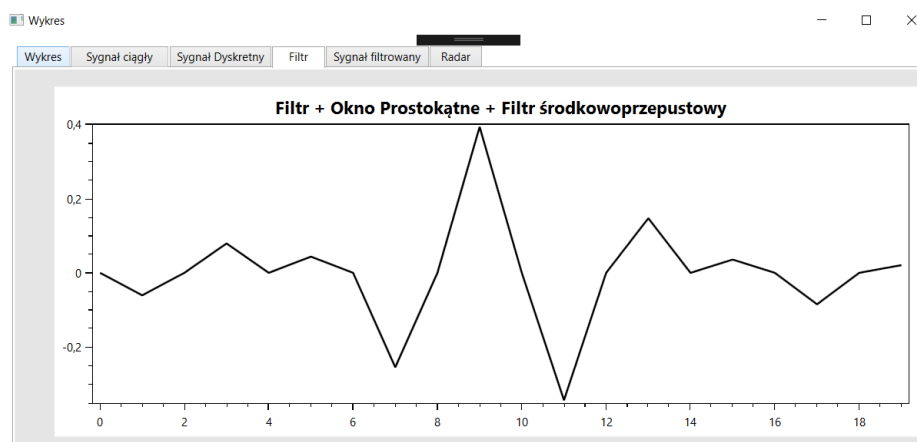
$K: 10$

$M: 20 \text{ s}$

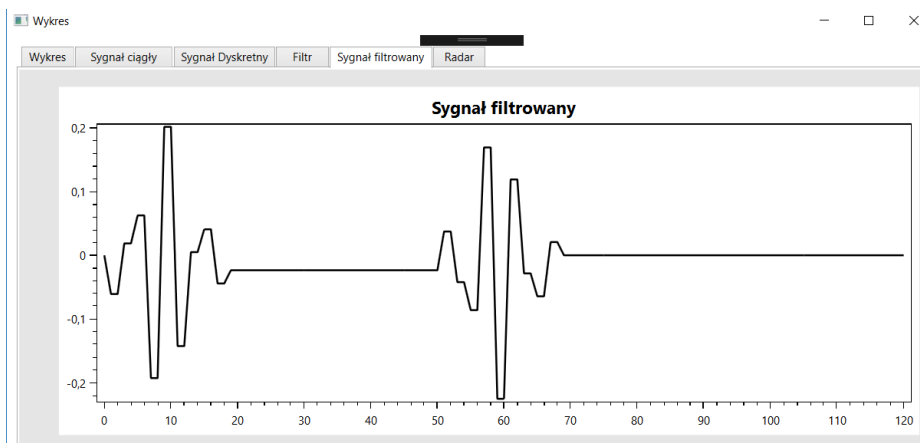
3.3.3 Rezultat

Rezultaty przedstawiają zamieszczone poniżej zrzuty ekranu z programu.

Okno prostokątne

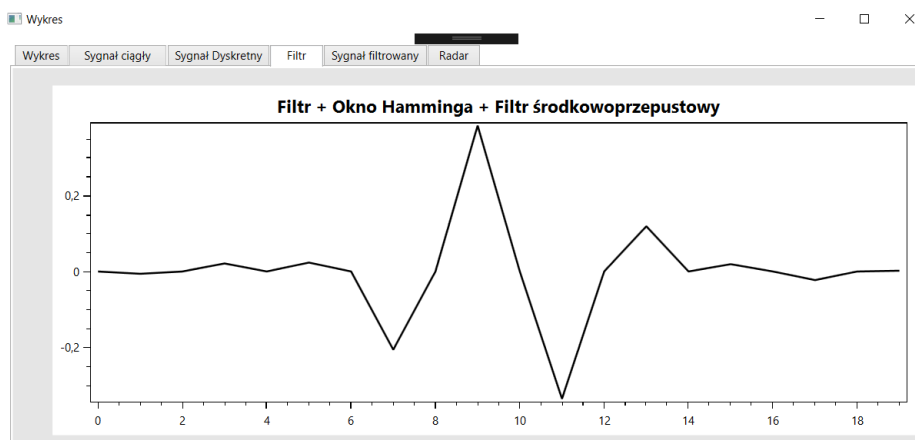


Rysunek 17: Filtracja środkowoprzepustowa z oknem prostokątnym

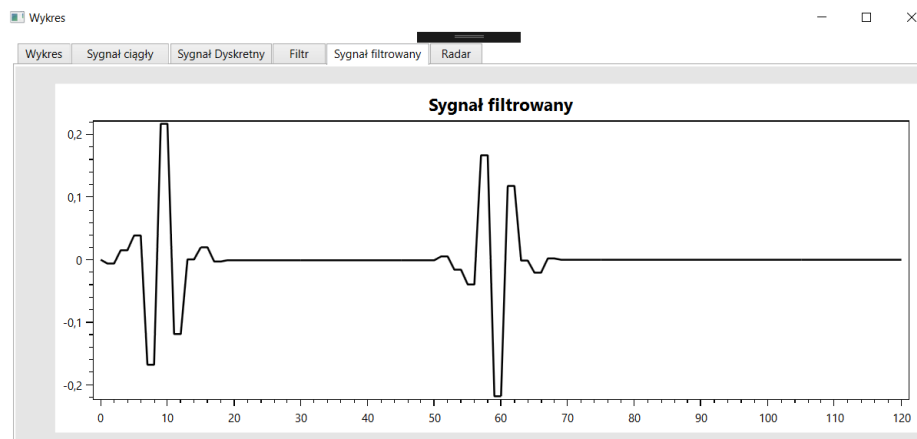


Rysunek 18: Sygnał filtracji środkowoprzepustowej z oknem prostokątnym

Okno Hamminga

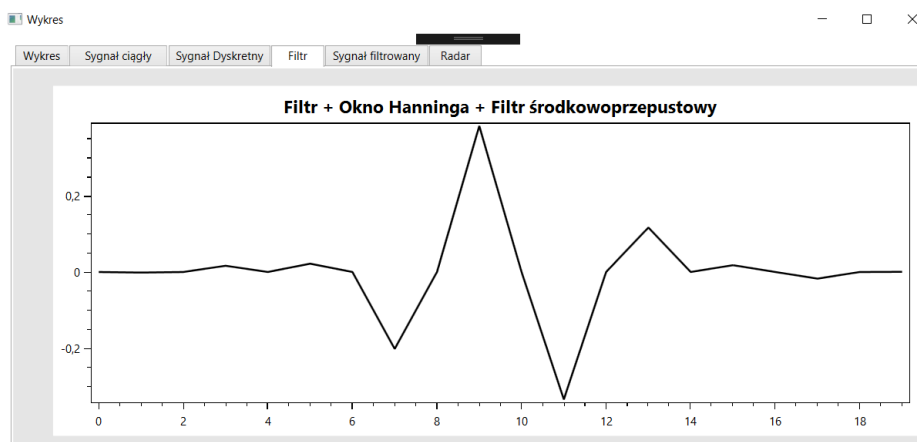


Rysunek 19: Filtracja środkowoprzepustowa z oknem Hamminga

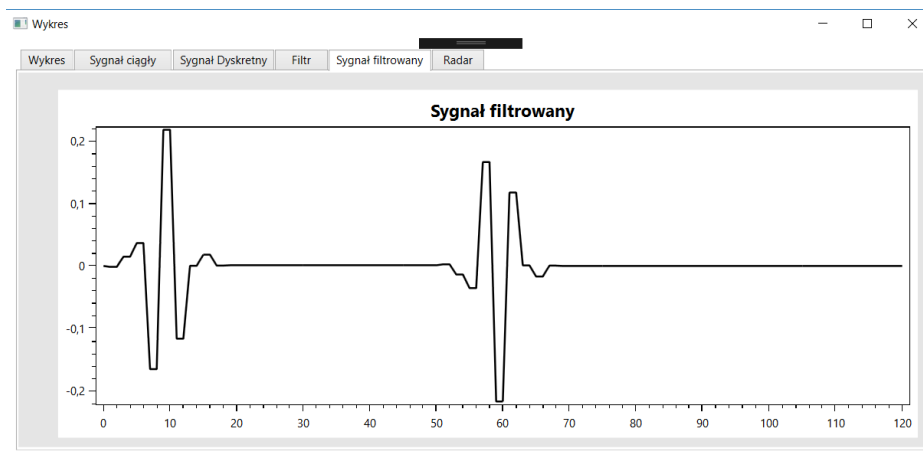


Rysunek 20: Sygnał filtracji srodkowoprzepustowej z oknem Hamminga

Okno Hanninga

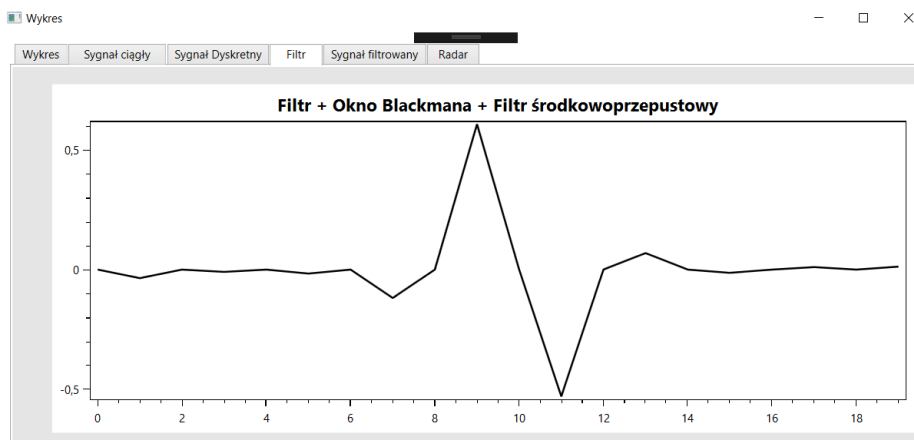


Rysunek 21: Filtracja srodkowoprzepustowa z oknem prostokątnym

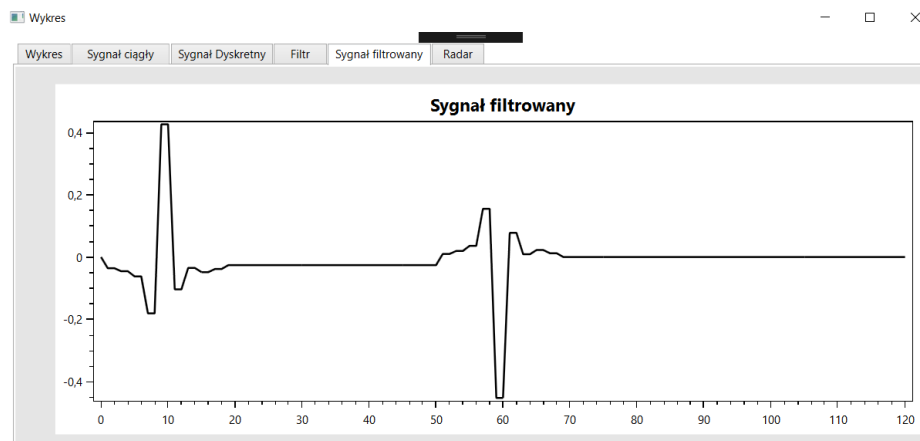


Rysunek 22: Sygnał filtracji srodkowoprzepustowej z oknem Hamminga

Okno Blackmana



Rysunek 23: Filtracja srodkowoprzepustowa z oknem prostokątnym



Rysunek 24: Sygnał filtracji środkowoprzepustowej z oknem Blackmana

3.4 Eksperyment nr 4

Eksperyment nr 4 - Filtracja z filtrem górnoprzepustowym

3.4.1 Założenia

Z wykorzystaniem twierdzenia o modulacji przekształcamy odpowiedź impulsową filtru dolnoprzepustowego do odpowiedzi filtru górnoprzepustowego: współczynniki $h(n)$ są mnożone przez sygnał sinusoidalny o częstotliwości $f = f_p/2$. Wtedy $f_0 = f_p/2 - f_0$ (f_0 - nowa częstotliwość odcięcia).

3.4.2 Przebieg

Do generacji sygnału prostokątnego zostały podane parametry:

Amplituda (A): 1

Czas trwania (t_1): 100 s

Częstotliwość próbkowania (d): 1 Hz

Okres podstawowy : 100 s

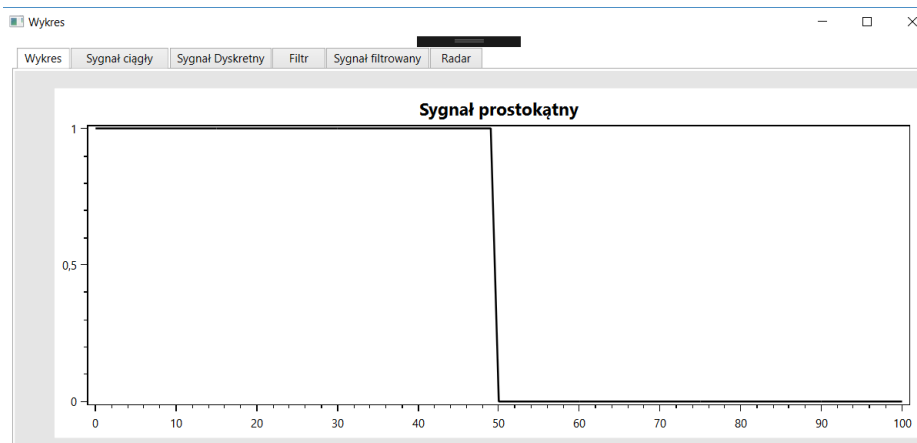
Współczynnik wypełnienia: 0,5

Wykres sygnału przedstawia poniższy obrazek:

Parametry filtracji:

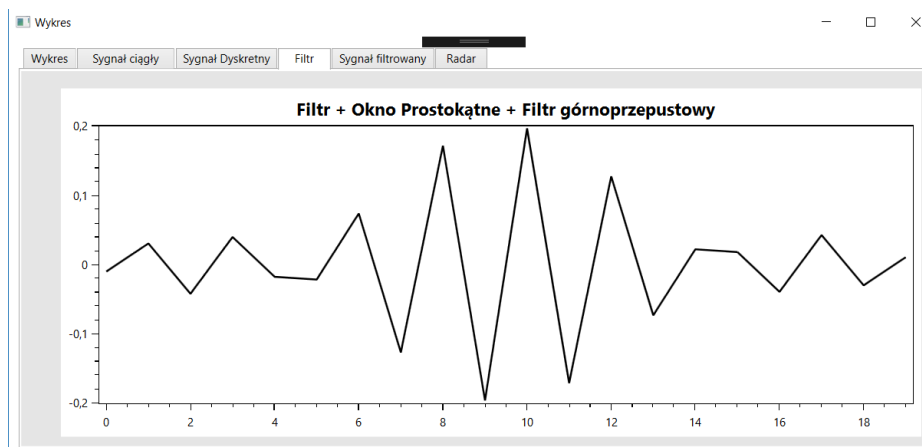
K: 10

M: 20 s

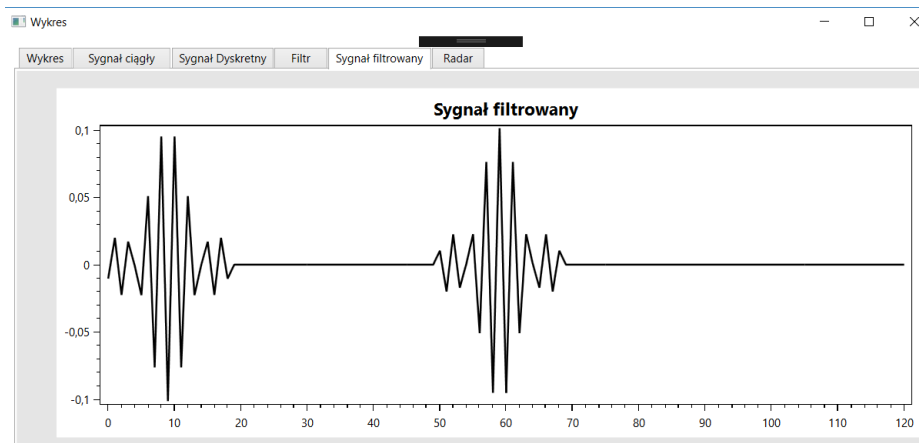


3.4.3 Rezultat

Rezultaty przedstawiają zamieszczone poniżej zrzuty ekranu z programu. Okno prostokątne

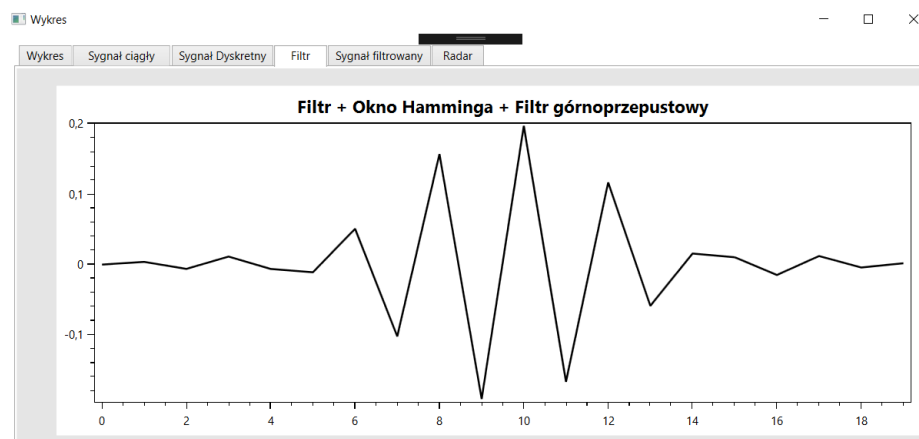


Rysunek 25: Filtracja górnoprzepustowa z oknem prostokątnym

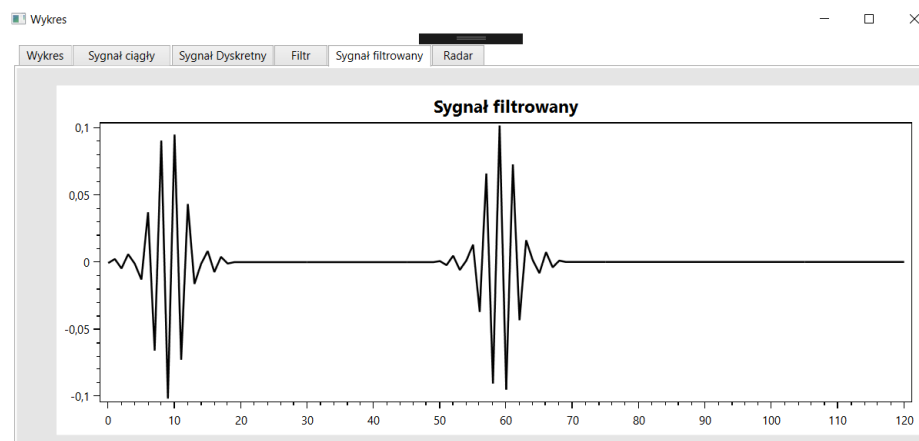


Rysunek 26: Sygnał filtracji górnoprzepustowej z oknem prostokątnym

Okno Hamminga

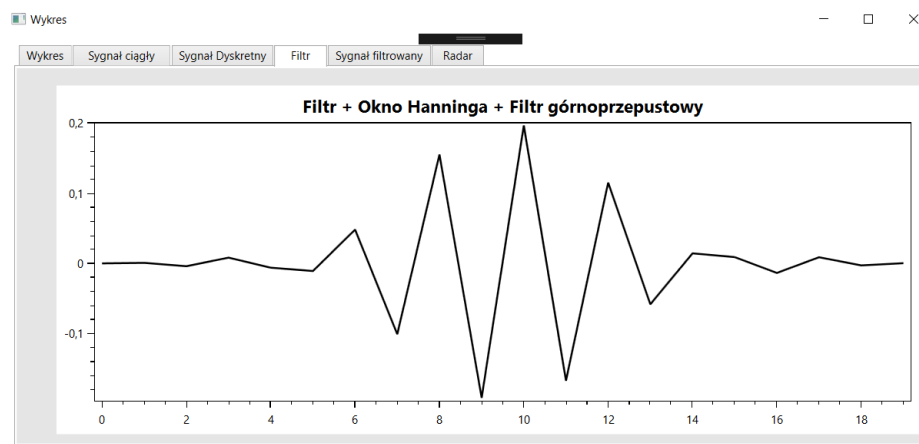


Rysunek 27: Filtracja górnoprzepustowa z oknem Hamminga

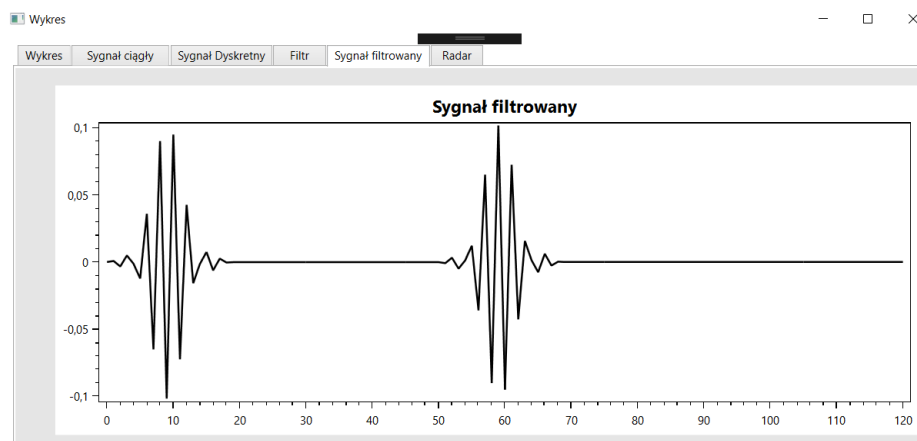


Rysunek 28: Sygnał filtracji górnoprzepustowej z oknem Hamminga

Okno Hanninga

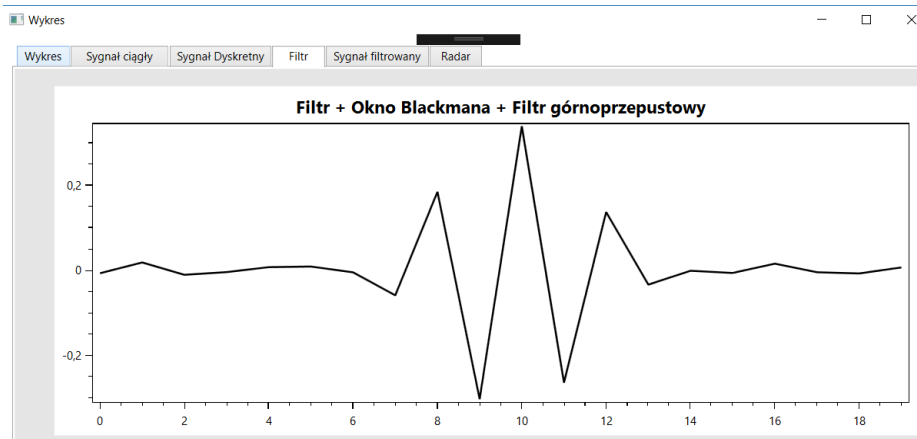


Rysunek 29: Filtracja górnoprzepustowa z oknem Hanninga

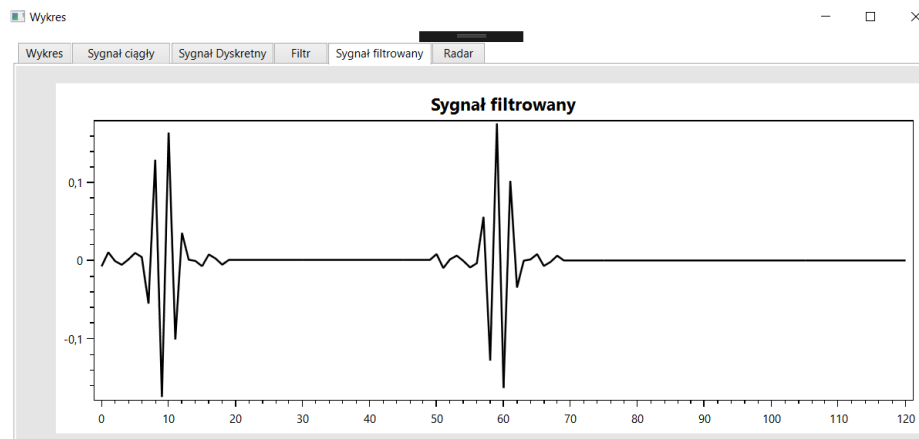


Rysunek 30: Sygnał filtracji górnoprzepustowej z oknem Hanninga

Okno Blackmana



Rysunek 31: Filtracja górnoprzepustowa z oknem Blackmana



Rysunek 32: Sygnał filtracji górnoprzepustowa z oknem Blackmana

3.5 Eksperyment nr 5

Eksperyment nr 5 - Korelacja

3.5.1 Założenia

Eksperyment jest przeprowadzany na dwa sposoby: implementację bezpośrednią i implementację z użyciem splotu.

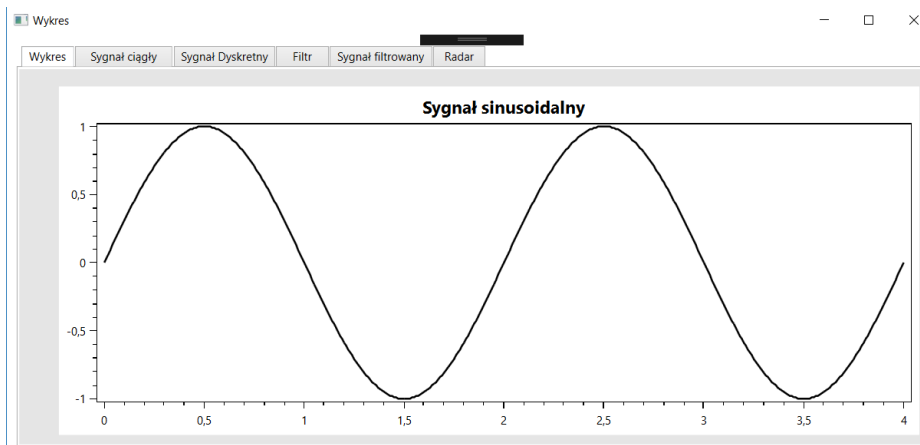
W pierwszym przypadku stosujemy do operacji korelacji wzór bezpośredni 2.1. W drugim do obliczenia korelacji jest wykorzystywany wzór na splot 2.1.

3.5.2 Przebieg

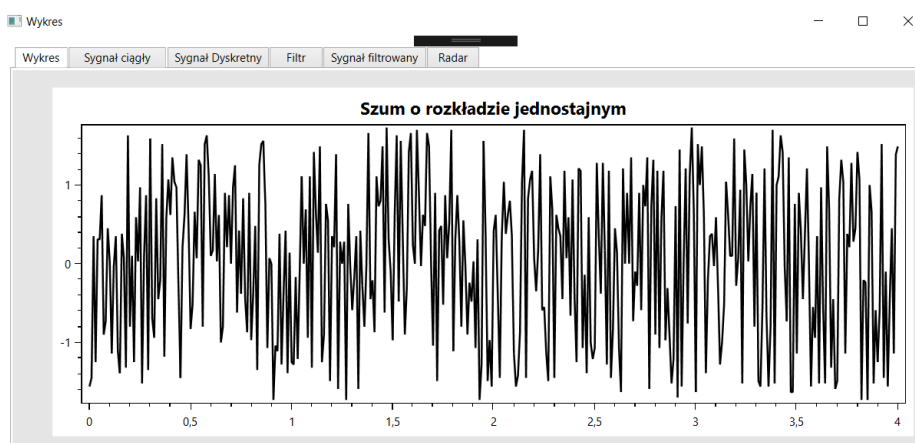
Do generacji sygnału zostały podane parametry:

Sygnał 1: [Amplituda (A):] 1
 [Czas trwania (t1):] 5 s
 [Częstotliwość próbkowania (d):] 10 Hz
 [Okres podstawowy :] 2 s

Sygnał 2: [Amplituda (A):] 1
 [Czas trwania (t1):] 5 s
 [Częstotliwość próbkowania (d):] 10 Hz



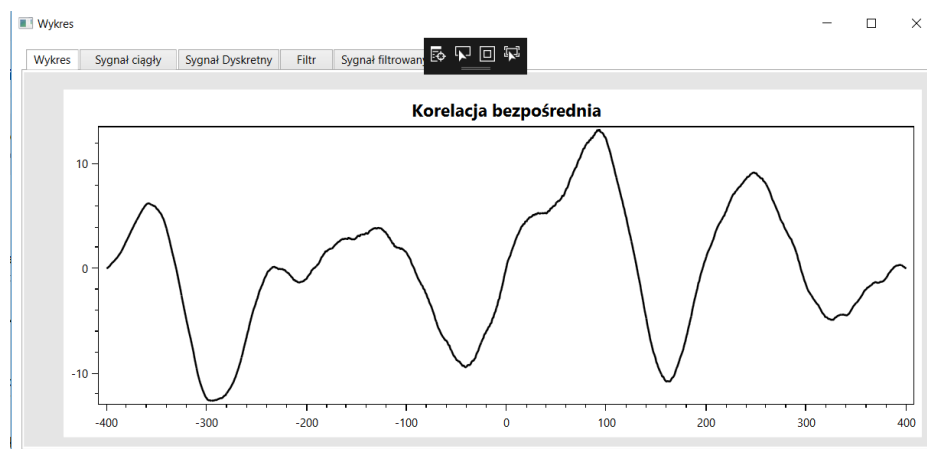
Rysunek 33: Wykres sygnału sinusoidalnego



Rysunek 34: Wykres szumu gausowskiego

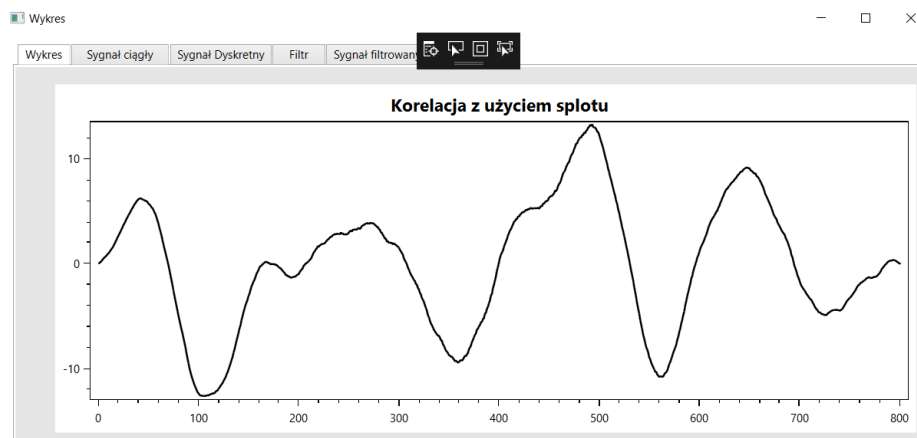
3.5.3 Rezultat

Korelacja bezpośrednia:
Rezultat przedstawia zamieszczony poniżej zrzut ekranu z programu. Został zastosowany wzór 2.1.



Rysunek 35: Wykres korelacji bezpośredniej

Korelacja z wykorzystaniem splotu:
Rezultat przedstawia zamieszczony poniżej zrzut ekranu z programu. Został zastosowany wzór 2.1.



Rysunek 36: Wykres korelacji z wykorzystaniem splotu

3.6 Eksperyment nr 6

Eksperyment nr 6 - Radar

3.6.1 Założenia

Analiza korelacyjna (porównywanie sygnałów) jest stosowana do pomiaru odległości sygnałów przesuniętych w czasie od celu. Stosuje się do tego radar. Wysyła on sygnał sondujący, który w określonych przypadkach (gdy sygnał jest odpowiednio zmodulowany) może być sygnałem okresowym. Sygnał po odbiciu się od celu wraca do nadajnika.

Pomiar odległości dokonuje się na bazie pomiaru opóźnienia przy użyciu analizy korelacyjnej sygnału wysłanego i powracającego. Gdy częstotliwość próbkowania obu sygnałów jest jednakowa i odpowiednio duża, można w wyznaczonych odstępach dokonywać analizy korelacyjnej, która jest spróbkowana i zbuforowana, dwóch sygnałów - sondującego i zwrotnego. Osiąga się to dzięki obliczeniu wzajemnej korelacji pary odpowiadających sobie sygnałów, w celu uaktualnienia odczytu odległości od celu.

Korelacja przyjmuje największą wartość, gdy nakładane na siebie sygnały pokrywają się w jak największym stopniu. Wzór 2.1 umożliwia nałożenie obydwu sygnałów dla każdego odstępu czasowego próbkowania, z odpowiednim przesunięciem sygnałów sondującego i zwrotnego względem siebie. Także pozwala nam na obliczenie pojedynczej wartości korelacji dla każdego z odstępów. Możemy znaleźć maksimum funkcji korelacji.

3.6.2 Przebieg

Została zaimplementowana symulacja działania korelacyjnego czujnika odległości.

Do generacji sygnału prostokątnego zostały podane parametry:

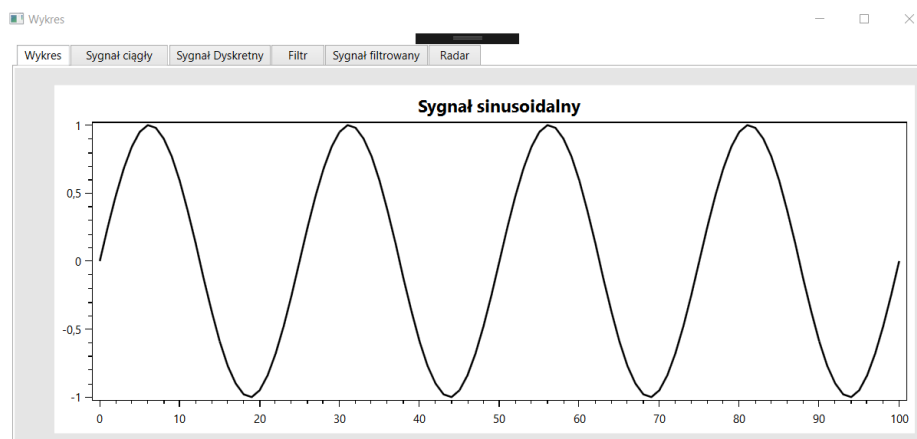
Amplituda (A): 1

Czas trwania (t_1): 100 s

Częstotliwość próbkowania (d): 1 Hz

Okres podstawowy : 25 s

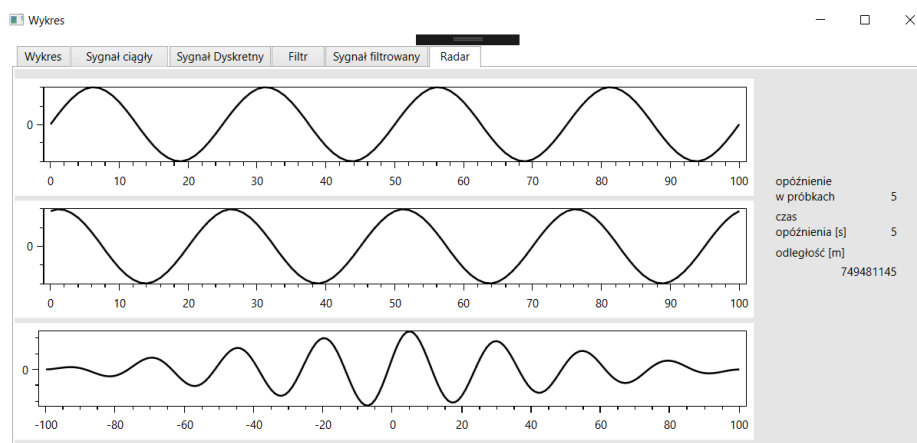
Wykres sygnału przedstawia poniższy obrazek:



3.6.3 Rezultat

Opóźnienie = 5:

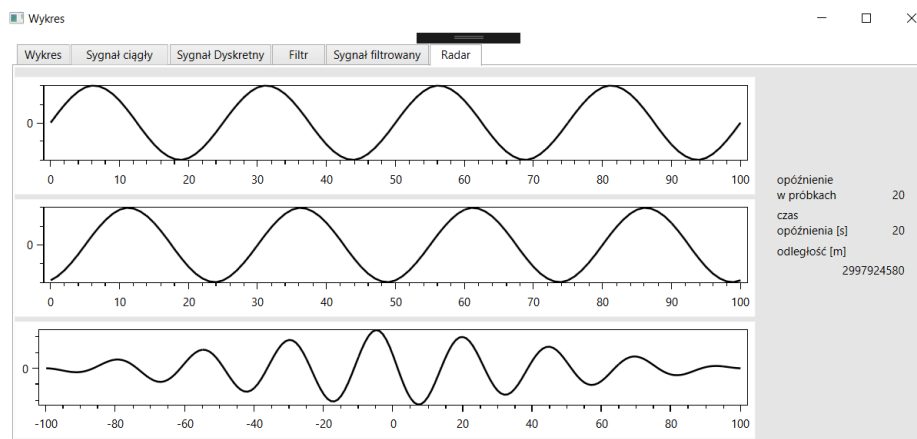
Rezultat przedstawia zamieszczony poniżej zrzut ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 5.



Rysunek 37: Radar sygnału sinusoidalnego z opóźnieniem 5

Opóźnienie = 20:

Rezultat przedstawia zamieszczony poniżej zrzut ekranu z programu. Wartości liczbowe oraz wykres funkcji amplitudy od czasu przedstawia 5.



Rysunek 38: Radar sygnału sinusoidalnego z opóźnieniem 20

4 Wnioski

4.1 Splot

Splot dwóch funkcji w dziedzinie czasu jest równoważny pomnożeniu ich widm w dziedzinie częstotliwości. Można też wyrazić go przez korelację - trzeba sygnał x odwrócić. Długość splotu równa się sumie długości sygnałów splutowanych -1. W wyniku operacji splotu sygnały zostały nałożone na siebie i w wyniku zastosowania odpowiednich wzorów sygnał wyjściowy ma cechy obu sygnałów.

4.2 Filtracja

W filtrze dolnoprzepustowym okna wygładzają filtr a zatem filtrowany sygnał i wyjściowy są zbliżone (są niewielkie różnice). Parametr K wpływa na częstotliwość odcięcia. Przy większym M , czyli rzędzie, filtr jest dłuższy oraz pojawia się na nim więcej zmian wartości (zafalowań). Z filtrami środkowoprzepustowymi sytuacja z oknami wygląda podobnie jak w filtrze dolnoprzepustowym.

Różne typy filtrów odcinają częstotliwości w innych pasmach. W przeciwieństwie do filtra dolnoprzepustowego, filtr środkowoprzepustowy często zmienia swoje wartości, a w filtrze górnoprzepustowym co druga próbka jest ujemna. W filtrze dolnoprzepustowym wykres filtru jest gładki. Nie możemy wiele powiedzieć o filtrach, ze względu na brak informacji o widmie częstotliwościowym. Stosując okna zmniejszamy zafalowania charakterystyki. Z analizy pokazanych wykresów można stwierdzić, że okna Hanninga, Hamminga i Blackmana w dużym stopniu redukują nieliniowość transmitancji w

pamię przepustowym. Dodatkowa istotnie polepszają tłumienie składowych w pamię zaporowym w odniesieniu do okna prostokątnego.

4.3 Korelacja

Korelację można wykonać splotem i też trzeba sygnał x odwrócić. Z eksperymentów wynika, że korelacja bezporednia i z wykorzystaniem splotu dają bardzo zbliżone efekty.

4.4 Radar

Z eksperymentów wynika, że jeśli założymy taką samą częstotliwość próbkowania, to większe opóźnienie równa się większej odległości. Ponieważ są t_0 sygnały okresowe, to przyjmując okres = np 25 opóźnienie równe 5 oraz 30 będą dawały takie same wyniki. Ponieważ przyjęliśmy jako prędkość prędkość światła to odległości wychodzą bardzo duże. Trzeba pamiętać, że częstotliwość próbkowania nie zawsze będzie wynosić 1Hz czyli 1 próbka na sekundę - przy obliczeniu odstepu czasowego zawsze trzeba otrzymywać wynik w sekundach i podzielić $1/\text{czestotliwosc}$.

Literatura

- [1] FTIMS Politechnika Łódzka. *Zadanie 3 Splot, filtracja i korelacja*, Wi-kamp.