Politechnika Warszawska

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Algorytmy Zaawansowane

Wyznaczanie spójności krawędziowej grafu przez przepływ

Dokumentacja wstępna projektu

Autorzy:

Anna Zawadzka
Piotr Waszkiewicz

20 marca 2016

1 Opis problemu

Celem projektu jest zaprojektowanie i zaimplementowanie algorytmu znajdującego spójność krawędziową grafu poprzez wyznaczenie maksymalnego przepływu.

Daną wejściową problemu jest nieskierowany graf bez wag $G = (V, E)$. Na jego podstawie utworzona będzie sieć przepływowa, czyli graf skierowany $G' = (V, E')$ z dodatnimi wagami określającymi przepustowości (pojemności) krawędzi i wyróżnionymi dwoma wierzchołkami: źródłem i ujściem. Następnie wyznaczony zostanie przepływ. Jest to fukcja f określona na zbiorze E' krawędzi grafu G' taka, że:

- dla każdego $e \in E'$ zachodzi $0 \leqslant f(e) \leqslant waga(e)$
- dla każdego wierzchołka wewnętrznego (tzn. każdego oprócz źródła i ujścia) sumaryczny przepływ dopływający do tego wierzchołka jest równy sumarycznemu przepływowi wypływającemu z niego

Na podstawie przepływu możliwe będzie wyznaczenie spójności krawędziowej grafu wejściowego.

2 Metoda realizacji zadania

Algorytm rozwiązania zadania jest następujący:

1. Na podstawie grafu wejściowego konstruujemy sieć przepływową, przy czym jednej krawędzi nieskierowanej grafu wejściowego odpowiadają dwie krawędzie przeciwnie skierowane w sieci przepływowej
2. Każdej krawędzi w sieci przepływowej nadajemy wagę o wartości 1
3. Wybieramy jeden, dowolny wierzchołek. Oznaczamy go jako źródło S.
4. Dla każdej pary wierzchołków sieci przepływowej złożonej z wyróżnionego źródła S i dowolnego innego wierzchołka (różnego od wyróżnionego) wyznaczamy maksymalny przepływ między nimi przy użyciu algorytmu Forda-Fulkersona
5. Ze wszystkich wyznaczonych maksymalnych przepływów wybieramy ten o minimalnej wartości
6. Określamy spójność krawędziową grafu wejściowego, która jest równa przepływowi wyznaczonemu w poprzednim kroku

3 Analiza poprawności i złożoności czasowej algorytmu

3.1 Analiza poprawności

Wyznaczenie spójności krawędziowej przy pomocy przepływu możliwe jest przy wykorzystaniu poniższego twierdzenia.

Twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju.

Maksymalna wartość przepływu w sieci równa jest minimalnej przepustowości przekroju tej sieci.

Definicja.

Przekrojem sieci przepływowej $G' = (V, E')$ *nazywamy podział zbioru* V *na zbiory* S *i* T *takie, że:*

- $S \cup T = V$ *oraz* $S \cap T = \emptyset$
- $s \in S$*, gdzie* s *- źródło*
- $t \in T$*, gdzie* t *- ujście*

Przepustowością przekroju nazywamy sumę wag wszystkich krawędzi o początku w S *i końcu w* T*.*

Ponieważ w skonstruowanej sieci przepływowej wszystkie krawędzie mają przepustowości o wartości 1, maksymalny przepływ jest równy minimalnej liczbie krawędzi, których usunięcie spowoduje rozspójnienie grafu. Ponieważ w przypadku rozspójnienia grafu k-spójnego w wyniku usunięcia k krawędzi zawsze otrzymujemy przynajmniej dwa wynikowe grafy, z których tylko jeden zawiera wyróżniony wcześniej wierzchołek S, oraz nie posiada wierzchołka T będącego ujściem, można zauważyć, że w przypadku dowolnego wyboru wierzchołka S zawsze będzie istniał inny wierzchołek T który w wyniku usunięcia krawędzi przynależał będzie do nowopowstałej części. Tak więc wystarczy dla wybranego źródła S sprawdzić wszystkie możliwe kombinacje wierzchołków T a następnie wybrać tę, która daje najmniejszą wartość k-spójności.

3.2 Analiza złożoności czasowej

Złożoności czasowe poszczególnych kroków algorytmu:

1. Konstrukcja sieci przepływowej: $O(V + E)$
2. Ustalenie wag krawędzi sieci przepływowej: $O(|E'|)$

3. Wyznaczenie maksymalnego przepływu między wszystkimi parami wierzchołków:
   - przejście po wszystkich parach: $O(\frac{|V|^2}{2})$
   - obliczenie maksymalnego przepływu: $O(|V| \cdot |E'| \cdot |M|)$, gdzie M - maksymalna pojemność krawędzi w grafie przepływowym

   W tym rozwiązaniu wszystkie pojemności krawędzi grafu przepływowego mają wartość 1, zatem sumaryczna złożoność tego kroku to: $O(\frac{|V|^2}{2} \cdot |V| \cdot |E'|) \approx O(|V|^3 \cdot |E'|)$

4. Wybór minimalnego przepływu spośród wyznaczonych w poprzednim kroku: $O(\frac{|V|^2}{2})$

Zatem całkowita złożoność czasowa jest rzędu $O(|V|^3 \cdot |E'|)$, gdzie $|E'| = 2 \cdot |E|$.

4 Format danych wejściowych i wyjściowych

Graf wejściowy będzie wprowadzany do programu w postaci pliku tekstowego, ale również będzie mógł być tworzony bezpośrednio w programie.

Format pliku tekstowego: pierwsza linia zawiera liczbę wierzchołków grafu $|V|$, każda kolejna linia reprezentuje krawędź grafu zdefiniowaną przez numery wierzchołków, będących końcami krawędzi, oddzielone spacją. Kolejność podawania numerów wierzchołków w definicji krawędzi nie ma znaczenia, gdyż graf wejściowy jest nieskierowany. Zakładamy, że wierzchołki grafu numerowane są od 0.

Przykładowy plik wejściowy:
5
0 3
2 1
4 0
3 1
4 2
2 0
2 3

Wynikiem działania programu jest liczba określająca spójność krawędziową grafu wejściówego. Będzie ona widoczna bezpośrednio w programie.