Question 1

输入信号 x 有三个主要频率，其中最高频率波包被滤掉；最小频率波包将有延时，同时被放大四倍；中间频率波包无明显延时，将被放大 6 倍。注：根据相位响应，实际上波包内部有平移变化，然而此处无需特别考虑。因此输出信号大致为：

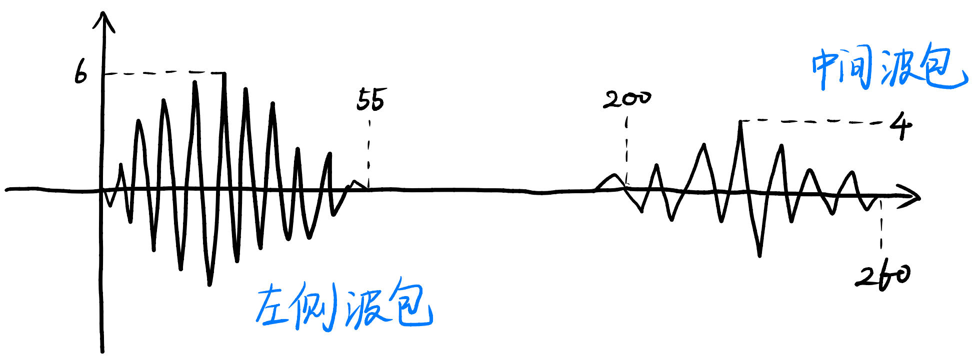

图 1: 问题一输出信号示意图

Question 2

(a)

易知：

$$(1-\frac{5}{4}z^{-1}-\frac{3}{2}z^{-2})Y(z)=(1-z^{-1})X(z).$$

因此差分方程为：

$$y[n]-\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{3}{2}y[n-2]=x[n]-x[n-1].$$

(b)

将 $y[n]$、$x[n]$ 带入上述差分方程：

$$A\cos(\omega n+\phi)-\frac{5}{4}A\cos\left(\omega n+\phi-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{3}{2}A\cos(\omega n+\phi-\pi)=\cos(\omega n)-\cos\left(\omega n-\frac{\pi}{2}\right).$$

进而

$$\text{LHS}=\frac{5\sqrt{5}}{4}\cos\left(\omega n+\phi+\text{atan}\,\frac{1}{2}\right)\quad\text{and}\quad\text{RHS}=\sqrt{2}\cos\left(\omega n+\frac{\pi}{4}\right).$$

对比系数有：

$$A=\frac{4\sqrt{10}}{25},\ \phi=\frac{\pi}{4}-\text{atan}\,\frac{1}{2}.$$

Question 3

（本题求导过程誊写到 TeX 上过于繁琐，故略去）

(a)

$$\phi_a = \operatorname{atan}\left(\frac{b\sin\omega}{a+b\cos\omega}\right) \implies \operatorname{grd} = \frac{ab\cos\omega + b^2}{2ab\cos\omega + a^2 + b^2}.$$

(b)

令上一问中 $a=1$, $b=c$ 便能推出此问结果

$$\phi_b = -\operatorname{atan}\left(\frac{c\sin\omega}{1+c\cos\omega}\right) \implies \operatorname{grd} = -\frac{c\cos\omega + c^2}{2c\cos\omega + 1 + c^2}.$$

(c)

有上两问便可得到：

$$\phi_c = \phi_a + \phi_b \implies \operatorname{grd} = \frac{ab\cos\omega + b^2}{2ab\cos\omega + a^2 + b^2} - \frac{c\cos\omega + c^2}{2c\cos\omega + 1 + c^2}.$$

(d)

应用 (b) 问两次：

$$\operatorname{grd} = -\frac{c\cos\omega + c^2}{2c\cos\omega + 1 + c^2} - \frac{d\cos\omega + d^2}{2d\cos\omega + 1 + d^2}.$$

Question 4

根据单位圆外的零极点分布：

$$H_{ap}(z) = \frac{(z-4)(z-1/3)}{(z-1/4)(z-3)}.$$

进而

$$H_{\min}(z) = \frac{H(z)}{H_{ap}(z)} = A \times \frac{z-1/4}{(z-1/2)(z-1/3)}.$$

不考虑幅值的 $H_{\min}$、H_{ap} 是唯一的，他们各自的零极点图如下：

Question 5

建系解方程即可，设 $|OP| = a$, $|OZ| = b$ 且 $D = (x, y)$：

$$\alpha^2\left[(x-b)^2 + y^2\right] = (x-a)^2 + y^2.$$

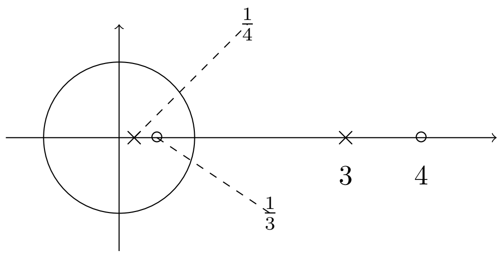

图 2: H_{ap} 零极点图

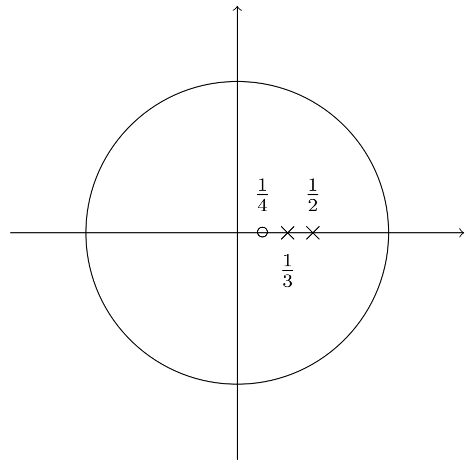

图 3: $H_{\min}$ 零极点图

$y^2 = 1 - x^2$ 代入上式：

$$2(a - \alpha b)x + \alpha^2 + \alpha^2 b^2 - a^2 - 1 = 0.$$

对于任意的 x 成立：

$$\begin{cases} a = \alpha^2 b \\ \alpha^2 + \alpha^2 b^2 - a^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

从而：

$$a = \alpha,\ b = \frac{1}{\alpha} \implies ab = 1.$$