Derivimi dhe Integrimi Numerik

Anxhelo SHEHU

1 Hyrje

Në shumë probleme shkencore dhe inxhinierike, funksionet nuk janë të njohura në formë analitike, por vetëm përmes vlerave të tyre numerike në pika të caktuara. Në këto raste, përdoren metoda numerike për të përafruar derivatet dhe integralet.

Ky material trajton:

- Derivimin numerik me diferenca të fundme
- Integrimin numerik me metodën e trapezit
- Integrimin numerik me rregullin e Simpsonit

2 Derivimi Numerik me Diferenca të Fundme

Le të jetë $f(x)$ një funksion i dhënë dhe h një hap i vogël pozitiv. Derivati i funksionit në pikën x mund të përafrohet duke përdorur diferenca të fundme.

2.1 Diferenca përpara

Formula e diferencës përpara është:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1}$$

Kjo metodë ka rend gabimi $\mathcal{O}(h)$.

2.2 Diferenca mbrapa

Formula e diferencës mbrapa është:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}. \tag{2}$$

Edhe kjo metodë ka rend gabimi $\mathcal{O}(h)$.

2.3 Diferenca qendrore

Një përafrim më i saktë merret me diferencën qendrore:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \tag{3}$$

Kjo metodë ka rend gabimi $\mathcal{O}(h^2)$ dhe përdoret gjerësisht në praktikë.

3 Integrimi Numerik

Integrimi numerik përdoret për të përafruar integralin e formës:

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{4}$$

kur funksioni $f(x)$ nuk mund të integrohet saktësisht në mënyrë analitike.

Intervali $[a, b]$ ndahet në n nënintervale të barabarta me hap:

$$h = \frac{b-a}{n}. \tag{5}$$

4 Metoda e Trapezit

Metoda e trapezit bazohet në përafrimin e funksionit me segmente lineare në çdo nëninterval.

Formula e përgjithshme është:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right], \tag{6}$$

ku $x_i = a + ih$.

Kjo metodë ka rend gabimi $\mathcal{O}(h^2)$.

4.1 Kodi ne MATLAB:

```
function I = metoda_trapezave(f, a, b, n)
% --------------------------------------------------------------
% trapezi
% Integrimi numerik me metoden e trapezit
% f  - funksioni
% [a,b] - intervali i integrimit
% n  - numri i nënintervaleve
% --------------------------------------------------------------

h = (b - a) / n;
x = a:h:b;
y = f(x);

I = h/2 * (y(1) + 2*sum(y(2:n)) + y(n+1));
end
% --------------------------------------------------------------
```

5 Rregulli i Simpsonit

Rregulli i Simpsonit përdor përafrimin polinomial të gradës së dytë në çdo dy nënintervale. Numri i nënintervaleve n duhet të jetë çift.

Formula e Simpsonit është:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1\\ i\ tek}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2\\ i\ çift}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right]. \tag{7}$$

Rregulli i Simpsonit ka rend gabimi $\mathcal{O}(h^4)$ dhe është shumë më i saktë se metoda e trapezit për funksione të lëmuara.

5.1 Kodi ne MATLAB:

```
function I = metoda_simpson(f, a, b, n)
% -------------------------------------------------------------
% simpson
% Integrimi numerik me rregullin e Simpsonit
% n duhet te jete numer çift
% -------------------------------------------------------------

if mod(n,2) ~= 0
    error('Numri i nënintervaleve n duhet te jete çift');
end

h = (b - a) / n;
x = a:h:b;
y = f(x);

I = h/3 * ( ...
    y(1) ...
    + 4*sum(y(2:2:n)) ...
    + 2*sum(y(3:2:n-1)) ...
    + y(n+1) );
end
% -------------------------------------------------------------
```

6 Shembull Ilustrues

Le të llogarisim në mënyrë numerike integralin:

$$\int_0^1 x^2\,dx. \tag{8}$$

Vlera e saktë analitike është:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}. \tag{9}$$

Përdorimi i metodës së trapezit dhe rregullit të Simpsonit jep përafrime gjithnjë e më të sakta me rritjen e numrit të nënintervaleve.

7 Përfundime

Derivimi dhe integrimi numerik janë mjete themelore të analizës numerike. Diferencat e fundme përdoren për përafrimin e derivatit, ndërsa metodat e integrimit numerik si trapezi dhe Simpsoni përdoren për vlerësimin e integraleve të caktuara.

Rregulli i Simpsonit ofron saktësi më të lartë, ndërsa metoda e trapezit është më e thjeshtë dhe më e lehtë për t'u implementuar.