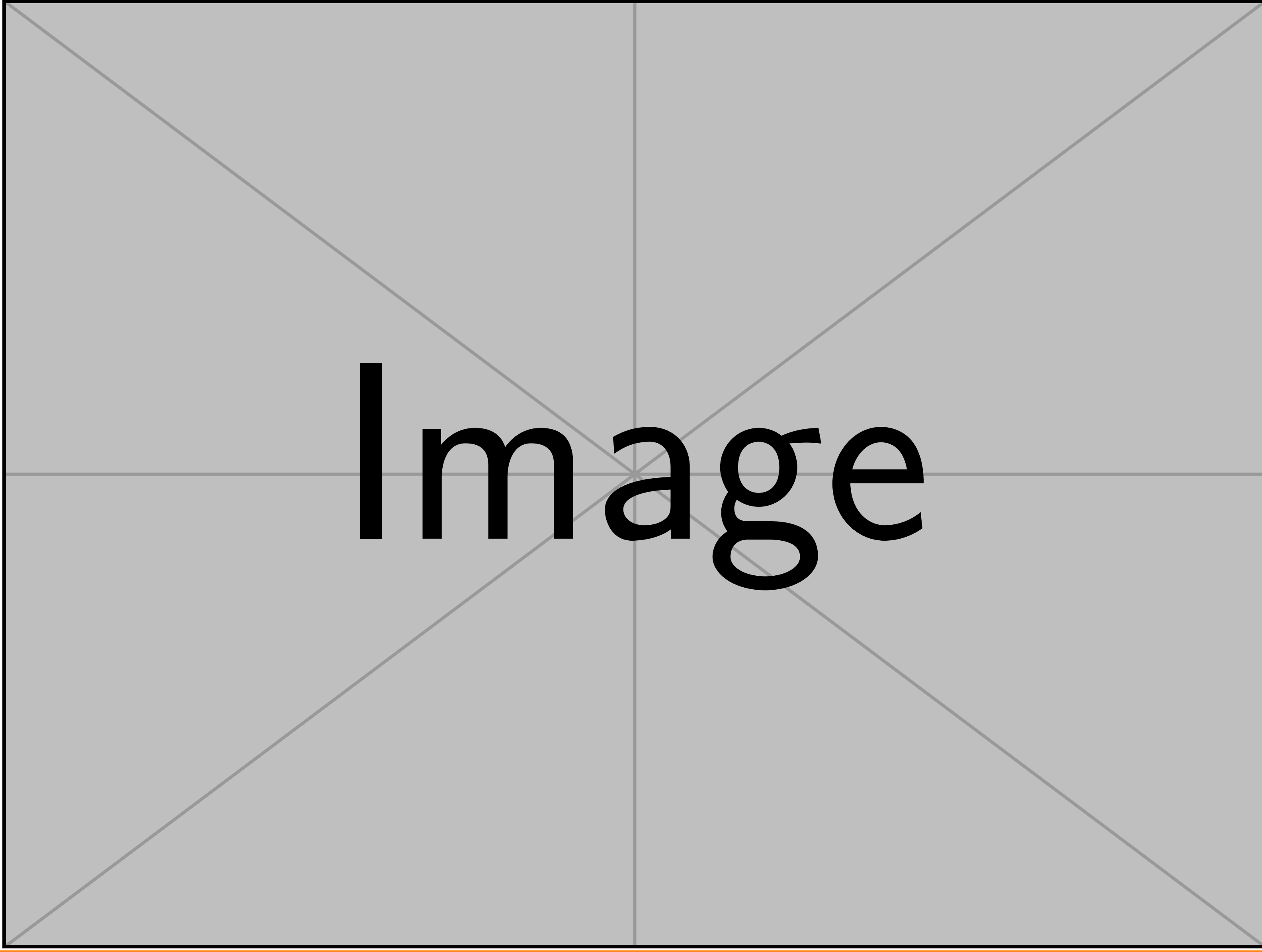

高等数学同步辅导及习题上册

练习题合集及解答

作者：安云野逸

组织：清疏大学

时间：2024.12.11

微信公众号：安云野逸

随遇而安，思维入云，创新狂野，惊才风逸

目录

第 1 章 函数、极限与连续

1.1 函数及其初等性质

练习1.1.1 $\star$ 设函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x, x\neq 0,1$, 求 $f(x)$.
答案 $f(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$.
练习 1.1.2 $\star$ 证明 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,2)$ 内无界
练习 1.1.3 求 $y=f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ 的反函数, 并判断反函数的奇偶性
答案$x=\frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2}$, 偶函数.

1.2 数列极限、函数极限的概念与性质

练习 1.2.1 设 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{(x-a)^2}=-2$. 证明: 在 $x=a$ 的某去心邻域内 $f(x)<1$.

1.3 无穷小与无穷大极限运算准则

练习1.3.1 $\star$ 求 $\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.
答案1.
练习 1.3.2 下列函数中在 $[1,+\infty)$ 内无界的是（）。
(A) $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x^2}$
(B) $f(x)=\sin x^2+\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$
(C) $f(x)=x\cos\sqrt{x}+x^2\mathrm{e}^{-x}$
(D) $f(x)=\frac{\arctan\frac{1}{x}}{x^2}$
答案 (C).
练习1.3.3 设 $f(x)=\frac{\left(x^3-1\right)\sin x}{\left(x^2+1\right)x}, g(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$, 则下列命题正确的个数为 ( ).
(1) 对任意 $X>0, f(x)$ 在 $0<|x|<X$ 内有界, 在 $(-\infty,+\infty)(x\neq 0)$ 内无界.
(2) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)(x\neq 0)$ 内有界.
(3) $g(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内无界, 但 $\lim_{x\to 0}g(x)\neq\infty$.
(4) $\lim_{x\to 0}g(x)=\infty$.
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
答案 (C).
练习1.3.4 $x_n=(\sqrt{n})^{(-1)^n}$, 下列结论中正确的是( ).
(A) x_n 有界
(B) $n\to\infty$ 时， x_n 有极限
(C) x_n 无界
(D) $n\to\infty$ 时， x_n 为无穷大性
答案 (C).
练习 1.3 .5 求下列极限：
(1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{3/x}}+\frac{\arcsin x}{\sqrt{x^2}}\right)$;
(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$;
(3) $\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+2022}+x\right)$.

答案（1） 1；（2） $\begin{cases} 1+x, & |x|<1, \\ 1, & x=1, \\ 0, & x=-1, \\ 0, & |x|>1; \end{cases}$ (3) -1011 .

1.4 极限存在准则

练习 1.4.1求下列极限：

（1）$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$；

（2）$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\pi^n+\left(\frac{22}{7}\right)^n+\left(\frac{355}{113}\right)^n}$.

答案 (1) 4; (2) $\frac{22}{7}$.

练习 1.4.2 求下列极限:

（1）$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$;

（2）$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$;

（3） $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}$.

答案(1) $\frac{3}{2}$; (2) 2，$\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$ 共 $2n+2$ 项; (3) 1，根据 $n^k<n^k+1<(n+1)^k$ 进行放缩.

练习 1.4.3*设 $a>0, x_1>0$，定义 $x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right), n=1,2,\cdots$，求 $\lim_{n\to\infty}x_n$。

提示本题为上例的拓展。可先利用下列均值不等式证明 $\{x_n\}$ 有下界。 $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt[4]{a}$。

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)\geq 4\sqrt[4]{x_n\cdot x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n^3}}=\sqrt[4]{a}.$$

练习 1.4.4设 $a_n=\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}$（$n$重），证明：$\{a_n\}$ 收敛，并求 $\lim_{n\to\infty}a_n$。

答案 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$。

练习 1.4.5设 $x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2\sqrt{2}},\cdots,x_n=\sqrt{2\sqrt{2}\cdots\sqrt{2}}$（$n$个$\sqrt{2}$），证明 x_n 的极限存在，并求 $\lim_{n\to\infty}x_n$。

答案$\lim_{n\to\infty}x_n=2$。

练习 1.4.6对两个初值 $a_1=\frac{1}{2},1$，$a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n}{1+a_n}}\,(n\geq 1)$，证明：$\{a_n\}$ 收敛并求其极限。

答案$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

练习 1.4.7 计算下列极限:（1）$\lim_{x\to 0}\left(e^{2x}+\sin x\right)^{\tan x}$;（2）$\lim_{x\to 0}(2^x+x)^{\arcsin 2x}$;（3）$\lim_{x\to 0}\left(1-2x^2\right)^{1-\sqrt{1-x^2}}$;（4）$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\,(a>0,b>0)$;（5）$\lim_{n\to\infty}\left[1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right]^n$.

答案（1）e^3;（2）$\sqrt{2e}$;（3）e^{-4};（4）$\sqrt{ab}$;（5）e^4, 参照例 1.3.1.

练习 1.4.8设 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+f(x)]}{\sin x}=A\,(a>0,a\neq 1)$，求 $\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$。

答案a^A。

1.5 无穷小的比较与等价无穷小代换

练习 1.5.1设 $x\to 0$ 时，$ax^2+bx+c-\cos x$ 是 x^2 的高阶无穷小，求常数 a,b,c。

答案$a=-\frac{1}{2}, b=0.$

练习 1.5.2设 $x\to 0$ 时，$e^{x\cos x^2}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=()$。

(A) 5

(B) 4

(C) $\frac{5}{2}$

(D) 2

答案（A）

练习 1.5.3设 $x\to 0$ 时，$\ln(\cos ax)\sim -2x^b\ (a>0)$，则 $a=$__，$b=$__。

答案$a=2, b=2.$

练习 1.5.4*当 $x\to 0$ 时，$(3+2\tan x)^x-3^x$ 是 $3\sin^2 x+x^3\cos\frac{1}{x}$ 的( ). (A)高阶无穷小

(B)]低阶无穷小

(C)等价无穷小

(D)同阶非等价无穷小

答案（D）

练习 1.5.5*求下列极限：

（1） $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$;

（2） $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\arctan^2 x}$;

（3） $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$;

（4） $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{2x}+x)}{x}$;

（5） $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

答案（1） $\frac{1}{2}$;（2） $\frac{3}{2}$;（3） $\frac{2}{\pi}$;（4） 3;（5） $\frac{4}{3}$.

练习 1.5.6*求下列极限：

（1） $\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\pi x}{(x-1)\ln x}$;

（2） $\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$;

（3） $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1+2x}{1-2x}}\cdots\sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arctan x-(x^2+1)\arctan^3 x}$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$.

答案（1） π^2;（2） $\frac{1}{n!}$;（3） $\frac{n}{3\pi}$，分母提取后代换，分子化 e 后分别代换.

练习1.5.7*已知 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}+cx+d\right)=0$，试确定 a,b,c,d 之间的关系.

答案 $a+2d=0, c=-1, b, d$ 任意.

1.6 函数连续的概念与连续函数的性质

练习 1.6.1 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{\arctan x}+a, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^{2x}-1}-b, & -1\le x<0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，求常数 a,b。

答案$a=-1, b=\frac{1}{2}.$

练习 1.6.2 若函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{ax}, & x>0,\\ b, & x\le 0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则 ( ).

(A) $ab=\frac{1}{2}$

(B) $ab=-\frac{1}{2}$

(C) $ab=0$

(D) $ab=2$

答案 (B).

练习 1.6.3 设 $f(x)$ 连续，$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$.

答案 2.

练习 1.6.4 讨论 $y=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$ 的连续性.

答案 y 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

练习 1.6.5 试证明方程 $x-a\sin x=b$ 至少存在一正根 $\xi\in(0,a+b]$，其中常数 a,b 满足 $0<a<1$，$b>0$。

练习 1.6.6 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)+2f(1)+3f(2)=6$。证明：存在 $c\in[0,2]$，使得 $f(c)=1$。

练习 1.6.7 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 $[x_1,x_n]$ 上必存在 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

1.7 间断点及分类

练习1.7.1设 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+e^{n(1-x)}}{2+e^{n(1-x)}}$，求 $f(x)$ 及其间断点，并判断其类型。

答案$x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点。

练习 1.7.2 求 $f(x)=e^{\tan x}$ 的间断点及类型。

答案 $x=0$ 为可去间断点；$x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z},k\neq 0)$ 为无穷间断点；$x=k\pi+\frac{\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$ 为可去间断点。

练习 1.7.3 ⋆求

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x(x+2)}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \frac{x}{x^2-1}, & x\geq 0\end{cases}$$

的间断点，并对其进行分类。

答案 $x=-2$ 为可去间断点；$x=k\,(k=-1,-3,-4,\ldots)$ 为无穷间断点；$x=1$ 为无穷间断点；$x=0$ 为跳跃间断点。

练习 1.7.4 设函数 $f(x)=\frac{1}{x(e^{x-1}-1)}$，则 ( ).

(A) $x=0,1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0,1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

答案 $x=0$ 为第二类无穷间断点；$x=1$ 为第一类跳跃间断点.

练习 1.7.5* 求 $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{\ln|x|}{x^2-1}$ 的间断点并判断类型。

答案 $x=0$ 为无穷间断点；$x=\pm 1$ 为可去间断点；$x=2$ 为无穷间断点。

第 2 章 一元函数分析学

2.1 导数的概念

练习 2.1.1 设 $f'(x_0)$ 存在，求 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\alpha\Delta x)-f(x_0-\beta\Delta x)}{\Delta x}$.
答案 $(\alpha+\beta)f'(x_0)$.
练习 2.1.2 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{\sin x}=1$，求 $f'(0)$.
答案 $f'(0)=1$.

2.2 导数的运算法则

2.3 隐函数、由参数方程确定的函数的导数

2.4 函数的微分

第 3 章 微分中值定理与导数的应用

3.1 微分中值定理

练习 3.1.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$。证明：

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$；

(2) 存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\eta)=2\eta f(\eta)$。

练习 3.1.2* 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(2)=2, f(1)=\frac{1}{2}$。证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$。

3.2 洛必达法则与未定式极限

3.3 泰勒公式

3.4 函数的单调性及应用

3.5 函数的极值与最值

3.6 曲线的凹凸性与拐点

3.7 函数性态的描述与函数零点问题

3.8 曲率

第 4 章 一元函数积分学

4.1 定积分的概念与性质

练习 4.1.1 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)$.

答案 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

练习 4.1.2* 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

答案 $\frac{1}{4}$.

4.2 变上限积分函数及其导数

4.3 积分的计算

4.4 定积分的特定结论及综合题目与证明题

4.5 反常积分

4.6 分部积分的快速积分法

第 5 章 定积分的应用

5.1 平面图形的面积

练习 5.1.1 曲线 $y = -x^3 + x^2 + 2x$ 与 x 轴所围成图形的面积 $A =$ ____________.

答案 $\frac{37}{12}$.

5.2 体积

5.3 平面曲线的弧长旋转体的侧面积

5.4 定积分的物理应用

第 6 章 常微分方程

6.1 一阶微分方程及其应用

练习 6.1.1 求下列微分方程的通解：

(1) $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$;

(2) $y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$;

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)^2}$.

答案

(1) $\arctan y = x + \frac{1}{2}x^2 + C$;

(2) $\ln\left|\csc\frac{y}{2} - \cot\frac{y}{2}\right| + 2\sin\frac{x}{2} = C$;

(3) $y - \arctan(x+y) = C$.

6.2 可降阶的二阶微分方程及其应用

6.3 二阶线性微分方程及其应用

习题个人解答