Problemet e Vlerës Fillestare dhe Metodat Numerike

Anxhelo SHEHU

---

1 Hyrje

Problemet e vlerës fillestare (IVP) kanë formën:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), & t \in [t_0, T], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

ku $f(t, y)$ është funksioni i dhënë dhe y_0 është vlera fillestare.

Zgjidhja analitike shpesh nuk është e mundur, prandaj përdoren **metoda numerike** për të përafruar zgjidhjen në pika të diskretizuara.

2 Metoda e Eulerit

Metoda më e thjeshtë dhe themelore është metoda e Eulerit:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \tag{2}$$

ku h është hapi i diskretizimit dhe $t_n = t_0 + nh$.

- Rend gabimi: $\mathcal{O}(h)$. - Metoda është e thjeshtë, por jo shumë e saktë për hapa të mëdhenj.

2.1 Algoritmi i Eulerit

1. Vendos t_0, y_0, h dhe N.
2. Për $n = 0$ deri $N - 1$:
$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$
3. $t_{n+1} = t_n + h$

2.2 Kodi ne MATLAB:

```
function [t, y] = euler(f, t0, y0, h, N)
% ---------------------------------------------------------------
% euler: Metoda e Euler-it per zgjidhjen e IVP
%
% INPUT:
%   f  - funksioni f(t,y)
```

```
%   t0 - pika fillestare
%   y0 - vlera fillestare
%   h  - hapi i diskretizimit
%   N  - numri i hapave
%
% OUTPUT:
%   t  - vektori i kohes [t0, t1, ..., tN]
%   y  - vektori i zgjidhjes [y0, y1, ..., yN]
% --------------------------------------------------------------

t = t0 + (0:N)*h;   % vektori i kohes
y = zeros(1, N+1);  % vektori i zgjidhjes
y(1) = y0;

for n = 1:N
    y(n+1) = y(n) + h * f(t(n), y(n));
end
end
% --------------------------------------------------------------
```

3 Metoda e Pikës së Mesit

Metoda e pikës së mesit është një metodë **e Euler-it e përmirësuar**:

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \tag{3}$$

$$y_{n+1} = y_n + hk_2 \tag{4}$$

- Rend gabimi: $\mathcal{O}(h^2)$. - Përafërsim më i saktë se Euler.

3.1 Kodi ne MATLAB:

```
function [t, y] = pika_mesit(f, t0, y0, h, N)
% --------------------------------------------------------------
% pika_mesit: Metoda e Pikës së Mesit për zgjidhjen e IVP
%
% INPUT:
%   f  - funksioni f(t,y)
%   t0 - pika fillestare
%   y0 - vlera fillestare
%   h  - hapi i diskretizimit
%   N  - numri i hapave
%
% OUTPUT:
%   t  - vektori i kohes [t0, t1, ..., tN]
%   y  - vektori i zgjidhjes [y0, y1, ..., yN]
% --------------------------------------------------------------
```

```
t = t0 + (0:N)*h;   % vektori i kohes
y = zeros(1, N+1);  % rezervimi i vektorit te zgjidhjes
y(1) = y0;

for n = 1:N
    y_mid = y(n) + (h/2)*f(t(n), y(n));                % pika e mesit
    y(n+1) = y(n) + h*f(t(n) + h/2, y_mid);  % përditësimi i zgjidhjes
end
end
% ---------------------------------------------------------------
```

4 Metodat Runge–Kutta

Metodat Runge–Kutta janë një familje metodash me rend të lartë gabimi. Më e përdorura është **Runge–Kutta 4 (RK4)**:

$$k_1 = f(t_n, y_n), \tag{5}$$

$$k_2 = f\Big(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\Big), \tag{6}$$

$$k_3 = f\Big(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\Big), \tag{7}$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3), \tag{8}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{9}$$

- Rend gabimi: $\mathcal{O}(h^4)$. - Shumë i përdorur për probleme shkencore dhe inxhinierike.

5 Funksionet e gatshme në MATLAB

MATLAB ofron funksione të fuqishme për IVP:

- **ode45**: Metodë Runge–Kutta 4/5, e përdorur më shpesh për zgjidhje të zakonshme.
- **ode23**: Metodë Runge–Kutta 2/3, më e thjeshtë, për probleme të buta.
- **ode15s**: Për sisteme stiff.
- **ode113**: Metodë multistep për saktësi më të lartë.

5.1 Shembull MATLAB

```
f = @(t,y) -2*y + t;
t0 = 0; y0 = 1; tf = 5;
[t, y] = ode45(f, [t0 tf], y0);

plot(t, y, 'LineWidth', 2);
xlabel('t'); ylabel('y(t)');
title('Zgjidhja e IVP me ode45');
grid on;
```

6 Përfundime

- Metoda e Eulerit është e thjeshtë, por ka saktësi të ulët. - Metoda e pikës së mesit përmirëson Euler-in duke përdorur vlerën në mes të intervalit. - Metodat Runge–Kutta ofrojnë saktësi të lartë dhe janë metoda standarde për IVP. - MATLAB ofron funksione të gatshme (`ode45`, `ode23`, etj.) për implementim të shpejtë dhe të sigurt.