Metodat e Përafrimit (Regresioni): Metoda e Katrorëve më të Vegjël

Anxhelo SHEHU

1 Hyrje

Në shumë probleme praktike të inxhinierisë dhe shkencave të aplikuara, të dhënat eksperimentale nuk ndjekin saktësisht një model matematikor të njohur. Në këto raste, kërkohet të gjendet një funksion i thjeshtë që **përafron sa më mirë** të dhënat e dhëna.

Një nga metodat më të përdorura për këtë qëllim është **metoda e katrorëve më të vegjël**, e cila përdoret gjerësisht në regresionin linear dhe polinomial.

2 Problemi i Përgjithshëm i Përafrimit

Le të jenë dhënë n pika eksperimentale:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n). \tag{1}$$

Qëllimi është të gjendet një funksion $f(x)$ nga një klasë e caktuar funksionesh, i tillë që gabimi total midis vlerave të maturuara y_i dhe vlerave të përafruara $f(x_i)$ të jetë minimal.

Gabimi përkufizohet si:

$$E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 . \tag{2}$$

Metoda e katrorëve më të vegjël kërkon minimizimin e këtij funksionali.

3 Regresioni Linear (Rasti i Drejtëzës)

Në rastin e regresionit linear, supozojmë se modeli ka formën:

$$f(x) = ax + b, \tag{3}$$

ku a dhe b janë koeficientë të panjohur.

Funksioni i gabimit bëhet:

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 . \tag{4}$$

Për të gjetur minimumin, derivohen E sipas a dhe b dhe barazohen me zero:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial b} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Kjo çon në sistemin normal:

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i, \\ a\sum x_i + bn = \sum y_i. \end{cases} \tag{6}$$

Ky sistem linear zgjidhet për të gjetur koeficientët a dhe b.

4 Forma Matricore e Regresionit Linear

Problemi mund të shkruhet në formë matricore:

$$A\theta \approx y, \tag{7}$$

ku:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Zgjidhja me katrorë më të vegjël jepet nga:

$$\theta = (A^T A)^{-1} A^T y. \tag{9}$$

5 Regresioni Polinomial i Gradës së Dytë

Në këtë rast, modeli i përafrimit është:

$$f(x) = ax^2 + bx + c. \tag{10}$$

Funksioni i gabimit është:

$$E(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right)^2. \tag{11}$$

Duke minimizuar këtë funksion, përfitohet sistemi normal:

$$\begin{cases} a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i, \\ a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i = \sum x_i y_i, \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i + cn = \sum y_i. \end{cases} \tag{12}$$

6 Forma Matricore për Polinomin e Gradës së Dytë

Forma matricore është:

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Zgjidhja jepet sërish nga formula:

$$\theta = (A^T A)^{-1} A^T y. \tag{14}$$

7 Shembull Ilustrues

Le të jenë dhënë pikat:

$$(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 4). \tag{15}$$

Përdorimi i metodës së katrorëve më të vegjël mundëson gjetjen e drejtëzës ose polinomit që përafron më mirë këto të dhëna në kuptimin e minimizimit të gabimit katror.

7.1 Kodi per rastin linear:

```
------------------------------------------------------------

function z = LINEAR_MKV(x, y)
% ------------------------------------------------------------
% Regresion linear me metoden e katroreve me te vegjel
% Modeli: y = k1 + k2*x
% x dhe y jane vektore te dhenash (rreshta ose shtylla)
% ------------------------------------------------------------

x = x(:);
y = y(:);
n = length(x);

% Shumatoret
sx  = sum(x);
sy  = sum(y);
sxx = sum(x.^2);
sxy = sum(x.*y);

% Sistemi normal
A = [n   sx;
     sx  sxx];
b = [sy;
     sxy];

% Zgjidhja e sistemit
z = A \ b;

k1 = z(1);
k2 = z(2);

% Printimi i rezultateve
fprintf('\nKoeficientet e perafrimit linear:\n');
fprintf('k1 = %.6f\n', k1);
fprintf('k1 = %.6f\n', k2);
fprintf('Funksioni i perafrimit: y = %.6f + %.6f x\n\n', k1, k2);

% Vlerat e perafrimit dhe gabimi
y_aprox = k1 + k2*x;
```

```
err = y - y_aprox;

% Tabela
tabela = [x y y_aprox err];

disp('   x         y     y_aprox     gabimi');
disp(tabela);

% Gabimi katror total
gab = sum(err.^2);
fprintf('Gabimi katror total = %.6e\n', gab);
end
```

7.2 Kodi rasti polinomial i rendit te dyte:

```
function z = POL2_MKV(x, y)
% -------------------------------------------------------------
% POL2_MKV
% Regresion polinomial i grades se dyte
% Modeli: y = k1 + k2*x + k3*x^2
% -------------------------------------------------------------

x = x(:);
y = y(:);
n = length(x);

% Shumatoret
sx   = sum(x);
sxx  = sum(x.^2);
sxxx = sum(x.^3);
sxxxx= sum(x.^4);

sy   = sum(y);
sxy  = sum(x.*y);
sxxy = sum(x.^2 .* y);

% Sistemi normal
A = [ n     sx     sxx;
      sx    sxx    sxxx;
      sxx   sxxx   sxxxx ];

b = [ sy;
      sxy;
      sxxy ];

% Zgjidhja e sistemit
```

```
z = A \ b;

k1 = z(1);
k2 = z(2);
k3 = z(3);

% Printimi i rezultateve
fprintf('\nKoeficientet e perafrimit polinomial (grade 2):\n');
fprintf('k1 = %.6f\n', k1);
fprintf('k2 = %.6f\n', k2);
fprintf('k3 = %.6f\n', k3);
fprintf('Funksioni i perafrimit:\n');
fprintf('y = %.6f + %.6f x + %.6f x^2\n\n', k1, k2, k3);

% Vlerat e perafrimit dhe gabimi
y_aprox = k1 + k2*x + k3*x.^2;
err = y - y_aprox;

% Tabela
tabela = [x y y_aprox err];

disp('   x        y      y_aprox     gabimi');
disp(tabela);

% Gabimi katror total
gab = sum(err.^2);
fprintf('Gabimi katror total = %.6e\n', gab);
end
```

8 Përfundime

Metoda e katrorëve më të vegjël është një mjet themelor në analizën numerike dhe regresion. Ajo siguron një mënyrë sistematike për përafrimin optimal të të dhënave eksperimentale si në rastin linear, ashtu edhe në modelet polinomiale.

Kjo metodë përdoret gjerësisht në statistika, inteligjencë artificiale, përpunim sinjali dhe mësim makinerik.