Politechnika Warszawska

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Algorytmy Zaawansowane

Wyznaczanie spójności krawędziowej grafu przez przepływ

Dokumentacja wstępna projektu

Autorzy:

Anna Zawadzka
Piotr Waszkiewicz

27 marca 2016

1 Opis problemu

Celem projektu jest zaprojektowanie i zaimplementowanie algorytmu znajdującego spójność krawędziową grafu poprzez wyznaczenie maksymalnego przepływu.

Daną wejściową problemu jest nieskierowany graf bez wag $G = (V, E)$. Na jego podstawie utworzona będzie sieć przepływowa, czyli graf skierowany $G' = (V, E')$ z dodatnimi wagami określającymi przepustowości (pojemności) krawędzi i wyróżnionymi dwoma wierzchołkami: źródłem i ujściem. Następnie wyznaczony zostanie przepływ. Jest to fukcja f określona na zbiorze E' krawędzi grafu G' taka, że:

- dla każdego $e \in E'$ zachodzi $0 \leqslant f(e) \leqslant \text{przepustowość}(e)$
- dla każdego wierzchołka wewnętrznego (tzn. każdego oprócz źródła i ujścia) sumaryczny przepływ dopływający do tego wierzchołka jest równy sumarycznemu przepływowi wypływającemu z niego

Na podstawie przepływu możliwe będzie wyznaczenie spójności krawędziowej grafu wejściowego.

2 Metoda realizacji zadania

Algorytm rozwiązania zadania jest następujący:

1. Na podstawie grafu wejściowego konstruujemy sieć przepływową, przy czym jednej krawędzi nieskierowanej grafu wejściowego odpowiadają dwie krawędzie przeciwnie skierowane w sieci przepływowej
2. Wartości przepustowości każdej krawędzi w sieci przepływowej ustalamy na 1
3. Wybieramy jeden dowolny wierzchołek. Oznaczamy go jako źródło s
4. Dla każdej pary wierzchołków sieci przepływowej złożonej z wyróżnionego źródła s i dowolnego innego wierzchołka t ($t \neq s$) wyznaczamy maksymalny przepływ między nimi przy użyciu algorytmu Edmondsa-Karpa, będącego realizacją metody Forda-Fulkersona
5. Ze wszystkich wyznaczonych maksymalnych przepływów wybieramy ten o minimalnej wartości
6. Określamy spójność krawędziową grafu wejściowego, która jest równa przepływowi wyznaczonemu w poprzednim kroku

3 Analiza poprawności i złożoności czasowej algorytmu

3.1 Analiza poprawności

Wyznaczenie spójności krawędziowej przy pomocy przepływu możliwe jest przy wykorzystaniu poniższego twierdzenia.

Twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju.

Maksymalna wartość przepływu w sieci równa jest minimalnej przepustowości przekroju tej sieci.

Definicja.

Przekrojem sieci przepływowej $G' = (V, E')$ nazywamy podział zbioru V na zbiory S i T takie, że:

- $S \cup T = V$ *oraz* $S \cap T = \emptyset$
- $s \in S$, *gdzie* s *- źródło*
- $t \in T$, *gdzie* t *- ujście*

Przepustowością przekroju nazywamy sumę przepustowości wszystkich krawędzi o początku w S *i końcu w* T.

Niech spójność krawędziowa grafu G wynosi k, a wynik zwrócony przez algorytm to f i niech t będzie ujściem, dla którego mamy przepływ o wartości f.

Ponieważ w skonstruowanej sieci przepływowej wszystkie krawędzie mają przepustowości o wartości 1, to wartość minimalnej przepustowości przekroju jest równa liczbie krawędzi w minimalnym przekroju. Usunięcie tych krawędzi rozspójnia graf G, więc $k \leqslant f$.

Ponieważ w przypadku rozspójnienia grafu k-spójnego w wyniku usunięcia k krawędzi zawsze otrzymujemy przynajmniej dwie wynikowe składowe, z których tylko jedna zawiera wyróżniony wcześniej wierzchołek źródłowy s, oraz nie posiada wierzchołka t będącego ujściem, można zauważyć, że w przypadku dowolnego wyboru wierzchołka s zawsze będzie istniał inny wierzchołek t który w wyniku usunięcia krawędzi przynależał będzie do nowopowstałej składowej. Tak więc wystarczy dla wybranego źródła s sprawdzić wszystkie możliwe kombinacje wierzchołków t a następnie wybrać tę, która daje najmniejszą wartość przepustowości przekroju.

Zatem istnieje zbiór A k krawędzi których usunięcie rozspójnia graf. Wierzchołek s jest w pewnej składowej $G - A$, więc dla dowolnego wierzchołka t z innej składowej wartość minimalnego przekroju w sieci o źródle s i ujściu t będzie mniejszy lub równy k, więc $f \leqslant k$.

3.2 Analiza złożoności czasowej

Złożoności czasowe poszczególnych kroków algorytmu:

1. Konstrukcja sieci przepływowej: $O(|V| + |E|)$
2. Ustalenie wag krawędzi sieci przepływowej: $O(|E'|)$
3. Wybranie wierzchołka s: $O(1)$
4. Wyznaczenie maksymalnego przepływu między wybranymi parami wierzchołków:
   - przejście po wszystkich wierzchołkach $t \neq s$: $O(|V|)$
   - obliczenie maksymalnego przepływu za pomocą algorytmu Edmondsa-Karpa: $O(|V| \cdot |E'|^2)$

   Sumaryczna złożoność tego kroku to: $O(|V^3| \cdot |E'|)$
5. Wybór minimalnego przepływu spośród wyznaczonych w poprzednim kroku: $O(1)$

Zatem całkowita złożoność czasowa jest rzędu $O(|V^3| \cdot |E'|)$, gdzie $|E'| = 2 \cdot |E|$.

4 Format danych wejściowych i wyjściowych

Graf wejściowy będzie wprowadzany do programu w postaci pliku tekstowego, ale również będzie mógł być tworzony bezpośrednio w programie.

Format pliku tekstowego: pierwsza linia zawiera liczbę wierzchołków grafu $|V|$ oraz liczbę krawędzi $|E|$ oddzielone spacją, każda kolejna linia reprezentuje krawędź grafu zdefiniowaną przez numery wierzchołków, będących końcami krawędzi, oddzielone spacją. Kolejność podawania numerów wierzchołków w definicji krawędzi nie ma znaczenia, gdyż graf wejściowy jest nieskierowany. Zakładamy, że wierzchołki grafu numerowane są od 0.

Przykładowy plik wejściowy:
5 6
0 3
2 1
4 0
3 1
4 2
2 0

Wynikiem działania programu jest liczba określająca spójność krawędziową grafu wejściówego. Będzie ona widoczna bezpośrednio w programie.