

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK  
INFORMACYJNYCH

# ALGORYTMY ZAAWANSOWANE

---

## Wyznaczanie spójności krawędziowej grafu przez przepływ

---

Dokumentacja wstępna projektu

*Autorzy:*

Anna ZAWADZKA  
Piotr WASZKIEWICZ

27 marca 2016

## 1 Opis problemu

Celem projektu jest zaprojektowanie i zaimplementowanie algorytmu znajdującego spójność krawędziową grafu poprzez wyznaczenie maksymalnego przepływu.

Daną wejściową problemu jest nieskierowany graf bez wag  $G = (V, E)$ . Na jego podstawie utworzona będzie sieć przepływowa, czyli graf skierowany  $G' = (V, E')$  z dodatnimi wagami określającymi przepustowości (pojemności) krawędzi i wyróżnionymi dwoma wierzchołkami: źródłem i ujściem. Następnie wyznaczony zostanie przepływ. Jest to funkcja  $f$  określona na zbiorze  $E'$  krawędzi grafu  $G'$  taka, że:

- dla każdego  $e \in E'$  zachodzi  $0 \leq f(e) \leq \text{przepustowość}(e)$
- dla każdego wierzchołka wewnętrznego (tzn. każdego oprócz źródła i ujścia) sumaryczny przepływ dopływający do tego wierzchołka jest równy sumarycznemu przepływowi wypływającemu z niego

Na podstawie przepływu możliwe będzie wyznaczenie spójności krawędziowej grafu wejściowego.

## 2 Metoda realizacji zadania

Algorytm rozwiązania zadania jest następujący:

1. Na podstawie grafu wejściowego konstruujemy sieć przepływową, przy czym jednej krawędzi nieskierowanej grafu wejściowego odpowiadają dwie krawędzie przeciwnie skierowane w sieci przepływowej
2. Wartości przepustowości każdej krawędzi w sieci przepływowej ustalamy na 1
3. Wybieramy jeden dowolny wierzchołek. Oznaczamy go jako źródło  $s$
4. Dla każdej pary wierzchołków sieci przepływowej złożonej z wyróżnionego źródła  $s$  i dowolnego innego wierzchołka  $t$  ( $t \neq s$ ) wyznaczamy maksymalny przepływ między nimi przy użyciu algorytmu Edmondsa-Karpa, będącego realizacją metody Forda-Fulkersona
5. Ze wszystkich wyznaczonych maksymalnych przepływów wybieramy ten o minimalnej wartości
6. Określamy spójność krawędziową grafu wejściowego, która jest równa przepływowi wyznaczonemu w poprzednim kroku

### 3 Analiza poprawności i złożoności czasowej algorytmu

#### 3.1 Analiza poprawności

Wyznaczenie spójności krawędziowej przy pomocy przepływu możliwe jest przy wykorzystaniu poniższego twierdzenia.

**Twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju.**

*Maksymalna wartość przepływu w sieci równa jest minimalnej przepustowości przekroju tej sieci.*

**Definicja.**

*Przekrojem sieci przepływowej  $G' = (V, E')$  nazywamy podział zbioru  $V$  na zbiory  $S$  i  $T$  takie, że:*

- $S \cup T = V$  oraz  $S \cap T = \emptyset$
- $s \in S$ , gdzie  $s$  - źródło
- $t \in T$ , gdzie  $t$  - ujście

*Przepustowością przekroju nazywamy sumę przepustowości wszystkich krawędzi o początku w  $S$  i końcu w  $T$ .*

Niech spójność krawędziowa grafu  $G$  wynosi  $k$ , a wynik zwrócony przez algorytm to  $f$  i niech  $t$  będzie ujściem, dla którego mamy przepływ o wartości  $f$ .

Ponieważ w skonstruowanej sieci przepływowej wszystkie krawędzie mają przepustowości o wartości 1, to wartość minimalnej przepustowości przekroju jest równa liczbie krawędzi w minimalnym przekroju. Usunięcie tych krawędzi rozspójnia graf  $G$ , więc  $k \leq f$ .

Ponieważ w przypadku rozspójnienia grafu  $k$ -spójnego w wyniku usunięcia  $k$  krawędzi zawsze otrzymujemy przynajmniej dwie wynikowe składowe, z których tylko jedna zawiera wyróżniony wcześniej wierzchołek źródłowy  $s$ , oraz nie posiada wierzchołka  $t$  będącego ujściem, można zauważyć, że w przypadku dowolnego wyboru wierzchołka  $s$  zawsze będzie istniał inny wierzchołek  $t$  który w wyniku usunięcia krawędzi przynależał będzie do nowopowstałej składowej. Tak więc wystarczy dla wybranego źródła  $s$  sprawdzić wszystkie możliwe kombinacje wierzchołków  $t$  a następnie wybrać tę, która daje najmniejszą wartość przepustowości przekroju.

Zatem istnieje zbiór  $A$   $k$  krawędzi których usunięcie rozspójnia graf. Wierzchołek  $s$  jest w pewnej składowej  $G - A$ , więc dla dowolnego wierzchołka  $t$  z innej składowej wartość minimalnego przekroju w sieci o źródle  $s$  i ujściu  $t$  będzie mniejszy lub równy  $k$ , więc  $f \leq k$ .

### 3.2 Analiza złożoności czasowej

Złożoności czasowe poszczególnych kroków algorytmu:

1. Konstrukcja sieci przepływowej:  $O(|V| + |E|)$
2. Ustalenie wag krawędzi sieci przepływowej:  $O(|E'|)$
3. Wybranie wierzchołka  $s$ :  $O(1)$
4. Wyznaczenie maksymalnego przepływu między wybranymi parami wierzchołków:
  - przejście po wszystkich wierzchołkach  $t \neq s$ :  $O(|V|)$
  - obliczenie maksymalnego przepływu za pomocą algorytmu Edmondsa-Karpa:  $O(|V|^2 \cdot |E'|)$

Sumaryczna złożoność tego kroku to:  $O(|V|^3 \cdot |E'|)$

5. Wybór minimalnego przepływu spośród wyznaczonych w poprzednim kroku:  $O(1)$

Zatem całkowita złożoność czasowa jest rzędu  $O(|V|^3 \cdot |E'|)$ , gdzie  $|E'| = 2 \cdot |E|$ .

## 4 Format danych wejściowych i wyjściowych

Graf wejściowy będzie wprowadzany do programu w postaci pliku tekstowego, ale również będzie mógł być tworzony bezpośrednio w programie.

Format pliku tekstowego: pierwsza linia zawiera liczbę wierzchołków grafu  $|V|$  oraz liczbę krawędzi  $|E|$  oddzielone spacją, każda kolejna linia reprezentuje krawędź grafu zdefiniowaną przez numery wierzchołków, będących końcami krawędzi, oddzielone spacją. Kolejność podawania numerów wierzchołków w definicji krawędzi nie ma znaczenia, gdyż graf wejściowy jest nieskierowany. Zakładamy, że wierzchołki grafu numerowane są od 0.

Przykładowy plik wejściowy:

```
5 6
0 3
2 1
4 0
3 1
4 2
2 0
```

Wynikiem działania programu jest liczba określająca spójność krawędziową grafu wejściowego. Będzie ona widoczna bezpośrednio w programie.