Question 1

依定义我们有:

$$p_z \mathrm{d}z = p_r \mathrm{d}r \quad \text{or} \quad \int_0^z p_z \mathrm{d}z = \int_0^r p_r \mathrm{d}r$$

其中 $p_r = 2 - 2r$ 且 $p_z = 4z$ 如果 $z < 0.5$ 否则 $p_z = 4 - 4z$。因此

$$\begin{cases} -r^2 + 2r = 2z^2 & \text{if } z < 0.5 \\ (r-1)^2 = 2(z-1)^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} z = \sqrt{\dfrac{-r^2+2r}{2}} & \text{if } r < 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(r-1) + 1 & \text{if } 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq r \leq 1 \end{cases}.$$

Question 2

(a & b)

根据定义，我们可以得到:

$$\begin{aligned} & \sum_x \sum_y \sum_s \sum_t w(s,t) f(x+s, y+t) \\ =& \sum_s \sum_t \sum_x \sum_y w(s,t) f(x+s, y+t) \\ =& \sum_s \sum_t w(s,t) \sum_x \sum_y f(x+s, y+t) \\ =& \sum_s \sum_t w(s,t) \sum_x \sum_y f(x,y) \\ =& \sum_s \sum_t w(s,t) \times \mathcal{I} \qquad = 0 \end{aligned}$$

其中第四行等式成立的原因是我们对图片进行了补零操作。同时由于零点对称性，我们可以直接用 $\sum_s$ 或 $\sum_t$ 代替 $\sum_{s=\pm a}^{\mp a}$ 或 $\sum_{t=\pm a}^{\mp a}$。故该题两小问结果皆为 0。

Question 3

Proof of $f(x,y) * h(x,y) \iff F(u,v)H(u,v)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{Y}}\int_{\mathcal{S}}\int_{\mathcal{T}} f(s,t)h(x-s,y-t)\exp\big[-j2\pi(ux+vy)\big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
=&\int_{\mathcal{S}}\int_{\mathcal{T}} f(s,t)\int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{Y}} h(x-s,y-t)\exp\big[-j2\pi(ux+vy)\big]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\
=&\int_{\mathcal{S}}\int_{\mathcal{T}} f(s,t)H(u,v)\exp\big[-j2\pi(us+vt)\big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\
=&F(u,v)H(u,v)
\end{aligned}$$

其中第三行应用了“时域平移性质”。

Proof of $f(x,y) * h(x,y) \iff F(u,v)H(u,v)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{U}}\int_{\mathcal{V}}\int_{\mathcal{S}}\int_{\mathcal{T}} \frac{1}{4\pi^2}F(s,t)H(u-s,v-t)\exp\big[j2\pi(ux+vy)\big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
=&\int_{\mathcal{S}}\int_{\mathcal{T}} \frac{1}{4\pi^2}F(s,t)\int_{\mathcal{U}}\int_{\mathcal{V}} H(u-s,v-t)\exp\big[j2\pi(ux+vy)\big]\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\
=&\int_{\mathcal{S}}\int_{\mathcal{T}} \frac{1}{2\pi}F(s,t)h(x,y)\exp\big[j2\pi(xs+yt)\big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\
=&f(x,y)h(x,y)
\end{aligned}$$

类似的，我使用了频移性质。

Question 4

(a)

结果为:

0	1/4	0	0	0	0	0
1/4	1/4	1/2	0	0	0	0
1/4	1/2	1/2	1/2	0	0	0
0	1/2	1/2	1/2	1/2	1/4	0
0	0	3/4	3/4	1/2	1/4	1/4
0	1/2	1/2	1/2	1/2	1/4	0
1/4	1/2	1/2	1/2	0	0	0
1/4	1/4	1/2	0	0	0	0
0	1/4	0	0	0	0	0

这里我设置了 padding=2 以保留全部信息。

(b)

容易得到：

$$h = \begin{matrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{matrix} \quad \text{and} \quad H(u,v) = \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{u}{7}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{v}{9}\right)$$

(c)

显然 H 是一个"低通滤波器"，因为原点处幅值响应为 1；此外，中频、高频部分幅值响应小于一，起抑制效果。